ÉVFOLYAM **VIII** 2005
Volume

GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK

Publications in Geomatics

SZERKESZTŐ **ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G**
Editor

Geomatikai Továbbképző Szeminárium
Budapest, 2003. november 20.

HU ISSN 1419-6492

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, SOPRON

Geomatikai Közlemények

Publications in Geomatics

kiadja a

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.
tel.: 99 - 508-340 fax.: 99 - 508-355
E-mail: geomatika@ggki.hu

feleelős kiadó:

Závoti József
igazgató

szerkesztő:

Závoti József, Bányai László és Papp Gábor

technikai szerkesztő:

AnKa

készült a
LŐVÉR PRINT Kft. nyomdájában
9400 Sopron, Ady Endre u. 5.
tel.: 99 - 329-977

megjelent 150 példányban
Sopron, 2005

HU ISSN 1419-6492

GEOMATIKAI
TOVÁBBKÉPZŐ SZEMINÁRIUM

Sopron, 2004. október 28-29.

szervezte:

MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet

Szervező bizottság:

Závoti József zavoti@ggki.hu

Papp Gábor papp@ggki.hu

Bányai László banyai@ggki.hu

TARTALOMJEGYZÉK

Geomatematika

Biró Péter 5
A vonatkoztatási rendszerek és a geodéziai dátum
On the concepts of reference systems and geodetic datum

Somogyi József 13
Geometriai algebra: A XXI. század matematikusainak, fizikusainak és mérnökeinek új egységes matematikai nyelve
Geometric algebra: A new unified mathematical language for physicists and engineers in the XXI-st century

Karsay Ferenc, Kádár István 21
Gráfelmélet és kombinatorika hálózatokhoz és térképekhez
Graph theory and combinatorics for geodetical networks and maps

Kalmár János 37
Digitális felületmodell nagypontosságú reprezentációja csökkentett adatponthalmazzal
The author presents an algorithm for reduction of data points of Digital Surface Models

Varga József 45
Volt-e Ivanicsi (Ivaniči) sztereografikus vetület?
Was there an Ivanič stereographic projection?

Koordináta transzformációk

Závoti József 53
A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása
The closed form solution of 7 parameter 3D transformation

Bácsatyai László 61
Az erdészeti térképek Dátumtranszformációs kérdései
Datum transformation problems of the forestry maps

Bányai László 69
Koordinátatranszformáció geoidundulációk becslésével
Coordinate transformation with the estimation of geoid undulations

Zaletnyik Piroska 77
Internetes alkalmazás koordináta transzformációra neurális hálózatok alkalmazásával
Web-based application for coordinate transformation using neural networks

Papp Erik, Szűcs László 85
Földi és műholdas hálózatok transzformációja
Transformation Methodes of the Traditional and Satellite Based Networks

GNSS - GPS

Szentpéteri László 93
Az EUPOS magyarországi bevezetésének néhány szakmapolitikai kérdése
Some functional questions on EUPOS introduction to Hungary

Kratochvilla Krisztina 99
A budapesti EGNOS monitorállomáson végzett mérések vizsgálata
Analysis of observations at the EGNOS monitor station in Budapest

Busics György 107
Alappontmeghatározás RTK-val
Position-fixing of control points with RTK GPS

Rózsa Szabolcs 115
Abszolút antennakalibrálási adatok felhasználása geodinamikai hálózatokban
Absolute antenna calibration in geodynamic networks

Horváth Tamás 123
Javított valós idejű helymeghatározás interneten keresztül
Enhanced real-time positioning via the Internet

Takács Bence 135
Az Erzsébet híd mozgásvizsgálata GPS-technikával
Deformation analysis of the Erzsébet Bridge using GPS technique

Gyakorlati alkalmazások I.

Mentes Gyula 143
A soproni Kecske templom mozgásvizsgálata folyamatos dőlésméréssel
Investigation of the movements of the church Kecske by continuous tilt measurements in Sopron

Eperné Pápai Ildikó 151
Az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet extenzométerekkel végzett vizsgálatai
Extensometric measurements carried out by the Geodetic and Geophysical Research Institute of the Hungarian academy of Sciences

Szöcs Vilma Éva 159
Dunaföldvári földcsuszamlások mechanizmusának tanulmányozása a geodéziai mozgásviszgálati mérések értelmezése céljából
Studying landslide mechanism of Dunaföldvár in order to interpret geodetic movement measurements

Gregori Ákos, Szűcs László 167
Geodéziai módszerek egyiptomban a Bir-Minihi ásatáson
Surveying Methodes At The Excavation Of Bir-Minih In Egypt

Nehézségi erőtér

Völgyesi Lajos 175
A nehézségi erőtérrel kapcsolatos fizikai alapfogalmak áttekintése
Review of technical terms used in gravity field interpretation

Völgyesi Lajos 181
A nehézségi erőtér időbeli változása
Time variation of gravity field

Csapó Géza, Völgyesi Lajos 193
Geodéziai és geofizikai módszerek együttes alkalmazása a nehézségi erőtér időbeli változásainak vizsgálatára
Application of geodetic and geophysical methods for examination of time variation of gravity

Benedek Judit, Papp Gábor 201
Graviméteres mérések kiértékelése műszervizsgálat céljából
Evaluation of gravity measurements for instrument investigation

Tóth Gyula, Merényi László 209
Eötvös-inga mérési adatok felhasználása gravitációs térképek szerkesztéséhez
Torsion balance measurement data for gravity map improvement

Tóth Gyula, Völgyesi Lajos 217
Adatvizsgálat predikcióval magyarországi Eötvös-inga mérések felhasználásával
Investigation of Hungarian torsion balance measurements by prediction

Dobróka Mihály, Völgyesi Lajos 223
A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján
Inversion reconstruction of gravity potential based on torsion balance measurements

Papp Gábor, Benedek Judit 231
Gravitációs inverzió alkalmazása a geoid vizsgálatában
Application of gravity inversion for the investigation of the geoid

Gyakorlati alkalmazások II.

Bácsatyai László, Kovács Gyula, Bányai László 239
Geodéziai referenciaadatok szolgáltatása légi lézerszkenner felvételek feldolgozásához
Supplying of geodetic reference data for airborne laser scanning

Márkus István, Király Géza 247
Digitális domborzatmodell előállítása légi lézerszkenner felvételekből tájökológiai és természetvédelmi kutatások céljára
Production of High-Resolution Digital Elevation Model (DEM) by Means of Aerial Laser-scanning for Research on Landscape-Ecology and Nature Conservation

Király Géza, Náhlik András 257
Szarvasok GPS telemetriás mérése és az adatok térinformatikai feldolgozása az élőhely-használat vizsgálatához
GPS Telemetry of Red Deer and GIS Analysis of the Data for Home Ranges

Gyimóthy Attila 265
GPS mérések optimális időtartama erdővel fedett területeken
Optimal duration of GPS measurements under forest canopy

Térinformatika, Fotogrammetria, Távérzékelés

Sárközy Ferenc 271
Optimalizálás és GIS
Optimization and GIS

Tóth Zoltán, Mélykúti Gábor, Barsi Árpád 297
Digitális videokamera kalibrációja
Digital video camera calibration

Lovas Tamás, Barsi Árpád 303
Lehetőségek a Földi lézeres felmérésben
Potential of Terrestrial Laser scanning

Kugler Zsófia, Barsi Árpád 309
Kataszrófavédelem a térinformatika és távérzékelés segítségével
Disaster management with GIS and remote sensing
Gribovszki Katalin, Szeidovitz Győző 315
A földrengések Geo-környezetének tanulmányozása térinformatikai eszközökkel
The investigation of earthquakes' occurrences by using GIS tools

Jean-Marie De Koninck, Florian Luca 327
Economical Numbers

A VONATKOZTATÁSI RENDSZEREK ÉS A GEODÉZIAI DÁTUM

Biró Péter[*]

On the concepts of reference systems and geodetic datum *- In the recent decades these concepts have been developed in content in the resolutions and reports of IAG and IUGG, in the literature of geodesy as well. Sometimes different authors use them in different meaning. It will be needed to develop an up to date, uniform terminology in our native language, in Hungarian.*

Keywords: reference system, reference frame, geodetic reference system, geodetic datum

A címben foglalt fogalmak az utóbbi évtizedekben az IAG és az IUGG ajánlásaiban, közleményeiben, valamint a nemzetközi szakirodalomban jelentős tartami átalakuláson mentek keresztül. A különböző szerzők néha eltérő értelemben használják őket. Időszerűnek látszik nemzeti szaknyelvünkben is ezeknek korszerű, egységes értelmezését kialakítani.

Kulcsszavak: vonatkoztatási rendszer, geodéziai vonatkoztatási rendszer, geodéziai dátum

Bevezetés

Szaktudományunk és a méréstechnika fejlődésével, a kozmikus geodéziai módszerek (mesterséges holdas helymeghatározások, VLBI-technika, stb) egyre szélesebbkörű alkalmazásával a címben foglalt fogalmaink az utóbbi néhány évtizedben jelentős tartalmi átalakuláson mentek keresztül. Így nem meglepő, hogy geodéziai szakirodalmunk különböző időkben megjelent műveiben a különböző szerzők (de esetleg még ugyanazon szerző is) ezeket a fogalmakat kissé eltérő értelmezésben használták/használják. Ez, természetesen, – különösen azok számára, akik felsőfokú tanulmányaikat már korábban végezték – nehezíti a szakirodalom felhasználását. Ezért időszerűnek tartjuk ezen fogalmaink újragondolását, pontosítását, és megkísérelni korszerű, egységes értelmezésüket kialakítani szakirodalmunk számára.

Vonatkoztatási rendszer

A fogalomnak többféle értelmezése alakult ki még a geodézián belül is. Őket alapvetően a fizika *vonatkoztatási rendszer* fogalmából származtathatjuk.

A fizikában a vonatkoztatási rendszer *azon anyagi testek összessége, amelyhez a testek mozgását viszonyítjuk.* Az anyagi rendszerek térben és időben léteznek, ezért a vonatkoztatási rendszert ki kell egészíteni az időmérés lehetőségével. A vonatkoztatási rendszerhez rendszerint valamilyen koordináta-rendszert rögzítenek.

A geodéziában a viszonyítás alapját képező anyagi testek pontszerűnek látszó távoli csillagok, rádióforrások (kvazárok), vagy a földfelszínen megjelölt geodéziai alappontok, így mi, ebben a viszonylatban inkább *anyagi pontokról* beszélünk. A másik sajátosság, hogy mi ezekhez a pontokhoz nem „rendszerint", hanem mindig valamilyen koordináta-rendszert rögzítünk, amelyben a meghatározandó pontjaink helyzetét, mozgását megadjuk.

A geodéziában a vonatkoztatási rendszert alapvetően kétféle értelmezésben használjuk. (Egészen más, harmadik fajta értelmezése van akkor, ha *geodéziai vonatkoztatási rendszer* összetételben használjuk, de ezt külön cím alatt tárgyaljuk.)

A geodéziában fizikai és geometriai értelemben a vonatkoztatási rendszer *azon anyagi pontok összessége és a hozzájuk rögzített koordináta-rendszer, amelyhez a testek (pontok) helyzetét és ennek megváltozását (mozgását) viszonyítjuk.* Tágabb értelemben a vonatkoztatási rendszer fogalmába beleérthetjük a helymeghatározásainkban szerepet játszó *időrendszert és fizikai állandók* rögzített értéksorát is.

BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék, 1521 Budapest
E-mail: peter.biró@freemail.hu

A helymeghatározásban a szerint, hogy a viszonyítás alapját képező anyagi testeket (anyagi pontokat) hol választjuk, különböző vonatkoztatási rendszereket használunk.

Égi vonatkoztatási rendszer

Ennek baricentrikus égi térbeli derékszögű koordináta-rendszerét égi pontokhoz (távoli csillagokhoz, rádióforrásokhoz) kapcsoljuk. Gyakorlatilag inercia-rendszer.

Korábbi megvalósulása az 1535 alapcsillag FK5 katalógusban t_o kezdeti időpontra (epochára) vonatkozó koordinátái és az általuk kijelölt tengelyirányok.

Jelenlegi megvalósulása a *Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Rendszer (ICRS).* Koordinátarendszerének alapirányait a mintegy 600 távoli rádióforrás (kvazár) egyezményesen rögzített koordinátái jelölik ki. Ez utóbbiak a *Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Keretpontok (ICRF),* amelyek a viszonyítás alapjául szolgáló anyagi pontok szerepét töltik be (*Ma et al.1997*).

Jövőbeni megvalósulása az IAU 2000. és az IUGG 2004. évi közgyűlése által elfogadott legújabb égi vonatkoztatási rendszer.

Gyakorlati munkánkban használjuk még a *közepes* és a *valódi égi egyenlítői* koordinátarendszert, amelyeknek tengelyirányait a Föld közepes, ill. valódi forgástengelyének az ICRS koordináta-rendszerében a t_o kezdő, ill. a t mérési időpontra – a megfelelő precessziós és nutációs modellel – számított iránya jelöli ki. Ilyen értelemben ezek is az ICRS koordináta-rendszerei. A baricentrikus elhelyezés mellett geocentrikus helyzetbe tolva is kiterjedten használjuk.

Az égi vonatkoztatási rendszerben a 4. dimenzió alapja a *Nemzetközi Atomidő (TAI).*

Az égi vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszereit *égi pontok helyzetének, irányának* megadására használjuk. Az utóbbi esetben az égi pontok (csillagok, zenitpont) távolságát egységnyinek tekintjük, és a rájuk mutató egységvektor derékszögű összetevőit (az iránykoszinuszokat), vagy egymásra merőleges síkú két szöget (a gömbi koordinátákat) használjuk. Az égi vonatkoztatási rendszer gyakorlatilag inercia-rendszer, így a mesterséges holdak pályáját is ebben számítjuk. Pillanatnyi (számított) helyzetüket helyvektorukkal (vagy ennek derékszögű összetevőivel) adjuk meg.

Földi vonatkoztatási rendszer

Az egész Föld felszínén minél egyenletesebb eloszlásban kijelölt anyagi pontok, geodéziai fő alappontok együttese és a hozzájuk kapcsolt (így a Földhöz (lehetőségig) kötött, vele együttforgó) geocentrikus koordináta-rendszer, a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer.

Korábbi megvalósulása az *Egyezményes Földi Rendszer (CTS),* vagy más nevén *CIO-BIH rendszer*. Koordináta-rendszerének alapirányait a *Nemzetközi Pólusmozgás Szolgálat (IPMS)* mintegy 50 földfelszíni csillagászati-geodéziai alappontjának egyezményesen rögzített (elfogadott) koordinátái jelölik ki (*Ádám, l982*).

Jelenlegi megvalósulása a *Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszer (ITRS)*. Bevezetésekor koordináta-rendszerének alapirányait és kezdőpontjának (a Föld tömegközéppontjával azonos origójának) helyzetét a *Nemzetközi Földforgás és Vonatkoztatási Rendszerek Szolgálat (IERS)* mintegy 550 földfelszíni csillagászati-geodéziai alappontjának (*ITRF)* egyezményesen rögzített (elfogadott) koordinátái határozták meg. Az ITRF vonatkoztatási keretpontok száma mára már több mint 800 (*Biró 2002, http://www.agt.bme.hu/tantargyak/felso_geodezia.html*).

A földi vonatkoztatási rendszernek a szatellita-geodézia (GPS) által használt megvalósulása a *Geodéziai Világrendszer WGS84* változata. Koordináta-rendszerének alapirányait és kezdőpontjának (a Föld tömegközéppontjával azonos origójának) helyzetét a GPS követőállomások rögzített koordinátái jelölik ki (*Ádám et al. 2004*). A WGS84 rendszerben meghatározott koordináták – a meghatározás megbízhatóságát figyelembe véve – gyakorlatilag ITRS koordinátáknak tekinthetők.

Megjegyezzük, hogy más égitestekhez is lehet a helymeghatározási feladatok megoldásához, a földihez hasonló módon vonatkoztatási rendszert alkotni.

Helyi vonatkoztatási rendszerek

Ezek a koordináta-rendszerét a földfelszín kisebb-nagyobb darabjain (ország, szomszédos országok, földrész területén) kijelölt anyagi pontokhoz, egyes geodéziai alaphálózati pontokhoz kapcsoljuk.

Koordináta-tengelyeik (gyakorlatilag a mérési megbízhatóságon belül) párhuzamosak a földi vonatkoztatási rendszer valamelyik megvalósulása koordináta-rendszerének alapirányaival, de kezdőpontjuk (origójuk) nem esik egybe a Föld tömegközéppontjával, azaz nem geocentrikus, hanem valamilyen általános (eltolt) helyzetű. A koordináta-rendszer Földhöz viszonyított elhelyezését a kijelölt földfelszíni pontok valamilyen célszerűséggel megválasztott koordinátái határozzák meg (→geodéziai dátum).

Ilyen, pl. az európai országoknak az európai táblán kijelölt földfelszíni pontokhoz kapcsolódó közös vonatkoztatási rendszere, az *Európai Földi Vonatkoztatási Rendszer (ETRS)*. Koordináta-rendszerének térbeli helyzetét az *Európai Vonatkoztatási Keretpontok (ETRF)* megválasztott koordinátái és mozgássebessége határozza meg. Ez a rendszer bevezetésekor (1989-ben) azonos volt az ITRS-sel, de az óta, az európai tábla mozgásával ettől kissé eltolódott (*Ádám et al., 2000*).

Másik példa a **HD72** vonatkoztatási rendszer. Koordináta-rendszerének térbeli elhelyezkedését a magyarországi geodéziai alaphálózat csillagászati-geodéziai pontjainak ebben a koordináta-rendszerben megválasztott koordinátái szabják meg (*Ádám, 2003*).

A földi és a helyi vonatkoztatási rendszerek koordináta-rendszereit alapvetően földi és földközeli pontok helyének megadására használjuk. A helymeghatározó adatok lehetnek helyvektorok (derékszögű összetevőik), vagy célszerűen választott felületi koordináták. Ez utóbbi esetben a koordináta-rendszer tengelyeire forgási ellipszoidot (vonatkoztatási ellipszoid), gömböt, vagy (a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer esetében) a nehézségi erőtér szintfelületeit illesztjük. A rájuk vonatkozó felületi koordinátákat ellipszoidi, gömbi, ill. szintfelületi földrajzi koordinátáknak nevezzük.

Az *égi (csillagászati)* és a *földi* vonatkoztatási rendszerek megvalósítása és ennek folyamatos fenntartása, pontosítása („karbantartása"), valamint a koordináta-rendszereik közötti geometriai kapcsolat biztosítása a *Nemzetközi Földforgás és Vonatkoztatási Rendszerek Szolgálat (IERS)* alapfeladata. A földtest és a hozzá rögzített koordináta-rendszer alapirányainak és a forgástengelynek egymáshoz viszonyított helyzetét a *földforgás paraméterek (ERP)* együttese (a póluskoordináták, a forgási sebesség, a nap hossza és az alap időrendszerek közötti különbség) határozza meg. A forgástengelynek az égi rendszerbeni pillanatnyi helyzetét a precessziós és nutációs modell írja le. Ez és a földforgás paraméterek együttesen adják a *Föld tájékozási paramétereit (EOP).* Ezeket a Szolgálat folyamatosan meghatározza, és szolgáltatja (*Biró http://www.agt.bme.hu/tantargyak/kozmikus-geodezia/kozm-geod-jegyz.doc*).

A *földi* és az egyes *helyi* vonatkoztatási rendszerek koordináta-rendszerei közötti kapcsolat (más szóval a helyi rendszer, a földihez viszonyított *elhelyezési adatainak* és a rendszerek közötti koordináta-átszámítás transzformációs paramétereinek) meghatározása az érdekelt nemzeti, ill. nemzetközi geodéziai szervezetek, szolgálatok feladata.

Hangsúlyozzuk, hogy a vonatkoztatási rendszernek ez az eddigi (fizikai és geometriai) értelmezése alapvetően – végső soron a viszonyítás alapjául szolgáló – *anyagi pontok halmazát* és a helymeghatározó adatok számítására szolgáló, *hozzájuk kapcsolt koordináta-rendszert jelenti*. A koordináta-rendszer térbeli elhelyezését az anyagi pontok és egyezményesen rögzített koordinátáik *fizikai és geometriai* értelemben megvalósítják. Az eddigi értelemben vett vonatkoztatási rendszerek (általában) nem tartalmaznak adatokat a →*Föld normálalakjára* (a vonatkoztatási ellipszoidra) és →*normál nehézségi erőterére.* (Ebben kivétel a WGS84, amely – további más adatok mellett – e két utóbbit is magába foglalja.)

A vonatkoztatási rendszernek ezt az eddigi értelmezését többnyire a geodézia (és a csillagászat) világszervezeteinek (IUGG, IAG, IAU), régionális és helyi (nemzeti) szervezeteinek, szolgálatainak alapdokumentumaiban, határozataiban, ajánlásaiban, feladatleírásaiban, stb. használjuk. Így, pl. a rendszer leírása, vagy a rendszer fenntartásával kapcsolatos feladatok megfogalmazása, amibe beletartozik a rendszer fizikai megvalósulását jelentő anyagi pontok (a koordináta-rendszer térbeli helyzetét meghatározó) koordinátáinak, a vonatkoztatási rendszerek kapcsolatát biztosító mennyiségeknek, stb. folyamatos, egyre nagyobb megbízhatóságú újra meghatározása.

A napi geodéziai gyakorlatban és a hozzá kapcsolódó szaknyelvben használatos a *vonatkoztatási rendszer* fogalomnak szűkebb értelmezése is. Gyakran, tisztán *geometriai értelemben,* vonatkoztatási rendszernek nevezzük valamely (eddigi értelemben vett) vonatkoztatási rendszernek csak magát a *koordináta-rendszerét.* Ez a leszűkített értelmezés akkor lehet indokolt, amikor a teljes értelemben vett vonatkoztatási rendszernek a koordináta-rendszeren kívüli, más elemei az adott kérdésben nem játszanak szerepet.

Mivel a napi helymeghatározási gyakorlatban általában ez a helyzet, még ennél is általánosabban, *helymeghatározó adatok viszonyítási alapjaként szolgáló bármely koordináta-rendszert* is gyakran vonatkoztatási rendszernek mondunk. Gyakorlatilag a *koordináta-rendszert* és a *vonatkoztatási rendszert* szinonimaként, azonos értelemben használjuk (jóllehet az előbbi elvont, *tisztán geometriai* fogalom, míg az utóbbi a koordináta-rendszernek, mint láttuk, valamilyen *fizikai* kötődését is érzékelteti).

A *vonatkoztatási rendszert* a magyar nyelvben sokszor „*vonatkozási rendszernek"* mondjuk. (A hazai geodéziai szakirodalomban mindkettő elterjedt.)

Ide sorolhatjuk azt az esetet is, amikor a geodéziában a *földi nehézségi erőtérhez kapcsolódó vonatkoztatási rendszerről* (gravity field related reference system, vagy Schwerefeld bezogenes Bezugssystem) beszélünk. Ez, gyakorlatilag az álláspontunk *helyi szintfelületi koordináta-rendszere* (vagy más néven *horizonti koordináta-rendszer*), amelynek alapiránya és alapsíkja a helyi függőleges irány és a helyi vízszintes sík.

Geodéziai vonatkoztatási rendszer

A vonatkoztatási rendszer eddig tárgyalt értelmezéseitől eltérően, a „geodéziai" jelzővel kiegészített alak egészen más tartalmat kapott az utóbbi évtizedek geodéziai szakirodalmában. E szerint a *geodéziai vonatkoztatási rendszer valamely kiválasztott →geodéziai földmodell meghatározó mennyiségeinek nemzetközileg elfogadott és ajánlott értéksorozata, mely viszonyítási alap a Föld geometriájának és fizikai erőterének meghatározásához* (pl. GRS80, WGS84). Tartalmazza a vonatkoztatási ellipszoid méretét, alakját (*a, f)* és a normál nehézségi erőtér jellemző mennyiségeit (*ω, kM, γ_e, β, J_n**, stb.), vagy közülük olyan négyet (*Stokes*-féle elemek, pl. *a, ω, kM* és J_2), amelyekből az összes többi kiszámítható (*Torge 2001, 2003*).

A geodéziai földmodell és a benne szereplő további fogalmak értelmezése a következő.

***Geodéziai földmodell*:** a Föld *→normálalakja* és *→normál nehézségi erőtere* együttesen.

***A Föld normálalakja*:** a *→normál nehézségi erőtérnek* a geoidot megközelítő szintfelülete, amely forgási és egyenlítői szimmetriás (általában *szintellipszoid*), a Föld tömegével egyenlő tömeget zár magába.

A Föld normál nehézségi erőtere: a Föld (valódi) nehézségi erőterét megközelítő, forgási és egyenlítői szimmetriás, szabályos eloszlású erőtér. A jelenlegi gyakorlatban a Föld tömegével egyenlő nagyságú és a Földével megegyező szögsebességgel forgó tömeg által keltett erőtér, amelynek a geoidot megközelítő ellipszoid alakú szintfelülete (szintellipszoidja) egyben a forrását képező tömeg határoló felülete (a *Föld normálalakja*).

A geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározó geometriai és fizikai mennyiségeit a mai gyakorlatban a *szintellipszoid elmélete* kapcsolja össze.

Ez implicit módon magába foglalja azt az egyetlen fizikai pontot, a *Föld tömegközéppontját*, amelyhez a szintellipszoidunk által kijelölt koordináta-rendszert az $X_o=Y_o=Z_o \equiv 0$ koordinátákkal kapcsoljuk. Szintellipszoidunk kistengelyét, amely koordináta-rendszerünk alapiránya, a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulásának) Z tengelyére illesztjük. Így, tehát *a geodéziai vonatkoztatási rendszerhez – a szintellipszoid elméletében foglalt feltételeknek megfelelően – a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik megvalósulása) tartozik.*

Példaként a **GRS80** geodéziai vonatkoztatási rendszer meghatározó mennyiségeinek értéksora:

kiinduló adatok

$kM = 3{,}986\,005 \cdot 10^{14}$ Nm^2/kg (vagy m^{3}s^{-2}),
$\omega = 7{,}292\,115 \cdot 10^{-11}$s^{-1},
$J_2 = 1082{,}63 \cdot 10^{-6}$ és
$a = 6\,378\,137$ m.

a belőlük levezetett további jellemzők :

$1/f = 298{,}257\,222\,101$
$\gamma_e = 9{,}780\,326\,7715$ N/kg (vagy ms^{-2})
$\beta = 0{,}005\,302$
$U_0 = 6{,}263\,686\,850 \cdot 10^{-7}$J/kg (vagy m^{2}s^{-2})
$J_2^* \equiv J_{2\,Föld}$ (méréssel meghatározott kiinduló érték)
$J_4^* = -2{,}370\,912\,22 \cdot 10^{-6}$
$\vdots$

Szűkebb, de a napi geodéziai gyakorlat számára sokszor elegendő értelmezésben a geodéziai vonatkoztatási rendszer a *vonatkoztatási ellipszoid* és a normál nehézségi erőtér eloszlását az ellipszoid felszínén leíró *normál nehézségi képlet meghatározó mennyiségeinek (paramétereinek) nemzetközileg elfogadott és ajánlott értéksora.*

Például a **GRS67** jelű geodéziai vonatkoztatási rendszer számértékei:

az *1967-es vonatkoztatási ellipszoid*

$a = 6\,378\,160$ m
$f = 1/\,298{,}247\,164\,27\ldots$

az *1967-es normál nehézségi képlet* állandói

$\gamma = 9{,}780\,318$ N/kg (vagy ms^{-2})
$\beta = 0{,}005\,3024$
$\beta_1 = -0{,}000\,0059$.

A geodéziai vonatkoztatási rendszer vonatkoztatási ellipszoidjának (és természetszerűleg, vele együtt, a normál nehézségi erőtérnek) a térbeli elhelyezése *geocentrikus.*

Szakmatörténeti érdekességként említjük, hogy a szintellipszoid elméletének első gyakorlati alkalmazásaként alkotta meg az IAG azt a geodéziai vonatkoztatási rendszert, amelyben a *Hayford*-féle ellipszoid lett a Föld *normálalakja*, és a hozzá kapcsolódó *normál nehézségi erőteret* (pontosabban ennek eloszlását a *Hayford*-féle méretű és alakú ellipszoid felszínén) a *Cassinis* által számított ún. *Nemzetközi Normál Nehézségi Képlet* írta le (1930).

Szokásos a geodéziai gyakorlatban, hogy a (nemzetközileg ajánlott) geodéziai vonatkoztatási rendszer ellipszoidját az egyes nemzeti hálózatokhoz helyi elhelyezésbe hozva alkotják meg a *helyi (nemzeti) vonatkoztatási rendszert* (pl. a HD72). Ezzel törekszenek valamelyes nemzetközi egységességre, ami azonban, ezzel a megoldással, csak az ellipszoidi paraméterek számértékében és a koordináta számítás velük kapcsolatos algoritmusaiban (korábban táblázataiban) valósult meg. A közös méretű és alakú ellipszoid különböző *helyi* (nemzeti) *elhelyezése* miatt, ez a megoldás nem jelentette azt, hogy a helyi geodéziai alaphálózati pontok koordinátái az egységes nemzetközi vonatkoztatási rendszer (geocentrikus) koordináta-rendszerére vonatkoznának.

Ezzel kapcsolatban különösen arra kell figyelni, hogy, ha a nemzeti hálózatban nehézségi méréseken alapuló fizikai geodéziai módszereket alkalmazunk (pl. a geoid meghatározására), akkor a geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi képletével képezett nehézségi rendellenességekből számított geoidundulációk (vagy függővonal-elhajlások) *nem a helyi*, hanem *a geocentrikus elhelyezésű ellipszoidra vonatkozó értékek.*

Geodéziai dátum

A geodéziai dátum valamely helyi vonatkoztatási rendszer koordináta-tengelyeire illesztett, az ellip szoidi felületi koordináták számítására szolgáló ellipszoidnak – a *vonatkoztatási ellipszoidnak* – *méretét, alakját*, továbbá a természethez (kiválasztott anyagi ponthoz/pontokhoz, irányhoz) viszonyított *elhelyezését és tájékozását jellemző adatsor.*

A *vonatkoztatási ellipszoid* (amit korábban *alapfelületnek* is neveztek/neveztünk) *méretét* (az a fél nagytengely hosszúságát) és *alakját* (f geometriai lapultságát, vagy e^2 első numerikus excentricitás négyzetét) elvileg tetszőlegesen megválaszthatjuk. A gyakorlati célszerűség érdekében azonban mindig a Föld méretét és alakját jól közelítő ellipszoidi paramétereket használunk. A jelenlegi gyakorlatban – a nemzetközi egységességre is törekedve – ezek az IAG, ill. az IUGG által ajánlott valamelyik *geodéziai vonatkoztatási rendszer* (pl. GRS80) adatsorában a Föld *normálalakjának* geometriai jellemzői.

A koordináta-rendszer tengelyeinek és velük együtt a rájuk illesztett vonatkoztatási ellipszoidnak a *térbeli elhelyezése* földi anyagi ponthoz/pontokhoz kapcsolását jelenti A geodéziai gyakorlatban vonatkoztatási rendszerünk anyagi pontjai geodéziai *alaphálózati pontok geoidi megfelelői.* Az elhelyezés adataiként megadhatjuk közülük legalább egynek – valamilyen célszerűséggel megválasztott – (φ, λ, h) ellipszoidi felületi koordináta-hármasát (ahol most értelemszerűen $h \equiv N$ a geoid-ellipszoid távolság).

Ha a pontunk/pontjaink csillagászati-geodéziai (*Laplace*) pontok geoidi megfelelője/megfelelői, akkor a pontban az ellipszoidunkra vonatkoztatott, célszerűen megválasztott (beleértve a 0 értéket is) (ξ, η) *geoidi függővonal-elhajlás* összetevőket és *N geoid-ellipszoid távolságot* is megadhatjuk az elhelyezés adataiként (*Biró http://www.agt.bme.hu/tantargyak/felso_geodezia.html*). (Ez utóbbiak a geoidi pont mérésből származó (és a geoidra átszámított) szintfelületi földrajzi koordinátáival együttesen egyenértékűek a geoidi pont ellipszoidi koordináta-hármasával.)

Példaként a **HD72** vonatkoztatási rendszer geodéziai dátum adatai (*Ádám 2003*):

a vonatkoztatási ellipszoid

$a = 6\,378\,160$ m
$f = 1/298,\,247\,164\,27\ldots$

elhelyezése (*Szőlőhegy* pont geoidi megfelelőjében)

$\varphi = 47°\,17'\,32{,}6156''$
$\lambda = 19°\,36'\,09{,}9865''$
$h = 6{,}56$ m ($\equiv N$),

vagy

$\xi = -2{,}18''$
$\eta = +0{,}14''$
$N = 6{,}56$ m.

Az elhelyezési adatok megadásának harmadik módjaként, megadhatjuk a helyi vonatkoztatási rendszer koordináta-rendszere kezdőpontjának (origójának) a Föld tömegközéppontjához viszonyított $\mathbf{r}_o(X_o, Y_o, Z_o)$ *eltolásvektorát* (ennek derékszögű összetevőit). Az elhelyezési adatoknak ezt a hármasát akkor tudjuk kiszámítani, ha a hálózatunk legalább egy pontjának a helyi rendszerű ellipszoidi felületi koordináta-hármasa mellett ismerjük a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulására vonatkozó (geocentrikus) koordinátáit is.

A helyi vonatkoztatási rendszer *tájékozásán* koordináta-rendszere alapirányainak a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer (valamelyik, jelenleg az ITRS megvalósulása) koordináta-tengelyeihez viszonyított irányítását jellemző szögértékeket értjük.

A gyakorlatban mindig arra törekszünk, hogy a két koordináta-rendszer tengelyirányai egymással *párhuzamosak* legyenek. Ezt annyira magától értetődőnek tekintjük, hogy általában külön nem is tüntetjük fel sehol.

A koordináta-tengelyek párhuzamosságát helyi geodéziai alaphálózatunk legalább egy oldalára végzett azimútméréssel biztosítjuk. Ezzel azonban a kitűzött célt csak a mérési megbízhatóságnak megfelelő megbízhatósági szinten tudjuk megvalósítani, a valóságban a tengelyirányok között több tized másodperc iránykülönbségek lehetnek. Őket az *Euler-féle* forgatási szögekkel jellemezhetjük, amiket (az eltolásvektor három összetevőjével együtt) akkor tudunk kiszámítani, ha ismerjük legalább *két* alaphálózati pontunknak a helyi rendszerű ellipszoidi felületi koordináta-hármasa mellett a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer valamelyik megvalósulására vonatkozó (geocentrikus) koordinátáit is.

Ennek a számításnak szokásos megoldása a *Helmert-féle* hasonlósági transzformáció, amibe, az említett 3-3 elhelyezési és tájékozási paraméter mellett, még a földi és a helyi rendszerbeli koordináták méretarány különbségét is, hetedik ismeretlenként bevezetik. Ez esetben az ismeretlen paraméterek kiszámításához már három olyan alaphálózati pont kell, amelyek mindkét rendszerbeli koordináta-hármasát ismerjük. (Igaz, ekkor már két „fölös" egyenletünk is adódik.) A gyakorlatban az ilyen számítást nagy számú „közös" pont alapján (a legkisebb négyzetes módszerrel) célszerű elvégezni ahhoz, hogy kellő megbízhatóságú eredményeket kapjunk. Az így meghatározott elhelyezési és tájékozási paraméterek, valamint méretarány-tényező ismeretében lehetségessé válik a helyi és a földi (geocentrikus) rendszer közötti koordináta-transzformáció.

A „közös" pontok lehetnek maguk a földfelszíni alaphálózati pontok, vagy geoidi, vagy ellipszoidi megfelelőjük. A lényeg csak az, hogy mindkét rendszerbeli koordináták *ugyanarra* fizikai, vagy geometriai (földfelszíni, geoidi, vagy ellipszoidi) ponthelyre vonatkozzanak.

A „közös" pontoknak a földi rendszer (ITRS megvalósulására) vonatkozó koordinátáit a mai gyakorlat szerint szatellita-geodéziai módszerrel (pl. GPS-szel) és – geoidi pontok esetében – szintezéssel (helyette esetleg trigonometriai magasságméréssel) határozzuk meg. A helyi rendszer ellipszoidján fekvő „közös" pontok esetében az előbbiek mellet még csillagászati szintezésre is szükség van. (A GPS-mérésből kapott WGS84 koordinátákat a meghatározás megbízhatósági szintjén, gyakorlatilag ITRS koordinátáknak tekintjük.)

Az európai országokban, a kontinensen belüli geodéziai munkákban az ITRS szerepét egyre inkább átveszi az európai tábla pontjaihoz kötött *Európai Földi Vonatkoztatási Rendszer (ETRS89).* Az EU országok geodéziai alapmunkálataihoz az Unió ezt a rendszert ajánlja, így a korábbi helyi vonatkoztatási rendszerek dátum adatait is legújabban az ETRS89 „kvázigeocentrikus" koordinátarendszeréhez viszonyítva adjuk meg (a közvetlen koordináta-átszámítás érdekében).

Példaként a **HD72** vonatkoztatási rendszer ETRS89-hez viszonyított geodéziai dátum adatai (*Ádám 2003*):

a vonatkoztatási ellipszoid (a GRS67 ellipszoidja)

a = 6 378 160 m

f = 1/298, 247 164 27…

elhelyezése

X_o = +59,31 m

Y_o = -71,52 m

Z_o = -21,98 m

tájékozása (az *Euler*-féle forgatási szögek)

ε_x = 0,269″

ε_y = 0,432″

ε_z = 0,325″

(a méretarány különbség 1,277 ppm).

A *földi térbeli derékszögű koordinátarendszer* megvalósulásaival és a geodéziai vonatkoztatási rendszerekkel (világrendszerekkel), mint pl., a GRS80, vagy a WGS84 kapcsolatban *nem használjuk a geodéziai dátum* fogalmát. Meghatározásukban és a bennük szereplő meghatározó mennyiségek (paraméterek) kiszámítási módszerében már eleve benne van az a feltétel, hogy a koordinátarendszerük kezdőpontja a Föld tömegközéppontjában (a geocentrumban) van, és Z tengelye maga a CTS, vagy az ITRS alapiránya. Az ellipszoidi jellemzőket pedig a szóban lévő geodéziai vonatkoztatási rendszer (a földmodell elfogadott adatsora) már egyértelműen tartalmazza.

Itt említjük újra, hogy a geodéziai vonatkoztatási rendszer normál nehézségi képletével képezett nehézségi rendellenességekből számított geoidundulációk (vagy függővonal-elhajlások) *a geodéziai vonatkoztatási rendszer geocentrikus elhelyezésű ellipszoidjára vonatkozó értékek.*

Végül megjegyezzük, hogy a választott méretű és alakú vonatkoztatási ellipszoidunk egyrészt ellipszoidi felületi, másrészt (geometriai középpontja, kistengelye és ellipszoidi kezdő meridiánsíkja által) térbeli derékszögű koordináta-rendszert valósít meg. Ezt a koordináta-rendszert az elhelyezési és a tájékozási adatokkal földi ponthoz (valamely geodéziai alaphálózati ponthoz kötjük. Ebben az értelemben *minden geodéziai dátum egy-egy helyi vonatkoztatási rendszer megvalósulásaként is felfogható.*

Összefoglalás

A *vonatkoztatási rendszer* teljes (fizikai és geometriai) értelmezésében (égi, vagy földi) anyagi pontok összessége és a hozzájuk kapcsolt koordináta-rendszer. Használunk égi, földi és helyi vonatkoztatási rendszereket. Szűkebb (tisztán geometriai) értelemben gyakran vonatkoztatási rendszernek mondjuk valamely vonatkoztatási rendszernek csak magát a koordináta-rendszerét. Ettől tartalmában teljesen különbözik a *geodéziai vonatkoztatási rendszer,* ami valamely földmodell (a Föld normálalakja és normál nehézségi erőtere) meghatározó mennyiségeinek az IUGG által ajánlott értéksora. A *geodéziai dátum* valamely helyi vonatkoztatási rendszer, ill. az ennek tengelyeire illesztett vonatkoztatási ellipszoid méretét, alakját, elhelyezését és tájékozását meghatározó mennyiségek értéksora.

Köszönetnyilvánítás

A szerző jelen tanulmánnyal járul hozzá az OTKA T 043 007 és a T 046 718 sz. téma kutatásához.

Hivatkozások

Ádám J (1982): A kozmikus geodézia koordináta-rendszerei. Budapest, *Geodézia és Kartográfia 38.* 84-92.

Ádám J, Augath W, Boucher C (2000): The Europan Reference System coming of age. IAG Symposium Proceed. 121. *Springer,* Berlin.

Ádám J (2003): A felsőgeodézia helyzete és időszerű feladatai Magyarországon. Székfoglalók 1995-1998, VI. *Magyar Tudományos Akadémia,* Budapest.

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás. *Műegyetemi Kiadó,* Budapest.

Biró P (2002): Kozmikus geodéziai fogalmaink újragondolása. Sopron, *Geomatikai Közlemények V,* 7-24.

Ma C, Feissel CM eds (1997): Definition and Realization of the International Celestial Reference Frame by VLBI Astrometry of Extragalactic Objects. Paris, *IERS Technical Note 23,* I-IV.

Torge W (2001): Geodesy 3. ed. *Walter de Gruyter,* Berlin.

Torge W (2003): Geodäsie 2. Auflage. *Walter de Gruyter,* Berlin.

GEOMETRIAI ALGEBRA: A XXI. SZÁZAD MATEMATIKUSAINAK, FIZIKUSAINAK ÉS MÉRNÖKEINEK ÚJ EGYSÉGES MATEMATIKAI NYELVE

Somogyi József[*]

Geometric algebra: A new unified mathematical language for physicists and engineers in the XXI-st century *- The geometric (Clifford) algebra is based on a coordinate-free approach of the geometry, which allows an invertible associative product between vectors. This algebra is related to such a space whose elements are called multivectors. The associative product is the so-called geometric or Clifford product. The geometric algebra unifies the complex numbers with the conventional vector algebra and for this reason can be well used in different fields of the mathematics, physics and engineering. The paper gives a brief outline of the geometric algebra.*

Keywords: Clifford, Grassmann, geometric algebra, bivector, trivector, multivector, geometric product, rotation

A geometriai (Clifford) algebra a geometriának egy koordináta mentes megközelítésén alapul, ami a vektorok között egy megfordítható asszociatív szorzást tesz lehetővé. Ez az algebra egy olyan térre vonatkozik, amely térnek az elemeit un. multivektorok képzik. Maga az asszociatív szorzás a geometriai vagy Clifford szorzat útján érhető el. A geometriai algebra egyesíti a komplex számokat a hagyományos vektor algebrával és ez által nagyon jól alkalmazható a matematika, fizika és mérnöki tudományok számos területén. A tanulmányban a geometriai algebra alapjait foglaljuk össze.

Kulcsszavak: Clifford, Grassmann, geometriai algebra, bivektor, trivektor, multivektor, geometriai szorzat, forgatás

Bevezetés

A XIX. században tevékenykedő híres matematikusok számos új matematikai rendszert dolgoztak ki. Ezek között található a *Grassmann (1844)* és a *Clifford (1878)* féle algebra is. Grassmann munkásságával egyidőben *Hamilton (1844)* a 3D forgatások megoldására kidolgozta a *kvaternión algebrát*, amiben általánosította a komplex számokat a harmadik dimenzióra. Grassmann az új algebrájához bevezetett egy új fogalmat a *külső szorzatot,* aminek jellemzője az *asszociativitás*. Clifford a saját *geometriai algebrájában* egy egységes algebrává egyesítette a Hamilton és Grassmann féle algebrákat. Ebben az algebrában egy olyan *geometriai szorzat* található, ami a belső – és külső szorzatok egyesítéséből adódik. A geometriai szorzat a Grassmann féle külső szorzathoz hasonlóan asszociatív, de úgy, mint a Hamilton féle algebrai szorzatok invertálható is. Önmagukban a belső és külső szorzatok nem invertálhatók. A Clifford féle algebra egyesíti a kvaternió- és a vektoralgebra előnyeit és így a matematika, fizika és mérnöki tudományok legkorszerűbb matematikai nyelveként jellemezhető. Az, hogy felfedezése után hosszabb ideig feledésbe merült, több okkal magyarázható.

Egyrészt, szinte egy időben dolgozta ki *Gibbs (1906)* vektor algebráját. A vektor számítás jól alkalmazkodott az akkori fizikai kutatásokhoz és elterelte a figyelmet Grassmann és Clifford munkáiról. Bár a speciális relativitás elméletére vonatkozó kutatások során a fizikusok már érezték egy olyan rendszernek a hiányát, ami kezeli a négydimenziós teret. Másrészt hiányoztak a korszerű számítástechnikák. Az 1920-as években újra felfedezték A Clifford féle algebrát a kvantum spin alapját szolgáló algebraként. A kvantumelméletben *Pauli* és *Dirac* spin mátrixainak algebrája játszik igen fontos szerepet. De csak algebraként alkalmazták, geometriai jelentőségét nem vették figyelembe. Ez a helyzet az 1960-as években változott meg, amikor *Hestenes (1966)* kutatásai során felismerte, hogy a Clifford féle algebra univerzális nyelvként integrálhatja a matematikai, fizikai és mérnöki kutatásokat. Azóta a világ különböző részein számos kutató csoport foglalkozik a geomet-

[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: somogyi@ggki.hu

riai algebra alkalmazási lehetőségeivel a kozmológiában, a kvantumelméletben, a hullámok dinamikájában, a gravitációs kutatásokban, a számítógépes látásnál stb.

A tanulmány megírásánál az a cél vezetett, hogy felhívjam a geodézia oktatásával és kutatásával foglalkozó hazai szakemberek figyelmét erre az új irányzatra. Meggyőződésem, hogy a geodéziai tudományok néhány területén, mint pl. a gravitációs erőtérhez, a geodinamikai vizsgálatokhoz és a digitális fotogrammetriához kapcsolódó kutatásoknál rövid időn belül nélkülözhetetlen eszközként fogják alkalmazni a geometriai algebrát.

A geometriai algebra alapjai

Ebben a fejezetben a geometriai algebra alap elemeit foglaljuk össze. A hagyományos vektor algebrában két szorzat létezik:

skaláris szorzat : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$,
vektoriális szorzat : $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Az **a** és **b** vektorok skaláris szorzata (belső szorzat) egy $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta$ nagyságrendű skalár érték. Az **a** és **b** vektorok vektoriális szorzata egy $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$ nagyságrendű harmadik vektort eredményez , aminek iránya merőleges az **a** és **b** vektorok síkjára. Annak ellenére, hogy a vektoriális szorzat alapvető szerepet játszik a matematikai fizikában, hiányosságokat is takar. Pl. kétdimenziós esetben egy az **a** és **b** vektorokra merőleges iránynak nincs értelme, és négy vagy annál magasabb dimenzió esetén az irány kétértelművé válik. Nyilvánvaló, hogy egy még általánosabb szorzatra van szükség, ami az irányokra vonatkozó információkat is magába foglalja és minden dimenzióra általánosítható. Ezt a még általánosabb szorzatot a geometriai algebrában a vektorok *külső szorzataként* vezették be.

Vektorok külső szorzata

Két vektor Grassmann féle külső szorzatára a geometriai algebrában a következő jelölést alkalmazzák:

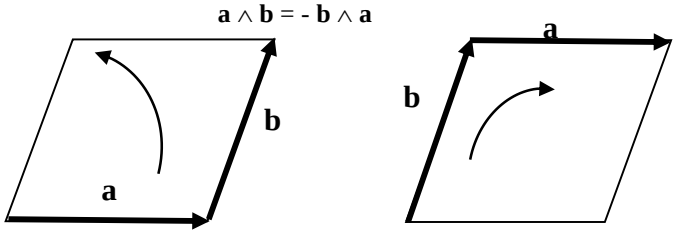
$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} , \tag{1}$$

aminek a nagyságrendje $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin\theta$. Két vektor külső szorzata egy új mennyiség, amit *bivektornak* neveznek. A bivektort az **a** és **b** vektorokat magába foglaló sík irányított területeként értelmezhető: Vegyünk egy olyan teret, aminek az (**ab**) síkjában a bázis egységvektorai $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, ekkor felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) \wedge (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) \\ &= a_1b_1\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 + a_2b_2\,\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 + a_1b_2\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + a_2b_1\,\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \\ &= 0 + 0 + (a_1b_2 - a_2b_1)\,\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 . \end{aligned} \tag{2}$$

Az $(a_1b_2 - a_2b_1)$ tényező az **a** és **b** vektorok közötti irányított terület skalár értéke, és $\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ jelzi a síkot, azaz azt a két-dimenziós irányt, amiben ez a mérték megtalálható . Máskép fogalmazva, az$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ az az *irányított terület,* amit úgy kapunk, hogy az **a** vektort a **b** vektor mentén mozgatjuk el, amint az *1.a ábrán* látható. Hasonló módon $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ az az irányított terület, amit úgy kapunk meg, hogy a **b** vektort mozgatjuk az **a** vektor mentén (*1.b ábra*). Az ábra szerint **a** és **b** vektorok esetén az $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ tájékozása ellentétes az óra járásával és $\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$ tájékozása az óra járásának felel meg. Így a külső szorzat antikommutatív:

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\,\mathbf{b} \wedge \mathbf{a} \tag{3}$$



1.a ábra **1.b ábra**

1. ábra. Bivektorok (irányított területek)

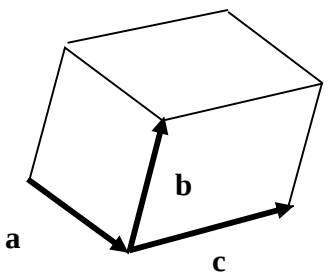
Annak ellenére, hogy a külső szorzat nagyságrendje azonos a vektor keresztszorzatával és ugyanazzal az antikommutatív tulajdonsággal rendelkezik, ki kell hangsúlyozni, hogy egy *bivektor* alapvetően más mennyiség, mint egy vektor. A külső szorzatnak ilyen értelmű geometriai értelmezése azzal az előnnyel rendelkezik, hogy közvetlenül általánosítható magasabb dimenziókra. Így pl. az előző meghatározás értelmében az $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c}$ úgy értelmezhető, mint az a tájékozott háromdimenziós térfogat, amit úgy kapunk, hogy az $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})$ bivektort (irányított területet) a $\mathbf{c}$ vektor mentén toljuk el: ezt a tájékozott térfogatot *trivektornak* nevezzük (*2.a ábra*). Amikor az $\mathbf{a}$ vektort a$(\mathbf{b} \wedge \mathbf{c})$ bivektor mentén toljuk el, ugyanazt a trivektort kapjuk (*2.b ábra*), ami azt jelenti, hogy a külső szorzat asszociatív:

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \,. \qquad (4)$$

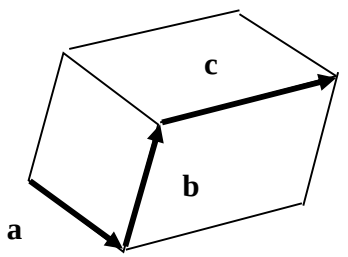
A 3D-s térben tovább nem mehetünk, mivel a trivektor nem mozgatható el egy negyedik dimenzióba. Ennek megfelelően bármely négy vektor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d}$ külső szorzata zérót eredményez. Ez azzal bizonyítható, hogy ha az $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ vektorok nem fekszenek egy síkban, akkor a $\mathbf{d}$ és minden más vektor kifejezhető a három vektor lineáris kombinációjaként:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{d} &= \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}\,(a\mathbf{a} + b\mathbf{b} + c\mathbf{c}) \\ &= a\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{a} + b\,\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{b} + c\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} = 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

mivel minden tag tartalmazza két azonos vektor ékszorzatát, ami zéró.



2.a ábra



2.b ábra

2. ábra. Trivektorok (tájékozott térfogatok)

A geometriai szorzat

A geometriai (Clifford) algebra az algebrának egy olyan változata, ami egyesíti a komplex számokat a hagyományos vektor algebrával és ez által kibővíti az alkalmazási lehetőségeit. Ennek az algebrának az alapját két vektor speciális szorzata képzi.Két vektornak ($\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$) a külső és belső szorzata együtt információt ad a vektorok nagyságrendjéről és irányáról. Ezért célszerű ezeket az információkat egy szorzatba kombinálni. Ez úgy érhető el, hogy képezzük az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok *geometriai* (Clifford) szorzatát,amit **ab**-veljelölünk és a következőt jelenti:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \,. \qquad (6)$$

Az **ab** geometriai szorzat egy $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ skalárnak és egy $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ bivektornak az összege. Amikor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymással párhuzamosak, akkor $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$ és **ab** egy skalár érték, ami csupán a nagyságrendre vonatkozó információt tartalmazza. Amikor $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egymásra merőlegesek, akkor $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ és **ab** egy irányított terület. Azokra az esetekre, amikor az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok sem nem párhuzamosak, sem nem merőlegesek egymásra feltételezzük, hogy szorzataik skaláros és bivektoros részeket is tartalmaznak.

A Clifford algebra különböző dimenziókkal rendelkező sorozatai alakíthatók ki. Minden vektor kifejezhető az n számú a_i skaláris értékek rendezett sorozataként,

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n) \,. \tag{7}$$

Az $\mathbf{e}_i$ ortogonális egységvektorok segítségével a (7) összefüggésből kapjuk, hogy

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 + \ \ldots\ldots + a_n\mathbf{e}_n \ . \tag{8}$$

Az ortogonális egységvektorokra érvényesek a következő kapcsolatok:

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_i = 1 \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j = -\,\mathbf{e}_j\,\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \ , \tag{10}$$

és ha

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 + \ \ldots\ldots + a_n\mathbf{e}_n \ , \tag{11}$$

akkor

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \ \ldots\ldots + a_nb_n \ . \tag{12}$$

Az egész Clifford algebra a 0,1,2,3,…n bázisvektorok Clifford féle szorzatainak minden lehetséges kombinációjából jön létre.A zéró bázisvektorhoz tartozó tagok a skalárok. Az elemek teljes száma 2^n. Az egyes tagok nagyságrendje (foka) megegyezik a tagban lévő bázisvektorok számával.

0 : skalárok
1 : vektorok : $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \ldots, \mathbf{e}_n$.
2 : bivektorok : $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$,…stb.
n : pszeudóskalárok : $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\ldots\ \mathbf{e}_n$.

Amikor egy **b** vektornak az **a** vektorral való $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ belső szorzatát vesszük, akkor a **b** fokát 1-el csökkentjük, azaz egy vektorból (1 fokkal) egy skalárt kapunk (0 fokkal). Hasonló módon, amikor egy **b** vektornak az **a** vektorral való $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ külső szorzatát vesszük, a fok 1-el növekszik, azaz egy vektorból (1 fokkal) egy bivektort kapunk (2 fokkal).

A külső és belső szorzatok ellentétes kommutativ tulajdonságokkal rendelkeznek:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \tag{13}$$

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = -\,\mathbf{b}\wedge\mathbf{a} \tag{14}$$

Így **ab** és **ba** összege és különbsége a következő:

$$\mathbf{ab} + \mathbf{ba} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\wedge\mathbf{a} = 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{15}$$

$$\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} \ - \mathbf{b}\wedge\mathbf{a} = 2\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} \tag{16}$$

Az előző egyenletek alapján a belső és külső szorzatokat a geometriai szorzat szimmetrikus és antiszimmetrikus részeként határozhatjuk meg:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \tag{17}$$

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \tfrac{1}{2}\,(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) \tag{18}$$

Szigorú matematikai közelítéssel az **ab** geometriai szorzat a következő módon írható le ((Hestenes és Ziegler). Legyen $\boldsymbol{V}_n$ egy n-dimenziós vektortér, ahol a vektorokat az **a,b,c**…- és a skalárokat az a,b,c….stb. betük jelölik. A $\boldsymbol{G}_n = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{V}_n)$ geometriai algebrát ebből a vektortérből generálják, ahol az **ab** geometriai szorzatot az összes vektorra érvényes következő tulajdonságokkal határozzák meg:

$$\mathbf{a}(\mathbf{bc}) = (\mathbf{ab})\mathbf{c} \tag{19a}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac} \tag{19b}$$

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})\mathbf{a} = \mathbf{ba} + \mathbf{ca} \tag{19c}$$

$$\mathbf{a}a = a\mathbf{a} \tag{19d}$$

$$\mathbf{a}^2 = \pm\,|\mathbf{a}|^2 \tag{19e}$$

itt az | **a** | az **a**-val társított pozitív skalár. A (19e) axiómát az *összevonás szabályának* nevezik. Az **a** vektor előjele a (19e) alapján adható meg, és az **a** akkor egy *nulla vektor,* ha | **a** | = 0 abban az esetben, amikor $\mathbf{a} \neq 0$.

Az összevonási axióma következtében a belső szorzat egy skalár értéket eredményez. Bármely $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,…., $\mathbf{a}_k$ számú vektor külső szorzata azok geometriai szorzatának teljes antiszimmetrikus részeként definiálható és a következő módon fejezhető ki:

$$< \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots\ldots, \mathbf{a}_k >_k = \mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \ \ldots\ldots \wedge \mathbf{a}_k \ . \qquad (20)$$

A $\boldsymbol{G}_n$ minden olyan elemét ami a *k*-vektorok külső szorzataként generálható, ahogy az a (20) egyenletben látható, azt *k-lapnak* nevezik. A *k*-lapok minden egyes lineáris kombinációját *k-vektornak* hívják. A *k*-szoros külső szorzat (20) csak akkor tűnik el, ha a *k*-vektorok lineárisan függetlenek.Ennek megfelelően a $\boldsymbol{G}_n$ maximum *n* lépésben tartalmaz nem zéró lapokat. Ezeket az *n*-lapokat a $\boldsymbol{V}_n$ vagy a $\boldsymbol{G}_n$ *pszeudóskalárjainak* nevezik. A $\boldsymbol{G}_n$ egy általános elemét *multivektornak* hívják.

Geometriai algebra a 2-D térben (*Cl* 2)

Egy két-dimenziós teret(síkot) két bázisvektor kifeszítésével kapunk.Ezen a $\boldsymbol{V}^2$ vektorsíkon az ortonormális bázisvektorokat jelöljük $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ –vel. Ezek kielégítik a következő feltételeket:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 1 \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \ . \qquad (21)$$

Ebből következik hogy a bázisvektorok geometriai szorzata

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \ , \qquad (22)$$

a vektorok merőlegessége miatt egy tiszta bivektor. Így a 2-D geometriai algebra a következő elemekből tevődik össze:

1	$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$,
skalárok	irányok (vektorok)	irányított terület (bivektor)

Ennek a bivektornak a négyzete a következő:

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = -1 \ . \qquad (23)$$

Ez egy olyan valós geometriai mennyiség, aminek a négyzete –1 és kapcsolatba hozható a komplex számok algebrájának *i immaginárius egységével*, ha az *i*-t a következő módon értelmezzük:

$$i = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = - \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \ . \qquad (24)$$

Példaként vegyünk egy **a** vektort

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2,$$

ha az $\mathbf{e}_1$ –et megszorozzuk **a** -val kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \\ &= a_1 + a_2\, i \end{aligned}$$

és ha **a** –t szorozzuk meg $\mathbf{e}_1$-el kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 \\ &= a_1 - a_2\, i \end{aligned}$$

ami az előző eredmény komplex konjugáltja, és így felépíthető a teljes komplex algebra.

Geometriai algebra a 3-D térben (*Cl* 3)

Egy 3dimenziós teret három bázisvektor kifeszítésével kapunk. Ebben a $\boldsymbol{V}^3$ vektortérben az ortonormális bázisvektorokat jelöljük $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ –al. Ezekkel három független bivektor képezhető:

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3 \ \text{és} \ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1,$$

amik három független síkot képviselnek a 3D térben. Ezek a bivektorok már szerepelnek a 2-dimenziós algebrában, de új elemként megjelenik a három ortogonális vektor geometriai szorzata

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \ , \qquad (25)$$

ami egy *trivektort* eredményez. Ez a trivektor az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ bivektornak az $\mathbf{e}_3$ mentén való elmozdításából adódó geometriai alakzat térfogatát képviseli. Ennek megfelelően a 3 –D geometriai algebra a következő elemekből tevődik össze:

1,	$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$,	$\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1\}$,	$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$
1 skalár	3 vektor	3 bivektor által adott terület elemek	1 trivektor által adott térfogat elem

azaz ennek a lineáris térnek a bázisa $(1 + 3 + 3 + 1) = 8 = 2^3$ elemből áll.

A geometriai algebrában a legmagasabb fokú elemeket *pszeudóskalároknak* nevezik és egy speciális **i** szimbólummal jelölik. Ennek megfelelően az $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ trivektort a 3-dimenziós tér egységnyi pszeudóskalárja azaz

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 \equiv \mathbf{i} \ . \qquad (26)$$

Ennek a pszeudóskalárnak a négyzete – 1 és felcserélhető minden multivektorral.

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)^2 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = -1 \qquad (27)$$

A pszeudóskalárt megszorozva $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$-vel kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \mathbf{i}\,\mathbf{e}_3 \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{i}\,\mathbf{e}_1 \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3)\,\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}\,\mathbf{e}_2 \end{aligned} \qquad (28)$$

Forgatás

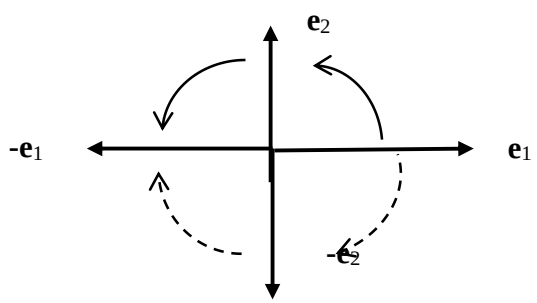
Kiindulásként nézzük meg az egyszerű bivektorok egy fontos tulajdonságát. Az $(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)$ bivektort szorozzuk meg jobbról az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{e}_2$ vektorokkal és eredményül kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = -\,\mathbf{e}_2 \ , \\ (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2)\,\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = \ \mathbf{e}_1 \ , \end{aligned} \qquad (29)$$

ezután végezzük el a szorzást balról és kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1\,(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) &= \ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \ \mathbf{e}_2 \ , \\ \mathbf{e}_2(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2) &= -\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = -\,\mathbf{e}_1 \ . \end{aligned} \qquad (30)$$

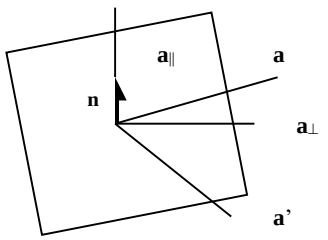
A (29) és (30) egyenletek alapján a jobbról történő szorzás a vektorokat saját síkjukban az óra járásának az irányába forgatja el 90^o – al, míg a balról történő szorzás ellentétes irányban végzi el ugyanezt a forgatást (*3.ábra*).



3. ábra. Az $\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2$ vektorokkal való forgatás

A geometriai algebra a forgatásokat tükrözések párjaival írja le. Nézzünk egy **a** vektort, amit az **n** egységvektorra merőleges síkra tükrözünk és jelöljük ezt a tükrözött vektort **a**'-vel (l. *4.ábrát*). Az **a** vektor kifejezhető az **n**-re merőleges és az **n**–el párhuzamos derékszögű összetevőivel

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\perp + \mathbf{a}_\parallel \ , \tag{31}$$



4. ábra. Az a tükrözése az n –re merőleges síkra

és ezek alapján egyértelműen kapjuk, hogy

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}_\perp - \mathbf{a}_\parallel \ . \tag{32}$$

Az **a**' kifejezhető az **a** és **n** segítségével (*J.Lasenby et al.,1998*).

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{n}^2\,\mathbf{a} \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) \end{aligned} \tag{33}$$

Ebből következik, hogy

$$\mathbf{a}_\parallel = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}) \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_\perp = \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) \tag{34}$$

és mivel $\mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) = -(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a})\mathbf{n}$, azért **a**' –re felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \mathbf{a}_\perp - \mathbf{a}_\parallel \\ &= \mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n} \\ &= -(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n}\,\mathbf{n}(\mathbf{n}\wedge\mathbf{a}) \\ &= -\mathbf{nan} \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Így az **a** –nak egy az **n** –re merőleges síkra történő tükrözése (– **nan**) **–a**l fejezhető ki. A forgatás meghatározásához ezt a tükrözést az **a** –nak egy az **m** egységvektorra merőleges síkra történő tükrözése követi, ami egy új vektort eredményez.

$$-\mathbf{m}(-\mathbf{nan})\mathbf{m} = (\mathbf{mn})\mathbf{a}(\mathbf{nm}) = \boldsymbol{R}\mathbf{a}\,\tilde{\boldsymbol{R}} \ , \tag{36}$$

ahol az $\boldsymbol{R} = \mathbf{mn}$ a *rotor* és $\tilde{\boldsymbol{R}} = \mathbf{nm}$ az $\boldsymbol{R}$ fordítottja, mivel úgy kapjuk meg, hogy megfordítjuk a geometriai szorzótényezők sorrendjét. A rotor mint multivektor csak páros számú elemeket tartalmaz és kielégíti az $\boldsymbol{R}\,\tilde{\boldsymbol{R}} = \tilde{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{R} = 1$ feltételt. Az $\mathbf{a} \rightarrow \boldsymbol{R}\mathbf{a}\,\tilde{\boldsymbol{R}}$ transzformáció tetszőleges dimenzióval rendelkező terekhez alkalmazható és így általánosnak mondható, ezen kívül a vektorok mellett a bivektorokra is kiterjeszthető. Az $\boldsymbol{R}$ rotor egy skalárból és egy bivektorból tevődik össze. Például a 2-dimenziós forgatás esetén

$$\boldsymbol{R} = \cos(\theta/2) - \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 \sin(\theta/2) \ . \tag{37}$$

Összefoglalás

Amint azt már a bevezetőben is megemlítettem, ennek a tanulmánynak a megírásával az volt a célom, hogy a geodézia oktatásával és kutatásával foglalkozó hazai szakemberek figyelmét felhívjam erre az új matematikai irányzatra. Ennek megfelelően munkámban csak a geometriai algebra legfontosabb alapfogalmait ismertetem. Nem térek ki részletekre és alkalmazásokra, de a tanulmány végén található irodalmi jegyzék alapján az érdeklődők minden fontos információhoz hozzájuthatnak.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány az OTKA T 037218 sz. pályázatban végzett kutatások egy részét tartalmazza.

Hivatkozások

Baylis WE ed. (1996): Clifford (Geometric) Algebras with applications to physics, mathematics and engineering. *Birkhäuser* Boston.

Clifford WK (1878): Applications of Grassmann's extensive algebra. *Am. J. Math*, 350-358.

Dorst L, Doran C, Lasenby J ed (2002): Applications of Geometric Algebra in Computer Science and Engineering. *Birkhäuser* Boston.

Dorst L, Mann S (2002): Geometric algebra: a computation framework for geometrical application, *Part 1*. *IEEE Computer Graphics and Applications* ,22; 4, 58-67.

Gibbs W (1906): The scientific papers of Willard Gibbs, 3. London: *Longmans Green*.

Grassmann H (1844): Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Aufdehnungslehre, eine neue mathematischen Disciplin. Leipzig.

Hamilton WR (1844): On Quaterions: or a new system of imaginaries in algebra. *Phil. Mag.*3rd Series 25, 489-495.

Hestenes D (1966): Space-time algebra. London: *Gordon and Breach*.

Hestenes D (1986): New foundations for classical mechanics. *Dordrecht*: Reidel.

Hestenes D, Sobczyk G (1984): Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics. *Dordrecht*: Reidel.

Hestenes D, Ziegler R (1991): Projective geometry with Clifford algebra. A*cta Applicandae Mathematicae* 23, 25-63.

Lasenby J, Fitzgerald W, Lasenby AN and Doran CJL (1998): New Geometric Methods for Computer Vision: An Application to Structure and Motion Estimation. *Int J. of Comp. Vision*, 26; 3, 191-213.

GRÁFELMÉLET ÉS KOMBINATORIKA HÁLÓZATOKHOZ ÉS TÉRKÉPEKHEZ

Karsay Ferenc[*], *Kádár István*[**]

Graph theory and combinatorics for geodetical networks and maps *- The role of Moore—Penrose's generalized inverse for investigation of laws of coordinate information flow. New notations was definited: information accumulation region, local adjustment, finite filters. Proof of validity of extended Kirchhoff's laws for geodetical networks. Numerical examples are for manifold combination of the diagonal quadrangles. To find net structures to which may be applying finite filters in contrary the classical adjustment.*

Keywords: information propagation, information accumulation region, local adjustment, Moore-Penrose generalized inverse, extended Kirchhoffs laws, finite filters.

A Moore—Penrose pseodo linverznek a geodéziai hálózatokban végbemenő információáramlás törvényszerűségeinek vizsgálatában játszott szerepe. Az információgyűjtő terület, a lokális kiegyenlítés és a véges szűrők fogalmának bevezetése után annak igazolása, hogy ─ egy műholdgeodéziai hálózat kiegyenlítésének számpéldáján bemutatva ─ hogyan érvényesülnek az általánosított Kirchhoff-törvények a geodéziai hálózatokban. Az átlós négyszög különböző kombinációinak vizsgálata során a cél olyan hálózati struktúrák keresése volt, amelyekhez a hagyományos kiegyenlítéssel ellentétben véges szűrőket lehet alkalmazni.

Kulcsszavak: információterjedés, információgyűjtő terület, lokális kiegyenlítés, Moore-Penrose pseudo inverz, általánosított Kirchhoff-törvények, véges szűrők.

Bevezetés

Nem mind arany, ami fénylik. Próbáljunk meg különbséget tenni sokak – vagy majdnem mindenki – által egyformának tekintett dolgok között. Ez a jó tanács még a geodéziai hálózatok vonatkozásában is meglepő eredményekre vezethet. Különösen a globális hálózatok esetében. Nem véletlen, hogy a Római klub elnökének ismert jelmondata így hangzik: *„Gondolkodj globálisan, cselekedj lokálisan!"* Csak egy kis odafigyelésre van ugyanis szükség és észrevehetjük, hogy például minden ismeretlen hálózati pontnak (sőt a pont minden koordinátájának külön-külön!) megvan a maga saját *„információ gyűjtő területe"* *Fülöp (1996)*. Ahogy minden folyónak, pataknak, érnek is. A különbség csak annyi, hogy azok vizet gyűjtenek, míg a geodéziai hálózatok koordináta-információt.

Azonban a végeredményre nem minden mérés „befolyása" azonos. Az kevésbé ismert, hogy még az *egyenlő súlyú mérések* sem egyformán hasznosak. Egy mérés hasznosságának mértékét ugyanis minden egyes hálózati pont szempontjából *külön-külön* érdemes megítélni. Előfordul, hogy az a mérés, amelyik az egyik ismeretlen számára a legtöbb információt szállítja, a másik részére semmit sem juttat, még akkor sem, ha egyébként azonos súlyú. Lehet, hogy annak az információ gyűjtő területéből ez a mérési eredmény, mint csatorna teljesen hiányzik. Ezen ismeretlen szempontjából tehát valójában *fölösleges* mérés. Ugyanez a kettősség mondható el az *adott* hálózati pontokról, vagyis az *információ-forrásokról* is, még ha azok azonos rendűek is (lásd a későbbi példákat). Ezért mindenképpen káros – vagy legalábbis félrevezető – az információ-elemzés szempontjából *egy kalap alá venni* minden, a hálózatban előforduló, egynemű fogalmat.

Szerencsére az emberre nehezedő, a megkülönböztető gondolkodással járó plusz feladatok ma már a hordozható számítógéppel is könnyen megoldhatók. Ügyes szakemberek számára természetesen ez időben is és pénzben is bőségesen megtérül. Régóta ismert ugyanis az a különlegesen egyszerű eljárás, amelyet a modern gráfelmélet *„folyamok számításának"* nevez, és amelynek alap-

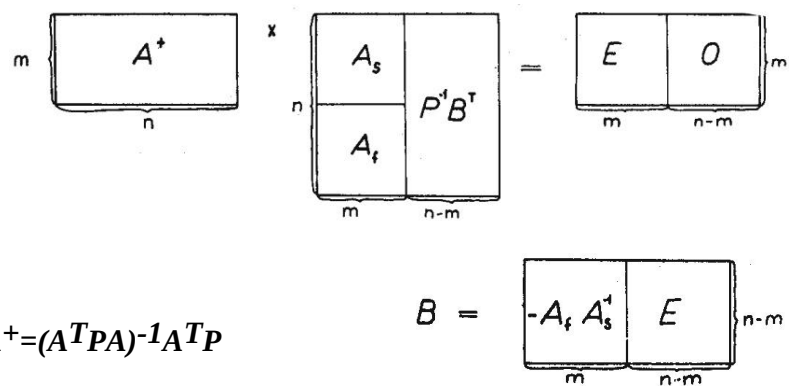
[*]*ELTE Térképtudományi és Geoinformatikai Tanszék*
Budapest XI. kerület, Pázmány P. sétány 1a.
E-mail: karsay.ferenc@beltav.hu

[**]*NYME Geoinformatika Főiskolai Kar,*
8000 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.
E-mail: i.kadar@geo.info.hu

jait *Gauss* egyik tanítványa, *Kirchhoff,* még diák korában fedezett fel, és ezért az áramlástanban nélkülözhetetlen *csomóponti és huroktörvény* az ő nevét viseli. A vezetékes elektromos hálózatok számítása már kizárólag erre épül, de a *Moore* és *Penrose* amerikai matematikusok munkássága nyomán kidolgozott *pseudo inverzek* (vagy ahogy a továbbiakban nevezni fogjuk: *félinverzek)* a geodéziai hálózatok kiegyenlítésére is alkalmassá tették *Csepregi (1982)*.

Miért tekinthetők folyamoknak a geodéziai hálózatok is?

A feleletet az *1. ábráról* olvashatjuk le *Kádár, Ágfalvi (1982a, 1982b).* Vegyünk egy tetszőleges geodéziai hálózatot. Ezen az ábrán a *koordináta-kiegyenlítés* (II. kiegyenlítési csoport) és a *korreláta-kiegyenlítés* (III. kiegyenlítési csoport) *A* és *B* együttható mátrixai célszerűen egymáshoz kapcsoltan szerepelnek, utóbbi transzponált formában. Az *A* mátrixnak a szükséges mérésekhez tartozó sorait A_s-sel, a fölös mérésekhez tartozókat pedig A_f -fel jelöltük. P^{-1} a súlymátrix inverze, *E* egységmátrix, *O* zérusmátrix és A^+ az *A* mátrix félinverze.



$$A^+=(A^TPA)^{-1}A^TP$$

$$B = \begin{array}{|c|c|}\hline -A_f A_s^{-1} & E \\ \hline \end{array}\ n-m$$

m n-m

1. ábra. A Kirchhoff-törvények érvényesülése a geodéziai hálózatokban

A fenti ábra egy általános geodéziai hálózat információterjedési modellje. Mint általában a modelleket, a különböző tudományágak igyekeznek *saját szakterületükre* vonatkozóan is értelmezni. Kivételes, de nem haszontalan törekvés ennek a fordítottja sem, amikor *más szakterületi* értelmezést próbálunk saját szakterületünkön belül hasznosítani. Itt mi is ez utóbbit tesszük *(Halmos et al 1975), Halmos, Kádár (1977)*. Villamosságtani értelmezés szerint ugyanis az ábra jobb oldalán lévő *E* mátrix egy villamoshálózat *m* számú csomópontjára vonatkozó csomóponti Kirchhoff-törvénynek, míg az *O* mátrix az *n-m* számú hurokjához tartozó hurok-törvény teljesülését mutatja *Szendy (1967)*. E kétféle szakterületi értelmezés közötti kapcsolat megteremtéséhez elkerülhetetlenül szükségünk lesz még egy harmadikra, az elvontabb *áramlástani értelmezésre* is, melynek terminológiájával a *gráfelmélet* foglalkozik *Andrásfai (1983)*.

Az *A* és *B* mátrix két olyan *topológiai mátrixnak* is felfogható, melyek közül az előbbi *csomópontok szerint*, az utóbbi pedig *hurkok (poligonok) szerint* csoportosítja az A^+ félinverz soraiban a *mérések sorrendjében* tárolt *ágáramokat* (azaz két-két szomszédos pont között folyó információs áramokat). Ezeket a csoportosításokat akkor hajtjuk végre, amikor utóbbi mátrixszal az előző kettőt az ábra bal oldalán jelöltek miatt egyidejűleg megszorozzuk, de a mátrix-mátrix szorzás sajátossága szerint az elemi szorzatokat mindjárt össze is adjuk. Már csak a P^{-1} vezetés-mátrix szerepét kell tisztáznunk. Ha ez nem szerepelne a *B* mátrix előtt, akkor a hurkok (poligonok) szerinti csoportosítást is az ágáramokkal végezné el a *B* mátrix. De mivel ott van, ezért az Ohm-törvénynek megfelelő konverziós képlettel az ágáramokat előbb *ágfeszültségekké* alakítja át, hiszen a huroktörvény ezekre vonatkozik.

Tehát az ábra egy olyan szótárnak is felfogható, amelyik a geodéziai hálózat elemeit (fogalmait) egy vele teljesen egyenértékű elektromos hálózat elemeire (fogalmaira) fordítja le.

Röviden a Moore-Penrose félinverzről

Mit fejez ki ténylegesen a Moore-Penrose félinverz tartalma?

Ez a fekvő téglalap-alakú mátrix, melyet még az *ágáramok* mátrixának is szokás nevezni,

az *i*-edik sorának és a *j*-edik oszlopának a metszésében azt a számot tartalmazza, mely megmutatja, hogy a *j*-edik mérés mint csatorna, mennyi információt tud az *i*-edik ismeretlenbe mint *nyelőpontba* szállítani.

Mi a közvetlen gyakorlati haszna ennek a mátrixnak?

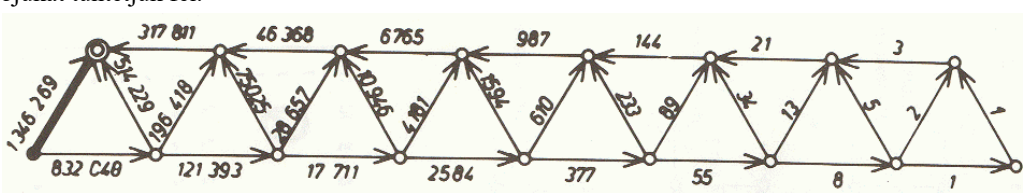
Ha valamennyi mérési eredményt (általános esetben a javítási egyenletrendszer tisztatag-vektorát) az *i*-edik sorban lévő megfelelő ágáramok értékével megszorozzuk, majd a szorzatokat összeadva megkapjuk az *i*-edik ismeretlen legkisebb négyzetek módszere szerint kiegyenlített értékét.

Mindezekről világosabb képet csak akkor kaphatunk, ha a hálózat ***in****formáció-****ter****jedési* ***gráf****jait* is megrajzoljuk, melyeket röviden *intergráfok*-nak fogunk nevezni. Annyi ilyen gráfot rajzolhatunk, amennyi ismeretlen pont (illetve ismeretlen koordináta) van a hálózatban. Ezek lényegében meghatározási tervhez hasonló mérési vázlatok, azonban a mérési eredményeket jelképező vonalak (oldalak) mellé oda van írva a félinverz egyes soraiból az *A*-mátrix segítségével kiválogatható összes *ágáram* értéke is. Ezt a válogatást az A^+ és A^T mátrixok elemenkénti szorzásával valósíthatjuk meg. Ezzel azokat az irányított gráfokat hozzuk létre, melyek segítségével az adott pontokból, mint információforrásokból mindig más és más ismeretlenbe, mint nyelőpontba futó információs folyamatot vizsgálhatjuk. A legfontosabb haszna ennek a szemléltetésnek, hogy az egyes méréseknek az információs folyam(at)ban betöltött egymáshoz viszonyított (relatív) szerepét közvetlenül érzékelhetjük. Nézzünk most néhány konkrét hálózati példát az elmondottakra.

Egyszerű poligonláncolat szűrése (kiegyenlítése) három változatban

A Moore-Penrose félinverz mint ÉL-szűrő

A *2a. ábra* – az egyszerűség kedvéért – olyan magasság-mérésekből kialakított háromszögláncolatot szemléltet, melyen az ágáramokat is feltüntettük. Mivel utóbbiak csak 0 és 1 közé eső valós számok lehetnek, valódi törtként is ábrázolhatók és megtehetjük, hogy az ábrán csak a számlálójukat tüntetjük fel.



2a. ábra. Az élszűrő

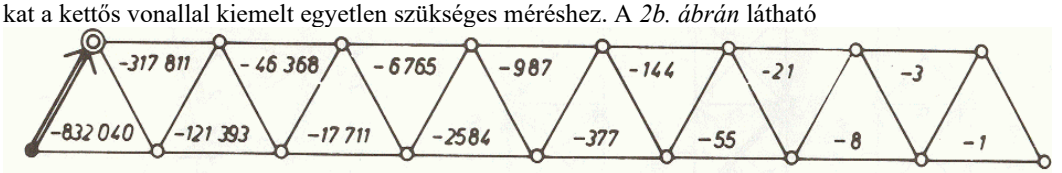
Közös nevezőjüket elegendő egyszer megadni, mely jelen esetben N = 2 178 309. Egységsúlyú méréseket feltételezve olyan ábrát kaptunk, melyen mind a csomóponti, mind a hurok-törvények teljesülése egyszerre szemlélhető. Az ágáramok értékei ugyanis ilyenkor megegyeznek az *ágfeszültségek* értékeivel. Különböző súlyok esetén pedig a közismert *Ohm-törvény* szolgáltatja az ágáramok és ágfeszültségek között fennálló kapcsolatot. Ebben a villamosságtani értelmezésben a mérések P súlya természetesen a *vezetést* (vezetőképességet) jelenti, míg a P^{-1} súlyreciprok fogja a mérésnek, mint csatornának az *ellenállását* megadni. Mivel példánkban adott pontok nincsenek, az ábra bal oldalán kettős vonallal kiemelt *forrás-nyelő pár* mutatja, hogy melyik pontból melyik pontba folyik (terjed, áramlik stb.) a magassági információ. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a szűrés (kiegyenlítés) alkalmával, a kettős vonallal jelzett egyetlen mért magasság-különbség kiegyenlített értékét keressük, illetve kapjuk meg (*Halmos et al. (1974b, 1977), Buyong, Kuhn (1990)*.

Az információ-terjedés alá van rendelve az *információ-megmaradás* törvényének (*Halmos, Kádár (1978)* is, mely azonban nem független törvény, hanem a csomóponti törvények egyenes következménye. Ez azt jelenti, hogy ha megfelelő normalizálással egységnek választjuk az egy vagy több forráspontból közvetlenül kiinduló ágáramok összegét, akkor a mindig egyetlen nyelőpontba közvetlenül befutó ágáramok összege is mindig egységnyi marad. Sem több, sem kevesebb. Ez a Kirchhoff-törvényeknek mondhatni egyik zsenialitása. Ez a megmaradási törvény nemcsak az ideális, hanem az ún. *zajos* csatornákra is érvényes, tehát a *mérési hibákkal terhelt* geodéziai hálózatokra is. Ennek ellenére a szűrés (kiegyenlítés) utáni középhibák mégis előállíthatók, de nem az ágáramokból, hanem az ágfeszültségekből, a mikéntjére a későbbiekben még példákat mutatunk be.

Végül, de nem utolsó sorban, már csak azt kell megemlítenünk, hogy az információ-terjedés most ismertetett *fizikai modellje* mögött (rejtve és láthatatlanul) mindig jelen van a klasszikus kiegyenlítés *statisztikai modellje* is a *hibaterjedési törvénnyel* egyetemben. A két modell közötti konverzió kívánságra mindig könnyen megvalósítható.

A Moore-Penrose félinverz mint LAP-szűrő

A gyakorlatban a szintezési hálózatokat a III. kiegyenlítési csoport szerinti korreláta-kiegyenlítéssel egyenlítik ki. Ilyenkor olyan szűrőre van szükség, amelyik a poligon-záróhibákból képez korrekciókat a kettős vonallal kiemelt egyetlen szükséges méréshez. A *2b. ábrán* látható

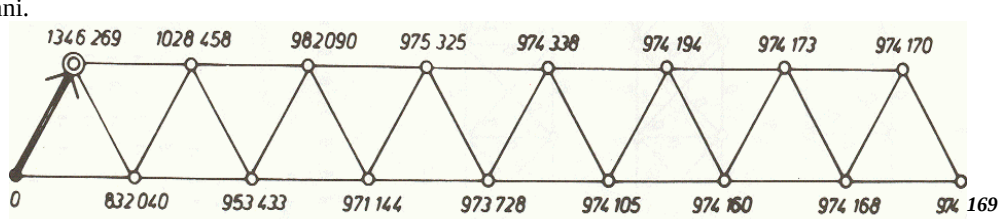


2b. ábra. A lapszűrő

számértékek a 2a. ábrán láthatókból értelemszerűen keletkeznek. Ezzel a szűrővel tehát a feltételi egyenletrendszer tisztatag-vektorából végezhetünk szűréseket.

A Q súlykoefficiens-mátrix mint CSÚCS-szűrő

Végül a II. kiegyenlítési csoport szerinti koordináta-kiegyenlítés esetéhez is tartozik egy szűrőrendszer. Ez a normál egyenletrendszer együttható-mátrixának invertálásával képezhető *Q* súlykoefficiens-mátrix soraiból áll. Segítségével a normál egyenletrendszer *L* tisztatag-vektorából végezhetünk szűréseket, amit a hagyományos kiegyenlítésnél a *Q*L* mátrix-vektor szorzással szoktak megvalósítani.



2c. ábra. A csúcsszűrő

Az ÉL-, LAP- és CSÚCS-szűrő összehasonlítása

A fentiekben bemutatott háromféle szűrőrendszer közös tulajdonsága, hogy mindegyik valamilyen lineáris egyenletrendszer *tisztatag-vektorából* végez szűréseket. Az ábrák alapján azonban egy lényeges különbséget is észlelhetünk. Amikor ugyanis a Moore-Penrose félinverzzel szűrünk, (2a. és 2b. ábrák) megfigyelhetjük, hogy a nyelőponttól távolodva az ágáramok értékei rohamosan csökkenek. A csökkenés mértéke *exponenciális*. Ezzel szemben a normálegyenlet *Q* inverzével történő szűrésnél nem figyelhetünk meg jelentős csökkenést. Ez azért van, mert a félinverz a hálózatokban folyó információterjedést a nyelőpont közvetlen szomszédságára *lokalizálja*. A hálózat távolabbi részeiben található mérési eredmények és információforrások (adott koordinátájú pontok) hatása már olyan kicsi, hogy minden további nélkül elhanyagolhatók. Ezért is neveztük el az ilyen ki-

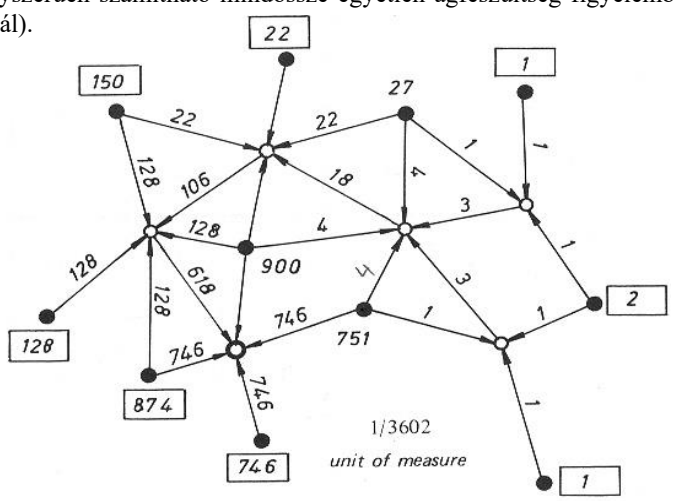
egyenlítést első publikációnkban *lokális kiegyenlítésnek*. Azt is mondhatjuk, hogy a Moore-Penrose *félinverzzel való szűrés az eredeti globális hálózatot annyi független lokális hálózatra bontja fel, amennyi az ismeretlen pontok (illetve koordináták) száma.* Ezek az egyes nyelőpontokat körbezáró kis hálózatok csupán egyetlen ismeretlent tartalmaznak, és nem is szükséges, hogy adott pont egyáltalán szerepeljen bennük. Ilyenkor a nyelő szomszédságában lévő valamelyik ismeretlent tekintjük zéruspontnak. Az is előfordulhat, hogy valamelyik mérés (pl. mért magasság- vagy koordinátakülönbség) lesz az az ismeretlen, amely a szűrés tárgyát képezi. A lokális hálózatokban szereplő többi ismeretlen pont *tranzit-pont* lesz, csak átengedi magán az információs áramokat, de maga nem is vesz részt ebben a kiegyenlítésben. Előbb vagy utóbb nyelőpontként majd ők is sorra kerülnek saját kis lokális hálózataikban.

A sok kicsiny lokális hálózat kiegyenlített pontjaiból úgy lesz kiegyenlített globális hálózat, hogy ezeket - egyszerű összeadási műveletek ismételt alkalmazásával - közös origóra vonatkoztatjuk. Még jobb és korszerűbb meghagyni mindegyiket saját rendszerében, csupán egyetlen *lefedőfába* *Kádár (2002)* (vagyis *virtuális koordináta-rendszerbe*) foglalva. Így ezek alapján, esetenként, csak a kívánt pontokról szükséges valódi, hagyományos koordináta-jegyzéket készíteni.

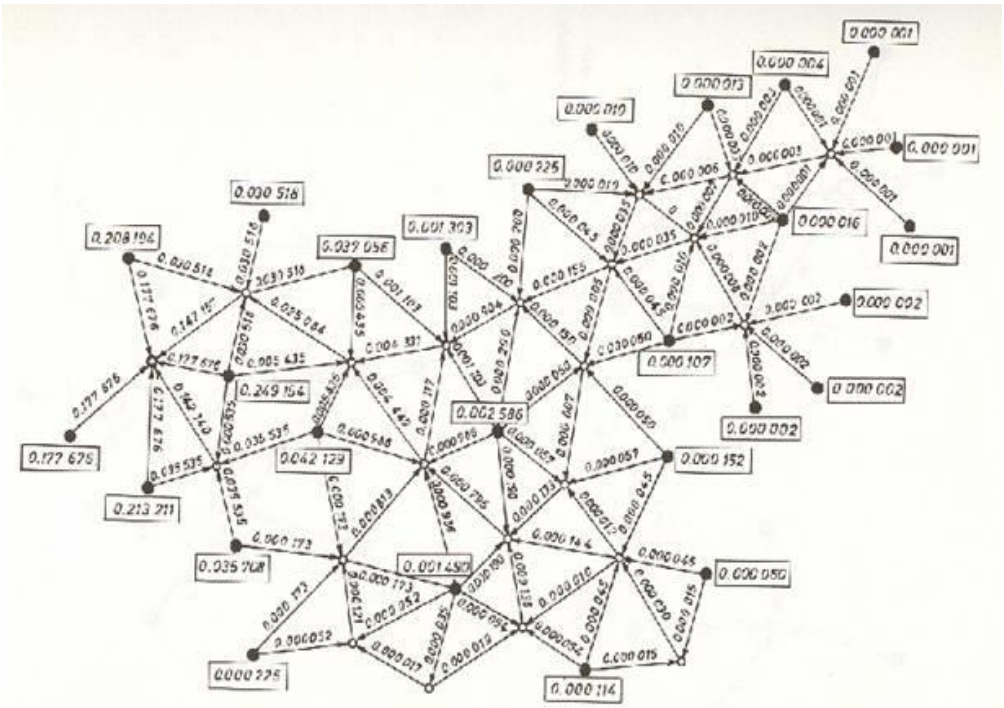
Információterjedés több adott pont esetében

A *3a. ábrán* feltüntetett intergráfon kétféle számozás is látható. A keretezés nélküli számok *ágáramokat*, míg a bekeretezettek *csomóponti áramokat* jelentenek. A 11 forráspontból kiinduló *forrásáramok* számlálóinak összege – az információ magmaradási törvény értelmében – pontosan ugyanannyi, mint amennyi az ábra alján látható nyelőpontba befutó *nyelőáramok* összege. (Az a nyelőpont, ahova valamennyi nyíl befutást mutat). Ez az összeg pedig éppen a *3602* nevezővel egyenlő. Az információterjedés lokalitása már egy ilyen viszonylag kicsiny hálózaton is jól érzékelhető. Mivel egységsúlyú magasságmérésekről van szó, mind a csomóponti, mind a hurok-törvények teljesülése ugyanerről az ábráról egyszerre leolvasható.

A *3b. ábrán* látható nagyobb magassági hálózatban az információterjedés lokalitása még szembetűnőbb. A 26 forráspontból kiinduló egységnyi információs áram mindössze 6 ágáramon keresztül érkezik el az ábra bal oldalán található egyetlen nyelőpontba. Érdemes megfigyelni, hogy amíg a nyelőpont közelében lévő egyik forráspontból származik az összes információ 1/4 része, egy másikból az 1/5 része, addig az ábra jobb oldalán lévőkből csupán egy-*egy milliomod* része! Ugyanez igaz az ágáramokra is. Mivel most is egységsúlyú magasságokról van szó, a feltüntetett ágáramok értékei egyúttal az ágfeszültségekre is vonatkoznak. Noha az információáramlás a megmaradási törvény értelmében veszteségmentesnek mutatkozik, a nyelőpont kiegyenlített értékének középhibája mégis egyszerűen számítható mindössze egyetlen ágfeszültség figyelembe vételével (lásd a későbbi példáknál).



3a. ábra. Magassági hálózat *intergráfja* 11 forrásponttal



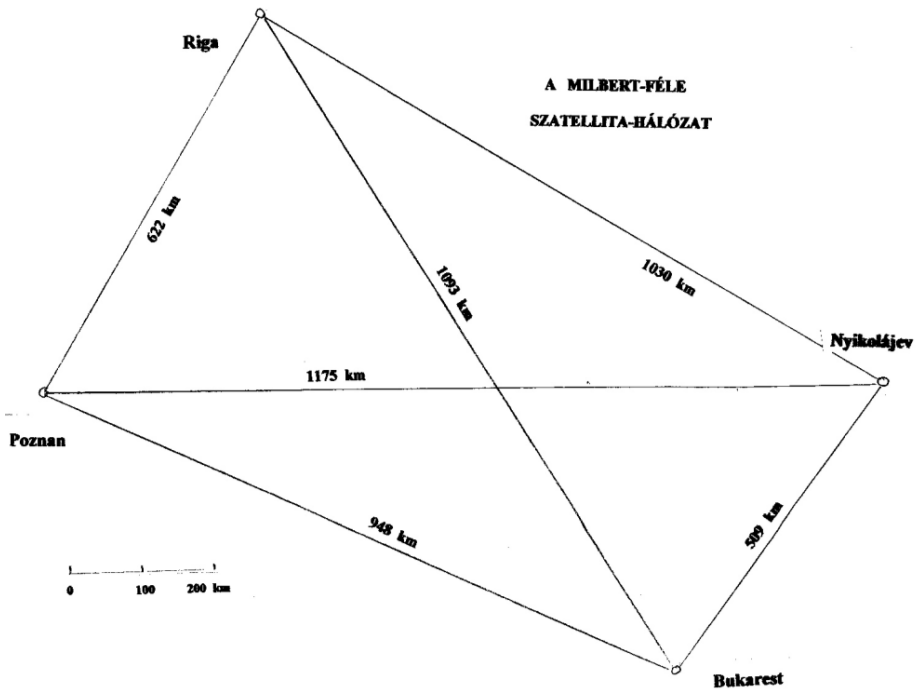
3b. ábra. Magassági hálózat *intergráfja* 26 forrásponttal

Az általánosított Kirchhoff törvények

Az eddigi példák kivétel nélkül magassági hálózatokra vonatkoztak. Az eredeti Kirchhoff-törvények ugyanis csak az ilyen egyszerűbb típusú geodéziai hálózatok információáramlásának modellezésére alkalmasak. Erre a villamosságtan szakemberei is hamar rájöttek, amikor az egyenáramú hálózatok elterjedése után elkezdték a váltóáramú villamos hálózatok modellezését. Megállapították, hogy célszerűbb az áramokat nem skalár, hanem vektoriális mennyiségeknek tekinteni. Amennyiben nincs kétféle ágáram értelmezés (skaláris és vektoriális), akkor a Kirchhoff-törvények *dimenziófüggetlen* megfogalmazása is lehetséges: ***a csomópontba befolyó és a csomópontból elfolyó áramok vektoriális összege zérus*** **(I. törvény),** továbbá ***minden zárt áramkörben a feszültségek vektoriális összege zérus*** **(II. törvény)** *Korda (1963)*.

A geodéziai alkalmazást illetően ebből az következik, hogy csupán egy jelentéktelen módosításra van szükség az *A* és *B* topológiai mátrixok belsejében található *+1* és *-1* elemek esetében, ha azt akarjuk, hogy ne csak magassági, hanem bonyolultabb hálózatokra is használhatók legyenek. Ha ugyanis a *+1* és *-1* elemeket nem *skalár egységeknek* (vagyis nemcsak *z-irányú egységvektoroknak*), hanem *tetszőleges irányú egységvektoroknak* tekintjük, akkor az említett mátrixok nemcsak az A^+ félinverz belsejében található ágáramok *összeválogatására*, hanem *síkbeli vagy térbeli tájékozásukra* is alkalmasak lesznek. Ehhez nem kell mást tennünk, mint az *A* mátrix oszlopait és a *B* mátrix sorait síkbeli alkalmazásoknál *megkettőzni* (illetve térbelieknél *megháromszorozni*). Az egyikbe az egységvektor tájékozási szögének *szinuszát*, a másikba pedig a *koszinuszát* feltüntetni (illetve térben mind a három *iránykoszinuszát* megadni). Mindjárt geodéziai alkalmazásra gondolva láthatjuk, hogy miként lehet magassági hálózat együttható mátrixaiból pl. irány- és/vagy távolságméréses hálózathoz tartozó hasonló mátrixokat kifejleszteni.

Példa az általánosított Kirchhoff-törvények alkalmazására



4. ábra. Egy irány- és távolság-méréses térbeli hálózat

Már a 70-es években is felhasználta három publikációnk a Milbert által közölt *Milbert (1965)* hálózati adatokat *(Halmos et al. 1974b, 1977), Kádár, Karsay (1968-69)* a kiegyenlítési számpéldákhoz. Akkor azon hálózat kiegyenlítési eredményeit hasonlítottuk össze saját kiegyenlítésünkkel, most viszont ugyanazt a hálózatot használjuk fel információs analízisünk számpéldájaként.

Mivel az 1.ábra az (általánosított) Kirchhoff-törvényeknek a geodéziai hálózatokban történő érvényességét szemlélteti, ezért a Milbert-hálózatban folyó vizsgálatunkhoz sincs szükség másra és többre, mint a javítási egyenletek egymás alá írt együtthatóiból álló *A* mátrixra és a mérési eredmények súlyainak *P* vektorára. Ezeket korábbi publikációinkból csaknem változatlanul vettük át. Mivel ott a javítási egyenleteket pontonként csoportosítottuk (mind az irány-, mind a távolság-mérésekhez hármat-hármat használva), most a csoportosítás főszempontja, hogy a javítási egyenlet szükséges vagy fölös méréshez tartozik-e? A másodlagos szempont ugyanaz marad, mint a korábbi pontonkénti csoportosításnál. A kétféle csoportosítást a *„pont-orientált”* és a *„mérés-orientált”* elnevezéssel különböztetjük meg egymástól.

A FELTÉTELI egyenletek B együttható mátrixának előállítása a JAVÍTÁSI egyenletek A együttható mátrixából

Ia. táblázat. Az *Ap* mátrix szükséges soraiból alkotott *Aps* mátrix

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.314588	0.948844	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	-0.314588	0.000000	0.027000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.554379	0.719835	0.000000	-0.554379	-0.719835
0.000000	0.000000	0.000000	-0.554379	0.000000	-0.417734	0.554379	0.000000	0.417734
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.427186	0.421809
0.000000	0.527386	0.783730	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
-0.527386	0.000000	-0.328071	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.630368	0.418604	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.630368	-0.418604
0.107630	0.257119	-0.173020	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Ib. táblázat. Az *Ap* mátrix fölös soraiból alkotott *Apf* mátrix

0.000000	0.000000	0.000000	_0.948844	_0.027000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	_0.719835	0.417734	0.000000	0.719835	_0.417734	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.427186	0.000000	0.799743
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.421809	_0.799743	0.000000
_0.783730	0.328071	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
_0.630368	0.000000	_0.653764	0.000000	0.000000	0.000000	0.630368	0.000000	0.653764
_0.418604	0.653764	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.418604	_0.653764	0.000000
0.000000	0.368723	_0.559557	0.000000	_0.368723	0.559557	0.000000	0.000000	0.000000
_0.368723	0.000000	_0.742253	0.368723	0.000000	0.742253	0.000000	0.000000	0.000000
0.559557	0.742253	0.000000	_0.559557	_0.742253	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.257119	0.614233	_0.413329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
_0.173020	_0.413329	0.278136	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Ic. táblázat. Az *Aps* és *Apf* összekapcsolásából származó „mérés-orientált” *Am*, a továbbiakban csak *A* mátrix (szemben az eredeti „pont-orientált” *Ap* mátrixszal)

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.314588	0.948844	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	_0.314588	0.000000	0.027000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.554379	0.719835	0.000000	_0.554379	_0.719835
0.000000	0.000000	0.000000	_0.554379	0.000000	_0.417734	0.554379	0.000000	0.417734
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.427186	0.421809
0.000000	0.527386	0.783730	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
_0.527386	0.000000	_0.328071	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.630368	0.418604	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.630368	_0.418604
0.107630	0.257119	_0.173020	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	_0.948844	_0.027000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	_0.719835	0.417734	0.000000	0.719835	_0.417734	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.427186	0.000000	0.799743
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.421809	_0.799743	0.000000
_0.783730	0.328071	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
_0.630368	0.000000	_0.653764	0.000000	0.000000	0.000000	0.630368	0.000000	0.653764
_0.418604	0.653764	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.418604	_0.653764	0.000000
0.000000	0.368723	_0.559557	0.000000	_0.368723	0.559557	0.000000	0.000000	0.000000
_0.368723	0.000000	_0.742253	0.368723	0.000000	0.742253	0.000000	0.000000	0.000000
0.559557	0.742253	0.000000	_0.559557	_0.742253	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.257119	0.614233	_0.413329	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
_0.173020	_0.413329	0.278136	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

IIa. táblázat. A szükséges mérések logikai vektora

1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0

IIb táblázat. A fölös mérések logikai vektora

0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 0 1 1 1 1 1 0 1 1

IIc. táblázat. Az összes mérés (szükséges + fölös)

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

IId. táblázat. Az eredeti súlyok

0.06 0.04 0.20 0.04 0.03 0.03 1

IIe. táblázat. A „pont-orientált” Pp súlyvektor

0.06 0.06 0.06 0.04 0.04 0.04 0.2 0.2 0.2 0.04 0.04 0.04 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 1 1 1

IIf. táblázat. A „mérés-orientált” P = Pps, Ppf súlyvektor

0.06 0.06 0.04 0.04 0.2 0.04 0.04 0.03 1 0.06 0.04 0.2 0.2 0.04 0.03 0.03 0.03 0.03 0.03 1 1

IIg. táblázat. A „mérés-orientált” súlyvektor 1/P reciproka

16.667 16.667 25 25 5 25 25 33.333 1 16.667 25 5 5 25 33.333 33.333 33.333 33.333 33.333 1 1

III. táblázat. A normál egyenletrendszer „mérés-orientált” N = AT P A együttható mátrixa

0.173975	0.251084	_0.145525	_0.013472	_0.012460	_0.008211	_0.017178	0.008210	_0.012363
0.251084	0.675014	_0.395069	_0.012460	_0.020607	0.006190	0.008210	_0.024743	_0.007916
_0.145525	_0.395069	0.351011	_0.008211	0.006190	_0.025921	_0.012363	_0.007916	_0.018079
_0.013472	_0.012460	_0.008211	0.106448	0.001969	0.016964	_0.033020	0.012028	_0.009263
_0.012460	_0.020607	0.006190	0.001969	0.045862	0.027683	0.012028	_0.019274	_0.015962
_0.008211	0.006190	_0.025921	0.016964	0.027683	0.107690	_0.009263	_0.015962	_0.027707
_0.017178	0.008210	_0.012363	_0.033020	0.012028	_0.009263	0.122280	0.047230	0.089954
0.008210	_0.024743	_0.007916	0.012028	_0.019274	_0.015962	0.047230	0.208432	_0.012159
_0.012363	_0.007916	_0.018079	_0.009263	_0.015962	_0.027707	0.089954	_0.012159	0.209288

IV. táblázat. Az „mérés-orientált” A együtthatómátrix A+ = N -1 AT P félinverzének a transzponáltja

_0.001876	0.109615	0.161737	_0.150780	0.326365	0.564254	_0.259509	0.173692	0.232555
_0.062939	0.024274	_0.003081	_0.241289	0.073759	0.041593	_0.157456	0.068881	0.069064
0.107105	_0.050227	_0.008019	0.050231	0.191487	0.163741	0.235987	_0.155006	_0.205774
0.018640	_0.039491	_0.047085	_0.135138	0.011882	_0.143645	0.170824	_0.049481	_0.025010
0.080913	_0.009192	0.036670	0.007896	0.084850	0.055813	_0.237848	_0.317555	0.508679
_0.142591	0.347795	0.428147	_0.015686	0.168782	0.073720	_0.174635	0.133439	0.146468
_0.311227	0.051105	_0.117661	_0.077080	0.051167	_0.053551	_0.124826	0.048577	0.023259
_0.019684	0.117830	0.162855	0.093961	_0.155955	0.014800	0.212950	_0.145402	_0.148395
0.107622	0.257117	_0.173028	_0.009859	0.345702	_0.114644	_0.161162	0.085009	0.086098
_0.189671	0.063807	_0.023173	_0.714823	0.194456	0.077021	_0.452637	0.192849	0.188349
0.104908	_0.089123	_0.067180	_0.137620	0.159717	_0.063135	0.399627	_0.181049	_0.187528
0.190077	0.070928	0.223634	0.146809	0.116016	0.225455	0.234646	0.019120	0.742932
_0.036207	_0.087245	_0.152168	_0.130178	0.044294	_0.118129	_0.676972	_0.613380	0.218728
_0.551206	0.292298	0.091486	_0.124303	0.181032	_0.033721	_0.294135	0.155197	0.125678
_0.191310	_0.035458	_0.171696	0.017135	_0.093276	_0.030257	0.153457	_0.050658	_0.013024
_0.147456	0.098657	0.054883	0.108827	_0.223684	_0.004743	0.322759	_0.184439	_0.162551
0.002886	_0.059480	_0.086596	0.010576	_0.517802	0.248249	0.169234	_0.083735	_0.093324
_0.090868	_0.069683	_0.160082	0.068782	_0.208549	0.197650	0.077165	_0.038939	_0.043957
0.143707	_0.013987	0.068612	_0.083091	_0.725870	0.199789	0.223572	_0.109468	_0.121158
0.257116	0.614218	_0.413353	_0.023549	0.825843	_0.273874	_0.384992	0.203073	0.205675
_0.173014	_0.413326	0.278144	0.015847	_0.555729	0.184294	0.259072	_0.136655	_0.138406

V. táblázat. Az As mátrix As -1 inverze

0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.487536	_1.692062	0.000000	1.000002
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.731469	0.487533	0.000000	2.388907
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.783731	_0.328070	0.000000	_1.607539
0.158830	_3.178761	_0.090130	0.000000	_0.044931	_0.086582	_0.018651	0.109713	_0.091388
_2.402912	0.000000	3.167377	0.000000	1.578969	3.042707	0.655427	_3.855590	3.211586
1.850596	0.000000	_1.050140	0.000000	_0.523505	_1.008806	_0.217306	1.278316	_1.064797
1.553286	_3.178761	_0.881428	1.803820	_1.507481	_1.417945	_0.305438	1.796760	_1.496645
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	_0.941282	0.748517	0.161237	_0.948489	0.790062
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.417460	0.758059	0.163293	_0.960580	0.800133

VI. táblázat. A feltételi egyenletrendszer „mérés-orientált” Bm = B együttható mátrixának a transzponátja (B = Af As-1,Ef), ahol E = (f x f) méretű egységmátrix

0.086	0.000	_0.664	0.655	0.000	_0.979	_0.650	_1.922	_1.432	_1.695	0.000	0.000
_3.016	0.000	1.358	_1.341	0.000	2.004	1.331	0.000	1.172	_1.779	0.000	0.000
0.000	_0.754	0.377	_0.372	0.000	0.556	0.369	1.755	0.813	2.301	0.000	0.000
0.000	_1.298	_0.771	0.761	0.000	_1.137	_0.755	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	_0.490	_1.389	0.000	0.024	0.016	0.875	0.405	1.147	0.000	0.000
0.000	0.000	_0.001	0.001	_0.622	0.603	0.401	1.855	1.183	1.940	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	_1.486	_1.195	_0.794	0.000	_0.699	1.061	0.000	0.000
0.000	0.000	0.001	_0.001	0.000	_0.505	_1.372	_2.137	_0.989	_2.800	0.000	0.000
0.000	0.000	_0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	_2.389	1.608
1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000

VII. táblázat. A B együttható mátrix transzponátja az 1/P súlyreciprok vektorral megszorozva

1.43	0.00	_11.06	10.92	0.00	_16.32	_10.84	_32.03	_23.87	_28.24	0.00	0.00
_50.27	0.00	22.63	_22.35	0.00	33.40	22.18	0.00	19.53	_29.64	0.00	0.00
0.00	_18.84	9.41	_9.29	0.00	13.89	9.22	43.89	20.32	57.51	0.00	0.00
0.00	_32.46	_19.26	19.02	0.00	_28.43	_18.88	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	_2.45	_6.94	0.00	0.12	0.08	4.38	2.03	5.73	0.00	0.00
0.00	0.00	_0.01	0.01	_15.55	15.08	10.02	46.38	29.57	48.50	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	_37.15	_29.88	_19.84	0.00	_17.48	26.52	0.00	0.00
0.00	0.00	0.02	_0.02	0.00	_16.82	_45.74	_71.23	_32.98	_93.35	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	_2.39	1.61
16.67	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	25.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	25.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	0.00	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	0.00	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	33.33	0.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00

VIII. táblázat. Az „általánosított" KIRCHHOFF-törvények teljesülése a 3D Milbert hálózatban (A+ (A , (1/P) BT) = E , Z) lásd az 1.ábrát.

1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Véges szűrők végtelen hálózatokhoz

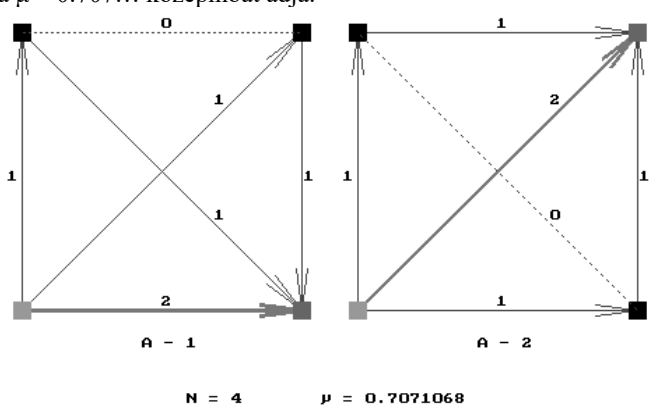
Az *5. ábrán* egy olyan négypontos magassági hálózat látható, amelyben mind a hat magasságkülönbséget megmértük. Az *A-1* és az *A-2* jelű négyszögekben az egyes mérési eredmények szűrésére használt Moore─Penrose félinverz egy-egy sorában lévő ágáramokat tüntettük fel. Bár gráfelméleti szempontból a két ábra nem különbözik egymástól, az egyiken az oldalt, a másikon az átlót tekintettük *hálózati ismeretlennek*, ezért kapták ezek a legnagyobb *2*-es súlyt (ágáram-értéket) az általánosított középérték-képzésben. A legkisebb (vagyis a *0)* súly valójában azt jelenti, hogy a hozzá tartozó mérést nem szükséges figyelembe venni. Ez az induló ábrája annak a sorozatnak, amelyen azt mutatjuk be, hogy akár *végtelen sok mérés* bevonásával is bővíthetjük az ilyen *átlós négyszög elemekből* álló alakzatokat, a kiegyenlítéshez mégis elegendő egy viszonylag kicsiny, *véges számú szűrőrendszer*.

Első megjegyzésünk, hogy mindenütt egységsúlyú mérési eredményeket tételezünk fel a teljes ábrasorozatban.

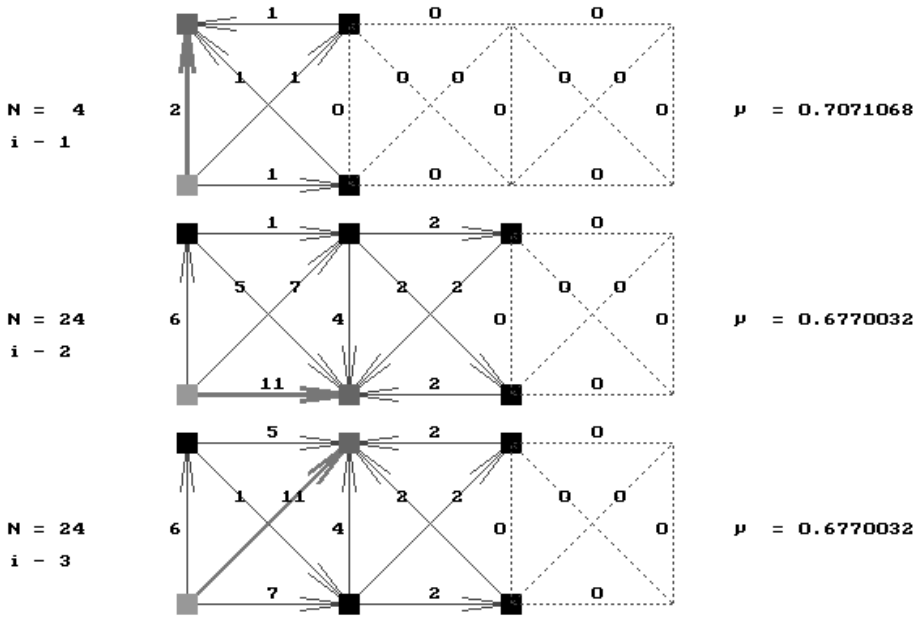
Másodszor az átlós négyszög elemeket mindenütt négyzetnek ábrázoltuk, azonban a pontok vízszintes helyzete semmilyen magassági hálózat modellezésénél nem játszik szerepet, sőt éppen a modell természeténél fogva a pontok egyetlen függőleges skálán képzelhetők el. Általában pedig a mindenkori terepviszonyoknak megfelelő általános négyszögekről van szó.

Harmadik megjegyzésünk, -- amit már korábban is említettünk – az, hogy az oldalak vagy átlók mellett feltüntetett egész számok valójában olyan valódi törtek számlálói, melyeknek közös *N* nevezőjét minden ábrán külön megadjuk.

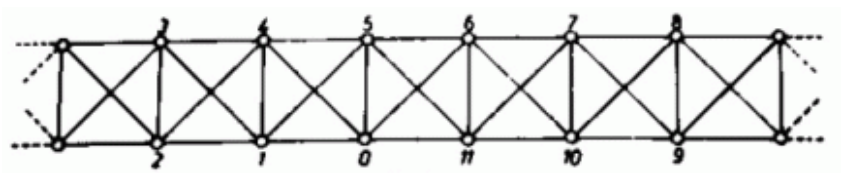
Negyedszer a geodéziában megszokott μ értéket, mely a kiegyenlített mérés középhibáját jelöli, az ágáramokból (súlyokból) úgy kapjuk meg, hogy négyzetgyököt vonunk a vastagabb nyíllal jelölt forrás-nyelő ág mellett látható ágáram tört-értékéből. Például az *5. ábrán* a 2/4 hányadosból vont négyzetgyök a μ = 0.707… középhibát adja.



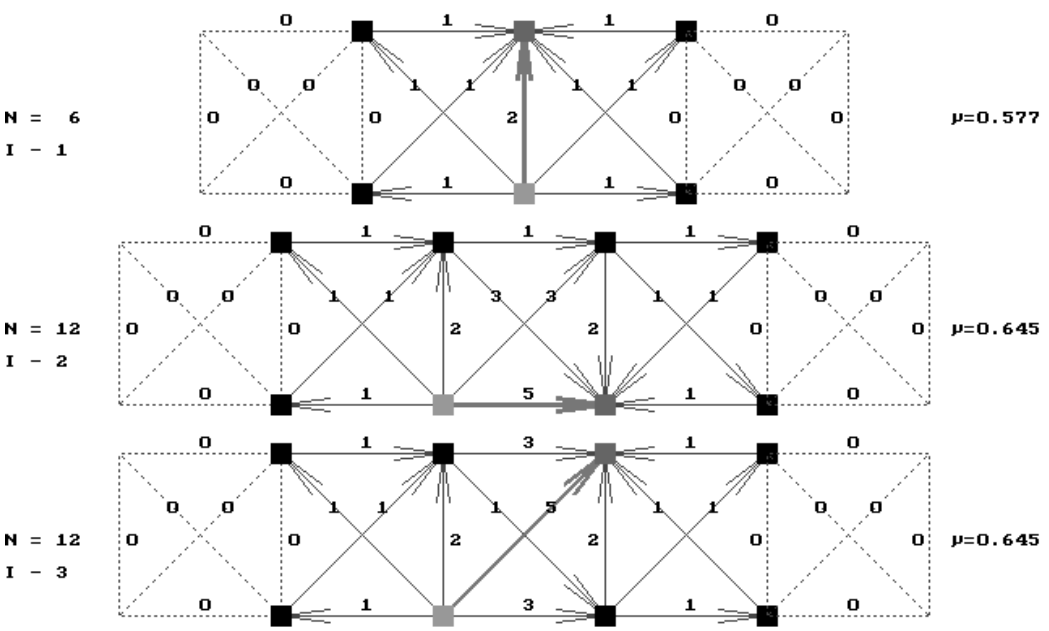
5. ábra. Átlós négyszög szűrése általánosított középérték-képzéssel



6. ábra. Kiterjesztés egyik irányban



7a. ábra. A hálózati pontok számozása



7b. ábra. Kiterjesztés két irányban (forrás-nyelőpárok: 0-5, 0-6. és 0-11. hálózati pontpárok)

Érdemes összehasonlítani a véges szűrővel történő kiegyenlítést a hagyományos Q súlykoefficiens mátrixszal kivitelezett „szűréssel". Mindkettő tisztatagból végzi a szűrést és mindkettő egyetlen mátrix-vektor szorzással. Valójában ugyanazt az $X = QA^TPL$ képletet is használják a hálózati ismeretlenek legkisebb négyzetek szerint kiegyenlített értékének meghatározásához. Ez a képlet három szorzást tartalmaz: X = Q*A^{T*}P*L, de közülük *csak az egyik végez szűrést*. A kétféle szűrési eljárást csupán az különbözteti meg egymástól, hogy erre a célra *melyiket használják a három szorzás közül*.

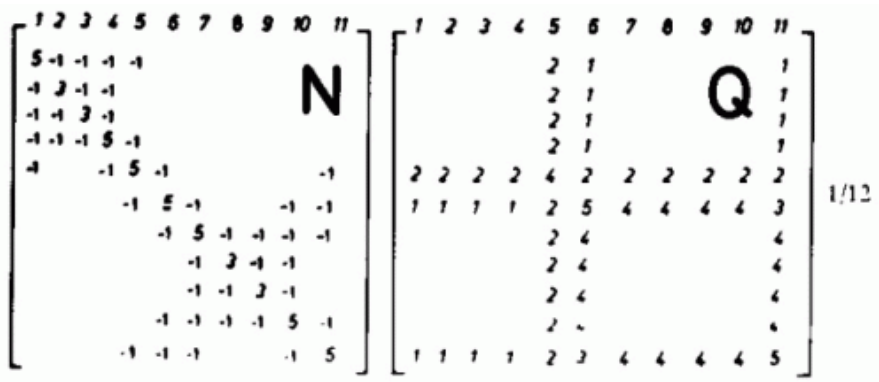
A Moore—Penrose félinverz a *javítási egyenletrendszer L* tisztatag-vektorából szűr *a harmadik szorzással* az előtte álló $(QA^TP) = A^+$-vel mint szűrővel.

A normálegyenlet inverze a *normál egyenletrendszer* A^TPL tisztatag-vektorából szűr *az első szorzással* az előtte álló *Q*-val, mint szűrővel.

Az alkalmazás szempontjából a kettő között az a lényeges különbség, hogy *véges elemű szűrésre csak az* A^+ *alkalmas,* míg a *Q* nem rendelkezik ezzel az előnnyel, mert *mérete mindig a hálózat kiterjedésével együtt növekszik.*

Fenti megállapításunk a *7. és 8. ábra* összehasonlításából is látszik, előbbin csak a félinverz szűrőjének véges elemeit, utóbbin pedig a Q mátrix azon három sorát (és oszlopát) tüntettük fel, amelyek az 5., 6. és a 11. hálózati pontokhoz, mint nyelőkhöz tartoznak. Látható, hogy míg a *7b. ábrán* már számos *0 értékű* szűrőelem található és ezek száma a hálózat növekedésével összhangban nő, addig a *Q* mátrix egyetlen egy zérus elemet sem tartalmaz. Természetesen a *0* elemek szaporodása nem a szűrő növekedését jelenti, hanem azt, hogy a hozzájuk tartozó mérésekre nincs szükség, azaz fölöslegesek a vizsgált nyelőpont kiegyenlítéséhez. *Tehát magukat a 0 elemeket is és a hozzájuk tartozó méréseket is elhagyhatjuk a szűrésnél. Ezért kapunk véges szűrőt akár végtelen nagy hálózathoz is.*

Megjegyezzük még, hogy az N normál egyenletrendszer üresen hagyott részei a *8. ábrán* valójában zérusokkal vannak feltöltve, de ezeket a nem-zérus elemek jobb kihangsúlyozása végett nem írtuk ki. A *Q* mátrix üresen hagyott részei viszont mindenütt olyan nem-zérus elemeket tartalmaznak, amiket már nem kívántunk bevonni az összehasonlításba.



8. ábra. A „ritka" *N* mátrix és (csak az 5., 6. és 11. pontok sorait és oszlopait tartalmazó) „sűrű" *Q* mátrix

Hálózat-kombinatorika

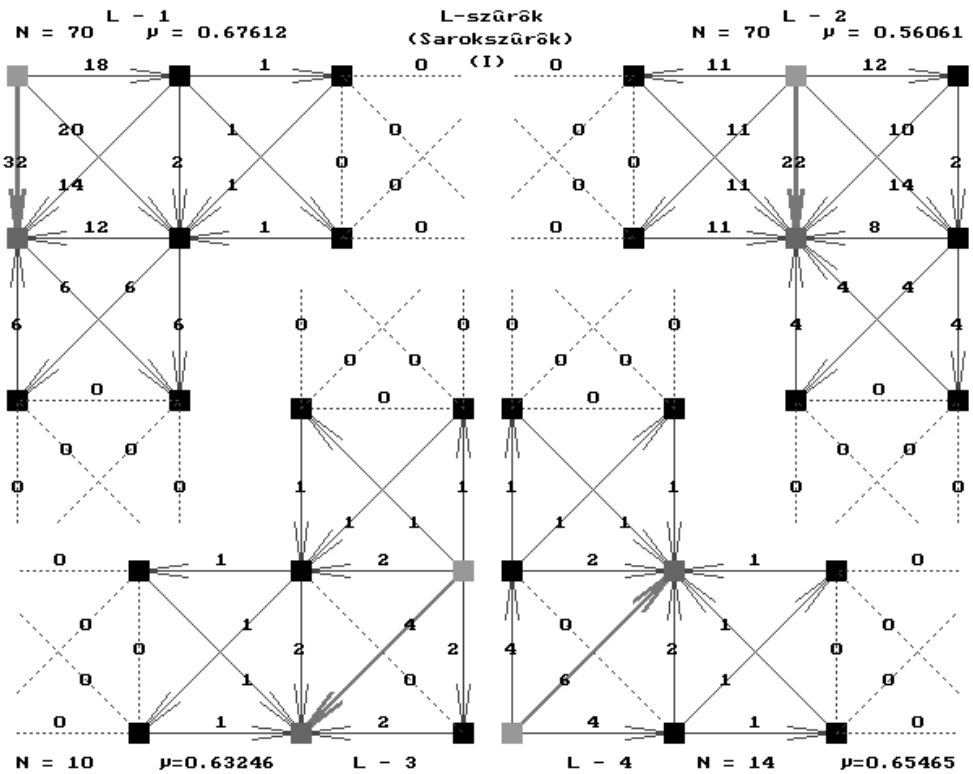
A *6. és 7. ábrán* még csak azon legegyszerűbb *hálózati kombinációkat* láthatjuk, melyek az átlós négyszögek egy-, illetve kétirányban történő megismétlése útján keletkeztek. Ezen belül háromféle olyan *forrás-nyelőpár kombinációt* is megfigyelhetünk, melyek az *eltolásra invariánsak,* amiből az következik, hogy bármilyen kiterjedésű hálózat esetén elegendő *háromféle szűrőt* alkalmazni.

A továbbiakban vizsgáljuk meg azt a kérdést, miként lehet az átlós négyszög elemeket úgy kombinálni (megismételni), hogy az A^+ szűrő végessége bonyolultabb hálózatok esetében is fennmaradjon.

A véges szűrő bővítésének vizsgálataink szerinti szabálya az, hogy egyszerre mindig csak egyetlen újabb átlós négyszöget kapcsolunk a már meglévő véges szűrőkhöz. A kapcsolódás csakis

egyetlen közös oldal mentén történhet. Ha ismételten így járunk el, akkor *tetszőleges elemszámú, illetve hosszúságú,* továbbá egymást akár *minden lehetséges kombinációban keresztező* egyszerű láncolatokat állíthatunk elő úgy, hogy a hozzájuk tartozó szűrők *mindig végesek maradnak*.

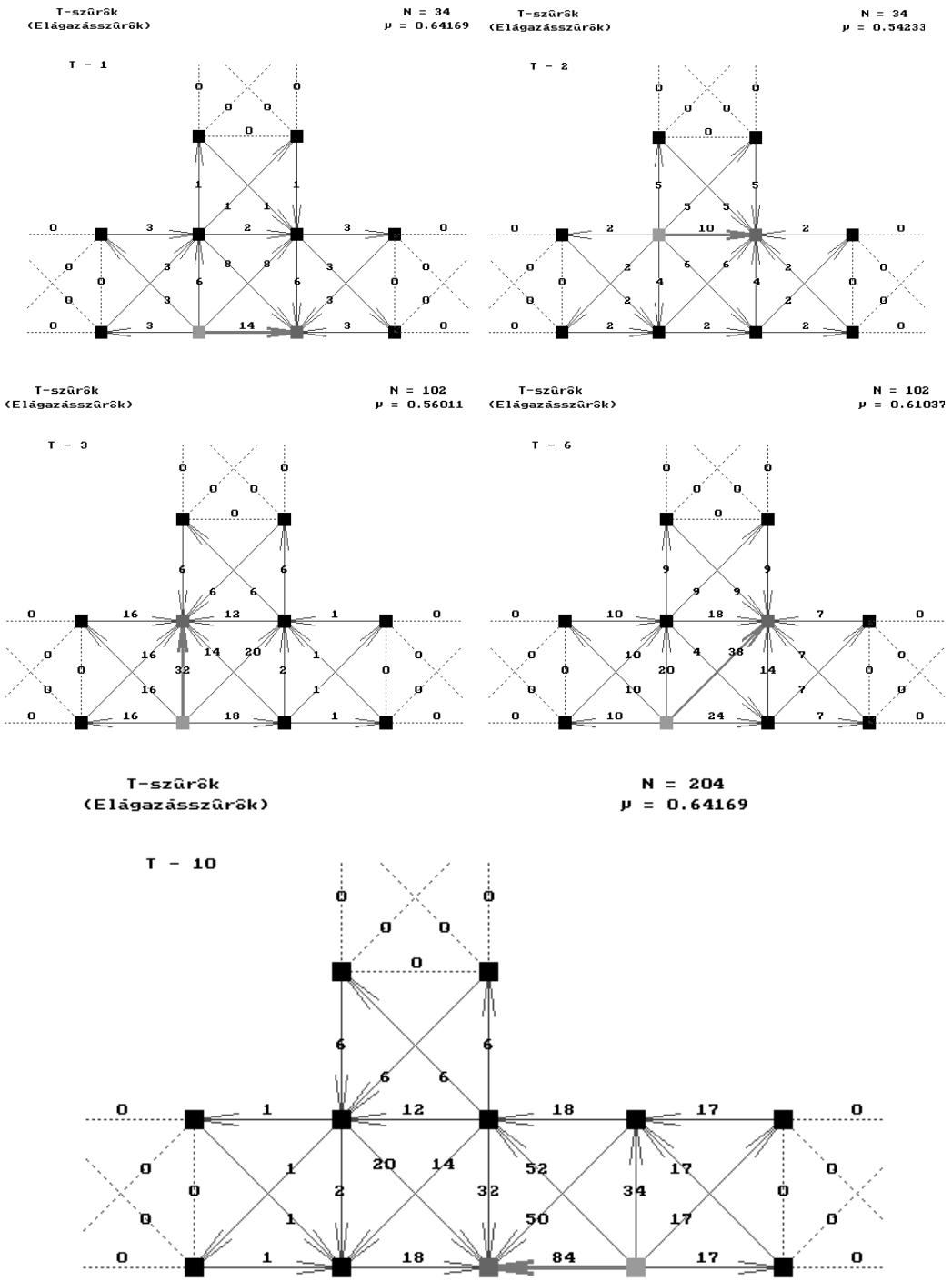
Állításunkat „teljes indukcióval" matematikailag is bizonyítani lehet, de tapasztalatszerzés céljából mintegy száz láncolat-kombinációt ténylegesen elő is állítottunk. Számítógépes programokkal elkészítettük a hozzájuk tartozó Moore—Penrose félinverzeket és ezek mind-mind végesnek bizonyultak. A továbbiakban ezek közül mutatunk be néhányat.



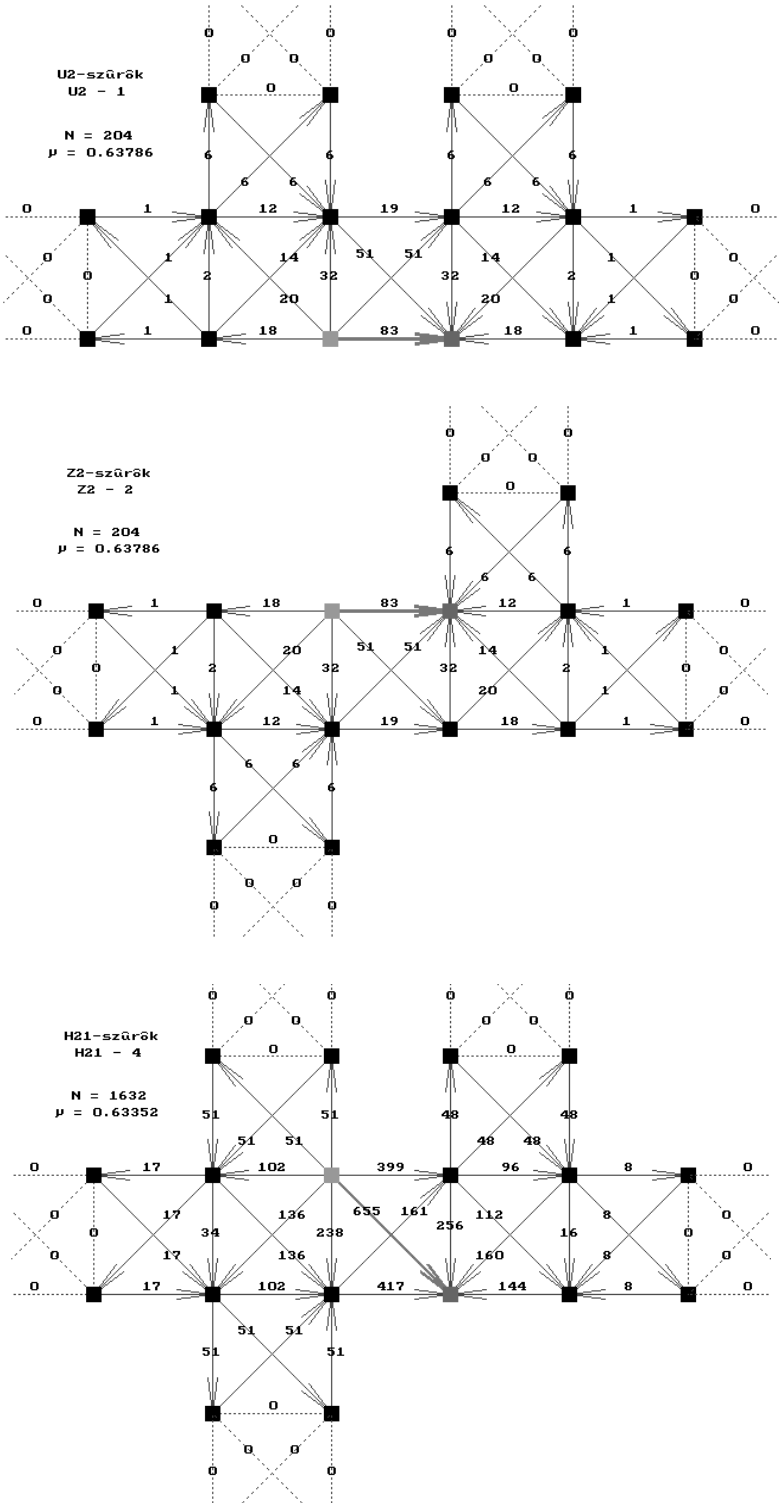
9. ábra. Az átlósnégyszög kiterjesztése egymásra merőleges irányokban

Összefoglalás

Tanulmányunkban a Moore--Penrose félinverznek a geodéziai hálózatokban végbemenő információáramlás törvényszerűségeinek vizsgálatában játszott szerepét mutatjuk be. Ehhez a negatív szemléletű hibaterjedési törvény helyett a kiegyenlítőszámítás pozitív oldalát tükröző Kirchhoff-törvényeket használjuk. Bevezetjük az információgyűjtő terület, a lokális kiegyenlítés és a véges szűrők fogalmát és igazoljuk – egy műholdgeodéziai hálózat kiegyenlítésének szám példáján követve – az általánosított Kirchhoff-törvények érvényesülését a geodéziai hálózatokban. Az átlós négyszög különböző kombinációit vizsgálva, csaknem száz olyan hálózati struktúrát találtunk, amelyekhez a hagyományos kiegyenlítéssel ellentétben véges szűrők alkalmazhatók.



10. ábra. Az átlósnégyszög kiterjesztése T alakban
(az 1., 2., 3., 6., és a 10. eset a tíz lehetséges forrás-nyelőpár kombináció közül)



11. ábra. További szimmetrikus és aszimmetrikus kiterjesztések

Hivatkozások

Andrásfai B (1983): Gráfelmélet (Folyamok — Mátrixok), *Akadémiai Kiadó*, Budapest, 37.

Buyong T, Kuhn W (1990): Local Network Adjustment for Measurement-Based Multipurpose Cadastre, *FIG XIX. Int. Congr*. Helsinki, 3. Comm. 526-537.

Csepregi Sz (1983): Mátrixok súlyozott Moore—Penrose-féle általánosított inverze és a szekvenciális kiegyenlítés, *Geodézia és Kartográfia* 5.

Fülöp G (1996): Az információ, 2. bőv. kiad. *ELTE Könyvtártudományi-Informatikai Tanszék*, Budapest.

Halmos F, Kádár I, Karsay F (1976): Szatellita geodéziai és egyéb geodéziai feladatok megoldása közvetlen vektor-mátrix aritmetikával feladat-orientált számrendszerekben, *Kozmikus Geodéziai Szemináriumi Kiadvány*, Sopron, 81-134.

Halmos F, Kádár I, Karsay F (1974): Local Adjustment by Least Squares Filtering, *Bulletin Géod*. 111, 21-51.

Halmos F, Kádár I, Karsay F (1977): Lokális kiegyenlítés a legkisebb négyzetek módszerén alapuló szűrőkkel, *Geod. és Kart*. 4. és 5.

Halmos F, Kádár I, Karsay F (1975): A geodéziai hálózatokban lejátszódó információ-áramlás fizikai törvényszerűségeinek vizsgálata, *EFE 1975. évi kutatási beszámolói*, Sopron 341-347.

Halmos F, Kádár I (1977): An Attempt to Interpret Physically the Notion-System of Geodetic Information, *Bulletin Géod.* 51; 1, 12-16.

Kádár I (2002): GPS-adatok tárolása és szolgáltatása minimális lefedőfával, Továbbképző Szeminárium, Sopron okt. 17-18, *Geomatikai Közlemények* V. 215-252.

Kádár I, Karsay F (1968-69): Szatellita- és hagyományos geodéziai hálózatok szigorú kiegyenlítése tetszőleges előzetes koordinátákkal, *Geod.és Kart.* 6, 451-456. és 1, 46-51.

Kádár I, Ágfalvi M (1982a): Netzmanipulation mit der Programsprache APL, *V. Int. Symp. für Markscheidewesen*, Bulgarien, Varna. Konf. anyag V. 155-178.

Kádár I, Ágfalvi M (1982b): Dinamikus hálózatkialakítás és –számítás APL programnyelvvel, *Geod. és Kart*. 5, 334-341.

Korda T (1963): Váltakozó áram, *Műszaki Kiadó*, Budapest, 49. és 56.

Milbert Sz. (1965): Uravnyivanyije i obrabotka szetyi koszmicseszkoj trianguljacii, *Nabljugyenyija Isszkusztvennüh Szputnyikov Zemlji*, 1964. 3.

Szendy K (1967): Korszerű hálózatszámítási módszerek, *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

DIGITÁLIS FELÜLETMODELL NAGYPONTOSSÁGÚ REPREZENTÁCIÓJA CSÖKKENTETT ADATPONT-HALMAZZAL

Kalmár János[*]

***The author presents an algorithm for reduction of data points of Digital Surface Models** - Its estimation error can be limited according to the requirements. The quality and accuracy of the used interpolation methods are also discussed.*

Keywords: digital surface model, finite element interpolation, Dirichlet neighborhood, reduction of data points

A szerző bemutat egy olyan pontritkító algoritmust, melynek használata esetén a digitális felületmodellek becslési hibája igény szerint szabályozható. Emellett összehasonlításra kerül a szerző által alkalmazott interpolációs módszerek minősége (pontossága) is.

Kulcsszavak: digitális felületmodell, végeselem interpoláció, Dirichlet szomszédság, ponthalmaz redukció.

Bevezetés

A probléma a gyakorlatból származik: egy N adatponttal leírt $\mathcal{A}$ felületmodellt helyettesítsünk egy M(<N) elemű $\mathcal{B}$ részhalmazával úgy, hogy a redukált modell minél kevésbé térjen el az eredetitől. Az eltérést $\mathcal{B}$ -re alapozott magasságbecslés alapján számítjuk $\mathcal{A}$ - $\mathcal{B}$ halmaz elemeire: vesszük az adott (mért) és a $\mathcal{B}$ alapján számított magasságok különbségének négyzet-(vagy abszolút-érték)-összegének átlagát. Másképpen fogalmazva: keressük meg az $\mathcal{A}$ halmazt legpontosabban reprezentáló $\mathcal{B}$ részhalmazt.

Hibaelméleti megfontolások

Az optimális megoldást az biztosítaná, ha képeznénk és kiértékelnénk a fenti célfüggvény alapján az összes M elemű részhalmazt. A lehetséges esetek száma $\binom{N}{M} = \frac{N!}{M!(N-M)!}$, ami számítógép használata mellett is jelentős végrehajtási időt sugall, ugyanis a feladat NP típusú, vagyis műveletigénye nem korlátozható a méret (N és M) egy polinomiális függvényével.

A fentiek miatt célul tűztem ki egy olyan heurisztikus megoldás kifejlesztését, ami gyorsan vezet az optimálishoz közeli eredményre. Először a célfüggvényt vizsgáltam meg, ami a választott normától függően $\sqrt{\sum_{i=M+1}^{N} v_i^2 /(N-M)}$ vagy $\sum_{i=M+1}^{N} |v_i| /(N-M)$ alakú, ahol v_i jelöli az $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$ – hez tartozó pontokon a magasságbecslések hibáját. Vegyük észre, ha egy új $\mathcal{A}$-beli ponttal egészítem ki $\mathcal{B}$-t és lokális interpolációt alkalmazok (pl. valamilyen véges-elem módszert, ld. *Kalmár, 1986*), akkor a célfüggvény egyrészt egy taggal megrövidül (az új pontban nincs hiba), a lokalitás miatt a tagok nagy része változatlan marad (az új ponttól távolabbi pontokban), illetve a maradék (újpont-közeli) pontokban a v_i hibák változásának várható értéke 0 lesz. Tehát a célfüggvénynek általában csökkennie kell, mert minden pótlólagos (új) információ csökkenti a bizonytalanságot (a becslés hibáját), feltéve, hogy a becslő és a valódi függvény ugyanabba a kategóriába (esetünkben folytonos, vagy folytonosan differenciálható) tartozik, és az új adatpont nem tartalmaz durva hibát.

[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: kalmar@ggki.hu

A pontritkító algoritmus

A célfüggvény csökkentésére koncentrálva úgy gondoltam, hogy egy iteratív eljárást alkalmazva akkor kapom a lépésenkénti legnagyobb javulást, ha mindig a célfüggvény (összeg) legnagyobb elemét hagyom el, vagyis minden lépésben azt a pontot vonom be a reprezentáns halmazba, amelyikre az aktuális becslés a legnagyobb eltérést (hibát) adta. Egyes durvahiba-szűrő algoritmusok is hasonló elvű kiválasztással élnek *(Kalmár, 1995)*, ezért ez a kiválasztás most csak akkor célravezető, ha az $\mathcal{A}$ adathalmazban nincs durva hiba.

A fenti gondolatmenet alapján a kiválasztás algoritmusa a következő lesz:

1. Válasszuk ki $\mathcal{A}$-nak egy háromelemű (a felületinterpolációhoz legalább ennyi kell) $\mathcal{B}_3$ részhalmazát!
2. Adott $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{A}$ részhalmaz. Ha $i = M$, akkor készen vagyunk (end), ha nem, legyen P azon pontja $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_i$-nek, melyre $|v_p| \rightarrow max$, ha a becslést a $\mathcal{B}_i$ ponthalmazra alapozzuk. Ezután már definiálhatjuk $\mathcal{B}_{i+1}$-et: $\mathcal{B}_{i+1} = \mathcal{B}_i \cup P$, és ismételjük meg az eljárás 2. pontját!

Az algoritmus eddig nem részletezett 1. pontja különös figyelmet érdemel, mert ezt a kezdő háromszöget használjuk fel a maradék pontok becsléséhez, és nem lenne szerencsés, ha ez a becslés approximáció, vagyis tartományon kívüli 'jóslás' lenne. Ezért olyan háromszöggel inicializálom a $\mathcal{B}_3$ halmazt, amelyik köré írt kör az $\mathcal{A}$ halmaz összes elemét tartalmazza. Megjegyzem, nem nyilvánvaló, hogy ilyen háromszög egyáltalán létezik, ezért az ezt alátámasztó saját bizonyítást is közlöm:

Tétel: ha adott a síkon egy véges (kettőnél nagyobb) elemszámú, kiterjedésében korlátos $\mathcal{A}$ ponthalmaz, akkor mindig van közöttük három olyan pont, melyek köré rajzolt kör tartalmazza $\mathcal{A}$ összes pontját.

Bizonyítás: konstruktív, azaz megmutatjuk, hogyan lehet ilyen ponthármast kiválasztani.

0. kezdő lépés: írjunk egy lefedő kört az $\mathcal{A}$ ponthalmaz köré, amit a korlátosság miatt biztosan megtehetünk. A további lépések megmutatják, hogyan transzformáljuk ezt a lefedő kört úgy, hogy a tétel állításának megfelelő legyen.
1. Ha a körvonal még nem tartalmaz $\mathcal{A}$ halmazbeli pontot, akkor hagyjuk helyben a kör középpontját, és kezdjük el folyamatosan csökkenteni a sugarát, addig, amíg az első $\mathcal{A}$ halmazbeli pont nem illeszkedik a körvonalra *(1. ábra)*.
2. Ha a körvonalra pontosan egy $\mathcal{A}$ halmazbeli pont illeszkedik, akkor a kör középpontját összekötjük ezzel a ponttal, és a lefedő kör középpontját elkezdjük mozgatni az illeszkedő pont felé úgy, hogy közben a sugár is folyamatosan csökkenjen, tehát az illeszkedő pont végig rajta marad a transzformálódó körön. Nyilvánvaló, hogy megint eljutunk egy olyan pozícióhoz, amikor az egyre csökkenő lefedő körre újabb $\mathcal{A}$ halmazbeli pont(ok) fog illeszkedni – ekkor ezt a fázist is leállítjuk *(2. ábra)*.
3. Ha a körvonalra már pontosan két $\mathcal{A}$ halmazbeli pont illeszkedik, akkor a kör középpontja az illeszkedő pontok szakaszfelező merőlegesén található. Mozgassuk ezért a kiválasztott pontokra illeszkedő kör középpontját ezen az egyenes mentén mindaddig, amíg a kör újabb $\mathcal{A}$ halmazbeli pontra nem illeszkedik. A mozgatás szükséges iránya nem egyértelmű, sőt az sem biztos, hogy az eredménykör sugara kisebb a kiindulási körénél, de tudjuk, hogy a középpont egyirányú mozgatása során a szakasz egyik oldalán a körvonal egyre közelebb kerül a szakaszhoz, tehát ha ott van $\mathcal{A}$ halmazbeli pont, akkor azt előbb-utóbb érinteni fogja *(3. ábra)*.

Az 1-2-3 lépések eredményeként a lefedő körre már legalább három $\mathcal{A}$ halmazbeli pont fog illeszkedni, ami éppen a tétel állítását bizonyítja. A fenti bizonyításon alapul a kiválasztás első lépését végrehajtó algoritmus, amely mindössze $\boldsymbol{O(N)}$ műveletigényű, ezért nagyon gyorsan elkészül. A kezdő háromszög pozícióját azzal is sikerült javítani, hogy a kezdő lefedő kör középpontját a hal-

maz súlypontjába tettem. Kipróbáltam egy, a 'nyers erő' filozófiáját követő kiválasztást is (képezem az *N* pontra illeszkedő összes lehetséges háromszöget, és közülük újabb vizsgálattal választom ki azt, amelyik köré írt kör az összes pontot tartalmazza), de ez $\boldsymbol{O(N^4)}$ műveletigényű, ezért egy gyors PC-n is több percig tartott 850 alappont esetén a három pont kiválasztása.

Alkalmazási példák

Intézetünk hagyományainak megfelelően az algoritmust Dirichlet szomszédságon alapuló, lokálisan interpoláló függvényekkel próbáltam ki; felsorolásuk a műveletigényük sorrendjét követi *(Nagy et al. 1999):*

a.) lineáris becslés,
b.) becslés normálvektor-nyaláb kötegeléssel,

A *4. ábrán* egy 850 pontos felületmodell alappontjai és a GMT programmal levezetett szintvonalrajza látható, az *5-6. ábrák* a 200 pontra redukált a DFM-ek alappontjait és szintvonalrajzát mutatják, a *7.-8. ábrák* pedig az eredeti és redukált felületmodellek különbségét (hibáját) ábrázolják. Az *I. táblázat* az a.-b. becslések segítségével kapott célfüggvény-értékeket mutatja különböző normák alkalmazása mellett.

I. táblázat. az egyes becslések hibái (méterben)

Becslési eljárás/ Hiba-norma *(N=850)*	$\sqrt{\sum_{i=M+1}^{N} v_i^2 /(N-M)}$	$\sum_{i=M+1}^{N} \lvert v_i \rvert /(N-M)$	$\max_{i=M+1}^{N} \lvert v_i \rvert$	*M*
lineáris becslés	*0,500*	*0,408*	*1,216*	*200*
normálvektor-nyaláb	*0,403*	*0,325*	*0,965*	*200*
lineáris becslés	*0,945*	*0,737*	*2,466*	*100*
normálvektor-nyaláb	*0,720*	*0,580*	*1,860*	*100*

Az I. táblázat egyben a becslési eljárásokat is minősíti, mert a kiválasztott pontok körét a becslési módszer kevéssé befolyásolta. Kíváncsi lettem arra, ha a $\mathcal{B}$ reprezentáns halmazt nem az előírt pontszámmal, hanem a megengedett maximális becslési hibával definiálom, akkor ezt a követelményt az egyes becslési eljárások vajon hány pont bevonásával fogják teljesíteni? Hogy ezt is megállapíthassam, módosítottam a kiválasztási algoritmust, és különböző *eps* hibakorlátokkal teszteltem az új eljárást.

A módosított kiválasztási algoritmus a következőképpen működik:

1. Válasszuk ki $\mathcal{A}$-nak egy háromelemű (a felületinterpolációhoz legalább ennyi kell) $\mathcal{B}_3$ részhalmazát!
2. Adott $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{A}$ részhalmaz. Legyen *P* azon pontja $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}_i$-nek, melyre $\lvert v_p \rvert \to max$, ha a becslést a $\mathcal{B}_i$ ponthalmazra alapozzuk. Ha $\lvert v_p \rvert$ < *eps*, akkor végeztünk, mert $\mathcal{B}_i$ a kívánt reprezentáns halmaz. Ha nem, akkor definiáljuk $\mathcal{B}_{i+1}$-et a következőképpen: $\mathcal{B}_{i+1} = \mathcal{B}_i \cup P$, és ismételjük meg az eljárás 2. pontját!

A *II. táblázat* foglalja össze a $\mathcal{B}$ reprezentáns halmaz elemeinek számát különböző becslési eljárásokat és *eps* hibakorlátokat alkalmazva, ami egyértelműen mutatja, hogyan befolyásolja a becslési eljárás típusa a kiválasztás gazdaságosságát (minél kisebb a reprezentáns halmaz *M* elemszáma, annál gazdaságosabb a kiválasztás):

II. táblázat. Az egyes becslésekhez tartozó ponthalmazok elemeinek száma

Becslési eljárás *(N=850)/* Megengedett hiba (*eps*)	*eps = 0,8*	*eps =1*	*eps =1,2*
lineáris becslés	*M =288*	*M = 229*	*M = 190*
normálvektor-nyaláb	*M = 231*	*M = 195*	*M = 163*

Összefoglalás

A nagyteljesítményű automatikus műszereknek és mérési eljárásoknak köszönhetően a jövőben egyre inkább az adatbőség zavarával kell megküzdenünk, és ha nem akarjuk, hogy maguk alá temessenek az információ-hegyek, szükségünk lesz olyan automatikus adatszűrő és szelektáló eljárásokra, melyek révén az információ-tartalom lényegi csorbulása nélkül az adat-management még kezelhető méretű marad. Ebbe az irányba tett lépésnek tekintem a most bemutatott DFM pontcsökkentést, melynek hatékonysága (a redukció illetve a pontosság tekintetében) a közölt táblázatok alapján jól megítélhető. Látható, hogy a fejlettebb, a normálvektor-nyaláb kötegelésen alapuló interpoláció a tapasztalatok szerint kb. 15-20%-al hatékonyabb, mint a kiegyenlítésen alapuló síkillesztés

Köszönetnyilvánítás

Ezúton köszönöm Papp Gábornak, hogy felhívta a figyelmemet erre az érdekes problémára - melynek megoldása az ő geodinamikai kutatásait is előbbre vitte *(Papp et al. 1995)* -, illetve rendelkezésemre bocsátotta a mintaterület adatait (a fertőrákosi kőfejtő területe, 165 és 195 méter közötti tengerszint feletti magasságokkal). Köszönöm továbbá az OTKA T037218, T043413 és T038190 számú pályázatainak a kutatásaim végzéséhez nyújtott támogatást.

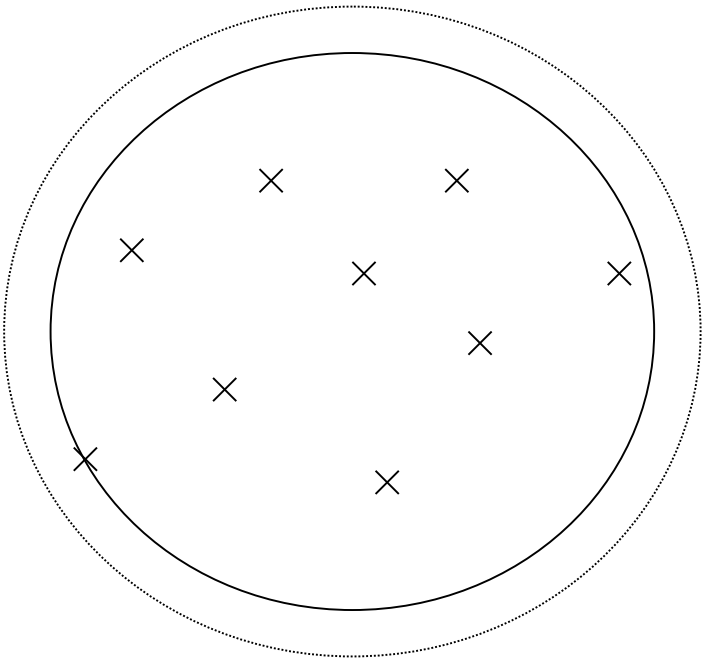
Hivatkozások

Kalmár J (1986): Digital surface model on a triangular base, *Acta Geod. Geoph.* et Mont. 21, 71-79.

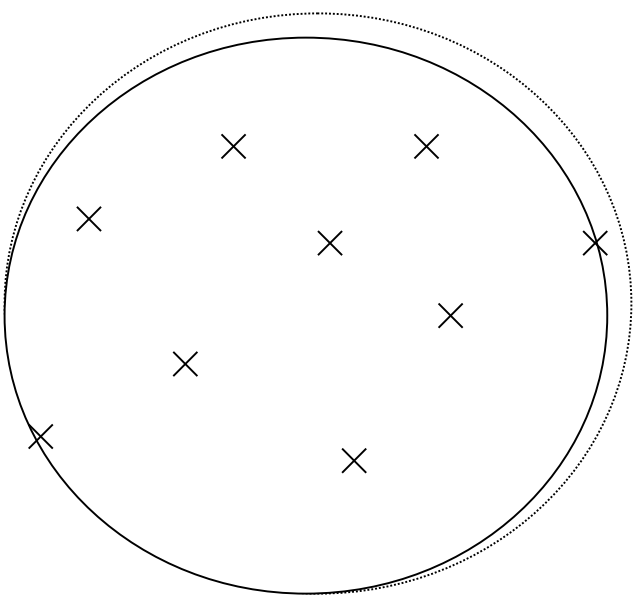
Papp G, Kalmár J, Szabó T (1995): DTM based surface and volume approximation with geophysical applications, *Computers & Geosciences* 21; 2, 245-247.

Kalmár J (1995): A digitális terepmodell kutatások új eredményei, *kandidátusi disszertáció.*

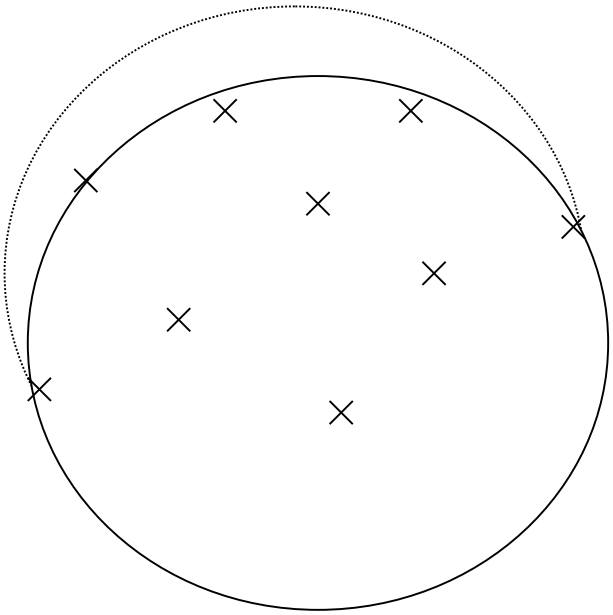
Nagy D, Franke R, Battha L, Kalmár J, Papp G, Závoti J (1999): Comparison of various gridding methods, *Acta Geod. et Geoph. Hungarica*, 34; 1-2, 41-57.



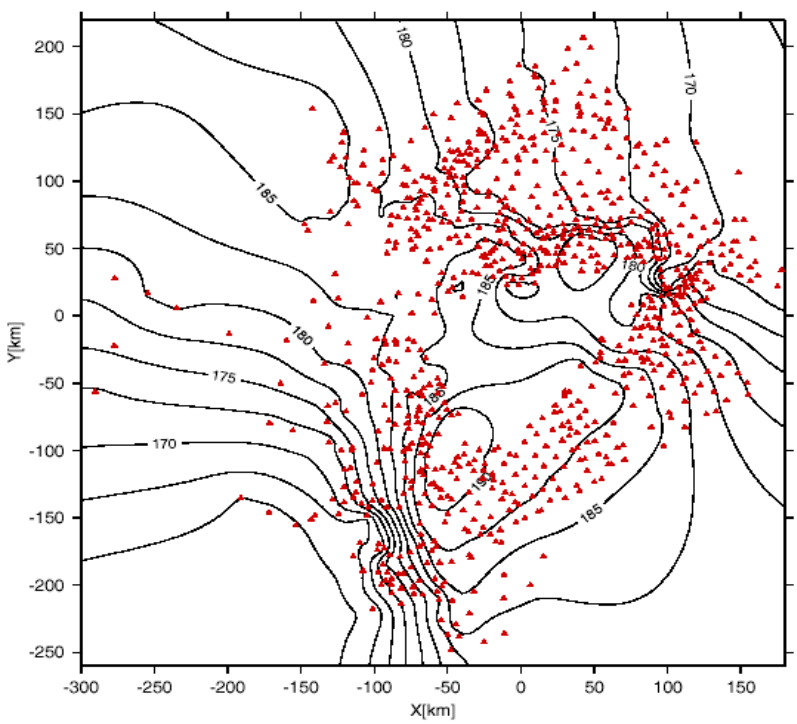
1. ábra: Sugárcsökkentés fix középponttal az első illeszkedésig



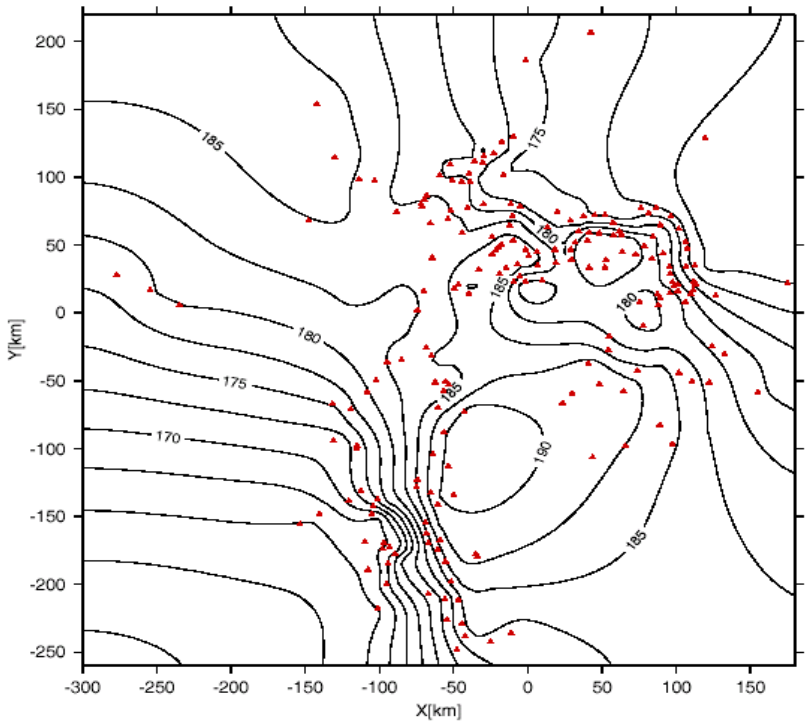
2. ábra: Középponteltolás a sugár mentén és fix illeszkedés az első pontra



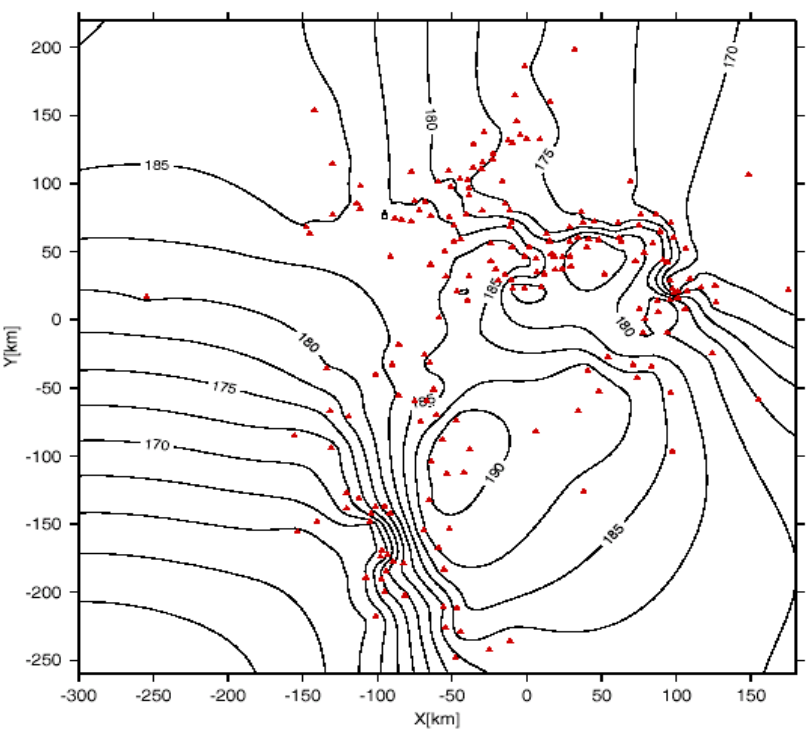
3. ábra: Középponteltolás a szakaszfelezőn és fix illeszkedés az első két pontra



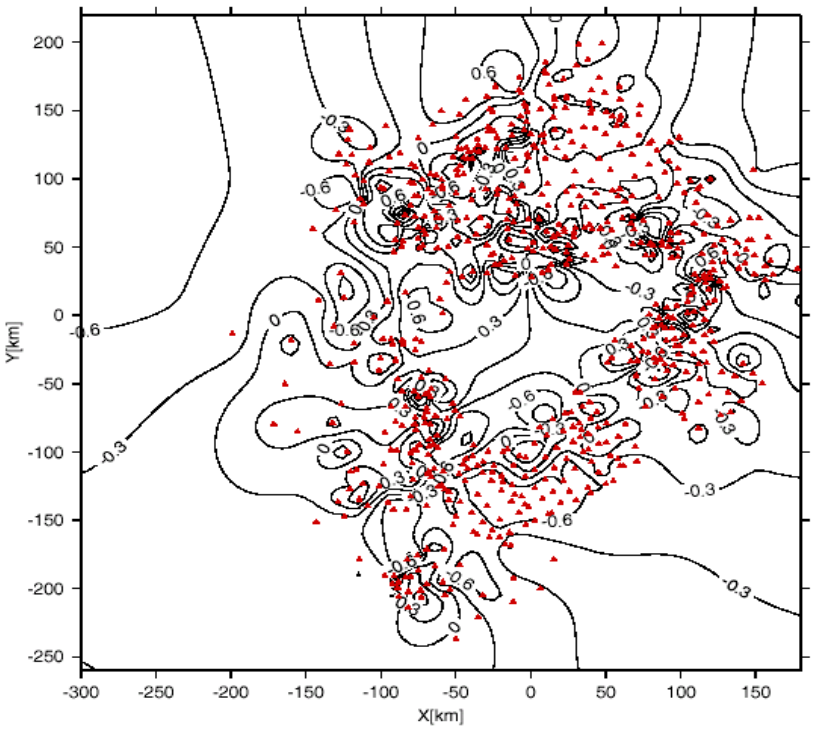
4. ábra. Az eredeti alappont-hálózat és szintvonalrajza



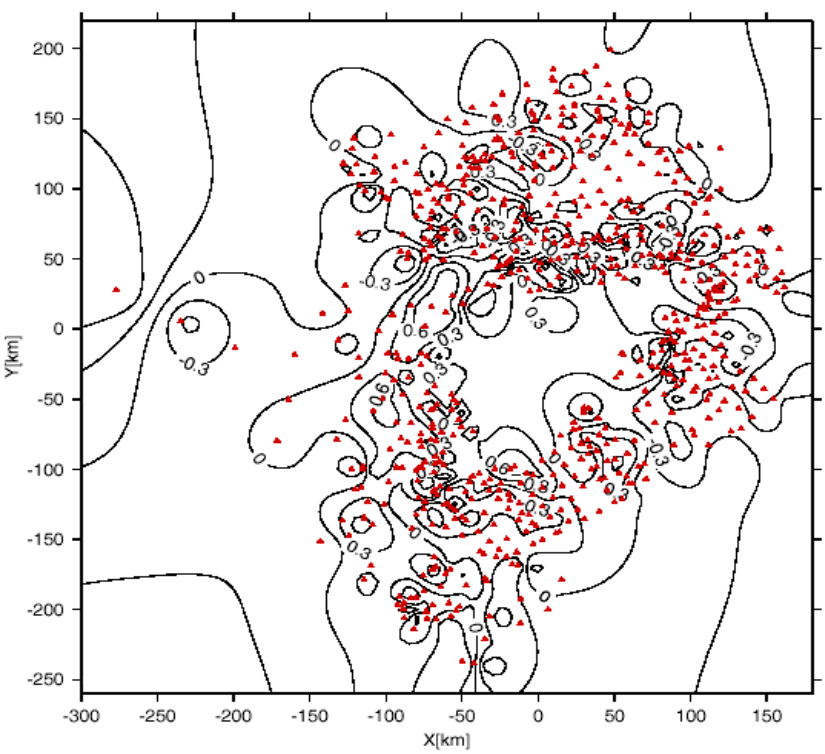
5. ábra. A síkillesztéssel redukált hálózat és szintvonalrajza



6. ábra. Normálvektor-nyaláb kötegeléssel redukált hálózat és szintvonalrajza



7. ábra. A síkillesztéssel redukált hálózat hibafelülete



8. ábra. A normálektor-nyaláb kötegeléssel redukált hálózat hibafelülete

VOLT-E IVANICSI (IVANIČI) SZTEREOGRAFIKUS VETÜLET?

Varga József[*]

Was there an Ivanič stereographic projection? - *Recent Hungarian references mention beside Budapest and Marosvásárhely also an Ivanič stereographic projection. Earlier technical instructions do not mention it and it would have been principally impossible to introduce such one under the regulations valid at that time, until the middle of the XX. th century. After having studied the pertinent references and having made researches author questions the existance of the Ivanič stereographic projection.*

Keywords: projection systems, systems withouth projection, Ivanič system withouth projection, Budapest stereographic projection,

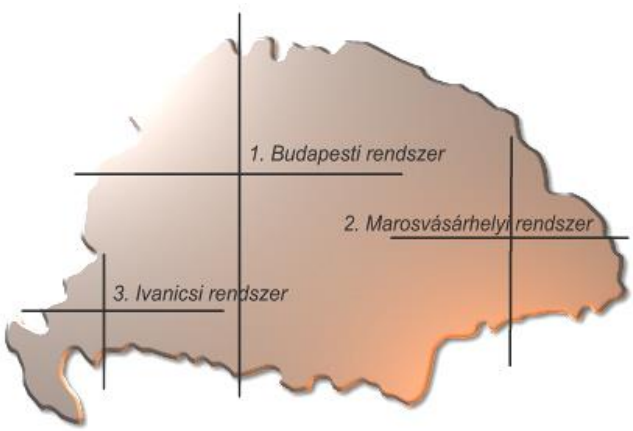
Az újabb kori hazai szakirodalom a budapesti és a marosvásárhelyi rendszerek mellett ivanicsi sztereografikus vetületi rendszert is ismer. Korabeli szakmai utasítások és szabályzatok nem tesznek említést róla, és a múlt század közepéig érvényes vetülettani szabályzat nem is tette volna lehetővé annak bevezetését. A korabeli szakirodalom tanulmányozása és saját vizsgálatai alapján a szerző kétségbe vonja az ivanicsi sztereografikus vetület létét.

Kulcsszavak: vetületi rendszerek, vetületnélküli rendszerek, ivanicsi vetületnélküli rendszer, budapesti és marosvásárhelyi sztereografikus rendszerek.

Bevezetés

Aki valamikor vetülettant tanult, az egészen biztosan emlékszik arra a felsorolásra, miszerint Magyarországon három sztereografikus vetületi rendszer volt *(1. ábra)*:

1. Budapesti rendszer,
2. Marosvásárhelyi rendszer,
3. Ivanicsi rendszer.



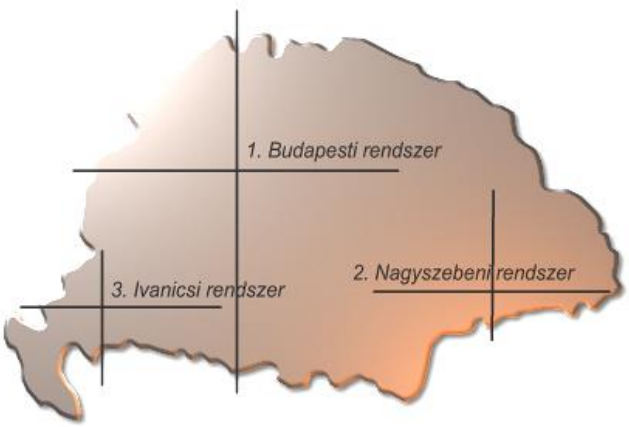
1. ábra. Magyarországi sztereografikus vetületi rendszerek a történelmi Magyarországon az újabb kori szakirodalom szerint

[*]*BME Általános és Felsőgeodézia Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.*
E-mail: jvarga@epito.bme.hu

Ez a felsorolás ilyen formában csak az 1930-as évek közepétől fordul elő a szakirodalomban. A korábbi felsorolások nem tartalmazták az ivanicsi sztereográfikus rendszert.

Arra valószínűleg kevesebben emlékeznek, hogy a Habsburg Birodalom tíz vetületnélküli rendszere közöl három esett a korabeli Magyarország területére *(2. ábra)*:

1. Budapesti (budai) rendszer,
2. Nagyszebeni rendszer,
3. Ivanicsi rendszer.



2. ábra. Vetületnélküli rendszerek a történelmi Magyarországon

A sztereográfikus rendszer bevezetésekor a budapesti vetületnélküli rendszer kezdőpontját (a Gellért-hegy nevű háromszögelési pontot) elfogadták a budapesti sztereográfikus rendszer kezdőpontjának. Erdélyben, a Vízaknai-hegy helyett egy központibb elhelyezkedésű pontot választottak (Kesztej-hegy) a marosvásárhelyi sztereográfikus rendszer kezdőpontjának. Az újabb kori szakirodalom szerint az ivanicsi vetületnélküli rendszert is sztereográfikus vetülettel váltották fel, Ivanics zárdatorony kezdőponttal.

Az alábbiakban korabeli szakirodalom és saját vizsgálataim alapján megpróbálom bebizonyítani, hogy az ivanicsi rendszer vetületnélküli maradt.

Kétségek

Alapműnek tekinthető korábbi vetületi szabályzatokat, háromszögelési utasításokat tanulmányozva előbb-utóbb megkérdőjelezhető az ivanicsi sztereográfikus vetület „bevezetése". Fasching Antal például így ír az akkori vetületi szabályzatnak tekinthető könyvében *(Fasching, 1909)*: „Ez idő szerint meg kell különböztetnünk *Erdélyt*, a szorosabb értelemben vett *Magyarországtól*. A szorosabb értelemben vett Magyarországban végzett országos felmérési munkálatok az 1863. évig különböző – *Cassini-féle* – vetületi rendszerekre vonatkozólag számíttattak. 1863-tól 1908-ig a szorosabb értelemben vett magyarországi háromszögelések a *stereográfikus* (*konform azimutális síkvetületre*) vonatkoztattak: térkép központ és egyszersmind koordináta kezdőpont a Gellérthegy nevű háromszögelési pont Budapest határában. Ezen vetületi rendszert röviden *Budapesti rendszernek* nevezzük: ez – Erdélyt kivéve – az egész országra nézve mint a *kiegyenlítés* és egyszersmind mint az *alsó geodéziai felmérések* vetülete szerepel.

Erdélyben 1880 óta szintén egyetlen stereográfikus vetületre vonatkozólag számíttattak az összes háromszögelések: térképközpont, és egyúttal koordináta kezdőpont a *Maros-Vásárhely* környékén fekvő *Kesztejhegy* elsőrendű pont. Erdélyre nézve ez a *Marosvásárhelyi rendszernek* nevezett vetületi rendszer volt a kiegyenlítések és az alsó geodéziai felmérések vetülete.

Jelenleg – 1907 – az összes erdélyi háromszögelési pontok *derékszögű sík összrendezői* a *Marosvásárhelyi rendszerre*, az összes magyarországi pontok derékszögű sík összrendezői pedig a Budapesti rendszerre vonatkoznak.''

Nem lehet tudni, hogy Fasching Horvátországról miért nem tesz említést, lehetséges, hogy a szorosabb értelemben vett Magyarországhoz sorolja. Kár, hogy a Cassini-féle vetületi rendszerek elnevezéseit sem adja meg, amelyek a tulajdonképpeni vetületnélküli rendszerek.

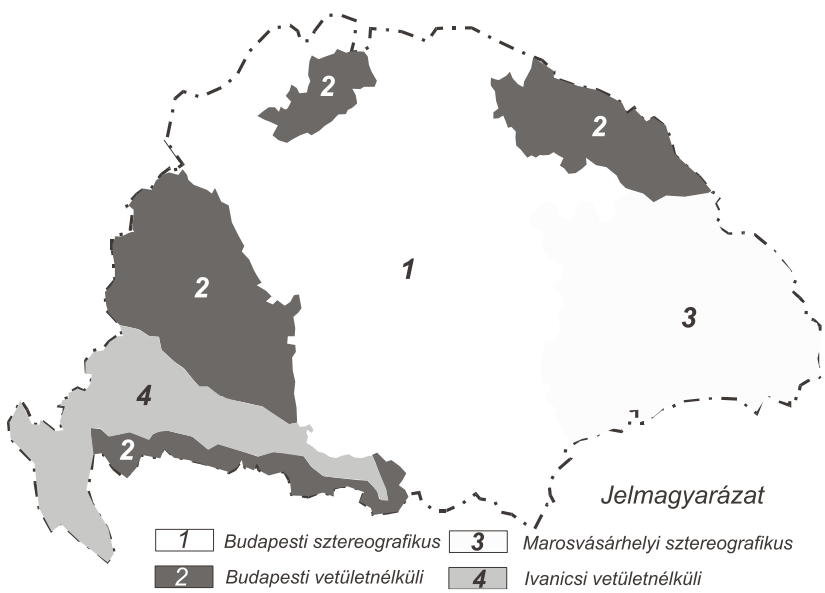
Az ugyanezen utasítás 3. oldalán levő – a miniszterelnök (Wekerle Sándor) által aláírt – Körrendelet felsorolja azokat a vetületi rendszereket, amelyeket a jövőben Magyarország területén alkalmazni lehet:

1. Budapesti sztereografikus vetületi rendszer (a kezdőpont körüli 127 km sugarú körön belül),
2. Marosvásárhelyi sztereografikus vetületi rendszer,
3. Hengervetületi északi rendszer (HÉR),
4. Hengervetületi középső rendszer (HKR),
5. Hengervetületi déli rendszer (HDR).

Tehát, ha Fasching utasítása előtt nem volt ivanicsi sztereografikus rendszer, akkor utána már nem is volt lehetőség annak bevezetésére.

Meggyőző a *(Minták és mellékletek 1904)* 1. számú mellékletének „A magyarországi új főhálózat vetületi rendszere folytán 1000 öl (1896 m) hosszú vonalra eső nagyítás'' című ábrája is. A történelmi Magyarország térképén csak a budapesti és a marosvásárhelyi sztereografikus rendszerek torzulási viszonyait tünteti fel, Horvátország és a Szerémség területe üresen marad.

Ugyanezen utasítás 2. mellékletének „A magyar állam háromszögelési főhálózatai'' című térképén más-más színekkel különítik el a különböző módszerekkel meghatározott és különböző vetületekben ábrázolt háromszögelési hálózatokat. Ehhez külön készült magyarországi és horvát-szlavonországi jelmagyarázat. Magyarországnál megkülönbözteti a budapesti és a marosvásárhelyi rendszert. A budapesti rendszernél elkülöníti a régi vetületnélküli főhálózatot és az új főhálózatot, amely már sztereografikus síkon van. Erdély teljes területén sztereografikus síkon van a hálózat. Ennek a térképnek egyszerűsített változatát szemlélteti a *3.ábra.*



3. ábra. A korabeli háromszögelési hálózatok vetületi rendszerei

Horvát-Szlavonországban csak régi főhálózat van, mégpedig ivanicsi és budapesti vetületnélküli rendszerben. Nem valószínű, hogy az első világháború előtt Horvátországban egy új háromszögelési hálózatot mértek volna, amikor a Dunántúlon is csak jóval a háború után került arra sor.

Az *(Utasítás 1904)* 23. §-a szerint „a *horvátszlavon főhálózat* kifejlesztése a dunántúli hálózat oldalaihoz való csatlakozással történt.'' A 24. §-ban a katonai határőrvidék főhálózatáról így szól: „A hálózat kiszámítása t. i. úgy történt, hogy egy háromszögoldalból kiindulva számíttatott a hálózat addig, míg az eltérések nagyon érezhetők nem voltak. Azután újból csak egy háromszögoldalhoz csatlakozva folytattatott a további számítás.''

Marek János német nyelvű háromszögelési szabályzatában *(Marek, 1875)* így ír előbb a vetületnélküli, majd a sztereografikus rendszerek magyarországi bevezetéséről (fordítás németről): „Valamennyi itt felsorolt országrészben a tartomány területét síkon levőnek tekintették, Magyarország területén is ilyen módon vették fel a volt Soproni kerületet, Máramaros megyét, Bereg, Ugocsa és Ung megyéket, valamint Hont egy részét Selmecbánya környékén. Később arra a meggyőződésre jutottak, hogy Magyarországon a háromszögelési hálózatot gömbön levőnek kell tekinteni. Viszont, hogy ne adják fel azt az előnyt, amit a síkhálózat a koordináták számításánál jelent, a gömbi szögeket sztereografikus vetülettel a Buda kezdőpontban elhelyezett érintő síkra vetítették, és itt egy síkhálózatot számítottak".

Ezek után kissé félreérthető a következő mondat: „Ez a folyamat először Horvátország, majd Magyarország többi részének, és legújabban Erdély felmérésénél volt megfigyelhető, ahol a háromszögelési hálózatot az említett kezdőpontokban elhelyezett érintő síkra vetítették." Hogyan került a sor elejére Horvátország, amikor az előző mondatban csak a Buda kezdőpontban elhelyezett sík szerepel? Ezt úgy is lehetne érteni, hogy először Horvátországban vezettek be sztereografikus vetületet, de valójában arról van szó, hogy a felmérést kezdték meg Horvátországban.

Marek a horvátországi vetületnélküli rendszerről írja: „A magyar korona országai közül Horvátországot és Szlavóniát Szerém vármegyével együtt egy, az ivanicsi zárda tornyán átmenő külön meridiánra vették fel. A 85. § 10-ben megadott helyzetet és a koordináta-számításhoz ebben a pontban alapul vett azimutot a K. und K. Katonai Háromszögelés határozta meg csillagászatilag.

A csillagászati mérések eredményei a földrajzival nincsenek számszerű összhangban; gyakran igen jelentős eltérések mutatkoznak, amelyeket a nagy hegytömegeknek és a Földtömeg egyenetlen eloszlásának a libellára gyakorolt hatása, mind a csillagászatilag meghatározott sarkmagasságot mind az azimutot befolyásolják. Ebből kifolyólag valamely pontnak a horvátországi és a magyarországi koordinátákból levezetett földrajzi koordinátái nincsenek szoros összhangban.

Azért, hogy a Magyarország és Horvátország határán levő összes pont földrajzi koordinátái teljes összhangban legyenek, az előbbi §-ban megadott eljárással először az ivanicsi zárdatorony földrajzi koordinátáit kell levezetni, és mivelhogy az első oldal azimutja megváltozna, az összes háromszögelési pontnak a felmérés által már felhasznált koordinátáit kissé meg kellene változtatni.

De mivel itt a részletes felmérés már megtörtént, az elsőrendű pontok koordinátái már soha nem változtathatók meg, így az említett eljárás sem hajtható végre."

Ha sor került volna egy korszerűbb háromszögelési hálózat meghatározására és sztereografikus vetületen történő ábrázolására, az a *(Fasching, 1909)*-ből nem maradhatott volna ki. Az ivanicsi koordinátákat felhasználó idősebb kollegák elbeszéléseiből is emlékszem a néha 10 m nagyságrendű koordináta záróhibákra.

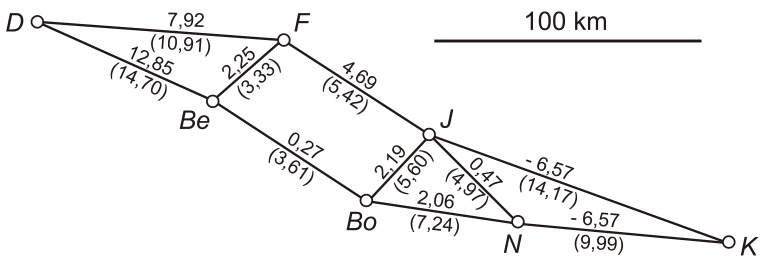
Vizsgálatok

Érdekes megállapításokat tehetünk, ha a Földmérési és Távérzékelési Intézet Központi Adattárában fellapozzuk a *(Betűsoros névjegyzék)*-et, amely a történelmi Magyarország felsőrendű háromszögelési pontjainak koordinátáit tartalmazza.

Mindegyik pontnál bécsi ölben és méterre átszámítva is szerepelnek a különböző vetületi rendszerekben meghatározott koordináták. A budapesti rendszer területére eső pontoknál vetületnélküli, sztereografikus és katonai sztereografikus koordinátákat, a marosvásárhelyi rendszernél pedig csak sztereografikus koordinátákat találunk. Ezzel szemben az ivanicsi rendszernél ivanicsi polgári és ivanicsi katonai megjelölések szerepelnek. Ivanicsi vetületnélküli és ivanicsi sztereogra-

fikus jelzők nem szerepelnek a jegyzékben. Az ivanicsi katonai koordinátákat úgy kapjuk, hogy 400 km-ből kivonjuk a méterre átszámított polgári koordinátákat.

Az eddigiek alapján már valószínűsíthető, hogy az összes ivanicsi koordináta vetületnélküli. Ha ebben kételkednénk, könnyen eldönthetjük, hogy sztereografikus vetületben vannak-e a mellékelt koordináták. Vizsgálatomhoz a Dráva mentén olyan pontokat választottam ki, amelyeknek budapesti sztereografikus és a kérdéses ivanicsi rendszerű koordinátái is adottak *(4. ábra)*. Amennyire lehetett, igyekeztem templomtornyokat kiválasztani. Az ábra betűjelzései: *Be*=Berzence, *Bo*=Bogdása, *D*=Drávavásárhely, *F*=Felsősegesd, *J*=Jakab-hegy, *K*=Kula puszta, *N*=Nagyharsány. Abban az esetben, ha a koordináták mindkét rendszerben sztereografikusok volnának, a pontok közötti gömbre átszámított hosszak csak a háromszögelési hálózatok különbözőségei miatt térhetnének el egymástól.



4. ábra. Vizsgálati terület a Dráva mentén (adatok méterben)

A vizsgált szakaszok végpontjainak sztereografikus síkkoordinátáiból (y_1, x_1, y_2, x_2) a következő összefüggéssel számítható az s gömbi hossz:

$$s = t\left(1-U\right) = t\left[1-\frac{1}{12\,R^2}\left(x_1^2 + x_1\,x_2 + x_2^2 + y_1^2 + y_1\,y_2 + y_2^2\right)\right],$$

ahol

t a vetületi hossz,
U a hossztorzulás és
R = 6378512,966 m, a régi magyarországi Gauss-gömb sugara.

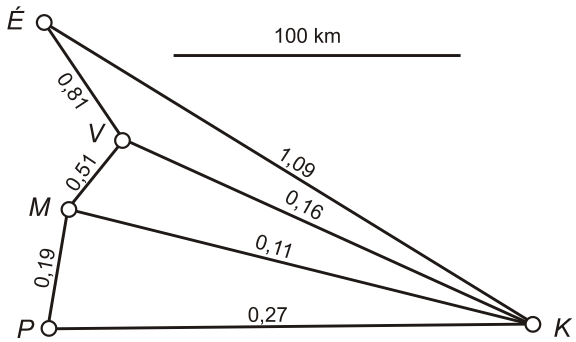
A vizsgálatot több felsőrendű pont között is elvégezve, a gömbi hosszak közötti eltérések teljesen rendszertelenül jelentkeznek. Hol a budapesti sztereografikus, hol a feltételezett ivanicsi „sztereografikus" koordinátákból számított hosszak nagyobbak a másiknál. Az eltérések nagysága – a vizsgált hossztól függetlenül – egy métertől, több tíz méterig változik (az ábrán zárójelbe tett adatok).

Jobb összhangot mutatnak a budapesti sztereografikus koordinátákból számított gömbi hosszak az ivanicsi koordinátákból számított síkbeli hosszakkal (az ábrán a pontokat összekötő szakaszok fölé írt, zárójel nélküli adatok). Ennél is jobban egyeznek a budapesti vetületnélküli és az ivanicsi koordinátákból számított síkhosszak. Ezek a tények megint csak azt látszanak igazolni, hogy az ivanicsi rendszer vetületnélküli, ugyanis a vetületnélküli rendszerekben az alapfelületi hosszakat ábrázolták közvetlenül a síkon.

Több pont között is kiszámítva a budapesti sztereografikus koordinátákból a gömbi hosszakat és a budapesti vetületnélküli koordinátákból a síkhosszakat, azok különbsége még 200 km-es távolságnál sem haladja meg a 3-4 métert.

Hasonló vizsgálatot végeztem a budapesti és a marosvásárhelyi sztereografikus rendszerek között is. Itt azokat az azonos pontokat használtam fel, amelyek alapján Fasching a budapesti rend-

szer kezdőpontjából a Kesztej-hegy gömbi koordinátáit levezette *(5. ábra)*. Az ábra betűjelzései: *É*=Érmihályfalva, *K*=Kesztej-hegy, *M*=Magura-Korbest, *P*=Ples, *V*=Varatik).



5. ábra. A marosvásárhelyi rendszer területére eső vizsgálati pontok (adatok méterben)

A vizsgált pontok között a síkkoordinátákból számított gömbi hosszak különbségei 200 km-es hosszaknál is alig haladják meg a 2 métert, és előjeleik is megegyeznek (az ábrán a vizsgálati pontokat összekötő szakaszokra írt adatok). A budapesti sztereografikus koordinátákból számított gömbi hosszakból vontam ki a marosvásárhelyi koordinátákból számítottakat.

A kétféle gömbi hosszak itt sem kell, hogy szigorúan megegyezzenek egymással, mert a szorosan vett magyarországi és az erdélyi rész háromszögelési hálózatát külön-külön egyenlítették ki, így nem tekinthetők egységes hálózatnak. A példából mégis érzékelhető, hogy a gömbi hosszakban milyen egyezést lehet elvárni, amikor a két vetületi rendszer valóban sztereografikus.

Következtetések

Remélhetőleg elég meggyőző volt az eddigi okfejtésem, és nem kell tovább bizonyítani, hogy nem volt ivanicsi sztereografikus vetületi rendszer. Miért terjedhetett el mégis a szakirodalomban az ezzel ellentétes nézet? Ebben okolható például a *(Minták és mellékletek 1904)*, melynek 3. mellékletén egy ábrán szerepelnek a budapesti sztereografikus, a marosvásárhelyi sztereografikus és az ivanicsi vetületnélküli rendszerekben készített kataszteri térképek szelvényrendszerei.

Okolni lehet ebben a topográfiai térképezésben alkalmazott katonai koordináta-rendszereket is, mivel az ivanicsi katonai koordinátákat is a budapestihez és a marosvásárhelyihez hasonlóan számították, azzal az eltéréssel, hogy az előbbinél nem sztereografikus, hanem vetületnélküli koordinátákat vontak ki egy állandóból (C = 400 km). Ez az állandó a budapesti rendszernél C = 500 km, a marosvásárhelyi rendszernél C = 600 km volt.

Amíg a háromszögelési pontleírásokon és a koordináta-jegyzékekben csak budapesti és ivanicsi vetületnélküli koordináták szerepeltek, addig elég volt a budapesti (budai) és ivanicsi megjelölés, mert nem tudhatták, hogy hamarosan más vetületi rendszerek is belépnek. A sztereografikus koordináták bejegyzésekor viszont már szükség volt a rendszer megnevezése előtt a sztereografikus jelzőre. Ettől kezdve e jelző nélküli budapesti (budai) koordináták vetületnélküliek voltak, de a budapesti vetületnélküli megjelölést is alkalmazták a sztereografikus koordinátáktól való megkülönböztetés miatt. Az ivanicsi koordinátáknál nem volt szükség ilyen megkülönböztetésre, mert a rendszer vetületnélküli maradt.

A későbbiekben sok tévedési lehetőséget okozott, hogy a budapesti rendszereknél a kezdőpont is, és a koordináta-rendszerek tájékozása is azonos. Ennek következtében a vetületnélküli és a sztereografikus síkkoordináták a kezdőponttól távolodva egyre jobban eltérnek egymástól, de a legnagyobb vonalas eltérés sem haladja meg a 20 métert. Ezért valamely ismert terület esetén sem dönthető el térképi vagy terepi mérések nélkül, hogy egy adott koordináta pár vagy egy térkép sztereografikus vagy vetületnélküli rendszerű-e.

Többször a földhivatalok is tévesen tartottak nyilván vetületnélküli kataszteri térképeket sztereografikusként. Grafikus munkáknál nem derült ki a tévedés, de a numerikusan felmért térképi objektumok térképezésekor – földrajzi helyzettől függően – kisebb-nagyobb ellentmondás (átfedés vagy „senki földje") jelentkezett. Ilyenkor panaszkodtak a felhasználók arra, hogy „rossz a térkép", ami egy 19. század közepén készült térképről nehezen képzelhető el.

Köszönetnyilvánítás

A szerző megköszöni a T-030177 sz. a „Magyarországi geodéziai vonatkozási rendszerek vizsgálata" című OTKA pályázat által a kutatás végrehajtásához nyújtott támogatást.

Hivatkozások

Marek J (1875): Technische Anleitung zur Ausführung der trigonometrischen Operationen des Katasters, Budapest.

Fasching A (1909): A magyar országos háromszögelések és részletes felmérések új vetületi rendszerei, *Magyar Királyi Pénzügyminisztérium*, Budapest.

Utasítás az országos kataszteri felmérés végrehajtására I. rész (1904): *Magyar Királyi Pénzügyminisztérium*, Budapest.

Minták és mellékletek az országos kataszteri felmérés végrehajtása iránt (1904): *Magyar Királyi Pénzügyminisztérium*, Budapest.

Felsőrendű háromszögelési pontok **betűsoros névjegyzéke**: *Földmérési és Távérzékelési Intézet Központi Adattára*, Budapest.

A 7 PARAMÉTERES 3D TRANSZFORMÁCIÓ EGZAKT MEGOLDÁSA

Závoti József[*]

The closed form solution of 7 parameter 3D transformation *- The Gauss-Jacobi combinatorial adjusment is applied to solve the 3D transformation problem with 7 parameters, and it is also demonstrated that the combinatorial algorithm gives the same solution as the conventional linear Gauss-Markov model.*

Keywords: 7 parameter transformation, nonlinear closed form solution, Gröbner basis, Gauss-Jacobi combinatorial algorithm

A Gauss-Jacobi kombinatorikus kiegyenlítő számítási elv alkalmazásával a 7 paraméteres, 3D transzformációs feladat megoldására analitikus levezetést adunk, emellett a kidolgozott eljárással azt is bemutatjuk, hogy a kombinatorikus megoldás egybeesik a hagyományos lineáris Gauss-Markov modell megoldásával.

Kulcsszavak: 7 paraméteres transzformáció, nemlineáris egzakt megoldás, Gröbner bázis, Gauss-Jacobi kombinatorikus megoldás

1. Bevezetés

Awange és Grafarend (2003, 2004) tanulmányaikban összehasonlították a 7 paraméteres dátum transzformációs problémának a linearizált legkisebb négyzetek módszerével nyerhető, és a nemlineáris Gauss-Jacobi kombinatorikus eljárásból származtatott megoldását. Eredményül az adódott, hogy mindkét módszer azonos nagyságrendű reziduálokat szolgáltat, de a nemlineáris algoritmus numerikusan stabilabb, mint a hagyományos eljárás. A probléma mind a geodéziában, mind a fotogrammetriában nagy jelentőséggel bír. Térinformatikai adatrendszerek esetén a *Selinger S, Winkler G, Juhász (2004)* tanulmányban megkívánt EOV alapú egységes geometria kialakítása is szükségessé teszi a 3D transzformáció alkalmazását.

A feladat ezen tanulmányban ismertetett nemlineáris megoldása fontos, mert az eljárással durva hibák kimutathatók, az egyenleteket nem kell linearizálni, nem szükséges iterálni és a két koordináta-rendszer (lokális-globális referencia rendszer) kovariancia kapcsolatai automatikusan felhasználásra kerülnek. A *Závoti (1999)* publikáció a 7 paraméteres, 3D hasonlósági transzformáció L_1 normás megoldását tárgyalja, e tanulmányban az eredeti Awange és Grafarend algoritmushoz képest néhány módosítást javasolunk.

A tanulmány ismerteti a Gauss-Jacobi kombinatorikus algoritmus matematikai elméletét, a túlhatározott 7 paraméteres 3D transzformáció megoldását, és egy példán keresztül bemutatjuk a módszer gyakorlati alkalmazását.

2. Gauss-Jacobi kombinatorikus algoritmus

A térbeli hasonlósági túlhatározott, 7 paraméteres, 3D (Helmert) transzformáció *Bácsatyai (1998)* tanulmánya alapján az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = sR \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n \qquad (2.1)$$

- ahol

[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: zavoti@ggki.hu

- $\{a_i, b_i, c_i\}$ és $\{X_i, Y_i, Z_i\}$ ($i = 1, 2, 3, ..., n$) ugyanannak a pontnak a koordinátái a két koordináta rendszerben,
- s az ismeretlen méretarány tényező,
- X_0, Y_0 és Z_0 az ismeretlen eltolási értékek,
- R a forgatási mátrix.

Az R forgatási mátrix a három koordináta tengely körüli elforgatással, három független paraméterrel írható le:

$$R = R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma) \tag{2.2}$$

A fenti R forgatási mátrixot explicit kifejezhetjük a Cardan szögekkel:

$$R_1(\alpha)R_2(\beta)R_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

A forgatási mátrix elemeiből a következő összefüggésekkel meghatározhatók az elforgatási szögek:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right) \\ \beta &= \arctan\left(\frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{12}^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-r_{31}}{\sqrt{r_{23}^2 + r_{33}^2}}\right) \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Az R forgatási mátrixot az S ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írjuk fel:

$$R = (I_3 - S)^{-1}(I_3 + S) \tag{2.5}$$

- ahol I_3 a három dimenziós egységmátrix, és S az a, b és c paraméterekkel az alábbi módon adható meg:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Az (2.5) összefüggés ismeretében az (2.1) egyenletet a $(I_3 - S)$ mátrixszal balról szorozva így alakítjuk át:

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$$
$$i = 1, 2, 3, ..., n \tag{2.7}$$

A 7 paraméter meghatározásához legalább 7 egyenlet felírására van szükség. Amennyiben 3 pontot tekintünk adottnak, az (2.7) formula felhasználásával 9 egyenletet tudunk felírni, így feladatunk túlhatározottá válik. A (2.8) egyenletek a 3 pont koordinátáinak (2.7) összefüggésbe történő helyettesítésével adódnak:

$$
\begin{aligned}
f_1 &:= & sX_1 & - scY_1 & + sbZ_1 & + X_0 + cY_0 - bZ_0 & - a_1 & - cb_1 & + bc_1 & = 0\\
f_2 &:= & scX_1 & + sY_1 & - saZ_1 & - cX_0 + Y_0 + aZ_0 & + ca_1 & - b_1 & - ac_1 & = 0\\
f_3 &:= - & sbX_1 & + saY_1 & + sZ_1 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_1 & + ab_1 & - c_1 & = 0\\
f_4 &:= & sX_2 & - scY_2 & + sbZ_2 & + X_0 + cY_0 - bZ_0 & - a_2 & - cb_2 & + bc_2 & = 0\\
f_5 &:= & scX_2 & + sY_2 & - saZ_2 & - cX_0 + Y_0 + aZ_0 & + ca_2 & - b_2 & - ac_2 & = 0\\
f_6 &:= - & sbX_2 & + saY_2 & + sZ_2 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_2 & + ab_2 & - c_2 & = 0\\
f_7 &:= & sX_3 & - scY_3 & + sbZ_3 & + X_0 + cY_0 - bZ_0 & - a_3 & - cb_3 & + bc_3 & = 0\\
f_8 &:= & scX_3 & + sY_3 & - saZ_3 & - cX_0 + Y_0 + aZ_0 & + ca_3 & - b_3 & - ac_3 & = 0\\
f_9 &:= - & sbX_3 & + saY_3 & + sZ_3 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_3 & + ab_3 & - c_3 & = 0
\end{aligned}
\qquad (2.8)
$$

Az egyenletrendszer egyértelmű megoldásához az (2.8) egyenletekből kiválasztunk 7 egyenletet, például elhagyjuk a 7. és 8. egyenletet:

$$
\begin{aligned}
f_1 &:= & sX_1 & - scY_1 & + sbZ_1 & + X_0 + cY_0 - bZ_0 & - a_1 & - cb_1 & + bc_1 & = 0\\
f_2 &:= & scX_1 & + sY_1 & - saZ_1 & - cX_0 + Y_0 + aZ_0 & + ca_1 & - b_1 & - ac_1 & = 0\\
f_3 &:= - & sbX_1 & + saY_1 & + sZ_1 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_1 & + ab_1 & - c_1 & = 0\\
f_4 &:= & sX_2 & - scY_2 & + sbZ_2 & + X_0 + cY_0 - bZ_0 & - a_2 & - cb_2 & + bc_2 & = 0\\
f_5 &:= & scX_2 & + sY_2 & - saZ_2 & - cX_0 + Y_0 + aZ_0 & + ca_2 & - b_2 & - ac_2 & = 0\\
f_6 &:= - & sbX_2 & + saY_2 & + sZ_2 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_2 & + ab_2 & - c_2 & = 0\\
f_9 &:= - & sbX_3 & + saY_3 & + sZ_3 & + bX_0 - aY_0 + Z_0 & - ba_3 & + ab_3 & - c_3 & = 0
\end{aligned}
\qquad (2.9)
$$

A fenti kiválasztást a kombinatorikus megoldás során minden lehetséges módon el kell végezni. Ezt a kiválasztást a sorrend fegyelmen kívül hagyásával $\binom{9}{7} = 36$ különböző kombinációban tudjuk megtenni. A 7 egyenletet mind a 36 esetben meg kell oldani mind a hét paraméterre, és rendre a megoldások súlyozott átlagát kell számolni. Ez a cikk egy kiválasztás esetében mutatja be a megoldás menetét.

Az (2.1) összefüggésben szereplő eltolási paraméterek kiküszöböléséhez képezzük a következő különbségeket:

$$
\begin{aligned}
f_{14} &:= f_1 - f_4 = & sX_{12} & - scY_{12} & + sbZ_{12} & - a_{12} & - cb_{12} & + bc_{12} & = 0\\
f_{25} &:= f_2 - f_5 = & scX_{12} & + sY_{12} & - saZ_{12} & + ca_{12} & - b_{12} & - ac_{12} & = 0\\
f_{39} &:= f_3 - f_9 = & -sbX_{13} & + saY_{13} & + sZ_{13} & - ba_{13} & + ab_{13} & - c_{13} & = 0\\
f_{69} &:= f_6 - f_9 = & -sbX_{23} & + saY_{23} & + sZ_{23} & - ba_{23} & + ab_{23} & - c_{23} & = 0
\end{aligned}
\qquad (2.10)
$$

-ahol

$$Xij = X_i - X_j,\ Yij = Y_i - Y_j,\ Zij = Z_i - Z_j \qquad i,j \in \{1,2,3\},\ i \neq j$$
$$aij = a_i - a_j,\ bij = b_i - b_j,\ cij = c_i - c_j$$

3. A 7 paraméteres 3D transzformáció megoldása

Az (2.10) nemlineáris egyenletrendszer megoldását *Awange és Grafarend (2002)* a Gröbner bázis felhasználásával visszavezette egy negyed-fokú polinom megoldására. A negyed-fokú polinom gyökeit a MATLAB programcsomag segítségével nagyon könnyen megkaphatjuk. Az alábbi negyed-fokú polinom legkisebb pozitív gyöke szolgáltatja a méretarány tényezőt:

$$q_4 s^4 + q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 = 0 \qquad (3.1)$$

- ahol a negyed-fokú polinom együtthatói kifejtve a következők:

q_4 = X13*Y12*Y12*Y23+X12*X12*X13*Y23-X12*X12*X23*Y13-X12*Y13*Z12*Z23
-X23*Y12*Y12*Y13+X13*Y12*Z12*Z23-X23*Y12*Z12*Z13+X12*Y23*Z12*Z13

q_3 = c12*X13*Y12*Z23-b13*X12*Z12*Z23-c13*X12*Y23*Z12+b23*X13*Y12*Y12
-a23*X12*X12*Y13+c23*X12*Y13*Z12+c12*X12*Y23*Z13+a13*Y12*Y12*Y23
-b12*X23*Z12*Z13-a23*Y12*Y12*Y13+b12*X13*Z12*Z23-c12*X12*Y13*Z23
+a13*X12*X12*Y23-c23*X13*Y12*Z12-a23*Y12*Z12*Z13+c13*X23*Y12*Z12
-b13*X23*Y12*Y12-b13*X12*X12*X23+b23*X12*Z12*Z13+a13*Y12*Z12*Z23
+b23*X12*X12*X13+a12*Y23*Z12*Z13-a12*Y13*Z12*Z23-c12*X23*Y12*Z13

q_2 = a13*b23*X12*X12+b12*b12*X23*Y13+b12*c13*X23*Z12-c12*c23*X13*Y12
+b13*c23*X12*Z12-a23*b12*Z12*Z13+a12*a12*X23*Y13-b12*b12*X13*Y23
-a12*a12*X13*Y23-a23*b13*X12*X12+a13*b23*Y12*Y12-a23*b13*Y12*Y12
+a12*b23*Z12*Z13+a23*c13*Y12*Z12+a12*c12*Y23*Z13-b12*c12*X23*Z13
-b23*c13*X12*Z12-a12*b13*Z12*Z23-a23*c12*Y12*Z13+a12*c23*Y13*Z12
+b12*c12*X13*Z23-a12*c12*Y13*Z23-a13*c23*Y12*Z12-c12*c13*X12*Y23
+c12*c13*X23*Y12+c12*c23*X12*Y13-b13*c12*X12*Z23+b23*c12*X12*Z13
+a13*b12*Z12*Z23-a12*c13*Y23*Z12+a13*c12*Y12*Z23-b12*c23*X13*Z12

q_1 = -a12*b13*c12*Z23+b12*c12*c13*X23+b12*b12*b13*X23-a13*b12*b12*Y23
-a12*a12*b23*X13+a23*c12*c13*Y12-a13*c12*c23*Y12+a12*b13*c23*Z12
-a12*a12*a13*Y23-b23*c12*c13*X12+a12*b23*c12*Z13-a23*b12*c12*Z13
-b12*b12*b23*X13+a23*b12*c13*Z12-a12*c12*c13*Y23+a12*a12*b13*X23
+a12*a12*a23*Y13-a12*b23*c13*Z12-a13*b12*c23*Z12-b12*c12*c23*X13
+b13*c12*c23*X12+a12*c12*c23*Y13+a23*b12*b12*Y13+a13*b12*c12*Z23

q_0 = a12*b13*c12*c23-a13*b12*b12*b23+a12*a12*a23*b13-a12*a12*a13*b23
-a12*b23*c12*c13+a23*b12*b12*b13+a23*b12*c12*c13-a13*b12*c12*c23

A méretarány-tényező ismeretében a ferdén szimmetrikus R mátrix a, b és c elemeit az alábbi lineáris egyenletekből nyerhetjük:

$$q_1 * a + q_0 = 0 \qquad (3.2a)$$

- ahol

$$\begin{aligned} q_1 = & -s*s*s*X13*Y12*Z12 - b12*s*s*X13*Z12 - a13*b12*c12 - a13*s*s*Y12*Z12 \\ & + b13*s*s*X12*Z12 + c12*s*s*X12*Y13 - a13*c12*s*Y12 + a12*b13*c12 \\ & + a12*b13*s*Z12 - a13*b12*s*Z12 - b12*c12*s*X13 + a12*s*s*Y13*Z12 \\ & + s*s*s*X12*Y13*Z12 + a12*c12*s*Y13 - c12*s*s*X13*Y12 + b13*c12*s*X12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_0 = & -a12*a12*a13 - a12*c13*s*Z12 + a12*s*s*Z12*Z13 + a12*c12*s*Z13 \\ & - c12*c13*s*X12 - a12*c12*c13 + s*s*s*X13*Y12*Y12 - c13*s*s*X12*Z12 \\ & + s*s*s*X12*X12*X13 + s*s*s*X12*Z12*Z13 - a12*a12*s*X13 - b12*b12*s*X13 \\ & - a13*b12*b12 + a13*s*s*X12*X12 + a13*s*s*Y12*Y12 + c12*s*s*X12*Z13 \end{aligned}$$

$$q_1 * b + q_0 = 0 \qquad (3.2b)$$

- ahol

$$\begin{aligned} q_1 = & \; b12*c12*s*X13 + b13*c12*s*X12 - a13*b12*s*Z12 - s*s*s*X13*Y12*Z12 \\ & - a13*c12*s*Y12 + a12*b13*c12 + a12*s*s*Y13*Z12 - a13*s*s*Y12*Z12 \\ & + a12*b13*s*Z12 + s*s*s*X12*Y13*Z12 - a13*b12*c12 + c12*s*s*X12*Y13 \\ & + a12*c12*s*Y13 - b12*s*s*X13*Z12 - c12*s*s*X13*Y12 + b13*s*s*X12*Z12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_0 = & -a12*a12*b13 - c12*c13*s*Y12 + b13*s*s*Y12*Y12 + c12*s*s*Y12*Z13 \\ & + s*s*s*Y12*Z12*Z13 + s*s*s*X12*X12*Y13 - b12*c13*s*Z12 + b12*s*s*Z12*Z13 \\ & - b12*b12*b13 - a12*a12*s*Y13 + b13*s*s*X12*X12 - c13*s*s*Y12*Z12 \\ & + b12*c12*s*Z13 + s*s*s*Y12*Y12*Y13 - b12*b12*s*Y13 - b12*c12*c13 \end{aligned}$$

$$q_1 * c + q_0 = 0 \qquad (3.2c)$$

- ahol

$$\begin{aligned} q_1 = & -b12*s*X13 - a13*s*Y12 - s*s*X13*Y12 - a13*b12 \\ & + s*s*X12*Y13 + a12*b13 + a12*s*Y13 + b13*s*X12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_0 = & -a12*a13 - b12*b13 + s*s*Z12*Z13 + s*s*Y12*Y13 \\ & - c12*c13 + a13*s*X12 + b13*s*Y12 - a12*s*X13 \\ & + s*s*X12*X13 + c12*s*Z13 - b12*s*Y13 - c13*s*Z12 \end{aligned}$$

Somogyi (1969) tanulmánya alapján az R forgatási mátrix felhasználásával az s, a, b, és c értékek ismeretében a még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paraméterek értékeket a (2.1) képletből kifejezve az alábbi összefüggéssel nyerhetjük:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} - \frac{s}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Az ismeretlenek $\sum_x$ variancia-kovariancia mátrixát a nemlineáris hibaterjedési törvény alapján a következő formulával adjuk meg:

$$\sum\nolimits_x = J_x^{-1} J_y \sum\nolimits_y J_y^{'} \left(J_x^{-1}\right)^{'} \tag{3.4}$$

A J_x és J_y Jacobi mátrixokat az (2.9) képletek parciális deriválásával állítjuk elő:

$$J_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a} & \frac{\partial f_1}{\partial b} & \frac{\partial f_1}{\partial c} & \frac{\partial f_1}{\partial X_0} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a} & \frac{\partial f_2}{\partial b} & \frac{\partial f_2}{\partial c} & \frac{\partial f_2}{\partial X_0} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a} & \frac{\partial f_3}{\partial b} & \frac{\partial f_3}{\partial c} & \frac{\partial f_3}{\partial X_0} & \frac{\partial f_3}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a} & \frac{\partial f_4}{\partial b} & \frac{\partial f_4}{\partial c} & \frac{\partial f_4}{\partial X_0} & \frac{\partial f_4}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial a} & \frac{\partial f_5}{\partial b} & \frac{\partial f_5}{\partial c} & \frac{\partial f_5}{\partial X_0} & \frac{\partial f_5}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_5}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial a} & \frac{\partial f_6}{\partial b} & \frac{\partial f_6}{\partial c} & \frac{\partial f_6}{\partial X_0} & \frac{\partial f_6}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_6}{\partial Z_0} \\ \frac{\partial f_9}{\partial x_1} & \frac{\partial f_9}{\partial a} & \frac{\partial f_9}{\partial b} & \frac{\partial f_9}{\partial c} & \frac{\partial f_9}{\partial X_0} & \frac{\partial f_9}{\partial Y_0} & \frac{\partial f_9}{\partial Z_0} \end{bmatrix}$$

$$J_y = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial a_1} & \frac{\partial f_1}{\partial b_1} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1} & \frac{\partial f_1}{\partial a_2} & \frac{\partial f_1}{\partial b_2} & \frac{\partial f_1}{\partial c_2} & \frac{\partial f_1}{\partial a_3} & \frac{\partial f_1}{\partial b_3} & \frac{\partial f_1}{\partial c_3} & \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_3} & \frac{\partial f_1}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_1}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} & \frac{\partial f_2}{\partial b_1} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1} & \frac{\partial f_2}{\partial a_2} & \frac{\partial f_2}{\partial b_2} & \frac{\partial f_2}{\partial c_2} & \frac{\partial f_2}{\partial a_3} & \frac{\partial f_2}{\partial b_3} & \frac{\partial f_2}{\partial c_3} & \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_3} & \frac{\partial f_2}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_2}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial a_1} & \frac{\partial f_3}{\partial b_1} & \frac{\partial f_3}{\partial c_1} & \frac{\partial f_3}{\partial a_2} & \frac{\partial f_3}{\partial b_2} & \frac{\partial f_3}{\partial c_2} & \frac{\partial f_3}{\partial a_3} & \frac{\partial f_3}{\partial b_3} & \frac{\partial f_3}{\partial c_3} & \frac{\partial f_3}{\partial X_1} & \frac{\partial f_3}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial X_3} & \frac{\partial f_3}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_3}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_4}{\partial a_1} & \frac{\partial f_4}{\partial b_1} & \frac{\partial f_4}{\partial c_1} & \frac{\partial f_4}{\partial a_2} & \frac{\partial f_4}{\partial b_2} & \frac{\partial f_4}{\partial c_2} & \frac{\partial f_4}{\partial a_3} & \frac{\partial f_4}{\partial b_3} & \frac{\partial f_4}{\partial c_3} & \frac{\partial f_4}{\partial X_1} & \frac{\partial f_4}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_4}{\partial X_3} & \frac{\partial f_4}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_4}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_5}{\partial a_1} & \frac{\partial f_5}{\partial b_1} & \frac{\partial f_5}{\partial c_1} & \frac{\partial f_5}{\partial a_2} & \frac{\partial f_5}{\partial b_2} & \frac{\partial f_5}{\partial c_2} & \frac{\partial f_5}{\partial a_3} & \frac{\partial f_5}{\partial b_3} & \frac{\partial f_5}{\partial c_3} & \frac{\partial f_5}{\partial X_1} & \frac{\partial f_5}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_5}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_5}{\partial X_3} & \frac{\partial f_5}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_5}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_6}{\partial a_1} & \frac{\partial f_6}{\partial b_1} & \frac{\partial f_6}{\partial c_1} & \frac{\partial f_6}{\partial a_2} & \frac{\partial f_6}{\partial b_2} & \frac{\partial f_6}{\partial c_2} & \frac{\partial f_6}{\partial a_3} & \frac{\partial f_6}{\partial b_3} & \frac{\partial f_6}{\partial c_3} & \frac{\partial f_6}{\partial X_1} & \frac{\partial f_6}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_6}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_6}{\partial X_3} & \frac{\partial f_6}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_6}{\partial Z_3} \\ \frac{\partial f_9}{\partial a_1} & \frac{\partial f_9}{\partial b_1} & \frac{\partial f_9}{\partial c_1} & \frac{\partial f_9}{\partial a_2} & \frac{\partial f_9}{\partial b_2} & \frac{\partial f_9}{\partial c_2} & \frac{\partial f_9}{\partial a_3} & \frac{\partial f_9}{\partial b_3} & \frac{\partial f_9}{\partial c_3} & \frac{\partial f_9}{\partial X_1} & \frac{\partial f_9}{\partial Y_1} & \frac{\partial f_9}{\partial Z_1} & \cdots & \frac{\partial f_9}{\partial X_3} & \frac{\partial f_9}{\partial Y_3} & \frac{\partial f_9}{\partial Z_3} \end{bmatrix}$$

4. Numerikus példa

A módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatásához vegyük *Somogyi (1969)* tanulmányában közölt példa három adott pont koordinátáit két koordináta-rendszerben:

I. táblázat. A modell- és tárgy-koordináták (mm)

No	a_i	b_i	c_i	X_i	Y_i	Z_i
P	183.00	500.40	800.02	423.09	500.42	800.02
1	181.53	749.31	402.84	423.78	766.61	379.80
2	223.76	279.16	393.28	465.59	267.41	367.23

E tanulmányban ismertetett algoritmus végrehajtásával a nemlineáris feladat egzakt megoldásának eredményei az alábbi táblázatban összehasonlíthatók a hagyományos módon kapott értékekkel:

II. táblázat. A két számítási módszer összehasonlítása (mm)

Ismeretlen	**Thompson módszer**	**Nemlineáris módszer**
s	0.94220	0.94227
a	-0.00245228	-0.00241636
b	0.00075362	-0.00014677
c	0.00303920	0.00447552

A nemlineáris módszer az eltolási paraméterekre az alábbi értékeket szolgáltatja:

$$X_0 = \text{-}211.20276\text{mm} \qquad Y_0 = 21.66893\text{mm} \qquad Z_0 = 48.34286\text{mm}$$

5. Összefoglalás

Egy algoritmust adtunk meg a 3D transzformáció 7 paraméteres nemlineáris egyenletrendszerének megoldására a forgatási mátrix parametrizálásával, amely eljárás sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A feladat levezetéséből látható, hogy linearizálásra csak a nemlineáris variancia-kovariancia mátrix meghatározásához van szükség.

A 7 paraméteres dátum transzformációs probléma megoldási algoritmusának kidolgozása során a Gröbner bázisra való áttérés segítségével a 3D transzformáció skála paraméterének meghatározásához negyed-fokú polinom-egyenletet vezettünk le.

Amennyiben az egy kombinációban feldolgozott három pont közül valamely pont koordinátái durva hibával terheltek, az egzakt megoldás értékei is tartalmazzák e hibák hatását. Ha viszont olyan három pontot dolgozunk fel, amely pontok koordinátái mentesek a durva hibáktól, akkor a megoldás is hibamentes lesz. Így a pontok közül kiválaszthatók azok a pontok, amelyek eltorzítják az eredményeket. Tehát a 7 paraméteres dátum transzformációs probléma megoldásának nemlineáris eljárása alkalmas a durvahiba szűrésre, míg a hagyományos módszerek elosztják a durva hibák hatását is.

Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány a T038190 és a T037218 nyilvántartás számú OTKA pályázatok támogatásával készült.

Hivatkozások

Awange JL, Grafarend EW (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation C_7 (3) problem. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 127, 109-116.

Awange JL, Grafarend EW (2003): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformation. *Allgemeine Vermessungsnachrichten*, 4, 130-149.

Bácsatyai L (1998): Átszámítások vonatkozási rendszerek között. *Geomatikai Közlemények* I, 163-178.

Selinger S, Winkler G, Juhász A (2004): Kolozsvár-belváros térinformatika alapú építészettörténeti adatbázisa, *Geomatikai Közlemények* VII, 119-126.

Somogyi J (1969): About the direct determination of the elements of rotation matrix. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 4, 451-458.

Závoti J (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. *Geomatikai Közlemények,* II, 1-149.

AZ ERDÉSZETI TÉRKÉPEK DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓS KÉRDÉSEI

Bácsatyai László[*]

Datum transformation problems of the forestry maps *- The projection of the national forestry map system, including the base maps, the management maps and the overview maps, is the Budapest Stereographic Projection System, according to the 'Mapping' chapter of the 'Manual of Forest Management Planning' published in 1986. The widespread of GPS technique even in the forestry, the modern computational devices (hardware, software, Geographic Information System - GIS) and not least, the fact that there are frequently large differences between the theoretically identical borders given in the geodetic and forest base maps made necessary the introduction of the Unified National Projection system (EOV), which had been used since 1975 in the field of geodesy. Consequently the digital forest maps were made in EOV system. The Digital Forestry Map data format (DET), the Digital Forestry Legend system (DEJ) and the transformation module of DigiTerra MAP software were used for the preparation of digital forestry maps.*

Keywords: **geodetic datum, stereographic projection, unified national projection, analogue map, digital map, forestry legend system**

Az 1986-ban kiadott „Útmutató az erdőállomány-gazdálkodási tervek (erdőtervek) készítéséhez" című erdőtervezési útmutató módosításának „Térképészet" fejezete szerint az országos erdészeti térképrendszer térképei, az alaptérképek, az erdőtervi térképek, az üzemtervi térképek és az átnézeti térképek vetületi rendszere a sztereografikus vetület budapesti rendszere. A már az erdészeti gyakorlatban is tért nyert GPS technika, a korszerű számítástechnikai eszközök (hardver és szoftver, Földrajzi Információs Rendszerek - GIS) és nem utolsó sorban az a tény, hogy a földmérési alaptérképek és az erdészeti üzemi térképek elvileg azonos határvonalai között helyenként igen nagyok az eltérések, szükségessé tették az állami földmérésben már 1975-től előírt Egységes Országos Vetület (EOV) használatának engedélyezését. Az Állami Erdészeti Szolgálat 521/2000 számú főigazgatói utasításával az analóg térképek 1962 óta megszokott rendszere az egységes digitális kezelhetőség érdekében megváltozott. Ennek következményeként a digitális erdőtérképek az EOV-ben elkészültek. A digitális erdőtérképek készítéséhez a Digitális Erdészeti Térkép (DET) adatformátumát, a Digitális Erdészeti Jelkulcs (DEJ) jelkészletét, valamint a DigiTerra MAP programcsomagba épített transzformációt használták.

Kulcsszavak: geodéziai dátum, sztereografikus vetület, Egységes Országos Vetület, analóg erdőtérkép, digitális erdőtérkép, jelkulcs

Bevezetés

A Magyarországon használatos dátumok (vonatkoztatási ellipszoidok) mindannyiunk számára ismeretesek *(I. táblázat).*

I. táblázat. Magyarországon is használatos vonatkoztatási ellipszoidok paraméterei

Az ellipszoid neve	Közlésének éve	*a* (m)	*b* (m)	α
Bessel	1842	6377397,155	6356078,963	1:299,153
Kraszovszkij	1940	6378245	6356863,019	1:298,3
IUGG/1967	1967	6378160	6356774,516	1:298,247
WGS84	1984	6378137	6356752,3142	1:298,257

A Magyarországon ma is használatos 1:10000 méretarányú analóg erdőtérképek története 1962-ig nyúlik vissza. Ebben az évben szándékozott az Állami Földmérési és Térképészeti Hivatal (ÁFTH)

[*]*NYME Földmérési és Távérzékelési Tanszék, 9400 Sopron, Ady Endre u. 5.*
E-mail: bacsaty@emk.nyme.hu

egységesíteni a polgári célú vetületi és szelvényezési rendszereket. Az ÁFTH 227/1962 szám alatt Utasítást adott ki, amely szerint a polgári célú térképeket a Bessel - ellipszoidú sztereografikus öl-rendszerű szelvényezésben kell készíteni. Az utasításnak csak az erdészeti ágazat tett eleget, s érdekes módon egészen az 1900-as évek utolsó éveiig ragaszkodott is hozzá, úgymond, 1962-ben is csak mi tértünk át, várjuk meg, legyenek előbb készen az EOV állami alaptérképek (EOTR), aztán majd meglátjuk. Erre az időre viszont az egyedül már csak az erdészek által használt sajátos térképrendszer a GIS keretén belül egyre inkább akadályozta az egyéb szervezetekkel, de elsősorban az állami földméréssel való adatcserét. Ezért is örvendetes, hogy az erdészeti ágazatban 2000-től mind szakmailag, mind jogilag lehetővé, sőt kötelezővé vált az EOTR használata.

Az analóg erdőtérképek szelvényezési rendszere

Az eredeti sztereografikus vetületnek a történelmi Magyarországgal való kapcsolatát mindenki ismeri. A történelmi Magyarország területét három sztereografikus vetülettel fedték le *(1. ábra):*

1. ábra. A történelmi Magyarország három sztereografikus vetülete[1]

1. A *budapesti rendszer*. Kezdőpontja a *Gellérthegy* nevű felsőrendű alappont.
2. A *marosvásárhelyi rendszer*. Kezdőpontja a Kesztejhegy nevű felsőrendű alappont. E rendszerben ábrázolták az erdélyi és a kelet-magyarországi területeket.
3. Az ivaniči rendszer. A rendszert a délnyugati, tengerparti területek felmérésére hozták létre. Kezdőpontja a Zágrábtól mintegy 30 km-re keletre fekvő Ivaničgradon lévő Ivanič nevű (Zárdatorony) felsőrendű háromszögelési pont (Dr. Varga József szerint az ivaniči rendszer valójában nem létezik, *Varga 2005*).

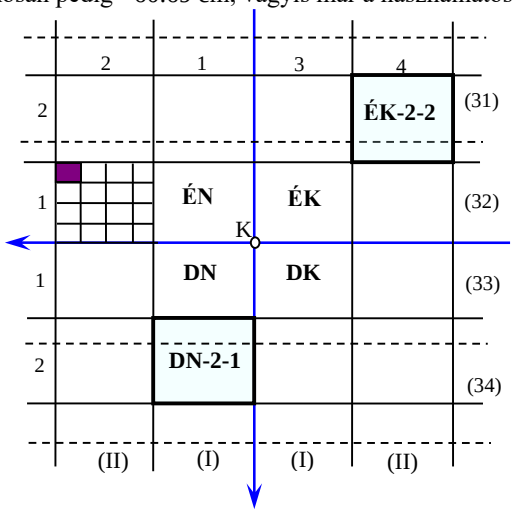
A későbbiekben a budapesti rendszerben történt a térképezés, így 1962-ben erre támaszkodva dolgozta ki az ÁFTH a budapesti sztereografikus vetület módosított, öl rendszerű szelvényhálózati rendszerét. Az analóg erdőtérképek szelvényezése *(2. ábra)* ettől az időtől ebben a rendszerben történt. Az egységesség érdekében az elfogadott vetület nélküli és hengervetületi szelvényeket is sztereografikus vetületre dolgozták át.

Az analóg erdészeti üzemi térkép M = 1:10000 méretarányú szelvénye $4 \cdot 4$ = 16 db, egyenként 1:2880 méretarányú, $1000\,\text{öl} \cdot 800\,\text{öl}$ $(\approx 1896{,}48\,\text{m} \cdot \approx 1517{,}18\,\text{m})$ nagyságú *kataszteri szelvényből* állt. Ilyen pld. a *2. ábrán* sötétítéssel jelölt szelvény. Az egyes rétegek az eredeti öl rendszerű szel-

[1] http://zeus.szif.hu/ottofi/drottofi/keret1.htm

vényezéstől eltérően tehát az *x* tengellyel párhuzamosan nem 5 x 800 öl=4000 öl, hanem csak 4 x 800 öl=3200 öl kiterjedésűek.

Az 1:10000 méretarányú üzemi térkép lapmérete az *y* tengellyel párhuzamosan ~75,86 cm, az *x* tengellyel párhuzamosan pedig ~60.69 cm, vagyis már a használhatóság határán van.



2. ábra. Erdészeti üzemi térképek szelvényezési rendszere

A szelvényezés kezdőpontja a Gellérthegy nevű alappont, számozása a 2. ábrán látható: az ábrán megjelölt egyik $4000\,\text{öl} \cdot 3200\,\text{öl}$ területű, 1:10000 méretarányú szelvény száma: **ÉK-2-2**, vagyis az északkeleti sík-negyed északi irányban 2. rétegének, nyugati irányban pedig 2. oszlopának metszésében lévő szelvény. A könnyebb eligazodás végett a *2. ábrán* zárójelben a történelmi Magyarország északi részétől kiinduló eredeti öl rendszerű szelvényszámozást is feltüntetjük.

A *3. ábrán* bemutatjuk, hogyan takarják le a szelvények Magyarország erdőterületeit.

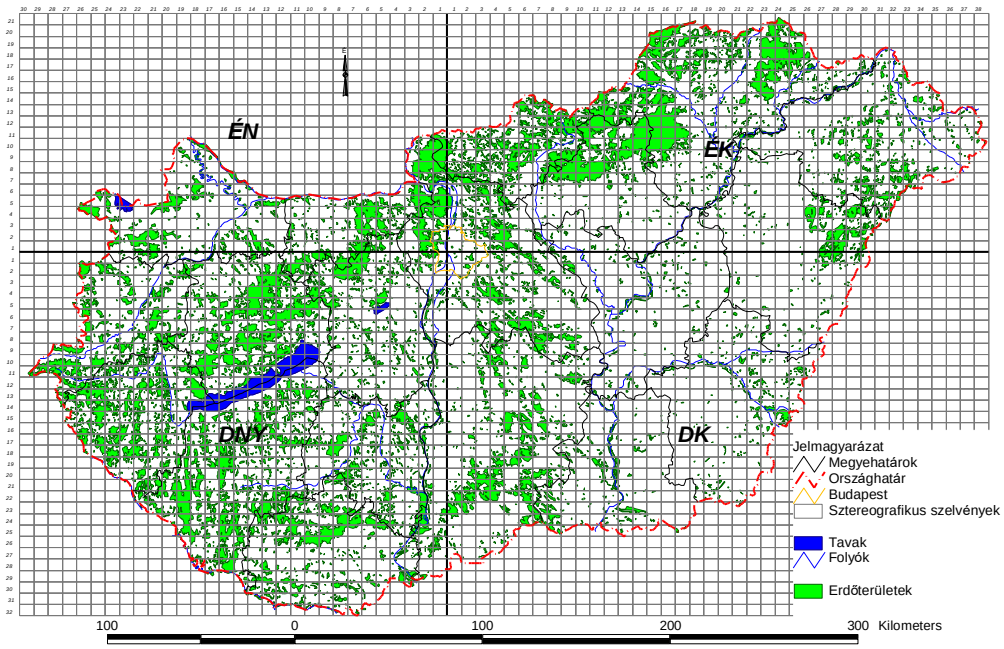
A digitális erdőtérképek szelvényezési rendszere

Az Egységes Országos Térképrendszer szelvényezésének alapját ismeretesen az *y* irányban 48000 m, az *x* irányban pedig 32000 m nagyságú 1:100000 méretarányú szelvények képezik. A *4. ábrán* látható, hogy az 1:100000 méretarányú szelvények száma a szelvénysorok, illetve a szelvényoszlopok 0-tól induló sorszámaiból tevődik össze. Az ábra sarokpontjainak koordinátái a koordinátarendszer eltolása miatt:

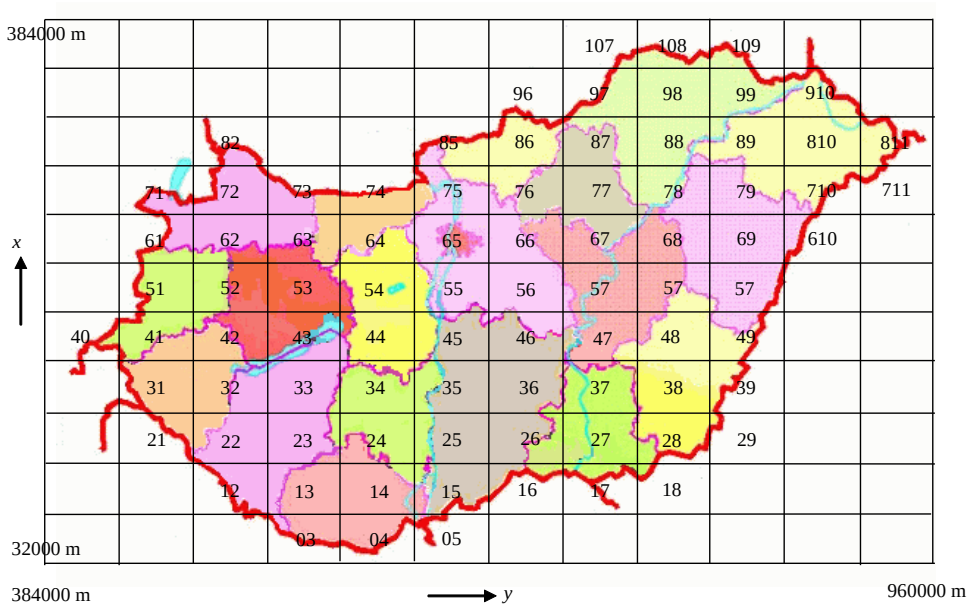
$$X_D = 32000 \text{ m} \quad X_E = 384000 \text{ m}$$

$$Y_N = 384000 \text{ m} \quad Y_K = 960000 \text{ m}$$

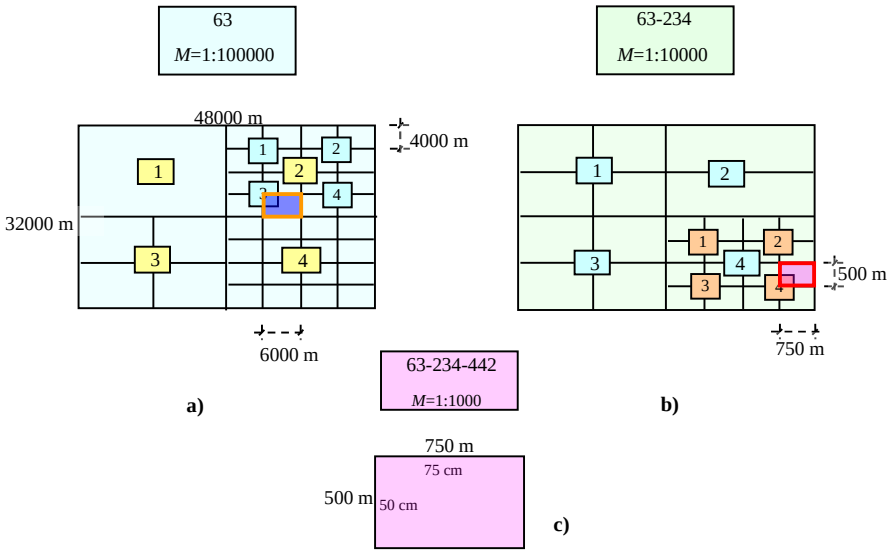
Az 1:100000 méretarányú szelvényekből az 1:50000, 1:25000 és 1:10000 méretaránysor térképlapjait mindig a kisebb méretarányú szelvény negyedelésével kapjuk *(5/a. ábra)*. A szelvények számozása az ábrából követhető nyomon. Az 1:10000 méretarányú szelvények számozására példát az *5/b. ábrán* látunk. Az 1:10000 méretarányú szelvények további negyedelésével jutunk el az 1:4000 és 1:2000 méretarányú szelvényeken át az 1:1000 méretarányú szelvényhez. Ennek méretét és számozását az *5/c. ábrán* láthatjuk.



3. ábra. Erdészeti üzemi térképek Magyarország erdőterületeiről



4. ábra. Az EOTR szelvényhálózata. Az 1:100000 méretarányú szelvények



5. ábra. Az EOTR különböző méretarányú szelvényei
a) 1:10000, **b)** 1:10000, **c)** 1:1000

Áttérés az Egységes Országos Vetületre

Az utóbbi években teljes értékű polgárjogot nyert számítógépes földrajzi információs rendszerek (GIS) szükségessé tették a különböző térképrendszerek összehangolását, egységes kezelését. Mivel köztudottan a magyar állami földmérés térképeinek túlnyomó többsége ma már EOTR szelvényezésben elkészült, így célszerű volt a digitális erdőtérképek szelvényezésénél is ezt a rendszert követni. Ennek érdekében jelent meg az Állami Erdészeti Szolgálat 521/2000 számú főigazgató utasításának szakmai anyaga, az *Útmutató a digitális üzemi térkép készítéséhez és mintaállományaihoz.*

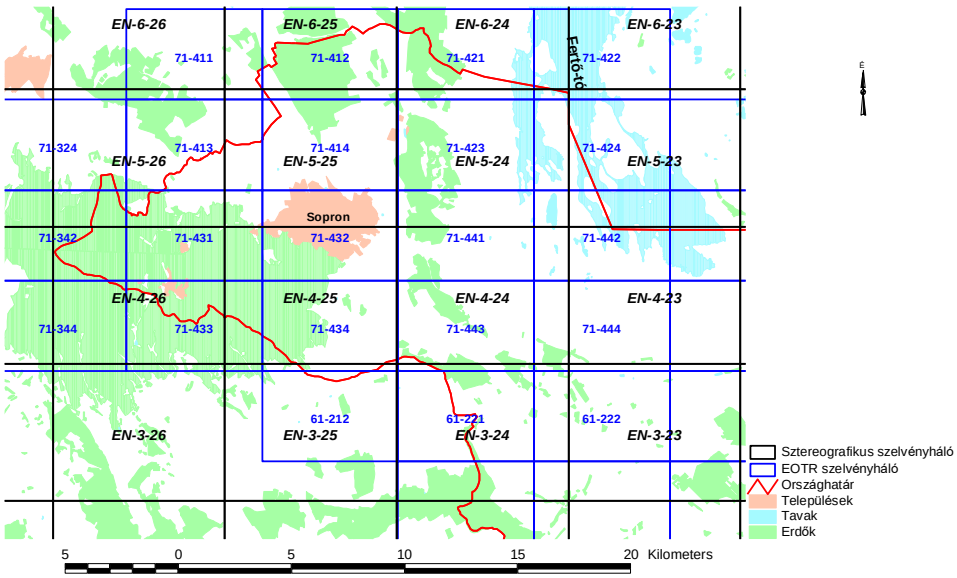
A digitális térképi alapadatok létesítéséhez és a digitális üzemi térkép analóg megjelenítéséhez ez az utasítás engedélyezte először hivatalosan az EOV vetületi rendszert és az EOTR szelvényezést. Az EOV rendszerre való áttérést ennek megfelelően megkezdték. A sztereografikus (vagy más) vetületről az EOV-re vagy az EOV koordinátáikkal adott ún. illesztőpontok segítségével térnek át, vagy a sztereografikus (vagy más) vetületi rendszerben előállított digitális adatállományt transzformálják az Egységes Országos Vetületbe. Az 1:10000 méretarányú analóg és digitális erdőtérképek szelvényezését látjuk együtt a 6. ábrán.

A digitális erdőtérképek készítésénél a Digitális Erdészeti Térkép (DET) adatformátumát, a Digitális Erdészeti Jelkulcs (DEJ) jelkészletét, valamint a DigiTerra MAP programcsomagba épített transzformációt használták.

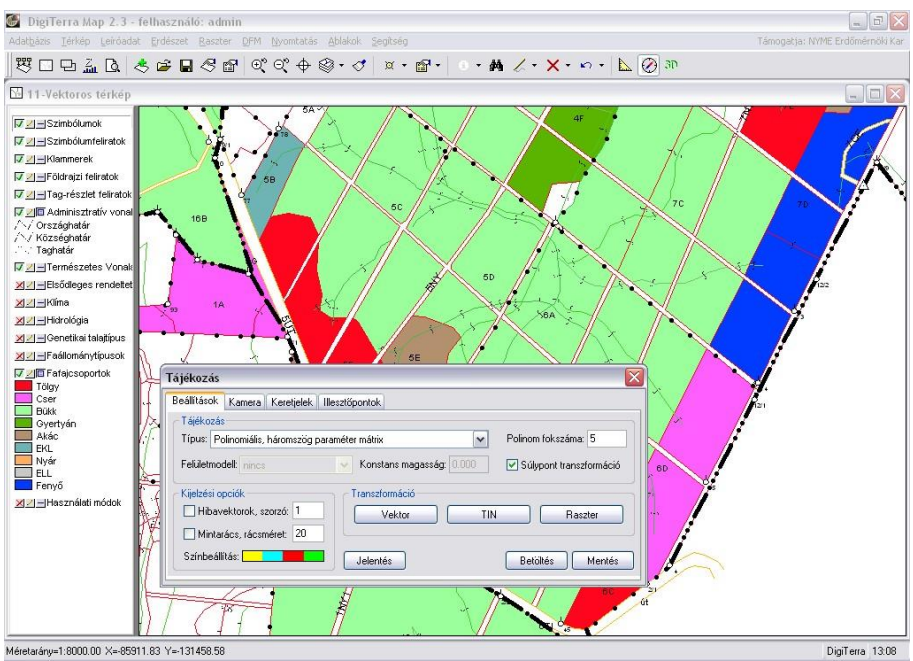
A megvalósítás főbb szakaszai:

- 1997: Elindult az 1:10000 méretarányú erdészeti üzemi térképek digitalizálása
- 1999: DET és DEJ (DigiTerra Kft. + NYME Földmérési és Távérzékelési Tanszék)
- 2000: Az Állami Erdészeti Szolgálat 521/2000 számú főigazgatói utasítása
- 2001-től: Vetületváltás az ÁESZ irodái a DigiTerra Map program 2.3 verziójával, a programba épített polinomos hasonlósági transzformációval
- 2002: A hátralévő, mintegy 40%-nyi erdészeti üzemi térképszelvény digitalizálására kiírt pályázatot a Flexiton Kft nyerte.
- 2003-2004: A térképek egységesítése (egységes struktúra, vetület, illesztés, kataszteri térképhez igazítás stb.).

A *7. ábrán* a DigiTerra Map v2.3 munkafelületét látjuk az Egységes Országos Vetületbe transzformálás előtt.



6. ábra. Az analóg és digitális térképek szelvényei



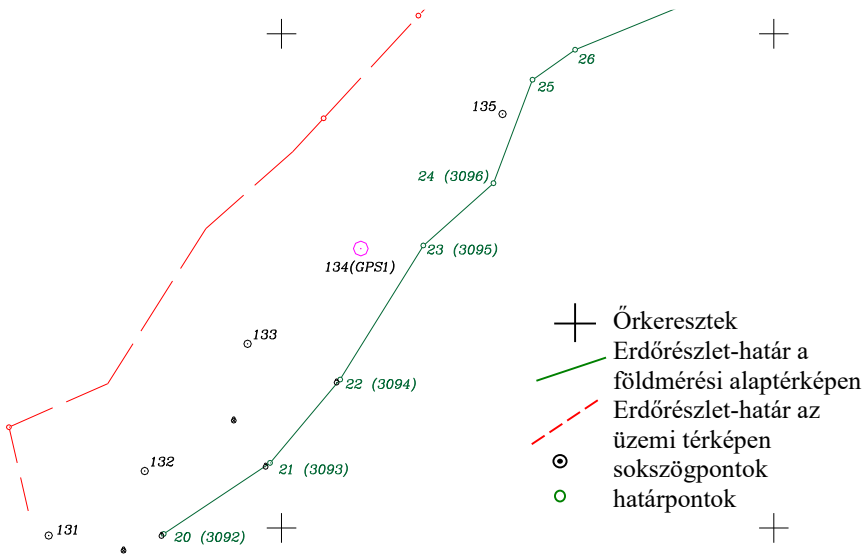
7. ábra. A DigiTerra Map v2.3 munkafelülete az EOV-be transzformálás előtt

Gyakorlati példa

Az EOV-re való áttérés – szükségszerűsége és egyéb előnyei mellett - vizsgálhatóvá teszi például az erdészeti üzemi és a földmérési alaptérképek határvonalai közötti, az ország több részén felfedezhető jelentős eltéréseket. Erre példát az alábbiakban mutatok be.

A Pilisi Parkerdőgazdaság szentendrei erdészetének területén az elmúlt évben diplomatervező hallgatóink (*Kas és Verók, 2003*) vizsgálták az 1:10000 méretarányú erdészeti üzemi térképen és a földmérési alaptérképen is ábrázolt erdőrészlet-határok eltéréseit.

Az üzemi térképeken lévő erdőrészlet-határokat vektoros digitalizálás, majd az EOV-be történt transzformáció útján, a földmérési alaptérképeken koordinátákkal adott erdőrészlet-határpontokat pedig sokszögvonalról való kitűzéssel határozták meg, ill. ábrázolták. A *8. ábrán* szaggatott vonallal az üzemi, folytonos vonallal pedig a földmérési alaptérképen szereplő határokat látjuk. Az őrkeresztek távolsága 100 m. Látható, hogy az eltérés több 10 m nagyságrendű, a *8. ábrán* nem ábrázolt területrészeken helyenként eléri az 50-60 m-t is.



8. ábra. Erdőrészlet-határok eltérése az erdészeti üzemi és a földmérési alaptérképeken

Összefoglalás

A tanulmány rövid áttekintést adott az országos erdészeti térképrendszer térképeinek dátumtranszformációjáról, a sztereografikus vetület budapesti rendszeréről az EOV-re történő áttérés végrehajtásának történetéről. Bemutatta a Nyugat-Magyarországi Egyetem Földmérési és Távérzékelési Tanszéke, az Állami Erdészeti Szolgálat és a DigiTerra Kft szerepét az áttérésben.

Hivatkozások

Varga J (2005): Volt-e ivanicsi (ivaniči) sztereografikus vetület? *Geomatikai Közlemények* VIII. 45-52.
Kas R és Verók T (2003) : Erdőhatárok kitűzése a Pilisi Parkerdő Rt területén, *Diplomaterv*, Sopron.

KOORDINÁTATRANSZFORMÁCIÓ GEOIDUNDULÁCIÓK BECSLÉSÉVEL

Bányai László[*]

Coordinate transformation with the estimation of geoid undulations *- The geoid undulations referring to the local geodetic reference systems are usually neglected during the seven parameters spatial similarity transformations. In this paper the possibility of the common estimation of the transformation parameters and the neglected local geoid undulations is investigated. The introduction of the new unknowns leads to three linearly dependent parameters, which can be handled by the abandoning of the rotations along the axes x and y together with the constrain providing zero average of the geoid undulations. In spite of the ill condition the estimated undulations are relatively similar to the undulations determined by astronomic levelling. The extension of this transformation for the whole GPS network provides a new tool for the investigation of the height errors and the local geoid undulations.*

Keywords: similarity transformation, geoid undulation, global and local geodetic reference systems

A hétparaméteres térbeli hasonlósági transzformációk során a helyi elhelyezésű geodéziai vonatkoztatási rendszerekhez tartozó geoidundulációkat általában elhanyagolják. Ebben a dolgozatban megvizsgáltuk a transzformációs paraméterek és az elhanyagolt geoidundulációk együttes becslésének a lehetőségét. Az új ismeretlenek bevezetése három lineárisan összefüggő paramétert eredményezett, amit az x és y tengelyek körüli elfordulások elhagyásával és geoidundulációk nulla átlagértékét előíró kényszerfeltételek segítségével szüntettük meg. A probléma rosszul kondicionáltsága ellenére a becsült geoidundulációk viszonylag jó egyezést mutattak a csillagászati-geodéziai geoiddal. A transzformációnak a teljes OGPSH hálózatra történő kiterjesztésével a pontok magassági hibái, és a helyi geoidundulációk is új alternatív módszerrel vizsgálhatók.

Kulcsszavak: hasonlósági transzformáció, geoidundulláció, globális és helyi geodéziai vonatkoztatási rendszerek

Bevezetés

A földi (globális, geocentrikus) és a helyi geodéziai vonatkoztatási rendszerek közötti transzformáció kérdése már az NNSS Doppler műholdas rendszer megjelenésekor is előtérbe került *(Ádám, 1980, 1982)*. A gyakorlati jelentősége azonban csak a GPS tecnika széleskörű elterjedésével vált hangsúlyossá, mivel a WGS-84 és az egyes országok hivatalosan használt vonatkoztatási rendszerei közötti átszámítás mindennapos alapfeladattá vált. A feldolgozó szoftverek is szinte kivétel nélkül különböző eljárásokat ajánlottak fel a feladat megoldására. A Magyarországon alkalmazott EOV kettős vetítés kezdetben kisebb gondot jelentett a külföldi programterjesztőknek, ezért itthon is sokan foglalkoztak a feladat szabatos és közelítő megoldásaival is. A transzformációkról számos hazai és nemzetközi publikáció született. Magyar nyelven talán a legrészletesebb összefoglaló az *Ádám et. al. (2004)* könyvben található.

A földi és valamely helyi vonatkoztatási rendszer közötti átszámítás gyakorlati meghatározásához olyan közös pontokra van szükségünk, amelyeknek mindkét rendszerben ismertek az ellipszoidi koordinátái (φ,λ,h). Az alappontok földi geocentrikus koordinátái legegyszerűbben GPS mérések segítségével határozhatók meg (3D pontmeghatározás). Ezeknek a pontoknak a helyi rendszerre vonatkozó ellipszoidi koordinátát a hagyományos (vízszintes és magassági) hálózati mérésekből vezethetjük le ((2+1)D pontmeghatározás). A helyi elhelyezésű ellipszoid feletti h_h magasságokat a pont geoid (tengerszint) feletti H magasságának és a pont függőlegesében a geoid és a helyi elhelyezésű ellipszoid n_h távolságának (a helyi geoidundulációnak) az összegeként állítjuk elő. (Az előbbit

[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: banyai@ggki.hu

szabatos szintezéssel, az utóbbit a hálózatban végzett csillagászati-geodéziai mérések eredményeire támaszkodó csillagászati szintezéssel tudjuk meghatározni).

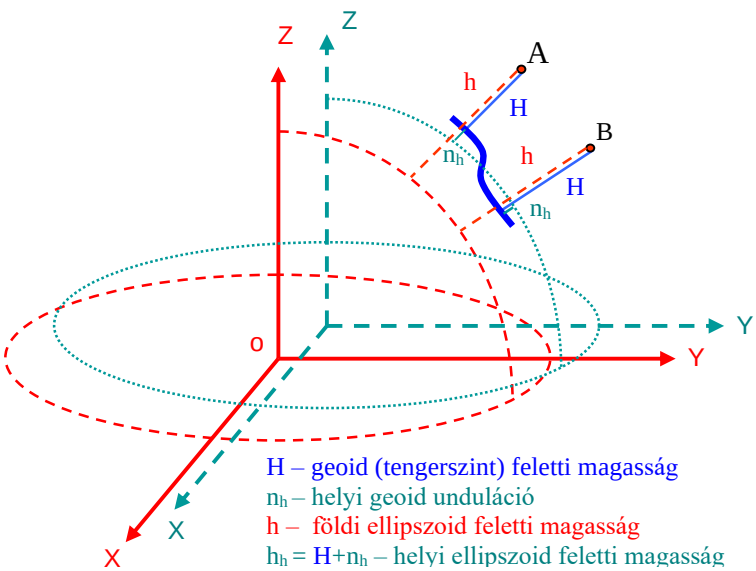
Az szakirodalom tanulmányozása alapján megállapítható, hogy a transzformációs paraméterek meghatározásánál nagyon gyakran az $n_h=0$ elhanyagolással (azaz a $h_h \approx H$ közelítéssel) élnek. Ennek azonban az a következménye, hogy az így számított transzformációs paraméterek nem a földi és az eredeti helyi rendszer közötti átszámítást eredményezik, hanem a földi rendszer és a közös pontok területén, valahol a geoid középmagasságában elhelyezkedő ellipszoid által meghatározott helyi vonatkoztatási rendszer kapcsolatát jellemzik. Az elhanyagolt geoidundulációk a számított transzformációs paraméterek nagyobb középhibájában és számszerűen a valóságostól eltérő (hibás) eltolási értékekben jelentkeznek.

A térbeli transzformációs paraméterek kiszámításához elvileg elegendő három (nem egyegyesen, vagy annak közelében elhelyezkedő) közös pont ismerete. A gyakorlatban azonban mindig nagyon nagy számú fölös alappont alkalmazására kell törekednünk, ezért felmerült a hiányzó n_h geoidundulációnkak a transzformációs paraméterekkel együtt történő meghatározásának a vizsgálata. Ily módon a helyi geoid becslésére alternatív, (vagy kiegészítő) adatokhoz juthatnák.

Dr. Ádám József OTKA témavezető (T-030177 számú „Magyarországi geodéziai vonatkozási rendszerek vizsgálata") felkérésére vállaltam ennek a feladatkörnek a vizsgálatát. Jelen tanulmányban a kezdeti eredményeket foglaltam össze.

A koordinátatranszformáció matematikai modellje

A koordinátatranszformáció geometriai viszonyait az 1. ábra mutatja, ahol vastag vonallal rajzoltuk a globális (WGS-84) és szakadozott vonallal a helyi (IUGG-67 (⇒ HD72 ⇒ EOV)) vonatkoztatási rendszer koordinátatengelyeit. Az egyenlítői köröket és az egymásnak megfelelő meridián negyedvonalakat is ábrázoltuk. A meridián feletti vastag vonal a geoidot (a tengerszintet) jelképezi. Az „A" és „B" pontok geoid feletti magasságát H, a geoidi vetületük helyi ellipszoid feletti magasságait (az un. helyi geoidundulációkat) n_h jelöléssel láttuk el.



1. **ábra.** A koordinátatranszformáció geometriai viszonyai

A helyi rendszer a földihez viszonyítva eltolt helyzetben van. A helyi rendszer elhelyezésekor ugyan törekedtek arra, hogy a koordinátatengelyek párhuzamosak legyenek a földi rendszer tengelyeivel, de a mérési hibák miatt feltételezhetjük, hogy azok kis mértékben elfordulhattak. A két

rendszer eltérő méretarányát feltételezve eljuthatunk a szokásos térbeli hétparaméteres hasonlósági transzformációhoz, amit derékszögű koordináták között értelmezhetünk. A derékszögű (X, Y, Z) és az ellipszoidi (φ, λ, h) koordináták közötti ismert összefüggés a következő:

$$X = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \cos\lambda$$

$$Y = (N + h) \cdot \cos\varphi \cdot \sin\lambda$$

$$Z = ((1 - e^2) \cdot N + h) \cdot \sin\varphi$$

ahol, N a haránt irányú görbületi sugár és e az első excentricitás. Az összefüggéseket értelemszerűen alkalmazzuk mind a földi, mind a helyi ellipszoid esetében. A földi rendszerben a h ellipszoidi magasságot közvetlenül a GPS mérésekből kapjuk, a helyi rendszerben a h_h magasságot az n_h helyi geoidundulációból és a H geoid feletti magasságból számítjuk.

A helyi rendszer térbeli derékszögű koordinátáinak a számításakor, ha elhanyagoljuk a n_h értékeket, akkor a koordinátákkal jellemzett pontok az *1. ábra* szerinti „A" pont függőlegesében közelebb, a „B" pont függőlegesében távolabb kerülnek a földfelszíni ponttól, amely a transzformáció során hibaként jelentkezik. A transzformációs paraméterek ekkor nem az „eredeti", hanem egy átlagos helyzetbe eltolt, a helyi geoidhoz többé-kevésbé jól simuló rendszerre vonatkoznak. (Kisebb területre vonatkozó lokális transzformációk esetében, ahol a geoid síknak tekinthető, ezt az eltérést jól „elnyelik" a becsült paraméterek. Ezért gyakorlati szempontból az új pontok tengerszintfeletti magasságát is jól meg tudjuk határozni.)

A helyiből (EOV) a földi (GPS) rendszerbe történő transzformáció közvetítő egyenletei a

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_h/10^6 & 0 & -Z_h/\rho & +Y_h/\rho \\ 0 & 1 & 0 & Y_h/10^6 & +Z_h/\rho & 0 & -X_h/\rho \\ 0 & 0 & 1 & Y_h/10^6 & -Y_h/\rho & +X_h/\rho & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix},$$

a földiből (GPS) a helyi (EOV) rendszerbe történő transzformáció közvetítő egyenletei a

$$\begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_g/10^6 & 0 & -Z_g/\rho & +Y_g/\rho \\ 0 & 1 & 0 & Y_g/10^6 & +Z_g/\rho & 0 & -X_g/\rho \\ 0 & 0 & 1 & Y_g/10^6 & -Y_g/\rho & +X_g/\rho & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}$$

linearizált alakban írhatók fel, ahol $_h$ a helyi $_g$ a földi (GPS) rendszerre utaló indexek, ρ=206264,8", t_x,t_y,t_z a térbeli eltolásokat, R_x,R_y,R_z a tengelyek körüli elfordulásokat és m a méretarány egységtől való eltérését jelenti. A koordinátákat méterben megadva az eltolásokat szintén méterben, az elfordulásokat ív másodperben, az m paramétert ppm (part per million, mm/km, 10^{-6}) egységben kapjuk.

Látszólag a két egyenlet csak annyiban tér el egymástól, hogy a baloldalukon azonos, de ellentétes előjelű értékek találhatók, ezért a két módon becsült értékek szintén ellentétes előjelűek lesznek. Az egyenletek jobb oldalán azonban az egyes derékszögű koordináták is 100 m nagyságrendben eltérhetnek egymástól, ezért a paraméterek is eltérőek lesznek. Szabatos transzformációnál ezért mindig a számítás irányának megfelelő értékeket kell felhasználni. Ez a probléma különösen a rosszul kondicionált lokális transzformációk esetében okozhat nagyobb eltéréseket.

Ha a transzformáció során a helyi rendszerre vonatkozó pontonkénti n_h értékeket is ismeretlennek tekintjük, a következő linearizált közvetítő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_h/10^6 & 0 & -Z_h/\rho & +Y_h/\rho \cdots & \cos\varphi_h \cos\lambda_h \\ 0 & 1 & 0 & Y_h/10^6 & +Z_h/\rho & 0 & -X_h/\rho \cdots & \cos\varphi_h \sin\lambda_h \\ 0 & 0 & 1 & Y_h/10^6 & -Y_h/\rho & +X_h/\rho & 0 \quad \cdots & \cos\varphi_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ \vdots \\ n_h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_g/10^6 & 0 & -Z_g/\rho & +Y_g/\rho \cdots & -\cos\varphi_h \cos\lambda_h \\ 0 & 1 & 0 & Y_g/10^6 & +Z_g/\rho & 0 & -X_g/\rho \cdots & -\cos\varphi_h \sin\lambda_h \\ 0 & 0 & 1 & Y_g/10^6 & -Y_g/\rho & +X_g/\rho & 0 \quad \cdots & -\cos\varphi_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ \vdots \\ n_h \end{bmatrix}$$

Ennél a bővített egyenletrendszernél „n” darab mindkét rendszerben ismert pont esetén „3·n” egyenlet írható fel, ahol az ismeretlenek száma „7+n”. Négy, vagy annál több pont esetében az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenek számánál, ezért elméletileg az ismeretlen geoidundulációk is becsülhetővé válnak. Az új ismeretlenek bevezetésével az egyetlenrendszerünk egy járulékos dátum defektussal is bővült, és egyéb nem várt problémák is felmerültek. A továbbiakban ezekkel a kérdésekkel foglalkozunk.

A geoidundulációk becslése

A dátum és konfigurációs defektussal rendelkező egyenletrendszerek szingulárisak lesznek, amely azt jelenti, hogy nulla sajátértékű vektorok is találhatók a rendszerben, ezért nem invertálhatók. Az ilyen rendszerek a normálegyenletek sajátértékeinek és sajátvektorainak a meghatározásával vizsgálhatók. A négyzetes és szimmetrikus normálmátrixok esetében:

$$N = V \cdot \mathrm{diag}(\lambda) \cdot V^t,$$

ahol V a sajátvektorok mátrixa, V^t a transzponált mátrix és a diagonális mátrix a λ sajátértékeket tartalmazza. Reguláris mátrix esetében az inverz az

$$N^{-1} = V \cdot \mathrm{diag}(1/\lambda) \cdot V^t$$

alakban, szinguláris mátrix esetében a szabadhálózatoknál alkalmazott un. pszeudó inverz az

$$N^{+} = V \cdot \mathrm{diag}(1/\lambda, 0) \cdot V^t$$

alakban határozható meg, ahol értelemszerűen a számítástechnikai szempontból nullának tekinthető sajátértékek reciprokát nullával helyettesítjük.

Ezzel a felbontással a mátrix kondícióját (a műveletekre való érzékenységét) is vizsgálhatjuk. A nem nulla sajátértékekből számolt

$$c = |\lambda_{max}| / |\lambda_{min}|$$

kondíció szám minél nagyobb, annál rosszabb a mátrix kondíciója. Ideális esetben c=1.

A szinguláris normálegyenletek azonban kényszerfeltételi egyenletek segítségével is megoldhatók *(Bock, 1983):*

$$\begin{bmatrix} N & C^t \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{ahol} \quad D_{11} = (N + k \cdot C^t C)^{-1} - 1/k \cdot C^t (CC^t)^{-1} (CC^t)^{-1} C$$

és k a hangoló konstans, amelynek az értéke ugyan kiesik, de az első kifejezés invertálhatóságát és a kényszerfeltételek érvényre juttatását segíti elő. A pszeudó inverz úgy is előállítható, hogy a C kényszerfeltételi egyenleteket a nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorokkal helyettesítjük, vagy azzal geometriailag egyenértékű feltételeket írunk fel.

A módszer gyakorlati vizsgálatánál a 24 pontos OGPSH kerethálózat pontjait használtuk fel, ahol a GPS koordináták mellett az EOV vízszintes koordináták és a trigonometriai módszerrel meghatározott balti magasságok is ismertek. Mivel az n_h érték csak a PILI(s) kezdőpontban ismert, ezért a vizsgálatoknál a helyi geoidundulációkat nulla értékünk tekintettük. A bővített egyenletrendszer a geoidundulációk nulla átlagértékének a kényszerével is elcsordult, sőt a kényszerfeltétel nélkül is hasonló módon viselkedett. A saját vektor és sajátérték felbontással előállított inverz elveszítette a mátrix szimmetriáját és a Cholesky-felbontás szerinti inverz is elcsordult. A Gauss elimináció látszólag eredményes volt, de a nagyon nagy kovariancia értékek irreális eredményeket jeleztek.

A kérdés részletes vizsgálatának az eredményeit a *I. táblázatban* foglaltuk össze, amely tartalmazza az egyes megoldások sajátértékeit és a normálegyenletek kondícióját is.
Az *1.* megoldásnál csak a méretarány eltérését, a *2.*-nál csak a három eltolást, a *3.*-nál csak a három elfordulást, a *4.*-nél csak a geoidundulációkat tekintettük ismeretlennek. Az elfordulásoktól eltekintve az egyes ismeretlenek lineárisan függetlenek ezért ideális a kondíciójuk is. (Az *1-4.* megoldásokat azért mutatjuk be, hogy a sajátértékek változásain keresztül nyomon követhessük a bővített modellek paraméterei közötti összefüggéseket és a torzító hatásokat.)

Az *5.* megoldásnál a három eltolás és a méretarány együttes, a *6.*-nál a hétparaméteres, a *7.*-nél a bővített rendszer megoldását mutatjuk be. A sajátértékek változása jól mutatja az egyes ismeretlenek közötti korreláció torzító hatását, amely az egyre romló kondícióban is jól megmutatkozik. A *7.* megoldás kondíciója ugyan nem sokkal rosszabb, mint a *6.* megoldásé, de az egyenletrendszer itt mégis elcsordult, ráadásul igazi zéró sajátértéket sem találtunk.

A *8.* megoldásnál az első négy paraméter mellett a 24 db n_h értéket is ismeretlenként kezeltük, ahol az első valódi nulla sajátértéket is megtaláltuk. A *9.* megoldásnál a geoidundulációk nulla átlagértékének a kényszerével, a *10.*-nél a Szőlőhegy g_h ismeretlenének elhagyásával szüntettük meg a szingularitást. Ez a két megoldás is lényegében azonos, de az elsőnek jobb a kondíciója.

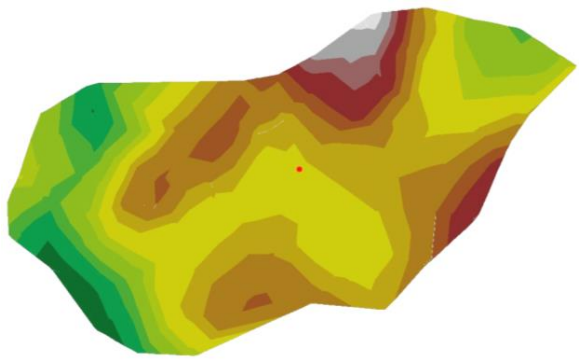
Az eredetileg várt szingularitást tehát megtaláltuk, de még további szingularitásokkal is kell számolnunk. Az eddig bemutatott eredmények alapján ezeknek a forgatási paraméterekhez kell kapcsolódniuk. Könnyű belátni, hogy a Z tengely körüli elfordulásnak nincs hatása az ellipszoid feletti magasságokra, tehát az X és Y tengelyek körüli elfordulások okozzák a további numerikus problémát. A *11.-13.* megoldások csak annyiban különböznek a *8.-10.* megoldásoktól, hogy most a Z tengely körüli elfordulást is megengedtük. Az eredményeket is hasonlóan jellemezhetjük.

Az eredeti rendszer tehát az új ismeretlenek bevezetésével, három defektussal is gyarapodott. A *14.* megoldásban ezért a SOPR, TARP és TISZ pontoknak, a *15.*-nél a kedvezőbb eloszlású SOPR, TARP és OTTO pontoknak kezeltük ismertként a geoidundulációit. Az utóbbi megoldás kondíciója is jóval kedvezőbb, mint az előző megoldásé, de ez is jól mutatja az alapfeladat eredendően rossz kondícióját.

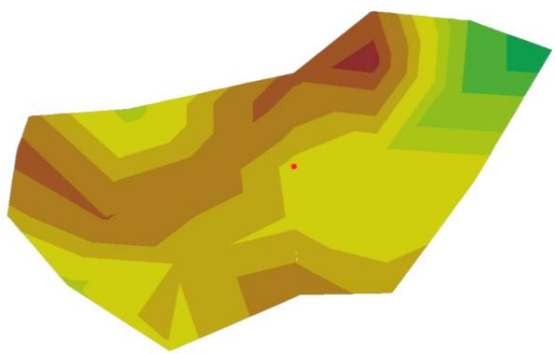
A *II. táblázat*ban a 24 pontos GPS kerethálózat feldolgozásából származó kétirányú hétparaméteres (*6.*) és az egyik ötparaméteres (*12.*) geoidundulációt is becslő megoldásokat foglaltuk össze. A III. táblázatban a *6.* és a *12.* megoldásokból származó javításokat és a becsült geoidundulációkat is bemutatjuk. Érdekes módon a javítások északi ($v_é$) és keleti (v_k) irányú komponensei csak kissé térnek el egymástól, de a hétparaméteres megoldás magassági komponensei (v_m) jelentősen eltérnek a becsült geoidundulációk értékektől. A bővített megoldás magassági komponensei értelemszerűen nullának adódnak. Külső ellenőrzésként a becsült értékekből szerkesztett geoidképet is összehasonlítottuk a 138 pontból csillagászati szintezéssel meghatározott csillagászati-geodéziai geoidképpel. Az eredmények bemutatásához a hálózati kezdőpont geoidundulációját mind két eset-

ben nullának választottuk *(2. és 3. ábra)*. A két geoidképen a nagyobb jellegzetességek jól felismerhetők, de néhány pont esetében nagyobb ellentmondások is tapasztalhatók.

Az a tény, hogy a súlyegység középhibája csak 30% javulást mutat és a vízszintes javítások gyakorlatilag változatlanok maradtak, azt jelzi, hogy a hálózatunk vízszintes koordinátái sem sokkal pontosabbak, mint a magassági adatok az elhanyagolt undulációkkal együtt. Ezért a hagyományos hálózat pontossági vizsgálatánál és a helyi geoidundulációk becslésénél is jelentős szerepe lehet az I. rendű kerethálózat és a domináns pontok FÖMI KGO-ban tervezett újra kiegyenlítésének.



2. ábra. Az IUGG67 ellipszoidra (HD72 dátumra) vonatkozó138 pontból levezetett csillagászati-geodéziai geoidkép (Papp és Benedek)



3. ábra. A 24 pontos OGPSH kerethálózatból és a 12. megoldásból származó helyi geoidkép

Összefoglalás

Az eddigi eredmények alapján is megállapíthatjuk, hogy a koordinátatranszformációk során az elhanyagolt helyi geoidundulációk is bizonyos feltételek mellett becsülhetők, de a bővített egyenletrendszer nagyon rosszul kondicionált problémához vezet. Ezt a későbbiekben a súlyponti rendszer alkalmazásával és a hálózati kezdőpont körüli elfordulás lehetővé tételével kívánjuk megvizsgálni.

A megoldást a teljes OGPSH hálózatra kiterjesztve megvizsgálhatjuk az egyes pontok magassági hibáit, és a csillagászati szintezés alternatív módszereként a geoidundulációk vizsgálatára is új lehetőséggel rendelkezhetünk. Az ismert helyi geoidundulációk alkalmas bevonásával meghatározhatjuk a HD72 rendszer valódi eltolási paramétereit is.

Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány az OTKA T-030177 sz. „Magyarországi geodéziai vonatkozási rendszerek vizsgálata” című pályázat támogatásával készült.

Külön köszönettel tartozom Bíró Péter akadémikus úrnak a bírálat során az elméleti háttér helyes megvilágítására és a további OTKA kutatások irányára vonatkozó hasznos javaslataiért.

I. táblázat. Az egyes megoldások sajátértékei és kondíciója (C)

megoldás		t_x	t_y	t_z	m	R_x	R_y	R_z	n					C
1.	1P				972.9									1.E+00
2.	3P	24.000	24.000	24.000										1.E+00
3.	3P					22865	22857	13.17						2.E+03
4.	24n												24 db. 1.0	1.E+00
5.	4P	24.000	24.000	0.0135	996.9									7.E+04
6.	7P	0.0135	0.0109	0.0029	996.9	22889	22881	13.17						8.E+06
7.	7P+24n	18.6961	-0.0023	0.0068	990.4	22886	22873	12.39	0.08	15054	-15052		21 db. 1.0	1.E+07
8.	4P+24n	24.000	24.000	0.0135	997.9				**0.0000**				23 db. 1.0	7.E+04
9.	4P+24g+1k	24.000	24.000	0.0135	997.9				16.65	26.33			22 db. 1.0	7.E+04
10.	4P+23n	24.000	24.000	0.0135	997.8				0.04				22 db. 1.0	7.E+04
11.	5P+24n	24.000	0.0159	0.0135	997.9			10635	**0.0000**				23 db. 1.0	8.E+05
12.	5P+24n+1k	24.008	0.0159	0.0135	997.9			10635	23.97				23 db. 1.0	8.E+05
13.	5P+23n	24.000	0.0197	0.0135	997.8			10635	0.76	-0.72	-0.0004	-0.00001	19 db. 1.0	9.E+08
14.	7P+21n	0.0135	0.0001	0.0025	997.8	22889	22881	13.17	0.13				20 db. 1.0	3.E+08
15.	7P+21n	0.0135	0.00015	0.0025	997.8	22889	22881	13.17	0.13				20 db. 1.0	4.E+07

II. táblázat. A 24 pontos GPS kerethálózatból számított transzformációs paraméterek

Paraméterek	GPS ⇒ EOV (7P)	EOV ⇒ GPS (7P)	EOV ⇒ GPS (5P+24n)
σ_0	0.3169	0.3169	0.1948
t_x – eltolás [m]	-47.867104 ±3.96	47.867120 ±3.96	47.278652 ±1.18
t_y – eltolás [m]	69.201921 ±4.11	-69.202202 ±4.11	-57.439884 ±1.50
t_z – eltolás [m]	11.469304 ±4.31	-11.469147 ±4.31	-14.760535 ±1.21
m [mm/km]	-2.195284 ±0.42	2.195270 ±0.42	2.208823 ±0.26
R_x - elfordulás [ivmp]	-0.301374 ±0.13	0.301375 ±0.13	-
R_y - elfordulás [ivmp]	0.053115 ±0.16	-0.053115 ±0.16	-
R_z - elfordulás [ivmp]	-0.471874 ±0.10	0.471876 ±0.10	0.722205 ±0.07

III. táblázat. A 24 pontos GPS kerethálózatból számított mérési javítások és geoidundulációk.

pont	Mérési javítások (7P)			Mérési javítások (5P+24g)			
	$v_é$	v_k	v_m	$v_é$	v_k	v_m	n
AGGT	-0.1940	-0.3218	0.5674	-0.2004	-0.3211	0.0000	0.4931
BALL	0.1467	0.0125	-0.0109	0.1457	0.0112	0.0000	-0.0948
BUDA	0.1531	0.0491	0.3083	0.1521	0.0466	0.0000	0.3519
CSAN	0.1726	0.0860	0.2901	0.1727	0.0839	0.0000	0.0154
CSAR	0.3455	-0.1581	-0.1811	0.3438	-0.1566	0.0000	-0.1548
CSER	0.2074	-0.0868	0.0245	0.2065	-0.0855	0.0000	0.0769
DISZ	-0.1301	0.0033	0.2505	-0.1274	0.0029	0.0000	0.4537
GYOR	0.1030	0.2496	-0.6966	0.1047	0.2447	0.0000	-0.4633
HAJD	-0.1345	-0.0120	-0.5998	-0.1365	-0.0078	0.0000	-0.8575
HOLL	0.2077	-0.0845	0.5251	0.2045	-0.0869	0.0000	0.5348
IHAR	-0.1654	-0.2376	-0.6442	-0.1624	-0.2347	0.0000	-0.4250
KOND	-0.3618	0.1031	-0.2979	-0.3541	0.1041	0.0000	0.0556
KOSZ	-0.3434	0.3203	0.2110	-0.3348	0.3171	0.0000	0.5889
MEZO	0.0777	0.0066	0.1856	0.0790	0.0087	0.0000	-0.1450
MISK	-0.1022	-0.2876	0.8636	-0.1055	-0.2873	0.0000	0.7595
NADA	0.1720	0.0413	0.2415	0.1719	0.0390	0.0000	0.3205
OTTO	0.1434	0.0267	0.4690	0.1421	0.0253	0.0000	0.3332
PENC	0.1651	0.0142	0.5006	0.1628	0.0115	0.0000	0.5336
PILI	0.1141	0.0484	-0.0842	0.1128	0.0469	0.0000	-0.1342
REGO	0.1323	-0.0872	-0.0830	0.1323	-0.0874	0.0000	-0.0214
SATO	-0.3060	-0.1274	-0.6657	-0.3114	-0.1212	0.0000	-0.8924
SOPR	-0.1435	0.3854	-0.1825	-0.1362	0.3803	0.0000	0.1982
TARP	-0.3683	0.1389	-0.8691	-0.3693	0.1488	0.0000	-1.2364
TISZ	0.0771	-0.0821	-0.1223	0.0756	-0.0818	0.0000	-0.2907

Hivatkozások

Ádám J (1980): Megfigyelőállomások koordinátáinak meghatározása kozmikus geodéziai módszerekkel. *Kandidátusi értekezés*.

Ádám J (1982): A doppleres és a geodéziai alapponthálózatunk közötti transzformáció vizsgálata. *GéK,* 34-89.

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás. *Műegyetemi Kiadó.*

Bock Y (1982) The use of baseline measurements and geophysical models for the estimation of crustal deformations and the terrestrial reference system. *The Ohio State University*, Report 337.

INTERNETES ALKALMAZÁS KOORDINÁTA TRANSZFORMÁCIÓRA NEURÁLIS HÁLÓZATOK ALKALMAZÁSÁVAL

Zaletnyik Piroska[*]

Web-based application for coordinate transformation using neural networks *- Nowadays in Hungary more than one coordinate system are in use. Frequently it is necessary to transform from one coordinate system to another. The two most frequently used coordinate systems are the WGS-84 (coordinate system of the GPS) and the EOV (Egységes Országos Vetület = Uniform National Projection). In geodesy coordinate transformation is a very important task and up to the present several methods were worked out. The artificial neural network provides a new technology for coordinate transformation. Above a certain number of data points neural networks can be applied very successfully, better than traditional methods. The disadvanatage of these networks is the complicated use in the professional practice due to the complexity of the formulas. Therefore in this research a web-based application was made for coordinate transformation using neural network to make available these new results for everyone.*

Keywords: neural network, coordinate transformation, web-based application

Magyarországon manapság is, akárcsak régen, egyszerre több koordináta rendszer is használatban van. A két leggyakrabban alkalmazott rendszer a GPS mérések koordináta rendszere, a WGS-84 és az EOV (Egységes Országos Vetületi) rendszer. A kettő között gyakran van szükség átszámításokra. A koordináta transzformációnak számtalan módszere létezik. Ebben a dolgozatban mesterséges neurális hálózatokat alkalmaztam ennek a problémának a megoldására. Ezek a hálózatok igen sok esetben hatékonyabban működnek a hagyományos megoldásoknál. Hátrányuk viszont, hogy a képletek bonyolultsága miatt nehezebben lehet a mérnöki gyakorlat számára elérhetővé tenni a kapott eredményeket, hiába jobbak ezek a korábbiaknál. Éppen ezért döntöttem úgy, hogy egy Interneten futtatható alkalmazást készítek az EOV-WGS-84 koordináta transzformációra, mely ezt az új megoldást is mindenki számára elérhetővé teszi.

Kulcsszavak: neurális hálózat, koordináta transzformáció, internetes alkalmazás

Bevezetés

Korábbi kutatásaimban már többször foglalkoztam a mesterséges neurális hálózatok geodéziai célú felhasználásával. Igen érdekes és aktuális téma, hogy hogyan lehet az informatika újításait, amilyen a mesterséges intelligencia fejlesztése is, a hagyományos mérnöki munkák során kamatoztatni.

Ezeket a hálózatokat nagyon sok területen lehet sikerrel alkalmazni. Én korábban felületközelítési feladatot (pontosabban a Magyarországi geoidfelület közelítését) és koordináta transzformációs összefüggések meghatározását vizsgáltam neurális hálózatokkal, minden esetben összevetve az eredményeket egy hagyományos módszerrel *(Zaletnyik, 2002, 2003)*. Ezen vizsgálatok alapján jól meghatározható, hogy mikor érdemes a jól bevált, hagyományos eszközökhöz nyúlni, és, hogy mikor érdemes megpróbálkozni ezzel az új eszközzel.

Általában nagy mennyiségű adat kezelésekor jobb eredmény érhető el neurális hálózatokkal, ilyenkor a hagyományos módszerek már nem elég pontosak a rosszul kondicionált egyenletek és a számítógép véges számábrázolásából eredő hibák miatt.

Ebben a dolgozatban folytatom a korábbi koordináta transzformációs vizsgálataimat, lehetőség szerint pontosítva a korábbi összefüggéseket. A sok elméleti vizsgálat után szerettem volna egy kicsit a gyakorlati használhatóság szemszögből is megközelíteni a feladatot, ezért készítettem egy Interneten is futtatható Java alkalmazást koordináta transzformációra, felhasználva a neurális háló-

[*]*BME, Általános Geodézia Tanszék*
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: zaletnyikp@hotmail.com

zatokkal meghatározott képleteket. Maguk a neurális hálózatos számítások a Mathematica 5.0 program neurális hálózatok kiegészítő moduljával készültek.

A cikkben először adok egy általános áttekintést a neurális hálózatokról. Ugyan manapság ez egy viszonylag divatos téma, és egyre többen foglalkoznak vele, mégis úgy gondolom, hogy a földmérők többsége nincs pontosan tisztában ennek az új módszernek a lehetőségeivel, ezért nem árt egy kis összefoglalás.

Ez után az áttekintés után a transzformációnál alkalmazott neurális hálózatokról és a felhasznált OGPSH pontokról lesz szó.

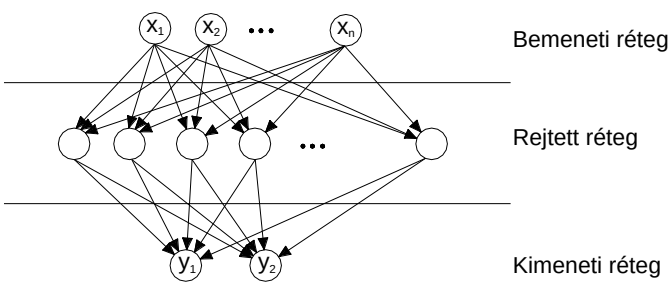
Végül az elkészült Java program szerkezetét mutatom be, ill. a Mathematica és a Java között felmerült konverziós problémákat.

Neurális hálózatok

A mesterséges intelligencia egyik széleskörűen alkalmazható eszköze a mestersége neurális hálózat. Ezeket a hálózatokat az emberi idegrendszer működését tanulmányozva fejlesztették ki. Az emberi idegsejtek alkotják az alapját az idegrendszernek. Ezek a sejtek meglepően egyszerű felépítésűek, ahhoz képest, hogy „hálózatba rendezve" milyen bonyolult feladatokat látnak el.

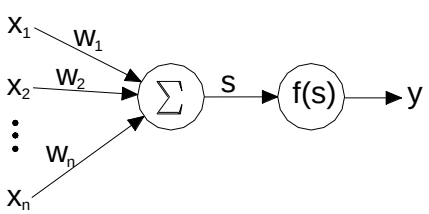
A mesterséges neurális hálózatok alapját is az „idegsejt", a neuron képezi. Ezek a neuronok vagy csomópontok szintén viszonylag egyszerű felépítésűek, azonban hálózatokba rendezve bonyolult problémákra képesek megoldást találni tanulás útján. Az egyik fontos – a koordináta transzformációhoz is felhasználható – tulajdonsága ezeknek a hálózatoknak a leképzést közelítő vagy approximációs tulajdonság. Ennek segítségével ismert összetartozó adatpárokhoz (be és kimenő adatokhoz) meghatározható egy a kettő közötti kapcsolatot leíró ismeretlen közelítő, leképzési függvény.

A hálózatot leginkább úgy lehet elképzelni, mint egy rétegekből álló rendszert *(1. ábra)* *(Horváth, 1995)*. Minden hálózatban van egy bemeneti réteg, egy kimeneti réteg és egy vagy több rejtett réteg. Ezekben a rétegekben találhatóak a neuronok.



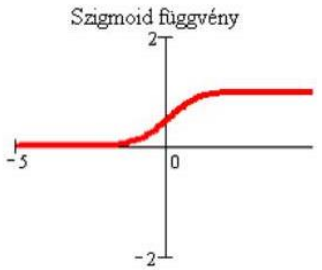
1. ábra. Neurális hálózat szerkezete

Egy neuron felépítését mutatja a *2. ábra.* Az ábrán x_i jelöli a neuron bemenő értékeit, y pedig a kimenő jel értékét.



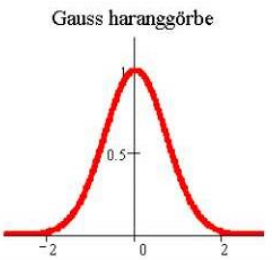
2. ábra. Neuron felépítése

Egy általános neuron először meghatározza a bemenő adatok súlyozott összegét (az ábrán s), majd valamilyen nem lineáris leképzést hajt végre ezen az összegen és így megkapjuk a neuron kimeneti jelét. Ezt a nem lineáris leképzést nevezik aktivációs vagy transzfer függvénynek is. Ennek a függvénynek a típusa igen fontos jellegzetessége a hálózatnak. Két gyakran alkalmazott aktivációs függvény a szigmoid és az RBF (radiál bázisú) függvény *(3., 4. ábra)*.



$$y = \frac{1}{1+e^{-Ks}}; K > 0$$

3. ábra. Szigmoid aktivációs függvény



$$e^{-(\frac{u}{\sigma})^2},$$

ahol

$$u = \sqrt{(x_1 - c_1)^2 + \ldots + (x_N - c_N)^2}$$

4. ábra. RBF aktivációs függvény

A fentiekben leírtak egy általános neuron működésének felelnek meg, amilyenek pl. a rejtett rétegben találhatóak. A kimeneti rétegben sokszor ennél egyszerűbb felépítésű neuront alkalmaznak, mint ahogy én is tettem a koordináta transzformációnál. Az ilyen egyszerűbb neuronok csak lineáris összegzést valósítanak meg.

A hálózat által meghatározott leképzési függvény az alkalmazott neuronszámnak megfelelő számú aktivációs függvény súlyozott összegeként áll elő. A leképzési függvény, mely megteremti a kapcsolatot a be és kimenő adatok között, tanulási folyamat végeredménye. A tanulás egy konvergens iteratív eljárással történik, többnyire az ún. „backpropagation" algoritmussal. Ebben a szakaszban kerülnek meghatározásra az aktivációs függvényhez tartozó súlyok, paraméterek. Ezeknek a száma a rétegekben alkalmazott neuronszámtól függ, ezért a hálózatok tervezésénél fontos lépés a rétegszám, neuronszám és aktivációs függvény típusának megválasztása.

A neurális hálózatok működése két szakaszra bontható. Az első szakasz a lényegesen hosszabb tanulási rész, a második pedig a tesztelés. Ahhoz, hogy ezt a két szakaszt el lehessen végezni a rendelkezésre álló adatállományt is két részre kell bontani. Kell egy adatbázis tanulópontokkal és egy másik tesztpontokkal.

A tesztelésnek igen fontos szerepe van a neurális hálózatok egyik fontos hibahatásának, az ún. túltanulásnak az elkerülésében. A túltanulás azt jelenti, hogy a kapott közelítő függvény túlságosan illeszkedik a tanulópontokra, ugyanakkor a pontok között, a tesztpontokban egyre nagyobbak lesznek a hibák, rossz lesz a függvény általánosító képessége. Ez hasonló probléma, mint amikor kevés pontra illesztünk magas fokszámú polinomot.

Koordináta transzformáció neurális hálózatokkal

Két vetületi rendszer között szabatos vetületi átszámítás (zárt matematikai összefüggések felhasználásával) csak akkor végezhető, ha a két vetület alapfelülete közös és ugyanannak a háromszögelési

hálózatnak a pontjai vannak ábrázolva a két vetületen. Abban az esetben, ha a két vetületen nem ugyanannak az alaphálózatnak a pontjai vannak ábrázolva ill., ha eltérőek az alapfelületek, akkor az átszámítás azonos pontok segítségével történhet, melyeknek mindkét rendszerben ismertek a koordinátái (*Varga, 1997*).

Az ilyen koordináta-transzformációnak több típusa van. Létezik igen sok hagyományosan alkalmazott módszer, melyeket most nem részletezek, új módszerként azonban a neurális hálózatok is alkalmazhatóak a feladat megoldására, köszönhetően a jó approximációs képességüknek. Korábban már *Barsi (1999)* alkalmazta a neurális hálózatokat transzformációs feladat megoldására.

Mint említettem, neurális hálózatos EOV-WGS-84 koordináta transzformációval már én is foglalkoztam, most csak megpróbáltam tovább pontosítani a kapott eredményeket, illetve kicsit részletesebben megvizsgáltam a rendelkezésre álló adatok minőségét.

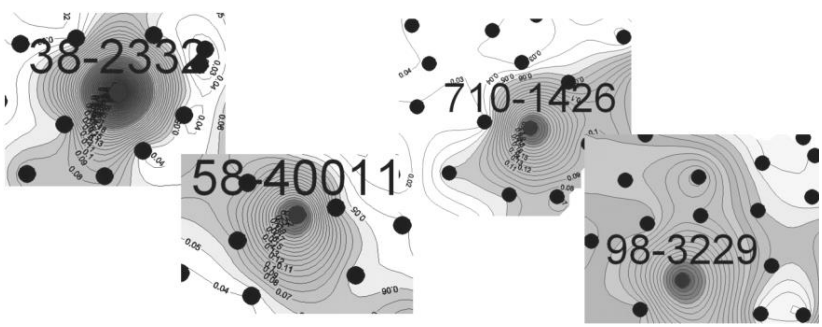
A korábbi vizsgálatok alapján tapasztalatilag meghatározott legjobb hálózattípus (*Zaletnyik, 2003*) egy rejtett réteget tartalmaz 30 neuronnal, szigmoid aktivációs függvénnyel. A jobb tanulási folyamat érdekében a be- és kimeneti adatok skálázva vannak. A 4 koordinátára összesen 4 hálózat készül, mindegyik két bemenő és egy kimenő adattal (pl. Y,X EOV koordináták → Φ WGS-84 koordináta).

A transzformációs képlet javítása érdekében neurális hálózat sorozatot is próbáltam alkalmazni. Ezt a módszert korábban már sikerrel alkalmaztuk más közelítési feladatnál (*Paláncz, Völgyesi, 2003, Zaletnyik, Paláncz, Völgyesi, 2004*). Ennek a módszernek az a lényege, hogy először közelítjük egy neurális hálózattal a függvényt, majd miután a neuronszám növelés már nem eredményez újabb javulást, készítünk egy második hálózatot az első hálózat hibáira, majd egy harmadikat a második hálózat hibáira stb. Egy idő után természetesen itt sem javulnak már számottevően az eredmények. A korábbiakban egy 4 hálózatból álló sorozatot alkalmaztunk, amivel jelentős javulást lehetett elérni. Sajnos ez a módszer a koordináta transzformációnál nem vezetett lényeges javuláshoz, így végül nem alkalmaztam ezt a megoldást.

OGPSH pontok vizsgálata

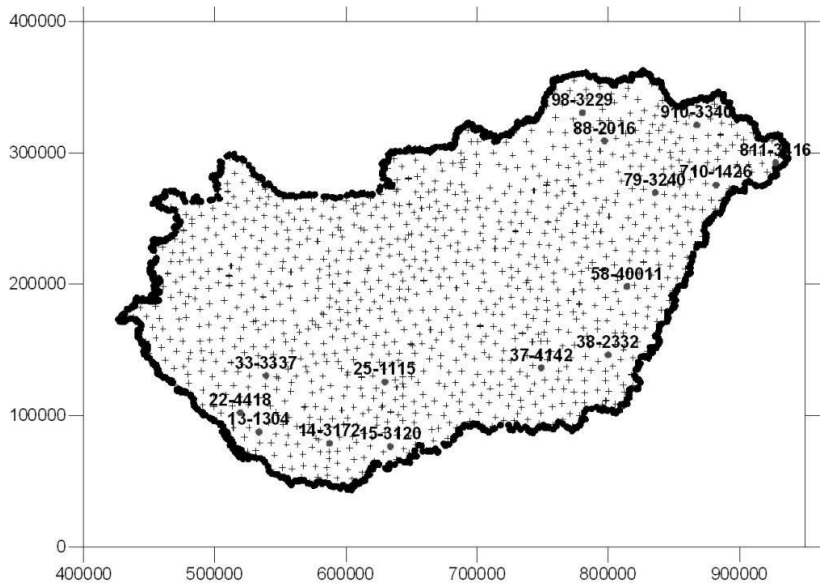
Az EOV-WGS-84 koordináta transzformációhoz 1153 OGPSH pontot tartalmazó adatbázist használtam fel. Csak a vízszintes koordináták transzformációját végeztem el, magassági koordinátákat nem használtam.

A transzformációt nem csak neurális hálózatokkal hajtottam végre, hanem polinomokkal is, hogy tudjam mihez viszonyítani a kapott új eredményeket. A polinomos transzformációhoz felhasználtam az összes azonos pontot. Itt tűnt fel, hogy lehetnek durva hibás pontok is az állományban. Ez azoknál a pontoknál tűnt valószínűnek, ahol pl. az adott pont közelében a transzformáció jól működött, csak egy-egy pontban volt kiugróan magas az érték *(5. ábra).*



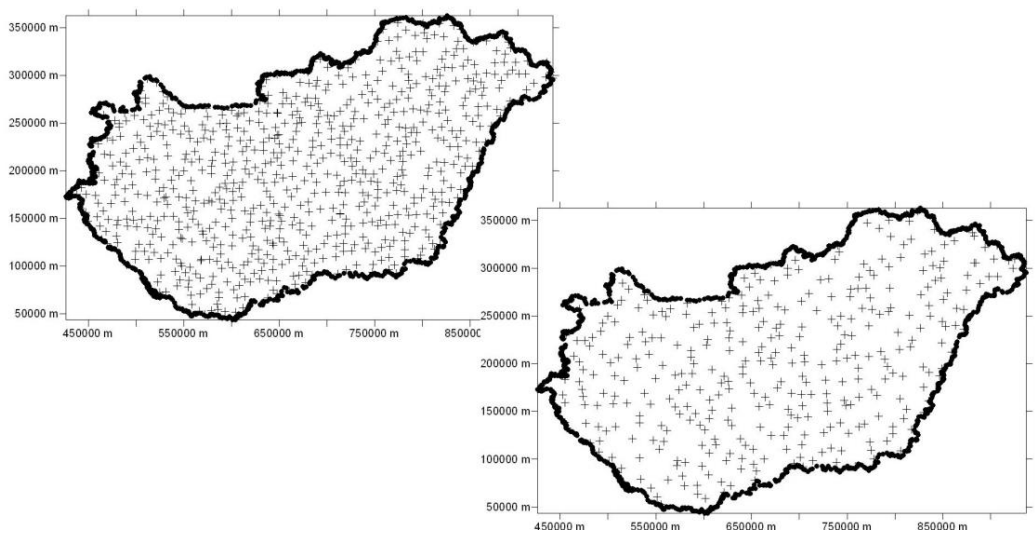
5. ábra. Néhány valószínűleg durva hibás pont maradék eltérései a környezetükhöz képest

E miatt összesen 15 pont lett kihagyva a transzformációból. Persze nem biztos, hogy mindegyik pont jogosan lett kihagyva a számításokból, de elég gyanúsak voltak, úgy gondolom, megérné megvizsgálni ezeket a helyeket, hogy mi lehet a gond. A *6. ábra* a kihagyott 15 pont elhelyezkedését mutatja.



6. ábra. Kihagyott pontok

A neurális hálózattal végzett koordináta transzformáció meghatározásakor a pontok 2/3-a lett kiválasztva tanulópontnak és 1/3-a tesztpontnak *(7. ábra)*.



7. ábra. Tanuló és tesztpontok elhelyezkedése

Eredmények

Most nézzük meg a neurális hálózatokkal kapott eredményeket, összehasonlítva egy ötödfokú polinomos transzformációval (Ötödfokúnál magasabb polinomot a Vetületi Szabályzat szerint már nem lehet alkalmazni. Ennek ellenére 6-od és 7-ed fokú polinom illesztését is megvizsgáltam, de itt már bizonytalan lett a megoldás az egyenletek rosszul kondicionáltsága miatt.). A következő táblázatokban a tanuló és tesztpontok transzformáció utáni eltéréseit együtt tüntettem fel, mivel így könnyebb összehasonlítani az eredményeket a polinomos transzformációval, és a két ponthalmaz eredményei

között nem volt lényeges eltérés. Az *I., II. táblázat* a négy koordináta maradék eltéréseinek középhibáját és maximális értékeit tünteti fel, 100 %-nak véve a polinomos közelítéssel kapott eredményeket.

I. táblázat. EOV Y,X koordináták maradék eltérései

	EOV Y				EOV X			
	középhiba		max. hiba		középhiba		max. hiba	
Polinom	4,6cm	100%	20,4 cm	100%	4.5cm	100%	22.2cm	100%
Neurális	3,4cm	73,9%	14,5cm	71,1%	3,3cm	73,3%	14,8cm	66,7%

II. táblázat. WGS-84 Φ, Λkoordináták maradék eltérései

	WGS84 Φ				WGS84			
	középhiba		max. hiba		középhiba		max. hiba	
Polinom	0,0015”	100%	0,0072”	100%	0,0022”	100%	0,0100	100%
Neurális	0,0011”	73,3%	0.0054”	75,0%	0.0016”	72,7%	0,0066”	66,0%

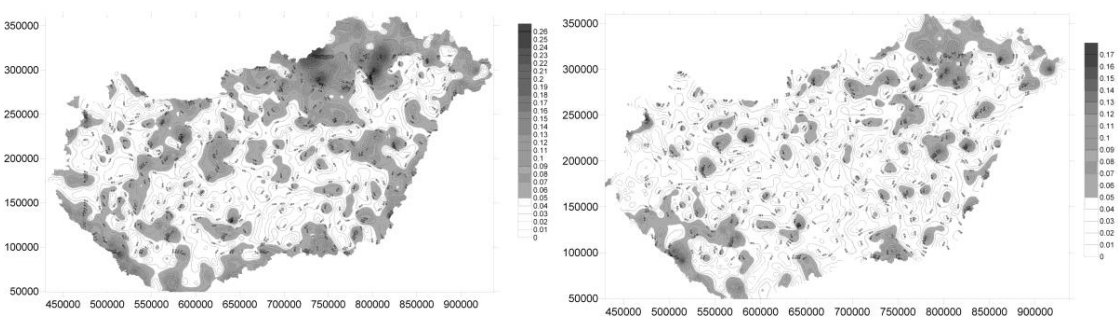
Mivel általában nem csak egy-egy koordináta maximális eltéréseire vagyunk kíváncsiak, ezért a *III. táblázatban* a vízszintes hibákat tüntettem fel $\sqrt{x^2 + y^2}$.

III. táblázat. Maradék vízszintes eltérések

	EOV				WGS-84			
	középhiba		max. hiba		középhiba		max. hiba	
Polinom	3,5cm	100%	26,1cm	100%	0,0015”	100%	0,0114”	100%
Neurális	2,6cm	74.3%	16,8cm	64,4%	0,0011”	73,3%	0,0073”	64,0%

Ha áttanulmányozzuk a fenti táblázatok eredményeit, akkor látszik, hogy a neurális hálózatok mintegy 30 %-kal jobb eredményt szolgáltatnak a hagyományosnak tekinthető polinomos transzformációhoz képest (Helmert és affin transzformációval az ország egész területére egységesen történő transzformáció esetén még rosszabb eredmények érhetőek el. Ezek a hagyományos módszerek lokális transzformációk esetében szolgáltatnak igazán jó eredményeket.).

30 % javulás már elég jelentősnek tekinthető. Ha a vízszintes eltéréseket nézzük, akkor az EOV esetében a maximális hibák 26 cm-ről kb. 17-re csökkentek és a középhibák is csökkentek kb. 1 cm-rel. Most nézzük meg a maradék eltéréseket térképen ábrázolva! *(8. ábra)*



8. ábra. Balra a polinomos közelítés, jobbra a neurális hálózatok maradék eltéréseinek ábrázolása

A fenti ábrán is szembetűnő az eredmények javulása a neurális hálózatos módszerrel történő transzformáció során. Világos színnel vannak jelölve az 5 cm alatti hibájú területek. Látszik, hogy a második ábrán már majdnem az egész ország területén kisebbek 5 cm-nél a hibák, 10 cm-nél nagyobb hibák pedig csak elvétve egy-egy kis pontban fordulnak elő, míg ugyanez nem mondható el a polinomos transzformációról.

Internetes alkalmazás

Az eredmények azt mutatják, hogy érdemes lenne a neurális hálózatokkal kapott koordináta transzformációs összefüggéseket a gyakorlatban is alkalmazni. Ezt az összefüggést leíró függvényt a tanulási folyamat végrehajtásakor kapjuk eredményül, legalábbis az általam alkalmazott Mathematica szoftverrel, amely szimbolikus számításokat is végez. Sok más szoftver is létezik neurális hálózatokkal történő számításokhoz, pl. Statistica Neural Network, Braincel For Excel, ill. Matlab, sajnos azonban nem mindegyik szolgáltat eredményül egy később is felhasználható függvényt. Sok neurális hálózat modult csak úgy lehet használni, mint egy „fekete dobozt", mivel ezek a programok a kapcsolatot leíró függvényt nem adják vissza, csak az eredményeket a bemenő adatokra. Szerencsére a Mathematica nem ilyen, így lehetőség nyílt a kapott eredmények későbbi felhasználására.

A gyakorlati alkalmazását az eredményeknek a képletek bonyolultsága és a meghatározott paraméterek viszonylag magas száma nehezíti. A neuronok számától függ a súlyok és paraméterek száma. Az adott feladatban alkalmazott neurális hálózat 30 neuront tartalmaz a rejtett rétegben, kétváltozós szigmoid aktivációs függvénnyel /(1)-es képlet/.

$$\frac{w}{1+e^{c-K_1x-K_2y}} \quad , \tag{1}$$

ahol

x, y	a két bemenő adat,
w	a kimeneti rétegben a neuronhoz rendelt súly,
c, K_1, K_2	pedig az aktivációs függvény paraméterei.

Minden neuronhoz tartozik 4 ismeretlen. A transzformációs függvény 30 ilyen aktivációs függvény összegeként alakul ki, illetve ehhez még jön egy konstans eltolásérték, a bias. Így összesen 121 ismeretlen paramétert határozunk meg a transzformációs képlethez.

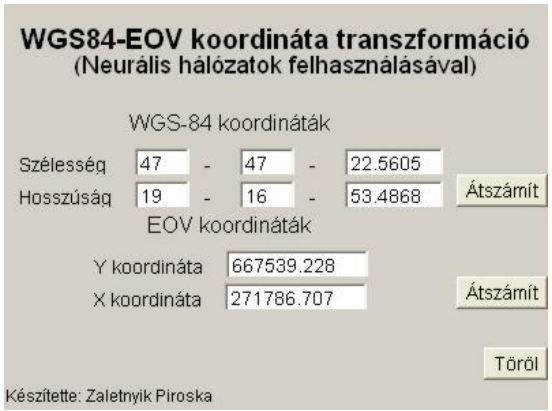
Ahhoz, hogy a kiszámolt transzformációs képletek bárki számára egyszerűen hozzáférhetőek legyenek kézenfekvőnek tűnt, hogy Interneten tegyem közzé az eredményeket. Ehhez készítettem egy kicsi Java alkalmazást, ún. Applet-et. Tulajdonképpen készülhetett volna más programnyelven is ez az alkalmazás, én azért választottam a Java-t, mert ez egy igen hatékony, objektum orientált programnyelv, melynek fejlesztésekor fontos szempont volt, hogy alkalmas legyen WEB-alapú alkalmazások írására.

Némi probléma merült fel a képletek Mathematica-ból Java-ba történő átalakításakor, mivel a kettő szerkezete meglehetősen eltér. Szerencsére a Mathematica ismeri a C++ programnyelvet, így a képletek átalakíthatóak voltak ebbe a formába. A C++ és a Java nyelvek szerkezete meglehetősen hasonló, így a továbbiakban némi szerkesztéssel már könnyű volt a megfelelő formába hozni az összefüggéseket.

A program szerkezete nagyon egyszerű, csupán néhány objektumból, osztályból áll. A 4 transzformációs képletre készült 4 objektum, ezeket a „Transzform" nevű osztály fogja össze. Létrehoztam egy „Pont" objektumot, amelynek tulajdonságai között megtalálhatóak az EOV és a WGS84 koordináták, ezek a „Pont" objektum létrehozásakor (példányosításakor) rögtön kiszámítódnak. A programhoz a grafikus felületet az „Atszamitas" objektum biztosítja.

Fontos volt a program úgymond „bolondbiztossá" tétele, hogy kiszűrjük a hibás adatok megadását. Így nem lehet megadni a Magyarországot befoglaló téglalap határain kívül levő pontokat, sem szöveget ill. nem megfelelő formátumú számot (pl. a perc érték nem lehet negatív, ill nagyobb 59-nél). Ezek persze kissé elnagyolt szűrések, akkor lenne tökéletes, ha egyáltalán nem lehetne megadni Magyarország határain kívül fekvő pontot (természetesen a transzformáció csak a határokon belül működik), de mivel ennek a megoldása kissé körülményes lenne, így a felhasználó racionalitására van bízva, hogy a programot csak magyarországi pontokra alkalmazza-e.

Az elkészült programot a *9. ábra* mutatja.



9. ábra. Az elkészült Java applet

Összefoglalás

Korábbi elméleti vizsgálatok alapján már bebizonyosodott, hogy a neurális hálózatok sokszor eredményesebben alkalmazhatóak közelítési feladatok megoldására, mint más hagyományos módszerek, azonban gyakorlati alkalmazásra a geodéziában még nem igazán volt példa. Ebben a dolgozatban arra tettem kísérletet, hogy a hagyományos mérnöki munkák, gyakorlati mérnökök számára is elérhetővé tegyem ezen kutatások eredményeit. Úgy gondolom ez legalább olyan fontos, mint maga az elméleti munka. Így mód nyílik arra, hogy ne csak egy szűk csoport tagjai tudjanak az egyre újabb és újabb informatikai kutatások felhasználási lehetőségéről, hanem szélesebb körben is elterjedhetnek ezek a módszerek.

A gyakorlati alkalmazás jelen esetben egy Magyarországon igen gyakori koordináta transzformációs feladatra, az EOV-WGS84 transzformációra készült el, Interneten futtatható Java applet formájában. A vizsgálatok alapján pontosabb eredmények kaphatóak ezzel a módszerrel, mint más szintén az ország egész területére egységes transzformációs paramétereket használó programokkal. Ehhez elvileg bárki hozzáférhet, akinek van Internet kapcsolata és a böngészője képes Java alkalmazásokat futtatni. A program jelenleg a www.agt.bme.hu honlapról, a munkatársak rovaton belül, Zaletnyik Piroska publikációi alatt érhető el.

Hivatkozások

Barsi Á (1999): Koordináta-transzformáció megoldása neurális hálózatokkal, *Geodézia és Kartográfia*, LI; 10, 12-18, Budapest.

Horváth G (1995): Neurális hálózatok és műszaki alkalmazásaik, *Műegyetemi Kiadó,* Budapest.

Paláncz B, Völgyesi L (2003): High accuracy data representation via sequence of neural networks, *Acta Geod. Geoph. Hung.* 38; 3, 337-343.

Varga J (1997): Vetülettan, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest, 227-228.

Zaletnyik P (2002): Magyarországi geoidfelület közelítése neurális hálózatokkal, *BME Építőmérnöki Kar, Tudományos Diákköri Konferencia*, Budapest.

Zaletnyik P (2003): WGS-84 – EOV koordináta transzformáció neurális hálózattal, *BME Építőmérnöki Kar, Tudományos Diákköri Konferencia*, Budapest.

Zaletnyik P, Paláncz B, Völgyesi L (2004): Approach of the hungarian geoid surface with sequence of neural networks, *Paper presented at the XXth ISPRS Congress,* Isztambul, Törökország.

FÖLDI ÉS MŰHOLDAS HÁLÓZATOK TRANSZFORMÁCIÓJA

Papp Erik, Szűcs László[*]

Transformation Methodes of the Traditional and Satellite Based Networks *- In the article the 7 and 9 parameters transformations will be introduced. Direct transformation means the computation of the co-ordinates from the WGS84 (XZY) co-ordinate system to the IUGG67 (XYZ) co-ordinate system, the inverse transformations means the opposite direction of the transformation. The transformation parameters based on 43 points and the 1151 points of the OGPSH network will be introduced.*

Keywords: GPS, transformation

A cikkben a Földi és műholdas hálózatok közötti 7 és 9 paraméteres térbeli transzformációkkal foglalkozunk. Direkt transzformációnak nevezzük a térbeli derékszögű koordináták WGS84 (XYZ) rendszerből, IUGG67 (XYZ) rendszerbe történő transzformációját, inverz transzformációnak a földi rendszerből a műholdas rendszerbe történő transzformációt. Megadjuk a térbeli Helmert- és affin-transzformáció, 43 db EUREF koordinátával rendelkező pont és az 1151 pontos OGPSH hálózat felhasználásával kiszámított transzformációs paramétereit, továbbá a maradék ellentmondásokat. (Ádám et. al. 1995).

Kulcsszavak: GPS, transzformáció

Bevezetés

A GPS technikát felhasználók a GPS-vevők és feldolgozó programok sokaságával találkoznak, a feldolgozó programokba beépített vetületi rendszerek száma pedig elérheti a több százas nagyságrendet is. A Magyarországon alkalmazott Egységes Országos Vetületi rendszer, a továbbiakban EOV, azonban néhány GPS gyártó feldolgozó programjában nem található meg. Dolgozatunk elkészítését, ennek a gyakorlat részéről igényként jelentkező jogos kérésnek a megoldása motiválta. Azt tapasztaltuk, hogy a transzformációt még mindig valamilyen „áthatolhatatlan misztikus köd" lengi körül. A felhasználók többsége fekete dobozként használja a gyári feldolgozó programokat, illetve különböző közelítő megoldásokat készít és alkalmaz.

Megjegyezzük, hogy léteznek transzformációs lehetőségek (lokális transzformáció), amelyekkel az itt ismertetésre kerülő módszereknél kisebb maradék ellentmondásokat kapunk, de hátrányuk, hogy GPS-vevőkbe nem állíthatók be paraméterként (*Papp et. al. 1997, 2002, Szűcs, 1997*).

Alapfogalmak

A geodéziában szinte sohasem elégszünk meg a szükséges mérések elvégzésével, hanem mindig végzünk fölös méréseket is. A fölös méréseknek, egyrészt a durva hibák kiszűrésében, másrészt a meghatározott mennyiségek megbízhatóbbá, pontosabbá tételében játszanak szerepet. A fölös számmal rendelkezésre álló mérési eredmények azonban, általában egymástól eltérő eredményt adnak, következésképpen ellentmondással terhelik az adott hálózatot. A kapott ellentmondásokat mindig fel kell oldani, illetve hatásukat minimálisra kell csökkenteni. Ez a matematikai statisztikában alkalmazott becslési eljárások valamelyikével történhet, ha az ismeretlenek optimális értékét kívánjuk meghatározni. Az ehhez használt eljárást nevezzük röviden kiegyenlítésnek. A dolgozatban a közvetett mérések kiegyenlítését (II. kiegyenlítési csoport) alkalmaztuk. Mivel valamennyi transzformációs képletben a transzformációs paraméterek közvetlenül nem mérhető mennyiségek,

[*]*SZIE YMMF,1146 Budapest, Thököly út 74.*
E-mail: Szucs.Laszlo@szie.ymmf.hu
Papp.Erik@szie.ymmf.hu

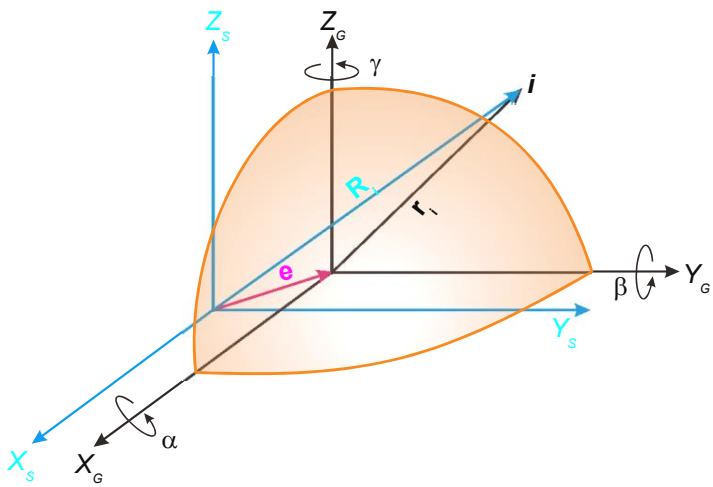
ezért ezeket közös pontok ismert koordinátáiból, megfelelő matematikai összefüggésekkel szokás levezetni.

Transzformációk súlyponti koordinátarendszerek alkalmazásával

A hétparaméteres térbeli Helmert-transzformáció

Dolgozatunkban a hétparaméteres térbeli hasonlósági transzformáció, más néven a térbeli Helmert-transzformáció vagy Bursa-Wolf modell és a kilencparaméteres térbeli affin-transzformáció alkalmazásával határoztuk meg a transzformációs paramétereket.

A hétparaméteres térbeli Helmert-transzformációt két geodéziai dátumhoz kapcsolódó térbeli derékszögű koordináták között végezhetjük el. A transzformáció paraméterei a két rendszer közötti három eltolás, a három tengely kölcsönös elfordulása és a két rendszer közötti méretarány (*1. ábra*).



1. ábra. A térbeli transzformáció

Az ismeretlen transzformációs paraméterek száma hét, meghatározásukhoz legalább három olyan közös pontra van szükségünk, amelyeknek mindkét rendszerben ismerjük a térbeli derékszögű koordinátáit. A transzformációs egyenlet a következő:

$$\mathbf{r}_{\mathbf{IUGG67}} = \mathbf{r}_{\mathbf{0}} + m\mathbf{R}\mathbf{r}_{\mathbf{WGS84}} \ , \qquad (1)$$

ahol

$\mathbf{r}_{\mathbf{IUGG67}}$	a pont HD72 dátumra vonatkozó helyvektora,
$\mathbf{r}_0$	a két rendszer origója közötti eltolás vektor,
$m = 1 + k$	a méretarány értéke,
$\mathbf{r}_{\mathbf{WGS84}}$	a pont WGS84 dátumra vonatkozó helyvektora,
$\mathbf{R}$	a két rendszer közötti forgatási mátrix:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} . \qquad (2)$$

A három közös pont alapján kilenc egyenletet írhatunk fel a transzformációs paraméterek meghatározására. Mivel a meghatározó egyenletek száma (9) nagyobb az ismeretlen paraméterek számánál

(7), a transzformációs paraméterek meghatározását kiegyenlítéssel végezzük el. Mivel súlyponti koordináta-rendszerben végezzük a számítást, az eltolás vektor nem kiegyenlítéssel, hanem közvetlenül számítható. Közvetítőegyenletül a transzformációs egyenlet szolgál. A levezetés mellőzésével itt csak az alakmátrixot, a tisztatag vektort, a transzformációs egyenleteket és a forgatási mátrixot adjuk meg.

Az alakmátrix súlyponti rendszerben:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} . \qquad (3)$$

Az ismeretlenek vektorának transzponáltja:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} k & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} . \qquad (4)$$

A tisztatag vektor:

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{WGS84}^{IUGG67} - \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}_{IUGG67}^{WGS84} . \qquad (5)$$

(A felső indexek a direkt, az alsók az inverz transzformációra vonatkoznak.)
Az eltolás vektor a két rendszer súlyponti koordinátáinak a különbsége:

$$\mathbf{r_0} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} SX \\ SY \\ SZ \end{bmatrix}_{WGS84}^{IUGG67} - \begin{bmatrix} SX \\ SY \\ SZ \end{bmatrix}_{IUGG67}^{WGS84} . \qquad (6)$$

I. táblázat. Térbeli Helmert-transzformációs paraméterek a 43 pont felhasználásával

	Direkt	**Inverz**
Eltolás [m]	X_0= -61.258 ± 0.057	X_0= 61.258 ± 0.057
	Y_0= 68.788 ± 0.057	Y_0= -68.788 ± 0.057
	Z_0= 4.458 ± 0.057	Z_0= -4.458 ± 0.057
Elforgtás [mp]	α = 0.263028 ±0.114	α = -0.263030 ± 0.114
	β = -0.096985 ±0.144	β = 0.096986 ± 0.144
	γ = 0.488207 ± 0.086	γ = -0.488209 ± 0.086
Méretarány [ppm]	k= 2.09787175468E-6 ± 3.639E-4	k= -2.09785300437E-6 ± 3.639E-4

A kilencparaméteres térbeli affin-transzformáció

A transzformációs egyenlet (7) mátrixgeometriai felírása hasonló a Helmert-transzformációra felírthoz (2), azonban tartalmilag más a kettő. Az ismeretlen transzformációs paraméterek száma kilenc, meghatározásukhoz legalább három olyan közös pontra van szükségünk, amelyeknek mindkét rendszerben ismerjük a térbeli derékszögű koordinátáit. Az ismeretlen paraméterek a két rendszer közötti három eltolás, a tengelyek körüli elfordulások, valamint a három koordináta-tengely irányába vett méretarány. A transzformációs egyenlet:

$$\mathbf{r_{IUGG67}} = \mathbf{r_0} + \mathbf{M}\mathbf{R}\mathbf{r_{WGS84}} , \qquad (7)$$

ahol

M méretarány mátrix:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_X & 0 & 0 \\ 0 & m_Y & 0 \\ 0 & 0 & m_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_X & 0 & 0 \\ 0 & 1+k_Y & 0 \\ 0 & 0 & 1+k_Z \end{bmatrix} . \qquad (8)$$

A három közös pont alapján kilenc egyenletet írhatunk fel a transzformációs paraméterek meghatározására. Mivel a meghatározó egyenletek száma egyenlő az ismeretlen paraméterek számával, a transzformációs paraméterek meghatározását csak akkor végezhetjük kiegyenlítéssel, ha több, mint három közös pontunk van. Közvetítőegyenletül a transzformációs egyenlet szolgál.

Az affin-transzformáció alakmátrixa súlyponti rendszerben (az eltolások nem a kiegyenlítésből adódnak, hanem a súlypontok koordináta-különbségéből):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} X_i & 0 & 0 & 0 & -Z_i & Z_i \\ 0 & Y_i & 0 & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & Z_i - Y_i & X_i & 0 & \end{bmatrix} . \qquad (9)$$

Az ismeretlenek vektorának transzponáltja:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} k_X & k_Y & k_Z & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} . \qquad (10)$$

A tisztatag vektor (5) és a két rendszer súlypontja közötti vektor (6) azonos a Helmert-transzformációnál bemutatottal.

II. táblázat. Térbeli affin-transzformációs paraméterek a 43 pont felhasználásával

	Direkt	**Inverz**
Eltolás [m]	X_0= -61,258 ± 0,057	X_0= 61,258 ± 0,057
	Y_0= 68,788 ± 0,057	Y_0= -68,788 ± 0,057
	Z_0= 4,458 ± 0,057	Z_0= -4,458 ± 0,057
Elforgatás [mp]	α = -0,133551 ±0,146	α = 0,133558 ± 0,146
	β = -0,432615 ±0,416	β = 0,432528 ± 0,416
	γ = -0,341224 ± 0,127	γ = 0,341227 ± 0,127
Méretarány [ppm]	k_X = 4,31257055685E-7±1,633	k_X = -4,.31197190331E-7±1,633
	k_Y=-2,74466947639E-6±2,561	k_Y=2,74466012842E-6±2,561
	k_Z=5,20104630765E-6±0,710	k_Z=5,20083830643E-6±0,710

Transzformációk az összes paraméter együttes kiegyenlítésével

A geoidmodell szükségessége

A számításokhoz az OGPSH 1151 pontját használtuk fel. Az OGPSH pontoknál adottak a pont WGS84 geodéziai dátumra vonatkozó térbeli derékszögű és a WGS84 ellipszoidra vonatkozó ellipszoidi koordinátái, valamint a pontok EOV síkkoordinátái és tengerszint feletti magassága. Az EOV síkkoordinátákból a megfelelő vetületi egyenletek alkalmazásával számíthatjuk a HD72 dátumra vonatkozó IUGG67-es ellipszoidi földrajzi szélességet és hosszúságot. Ahhoz, hogy ebből a HD72 dátumban térbeli derékszögű koordinátákat kapjunk, szükségünk van még a pont ellipszoid feletti magasságára is. Azonban a pontleírásokban csak a tengerszint feletti magasság ismert, ehhez még a HD72 dátumhoz tartozó pontbeli geoidunduláció értéket kellene hozzáadnunk, hogy ellipszoid feletti magasságot kapjunk. Azonban ezek az értékek ismeretlenek.

Rendelkezésünkre állt a számításokhoz egy 125 pontból álló adatállomány, amely felsőrendű pontok EOV síkkoordinátáit és a HD72-es dátumhoz tartozó geoidundulációkat tartalmazta. Az

adatállomány pontjai csak nagyon kis átfedésben vannak az OGPSH pontjaival, ezért az OGPSH pontokhoz az unduláció értékét az adott pontokra vonatkozó értékek alapján valamilyen módszerrel meg kell határoznunk. Úgy döntöttünk, hogy felületillesztéssel határozzuk meg a geoidmodellt. Ehhez megvizsgáltuk az ötöd-, hatod-, heted-, nyolcad- és kilenced fokú polinomokkal kapható eredményeket (*III. táblázat*).

III. táblázat. A felületillesztés eredménye különböző polinomoknál [m]

	ötödfokú	hatodfokú	hetedfokú	nyolcadfokú	kilencedfokú
szórás	0.154	0.119	0.106	0.074	0.058
min.	-0.49	-0.399	-0.346	-0.221	-0.187
max.	0.335	0.331	0.291	0.181	0.228
intervallum	0.825	0.730	0.638	0.402	0.416

A táblázat eredményei azt mutatták, hogy a minimum illetve maximum értékek közötti eltérés a nyolcadfokú polinomig jelentősen csökken, majd a kilencedfokúnál valamivel nő. A szórás értéke viszont itt már jelentősen nem változott. Ezért az unduláció modellezésére nyolcadfokú polinomot használtunk, melynek együtthatóit kiegyenlítéssel határoztuk meg.

Térbeli Helmert-transzformáció a geoidmodell figyelembevétele nélkül és figyelembevételével

Két módszerrel határoztuk meg a transzformációs paramétereket. Először elhanyagoltuk a geoidunduláció értékét és a tengerszint feletti magasságot ellipszoid feletti magasságként használtuk a térbeli derékszögű koordináták számításánál. Aztán figyelembe vettük a geoidunduláció értékét és így számítottuk ki a HD72 geodéziai dátumra vonatkozó térbeli derékszögű koordinátákat.

Ez a számítás hasonló a 43 pont alapján történő számításhoz, azonban nem súlyponti rendszerben dolgoztunk, hanem az HD72 dátum origója és a WGS84 dátum origója közötti eltolódásokat is a kiegyenlítésben határoztuk meg (*Hofmann-Wellenhof, 2001*). Mivel ez a 43 pontnál bemutatott számításban kényszerként szerepelt, hatása megjelenik a forgatások és méretarány értékében is. Így nem várhatjuk, hogy a kétféle számítással kapott transzformációs paraméterek megegyezzenek.
Jelen esetben az ismeretlenek vektorának transzponáltja:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & k & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} . \qquad (11)$$

A kiegyenlítés alakmátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & -Z_i & Y_i \\ 0 & 1 & 0 & Y_i & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} . \qquad (12)$$

A tisztatag vektor számítása megegyezik (5)-tel. A meghatározott transzformációs paraméterek a *IV. táblázatban* találhatók.

IV. táblázat. A direkt Helmert-transzformáció meghatározott paraméterei

	Helmert unduláció nélkül	**Helmert undulációval**
X0 [m]	-53.417	-57.382
Y0 [m]	64.830	68.872
Z0 [m]	16.461	18.822
k [ppm]	-2.043	-1.023
Ex ["]	-0.14268796	-0.22177791
Ey ["]	-0.17614704	-0.31876417
Ez ["]	-0.50009808	-0.38727708

Térbeli affin-transzformáció a geoidmodell figyelembevétele nélkül és figyelembevételével

Az előző pontban leírtaknak megfelelően végeztük el a számítást geoidunduláció figyelembevétele nélkül és az unduláció figyelembevételével, hogy meghatározzuk a térbeli affin-transzformáció paramétereit. Mivel ebben az esetben sem kényszerként vittük be a két rendszer origója közötti eltolódást, változik az ismeretlenek vektora és az alakmátrix.

Az ismeretlenek vektorának transzponáltja:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & k_X & k_Y & k_Z & \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix} . \qquad (13)$$

Az alakmátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_i & 0 & 0 & 0 & -Z_i & Z_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & Y_i & 0 & Z_i & 0 & -X_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & Z_i & -Y_i & X_i & 0 \end{bmatrix} . \qquad (14)$$

A meghatározott transzformációs paraméterek az *V. táblázatban* találhatók.

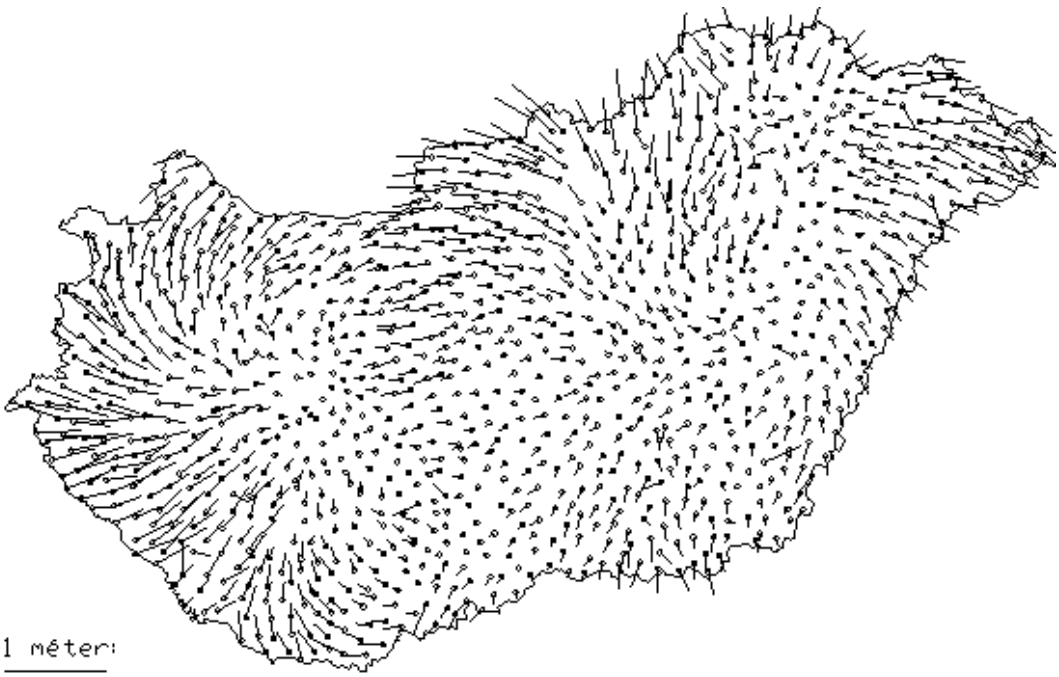
V. táblázat. A direkt affin-transzformáció meghatározott paraméterei

	Affin unduláció nélkül	**Affin undulációval**
X0 [m]	-80.154	-82.254
Y0 [m]	64.932	69.121
Z0 [m]	48.940	48.553
kx [ppm]	0.709	1.561
ky [ppm]	-2.596	-1.567
kz [ppm]	-6.050	-4.675
Ex ["]	0.01311117	-0.07800866
Ey ["]	-0.81764431	-0.90962302
Ez ["]	-0.35821144	-0.2509075

Az eredmények értékelése

A fentiekben bemutattunk két transzformációs modellt (térbeli Helmert és affin) és azok különböző számítási lehetőségeit. Megadtuk a számítások végeredményét, így ezek a gyakorlatban is alkalmazhatók.

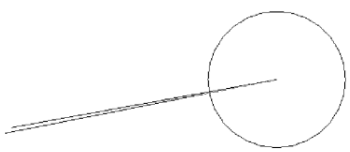
Képet kaphatunk a transzformáció megbízhatóságáról, ha az OGPSH hálózat pontjainak WGS84 rendszerbeli koordinátáit átszámoljuk EOV koordinátákká és összehasonlítjuk a pontleírásokban találhatókkal. Ezeket a hibákat nevezzük maradék ellentmondásoknak. A maradék ellentmondások több okra vezethetők vissza, részben ténylegesen a transzformáció hibáját tartalmazzák, de megjelenik bennük a két hálózat (a hagyományos és a GPS-hálózat) hibája is. A maradék ellentmondások nagyságát és eloszlását a *2. ábra* mutatja. Elkészítettük a hibaábrát az összes bemutatott transzformáció esetére, de itt csak egyet mutatunk be, mivel szinte ugyanazt az eredményt kaptuk.



2. ábra. Az Helmert-transzformáció maradék ellentmondásai 1151 pontban

A *3. ábrán* bemutatjuk egy pontban a maradék ellentmondást úgy, hogy az unduláció értékét figyelembe vettük (rövidebb vektor) és úgy is, hogy nem vettük figyelembe (hosszabb vektor).
Hasonló eset jelentkezett a hálózat többi pontjában is, azaz ha csak vízszintes koordináták meghatározására végezzük a transzformációt, szinte mindegy, hogy figyelembe vesszük-e a geoidunduláció értékét. Ezt támasztja alá a *VI. táblázat* is, amely az EOV síkon mutatja be a transzformációk legnagyobb maradék ellentmondásait.

A transzformációk maradék ellentmondásainak jellemzőit a térbeli derékszögű rendszerben (HD72 dátumban) a *VII. táblázatban* töntettük fel.



3. ábra. Maradék ellentmondásvektor egy pontban unduláció nélküli és unduláció figyelembevételével számított Helmert-transzformáció esetén

VI. táblázat. A transzformációk legnagyobb maradék ellentmondásai az EOV síkon

	Helmert und. nélkül	**Helmert und.-val**	**affin und. nélkül**	**affin und.-val**
max. hiba [m]	0.538	0.539	0.484	0.485

VII. táblázat. A transzformációk maradék ellentmondásainak jellemzői

	Helmert unduláció nélkül			**Affin unduláció nélkül**		
	dx	dy	dz	dx	dy	dz
szumma:	-0,866	-1,821	0,001	-0,850	-1,817	-0,029
átlag:	-0,001	-0,002	0,000	-0,001	-0,002	0,000
szórás:	0,157	0,126	0,385	0,141	0,118	0,383
min.:	-0,405	-0,424	-1,030	-0,384	-0,390	-1,030
max.:	0,484	0,404	0,843	0,459	0,446	0,838
	Helmert undulációval			**Affin undulációval**		
	dx	dy	dz	dx	dy	dz
szumma:	-0,826	-1,818	-0,076	-0,794	-1,819	-0,078
átlag:	-0,001	-0,002	0,000	-0,001	-0,002	0,000
szórás:	0,158	0,127	0,283	0,143	0,118	0,283
min.:	-0,406	-0,427	-2,901	-0,381	-0,385	-2,897
max.:	0,484	0,407	1,664	0,457	0,441	1,657

Összefoglalás

Az eddig bemutatottak alapján a következő megállapításokat tehetjük:

1. Geometriailag értelmezhető térbeli transzformációkkal (Helmert, affin) átszámítást tudunk végezni a műholdas és a hagyományos hálózatok között maximum félméteres hibával. Ez a transzformáció és a hálózatok hibájából tevődik össze. Azonban ez a pontosság megfelelő sok alkalmazáshoz, mint például a járműnavigáció vagy a térinformatikai adatgyűjtés. Előnye, hogy a Helmert-transzformáció paraméterei beállíthatók a navigációs GPS-vevők többségében.

2. Ha csak vízszintes értelemben kívánjuk a transzformációt végrehajtani, akkor nem szükséges a geoidundulációt figyelembe venni, mivel a meghatározott síkkoordinátákra nem lesz jelentős hatással.

3. Szinte mindegy, hogy Helmert- vagy affin-transzformációt alkalmazunk-e, mivel a két módszer eredménye között nincs jelentős eltérés (néhány centiméter).

Köszönetnyilvánítás

A vizsgálatokat a T043007 számú, a „*Magyarországi geodéziai vonatkozási rendszerek és vetületi síkkoordináta-rendszerek vizsgálata*” című OTKA pályázat keretében végeztük.

Hivatkozások

Ádám J, Borza T (1995): The GPS Network and their comparison with the traditional network.. *Reports on Geodesy*, 3; 16, 211-219.

Hofmann-Wellenhof B et al. (2001): GPS Theory and Practice. *SpringerWien NewYork.*

Papp et al. (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. *Reports on Geodesy*, 4; 27, 265-280.

Papp at al. (2002): Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. *Per. Pol. Civ. Eng.* 46; 2, 199-204.

Szűcs L (1997): Térinformatikai célú GPS mérések feldolgozási lehetőségei. Budapest, MH Térképészeti Hivatal. *11. Kozmikus Geodéziai Szeminárium előadásainak gyűjteményes kötete*, 264-272.

AZ EUPOS MAGYARORSZÁGI BEVEZETÉSÉNEK NÉHÁNY SZAKMAPOLITIKAI KÉRDÉSE

Szentpéteri László[*]

Some functional questions on EUPOS introduction to Hungary *– TTTC Ltd. has prepared a feasibility study for the request of Ministry of Informatic and Telecommunication on the possibilities and technical challenges of introduction of the EUPOS high-accuracy positioning system in Hungary. The study also investigated the potential use of such service, and made a questionary-survey about the technical, geographical and other needs.*

Keywords: DGPS stations, EGNOS, EUPOS, Virtual network, RTK-network

A Informatikai és Hírközlési Minisztérium még 2003-ban készíttette el a TTTC Kft.-vel azt a szakértői tanulmányt, amely az EUPOS nagypontosságú helymeghatározó rendszer magyarországi bevezetésének lehetőségeit vizsgálta. A vizsgálat kiterjedt a potenciális felhasználási lehetőségek áttekintésére, valamint a műszaki, földrajzi és egyéb igények felmérésére.

Kulcsszavak: DGPS-állomások, EGNOS, EUPOS, Virtuális hálózat, RTK-hálózat

Bevezetés

A soproni konferencián ismertetett szakértői tanulmány gyökerei 2001 novemberéig nyúlnak vissza. Ekkor néhányan résztvettünk a Bécsben rendezett *"United Nations – United States of America Workshop on The Use and Applications of Global Positioning Systems"* c. munkaműhelyen. Ennek egyik eredményeként néhányunkban megfogalmazódott, hogy mivel a jelenleg Magyarországon is széles körben használt GPS műholdas helymeghatározó rendszer bizonyos korlátokkal rendelkezik, ugyanakkor az alkalmazások száma folyamatosan nő, ideje lenne megfelelő és koordinált lépéseket tenni a felhasználók érdekében.

A 2002-es év egyeztetésekkel, diszkussziókkal kezdődött, majd 2002. nyarán (gyakorlatilag váratlanul) a Földmérési és Távérzékelési Intézet egyik német partnere (Német Geodéziai Szolgálatok) előállt egy javaslattal, melynek értelmében *a Németországban széles körben használt SAPOS-rendszert kiépítésre ajánlják a Közép- és Kelet-Európai országoknak EUPOS néven.* Ez az ajánlat kissé megváltoztatta addigi gondolkodásunkat, és új irányt adott a diszkussziónak. Kissé okafogyottá vált ugyanis a különböző, és igen költséges rendszerek összehasonlító vizsgálata, ugyanakkor időszerűvé vált magának az EUPOS koncepciónak az értékelő elemzése. Ennek eredményeként, az Informatikai és Hírközlési Minisztérium 2003. január elején megbízta a TTTC Kft.-t, hogy készítse el a hivatkozott szakértői tanulmányt.

A megbízásban célul tűzték ki, hogy igyekezzen ismertetni

- a jelenlegi, és a közeli jövőben kiépülő különféle műholdas helymeghatározó és navigációs rendszereket, illetve
- a létező és a fejlesztés alatt álló különféle pontosságot és megbízhatóságot növelő kiegészítéseket és kiterjesztéseket.

Mutassa be, hogy jelenleg

- hol tart a GPS-technika hazai alkalmazása, illetve, hogy
- a hazai felhasználók milyen problémákkal küzdenek és
- milyen jövőbeni igényeik vannak.

Ismertesse

- a német SAPOS GPS-támogató rendszert, illetve
- az annak alapjain jelenleg Közép- és Kelet-Európában tervezés alatt álló EUPOS rendszert.

[*]*TTTC Kft., 2120-Dunakeszi, Krajcár u. 2.*
E-mail:laszlo_sztp@3tc.hu

Végül adjon választ arra a kérdésre, hogy:

- érdemes-e Hazánknak csatlakoznia az EUPOS kezdeményezéshez, és ha igen,
- akkor az EUPOS hazai bevezetésének milyen műszaki, pénzügyi és szervezeti igényei vannak, illetve

cserébe mit kaphat a Magyar GPS/GNSS felhasználók köre?

Alap műholdas helymeghatározó rendszerek

Napjainkban két globális műholdas helymeghatározó és navigációs rendszer (Global Positioning System, GPS) létezik: az amerikai NAVSTAR, és az orosz GLONASSZ. Mindkettő gyökerei a 70-es évek végére nyúlnak vissza. Az említett két rendszeren túl tervezés alatt áll az európai Galileo rendszer. Ezt a három rendszert, és a később bemutatandó GBAS rendszereket együtt újabban GNSS (Global Navigation Satellite Systems – Globális Navigációs Műholdrendszerek) nevezik.

A *NAVSTAR*-ral kapcsolatban a legfontosabb tény, hogy az egy olyan rendszer, amelyet több millióan használnak. Folyamatos fejlesztés alatt állt és áll, jelene és jövője biztos. A vevőberendezésekkel elérhető pontosság – a bárki által hozzáférhető C/A-kóddal – ma néhány tíz méter, de az évtized vége felé már néhány méter.

Az orosz *GLONASSZ* egy problémákkal küszködő rendszer, melyet a hidegháborúban mint a NAVSTAR alteregoját hozták létre. Jelenlegi felhasználóinak száma alig haladja meg a tízezret, és jövője – elsősorban pénzügyi okokból - bizonytalan.

Mivel a NAVSTAR felhasználóinak száma több nagyságrenddel nagyobb mint a GLONASSZ alkalmazóinak, nem csoda, hogy az elmúlt években *a GPS gyakorlatilag a NAVSTAR szinonímájává vált,* és ha külön nem jelöljük, akkor mi is így használjuk.

Európa a közelmúltban ugyan megkezdte saját, polgári felügyelet alatt álló rendszerének, - a *Galileo*nak – a fejlesztését, de az legkorábban is csak az évtized végén állhat szolgálatba.

A GNSS rendszerek *az év 365 napjában, napi 24 órában, időjárástól függetlenül, bárhol a világon, gyakorlatilag azonos pontossággal használhatók.* A műholdgenerációkat és a földi irányító és követő hálózatot folyamatosan fejlesztik. Ennek is köszönhető nevezett rendszerek ún. abszolút pontosságának (vagyis annak a pontosságnak, melyet egyetlen vevőberendezés használatával, gyakorlatilag néhány pillanat alatt elérünk) fokozatos a javulása *(I. táblázat)*.

I. táblázat. Az alap műholdas helymeghatározó rendszerek

Mikor?	Mivel?	Rendelkezésre állása?	Pontossága?
1991-2000	GPS-II/IIA/IIR	95%	50-100 m / 100-150 m
2000-2005	GPS-IIR/IIR-M/IIF	95%	10-23 m / 15-35 m
2005-2011	GPS-IIR/IIR-M/IIF	95%	5-10 m / 10-15 m
2006-2011	GLONASSZ-M/K	95%	10-20 m / 15-25 m
2008-2010	Galileo	99,9%	3-5 m / 10-15 m
2011-…	GPS-III	99.9%	3-5 m / 10-15 m
2011-…	Galileo + GPS III	99.9%	3 m / 4 m

Ahogy az a fenti táblázatból látható,

- egy-egy újabb pontossági szint megjelenése nem köthető egy egzakt időponthoz, hisz a műholdak folyamatosan cserélődnek, és a követő hálózatok fejlesztése is folyamatos,
- Fontos hangsúlyozni, hogy a jelenleg használatos NAVSTAR GPS és GLONASSZ rendszerekkel szemben a rendelkezésre állási elvárások mindössze 95%-osak, vagyis, a nap 24 órájának 5%-ban a szolgáltatások szintje akár a táblázat utolsó oszlopában feltüntetett értéknél rosszabb is lehet…

Az I-es táblázatból is sejthető *a GPS rendszerek jelenlegi három legfontosabb korlátja*, azaz

- korlátozott pontosság,
- nem minden esetben megfelelő rendelkezésre állási szint, és
- viszonylag alacsony integritás (vagyis az, hogy nincs – vagy csak nagy késéssel van - információnk arról, ha a rendszer hibásan működik).

A fenti problémák kiküszöbölésésre, illetve hatásainak csökkentésére *a világ számos részén kezdték meg a különféle pontosságot és megbízhatóságot növelő* földi és műholdas rendszerek fejlesztését és kiépítését.

Módszerek a pontosság és a megbízhatóság növelésére

Mindenekelőtt meg kell ismerkednünk a *differenciális, illetve realtív-mérések* elvével. Ennek lényege, hogy a pozíciónkat nem az eddig megismert módon, azaz önmagunkban számoljuk, hanem egy azonos időben működő, szélső-pontosságú GPS-vevőhöz képest. *A differenciális, vagy relatív mérések jelentősége abban van,* hogy egy sor rendszerhibát kiejtve, jelentősen növelik a helymeghatározás pontosságát, azaz

- míg abszolut módban 10-30 m-es, addig
- differenciális módban a 0,5-10 m-es, míg
- relatív mérések esetén az 1-10 cm-es

pontosság érhető el.

Fontosnak tartjuk azonban azt is hangsúlyozni, hogy a differenciális megoldások *jelentősége nem csak és kizárólag a pontosság javítása*, hanem az is, hogy a korrekciók szolgáltatására felkészített referencia állomások, illetve ezek hálózata, alapját képezhetik egy következő fejlesztési lépcsőnek. Arról van szó, hogy *a szélsőpontosságú GPS infrastruktúra alkalmassá tehető a GPS rendszerre vonatkozó integritás adatok számítására*, és ezen keresztül lehetőséget teremthet a nagyobb rendelkezésre állást, illetve kisebb riasztási időket igénylő alkalmazások kielégítésére is!

Éppen a fenti komplexitásból, illetve többféle célból adódik, hogy olyan *sokféle DGPS, illetve relatív GPS rendszermegoldás létezhet.* Ezek közül érdemes megemlíteni:

- az alapnak tekinthető Single Base eljárást (lásd fent),
- a nagyob távolságok áthidalására alkalmas Long Range RTK-t,
- az elsősorban vonalas mérések igényeit kielégítő Multi Base technológiát,
- illetve a nagy területek, azonos pontosságú, mégis költséghatékony ellátását lehetővé tevő VRS, illetve VBS megoldásokat.

A DGPS, illetve differenciális GNSS (DGNSS) rendszerek esetében a sugárzásra kerülő adatok típusára és formájára mára kialakult egy nemzetközi szabvány, ez az *RTCM SC-104-es üzenetsor*. Tudni kell ugyanakkor, hogy hasonló nemzetközi szabvány magukra az adattovábbító eszközökre nem létezik. Ez utóbbi persze nem szükségszerűen probléma, hisz épp az adattovábbítási megoldások sokszínüsége az, ami egy DGPS szolgálatot vonzóvá tehet a felhasználók szemében. Megemlítettük, hogy napjainkban az *adatátviteli megoldások száma szinte követhetetlen* (URH, VHF, műholdas, RDS, GPS, GPRS, internet, stb.)

Infrastruktúrák a szélső pontosság biztosítására

A cm-es pontossági szintet nyújtó *geodéziai GPS technika* kapcsán a következő fejlődési lépcsők azonosíthatók:

Az *első lépcsőnek* tekinthető, csak utófeldolgozást támogató *passzív hálózatok*. Ilyen ma már Magyarországon is rendelkezésre áll. Ennek legnagyobb korlátja az, hogy a felhasználónak továbbra is vevőpárra van szüksége, hisz a bázis GPS-t saját magának kell elhelyeznie és üzemeltetnie az OGPSH mintegy 1200 pontjának egyikén.

A *második lépcsőt az utófeldolgozáshoz adatokat szolgáltató aktív hálózatok* jelentik. Itt már a pontokon fixen telepített és folyamatosan működő kétfrekvenciás GPS vevők működnek és végzik az adatgyűjtést. Ezeket az adatokat azután a felhasználók letölthetik, és saját méréseiket ők korrigálhatják. *Előrelépés,* hogy a felhasználónak *a terepen már nem kell saját bázist üzemeltetnie.* Továbbra is korlát azonban, hogy a rendszer *nem képes kiszolgálni a valós idejű helymeghatározás*

igényeit, így az alkalmazások jelentős része még ezzel a rendszerrel sem végezhető el. Magyarországon a tervezett 12 pontból eddig mindössze hármat sikerült felállítani, és a program – forráshiány miatt – igen vontatottan halad, ma a végét gyakorlatilag nem látjuk… (A tanulmány megjelenése óta a helyzet javult, sikeres pályázatok támogatásával már 9 állomás üzemel és reális a két éven belüli befejezés.)

A technológia fejlődésében *a harmadik lépcső* az aktív hálózatok legfejlettebje, a *hálózatba kapcsolt geodéziai-pontosságú GPS-vevőkkel üzemelő valósidejű hálózat*. Ez gyakorlatilag nagyobb területen (akár egy teljes országban) képes, viszonylag reális számú (Magyarország esetében mintegy két tucat) bázis GPS-szel, országosan is a cm-es nagyságrendű helymeghatározást biztosítani. Ezzel megvalósul a földmérők és navigátorok régi álma, hisz egy ilyen rendszerrel a mozgó-oldalon alkalmazott hardverek milyenségétől függően a valós időben elérhető helymeghatározási pontosság 1-3 méter, méter alatti (szub-méteres), vagy akár cm-es is lehet!

Amikor az integritás és a rendelkezésre állás az elsődleges

Az utóbbi években kezdték megvalósítani több országban, és nemzetközi szervezetekben a különféle *műhold alapú, és a földi telepítésű kiterjesztő-rendszereket (SBAS, és GBAS).*

Ezek legfőbb eltérése a korábban ismertetett valós-idejű aktív hálózatokhoz képest nem a pontosságban, hanem a jóval magasabb szintű integritásban és rendelkezésre állásban van. Közűlük számunkra igen fontos az Európában 2004-ben szolgálatba álló *EGNOS* rendszer.

Bár ma a rendszer még tesztelés alatt áll, a teszt-adatok pontossága már most is megközeleíti a tervezettet (a *korrekció pontossága 1-3 m,* ami azt jelenti, hogy egy felhasználó – hardvertől függően – 2-10 m-es pontosságot fog tudni elérni), és még integritás információkat is kaphat!

Az EGNOS azonban *egy sor felhasználó számára nem fog kielégítő megoldást nyújtani,* ugyanis a jeleket geostacionárius műholdakról szórják, így aki valamilyen okból nem rendelkezik szabad kilátással nagyjából déli irányban, az egyáltalán nem lesz képes a korrekciós jelek, illetve az integritás adatok vételére.

A SAPOS

A tanulmány következő részében *ismertettük a német SAPOS rendszert.* Megállapítottuk, hogy itt egy európai mércével mérve is igen nagyméretű, és igen sikeres rendszerről van szó, melyet azonban mintegy tíz éve fejlesztenek, és a fejlesztések pontos költségére vonatkozó adat nincs, illetve nem hozzáférhető.

A SAPOS, Németországban (több mint 250 permanens-állomásával) bárhol *képes valósidejű, és utófeldolgozásos cm-es élességű helymeghatározások kiszolgálására* (így harmadik generációs geodéziai infrastruktúrának tekinthető).

Rendelkezésre állása igen magas,- 99%-os, sőt esetenként, és helyenként ennél is jobb (mintegy 99,5%-os) is lehet. Ezzel a SAPOS – igény esetén – Németországban GBAS rendszer(ek) alapját is képezhetné.

A SAPOS harmadik vonzereje (a pontosságon, és a viszonylag magas rendelkezésre álláson, illetve integritáson túl) az a tény, hogy *az adatokat igen sokféle módon terítik a felhasználók között.* A megoldások között található műsorszóró rádiós és RDS-es, GSM-es és internetes adatátvitel egyaránt, és az idei évre tervezik a GPRS kisérletek megkezdését.

Az EUPOS

A SAPOS-szal gyűjtött kedvező tapasztalatokra alapozva 2002 nyarán a német üzemeltetők a Közép és Kelet-Európai régió országai számára *bevezetésre javasolták az EUPOS* rendszert.

Az EUPOS – mint azt neve is sejteti – a SAPOS-on alapul, de annál már sokkal letisztultabb. Az EUPOS tervezése jelenleg folyik, és *még rengeteg a nyitott kérdés*. Néhány dolog azonban már most is kijelenthető:

- Az EUPOS esetleges magyarországi bevezetésével a hazai navigációs, térinformatikai és földmérő szakma óriási és igen *kiforrott infrastrukturális háttérhez jutna.*
- Az EUPOS rendszeresítésével *elkerülhetnénk egy sor olyan vakvágányt,* melyek minden bizonnyal egy ilyen infrastruktúra fejlesztési projekt halálát jelentenék.
- Az EUPOS átvételével egy olyan rendszert vezethetnénk be, amely (a SAPOS-nak köszönhetően) *már bizonyított és folyamatosan bizonyít.*

Ahogy a társadalmat a motorizáció, az informatika, és a mobil telefónia után egyre inkább átjárja a térinformatika és a GPS-technika alkalmazása, úgy lesz *Magyarországnak egyre inkább égető szüksége egy megfelelő földi GNSS infrastruktúrára.* Jelen sorok szerzőjének egyértelmű véleménye, hogy az EUPOS erre remekül megfelelne.

A hazai infrastruktúra fejlesztések helyzete

Miután napjainkban a GPS-technika már Magyarországon is jelentős alkalmazásokkal bír (ne feledjük, hogy az első GPS-vevők már 1990-ben beérkeztek), semmi meglepő nincs abban, hogy *már többen is próbálkoztak valamilyen DGPS, illetve egyéb, "támogató infrastruktúra" kialakításával.* Összességében elmondható, hogy *az eddigi kezdeményezések nem jártak sikerrel*. A zsákutcáknak több oka is volt, illetve lehetett: túl korai projekt-indítás, szűk pontossági tartomány, szűkre méretezett adatszolgáltatás, rádiós problémák, korlátozott szolgáltatási terület, alacsony szintű technikai megvalósítás, tőke és egyéb erőforrás-hiány, a koordináció és a szabványok hiánya, stb.

Napjainkban csak a külföldi szolgáltatók által műholdról sugárzott DGPS megoldások (OmniStar és LandStar) érhetők el az ország teljes területén, az év 365 napjában. Ezekhez azonban igen költséges vevőeszközöket kell beszerezni, és az előfizetési díj is tetemes (évi 300 ezer forint). Másik probléma az, hogy a korrekciót sugárzó geostacionárius műhold sokszor (takarás miatt) egyáltalán nem látható, ilyenkor a pozíciójavítás nem történik meg. A fenti okok miatt ezek a rendszerek, – bár nyílt terepen igen megbízhatóan nyújtják a méter alatti (és hamarosan a néhány deciméteres) pontosságot - igazán széleskörben nem terjedtek el és a jövőben sem fognak.

Jelenleg ugyan *a FÖMI-KGO rendelkezik egy átgondolt nemzeti GNSS fejlesztési koncepcióval*, de az forráshiány miatt elsősorban a földmérés igényeinek kielégítését célozza meg, tehát nem alkalmas az országban felmerülő, főleg navigációs igények kielégítésére. Az eddig felsorolt előzmények után *mentőövnek tűnik az EUPOS javaslat,* amely egyrészről EU-s pénzeszközök bevonását segítheti elő, *másrészről távol tarthat minket az esetleges zsákutcáktól.*

A hazai felhasználói igények és a projekt támogatottsága

Egy ilyen projekt elindítása és végigvitele szempontjából van három sarkalatos kérdés, illetve kérdés csoport:

- *Milyen általános támogatottságot élvezhet* Magyarországon az EUPOS hazai bevezetése, illetve, hogy a projekt, csak néhány szakember számára fontos, vagy valóban komoly csoportok igényéről van szó?
- Akik egy ilyen projektet támogatnak, *mely szakmákból, mely szakterületekről kerülnek ki*, - azaz, mely államigazgatási szerveket, szervezeteket kell majd a projekt során megszólítani?
- Milyen főbb, *általános tervezési szempontokat* kell figyelembe venni?

A vizsgálat érdekében egy kérdőívet állítottunk össze, amelyen 13 kérdés szerepelt. Összesen 1367 kérdőívet küldtünk szét, ebből 652-öt budapesti, illetve 715-öt nem budapesti címre.

A válaszokból nyilvánvalóvá vált, hogy jelentős olyan felhasználó kör létezik ma Magyarországon, melyet a GPS abszolut pontossága nem elégít ki. Egyértelművé vált, hogy olyan szolgáltatásra van szükség, amely (az abszolut GPS-hez hasonlóan), egész évben, az ország teljes területén rendelkezésre áll. A rendszernek képesnek kell lennie az 1 cm – 10 méter közötti, megbízható, helymeghatározásra, akár valós időben, akár utófeldolgozással. Bizonyítottuk, hogy a potenciális felhasználók köre szinte a teljes nemzetgazdaságot átfedi.

Az EUPOS hazai bevezetéséről

Magyarországon az EUPOS bevezetése kapcsán négy fő feladatcsoportra kell koncentrálni:

- Az EUPOS fejlesztés menedzsment struktúrájának és szolgáltató központjának kialakítása
- Felkészülés a zavarmentes hozzáférés és mérések biztosítására
- Az EUPOS technikai kiépítésének megtervezése és végrehajtása
- EUPOS költségforrások biztosítása

Becsült költségek és a finanszírozás

A költségeket csak további részletes tervtanulmányok során lehet kellő pontossággal meghatározni. Ehhez ma a német partnertől 100% megbízhatóságú adatok nem is állnak rendelkezésünkre. A következőkben olyan nagyságrendileg előzetesen becsült költségeket ismertetünk, melyek elsősorban a külföldi tapasztalatokon alapulnak. Ezért el kell tekintenünk a tételes felsorolás részletezésétől is.

- A szolgáltató központ létrehozásával kapcsolatos költségek..... kb. 170 mFt
- Az állomáshálózat kiépítése (25 állomás esetén)..... kb. 300 mFt
- Integritás és interferencia monitoring kiépítése..... kb. 100 mFt

Összesen kb. 570 mFt

A magyar EUPOS hálózat *működési költsége éves szinten ezért eléri a 130mFt-ot.* A bevételi oldalon adatértékdíj formájában a beindulást követően néhány év alatt becslésünk szerint *elérhető az évi 10-50 mFt árbevétel.* Külföldi tapasztalatok alapján azonban úgy látjuk, hogy ez a fajta infrastruktúrális szolgáltatás nem tehető nyereségessé. Az EUPOS fenntartásának *nettó támogatási igénye* ezért még hosszabb távon is (a fenti becslések alapján) *évi 80-100 millió forint*.

Összefoglalás - ajánlások az EUPOS hazai bevezetésével kapcsolatban

Az ENSZ ajánlásai között szerepel az egyes országokban egy kormányzati szintű szervezeti struktúra létrehozása, a GNSS fejlesztések, alkalmazások menedzselésére, koordinálására. Egy ilyen szervezetet minél előbb létre kell hozni Magyarországon.

- Tekintve, hogy fontos űrtechnikai alkalmazásról van szó, a magyar űrkutatás szervezetének (MŰI) szerepvállalása a rendszerrel kapcsolatos koodinációban szükséges, és igen jelentős. Ezzel elkerülhető szétaprózott, partikuláris érdekeket szolgáló, és ezért egymással inkompatibilis, országos szinten gazdaságtalan differenciális szolgálatok létrejötte.
- Következő lépésként fel kell állítani egy GNSS interferencia-mérő és zavarvizsgáló teamet, a megfelelő felszereléssel.
- Létre kell hozni a magyarországi EUPOS Szolgáltató Központot (EUPOS Service Centre), amely kezdettől fogva menedzseli az EUPOS-szal kapcsolatos operatív feladatokat.
- Meg kell kezdeni az EUPOS magyarországi állomáshálózatának tervezését. Rendszertervet kell kidolgozni a kiépítésre, működtetésre, fenntartásra és a költségvonzatokra vonatkozóan.
- Meg kell kezdeni az EUPOS pályázatok előkészítését. A projekt generikus leirása 2003. II. negyedév végére várható Németországból. Ennek magyar adaptálása szükséges. Ezt követően fel kell venni a közvetlen kapcsolatot a magyar nemzeti ISPA koordinátorral és tisztázni a pályázat benyújtásának további feltételeit. Ki kell dolgozni a pályázatot, majd nemzetközileg koordinált módon be kell nyújtani.
- El kell kezdeni az EUPOS szabványoknak megfelelő földi “pilot” infrastruktúra kiépítését Magyarországon. A kezdeti szakaszban el kell végezni a rendszer tesztelését, és tapasztalatokat kell szerezni a működtetésre vonatkozóan.

A BUDAPESTI EGNOS MONITORÁLLOMÁSON VÉGZETT MÉRÉSEK VIZSGÁLATA

Kratochvilla Krisztina[*]

Analysis of observations at the EGNOS monitor station in Budapest *- In November of 2003, in the frame of the extension of Eurocontrol Data Collection Network, a monitor station has been set up in Budapest at the BUTE, in order to test the performance of EGNOS/ESTB system. At the first month the comparisons of accuracy of GPS and EGNOS/ESTB system have done. We've analyzed the yearly statistics of the station, accuracies of the observation's results, and the adaptability of the EGNOS/ESTB system in the air navigation.*

Keywords: GPS, EGNOS, ESTB, Eurocontrol Data Collection Network, monitor station of Budapest, position error, protection level, performance, air navigation precision approach categories

2003 novemberében az Eurocontrol adatgyűjtő hálózatának bővítéseként kezdte meg működését a BME-n telepített budapesti monitorállomás az EGNOS/ESTB rendszer teljesítményének vizsgálatára. Az állomás működésének első hónapjában elvégeztük a GPS és az EGNOS/ESTB rendszer pontosságának összehasonlítását. Az üzemelés közel egy éves időtartamára elkészítettük a mérési adatok éves statisztikáját, vizsgáltuk a rendszer pontosságát és a légi navigációban való alkalmazhatóságát a budapesti állomás, ill. az Eurocontrol hálózatának mérési eredményei alapján.

Kulcsszavak: GPS, EGNOS, ESTB, Eurocontrol adatgyűjtő hálózat, budapesti monitorállomás, pozícióhiba, védelmi szint, teljesítmény, légi navigáció megközelítési eljárásai

Bevezetés

Az SA felfüggesztése óta jelentősen javult a GPS technikával elérhető pontosság, bár ez még mindig kevés, elsősorban a GPS kisebb megbízhatósága és integritása miatt. Ennek feloldásaként dolgozták ki a WADGPS rendszereket, amelyek a differenciális GPS pontosságából és megbízhatóságából előnyt kovácsolva teszik alkalmassá a GPS rendszert navigációs feladatok ellátására.

Európa önálló műholdas navigációjának megvalósulási folyamatában a GPS pontosságát és alkalmazási körét növelő kiegészítő rendszer szerepét az EGNOS (*European Geostationary Navigation Overlay Service*) hivatott betölteni. Elsődleges célja, hogy abszolút helymeghatározás esetén, korrekciók műholdas sugárzásával a helymeghatározás hibáját egy méter alá szorítsa. Az EGNOS azonban csak akkor lesz alkalmas fokozott biztonságot igénylő feladatok (pl. légi navigáció) maradéktalan ellátására, ha a szükséges pontosság mellett a rendszer megfelelő szintű integritását is biztosítani tudja.

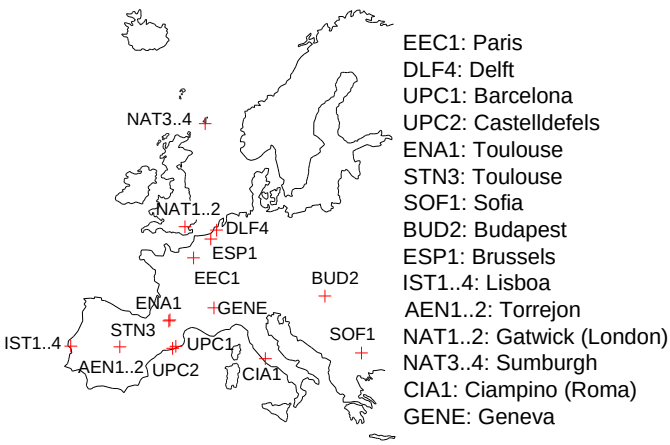
Az EGNOS szolgáltatásszerű működésének várható kezdete a rendszer kiépítése-fejlesztése során sokszor módosult, jelenleg 2004 végét jelölik meg. A 2000 februárjától működő tesztrendszere, az ESTB (EGNOS *System Test Bed*) mellett, 2003 decemberétől az EGNOS is megkezdte kísérleti jellegű működését. A 2004 júliusa-augusztusa óta szinte folyamatosan adatokat szolgáltató EGNOS kiépítettsége immáron majdnem teljesnek mondható. A négy irányító központ (MCC – *Master Control Centre*) és a hat betöltőállomás (NLES – *Navigation Land Earth Station*) mindegyike működik, a 34 követő állomásból (RIMS – *Ranging and Integrity Monitor Station*) pedig 30 épült ki. Az EGNOS fejlesztése és bővítése 2008-ig elkészített, konkrét tervek alapján folytatódik (EGNOS V2) *(Ventura-Traveset 2004, EGNOS News 2004)*.

[*]*BME Általános- és Felsőgeodézia Tsz., 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: kriszta@agt.bme.hu

Az Eurocontrol adatgyűjtő állomások hálózata

A 31 európai tagországot számláló, légi közlekedéssel és navigációval foglalkozó Eurocontrol egységes adatgyűjtő állomásokat telepített az EGNOS rendszer teljesítményének vizsgálatára. Kezdetben ezeket az állomásokat Nyugat-Európa területén létesítették. 2003 őszén kezdték meg a hálózat bővítését Európa keleti felére, ennek során épült ki előbb a szófiai, majd novemberben a budapesti állomás. A holland Integricom és az Eurocontrol együttes megállapodása értelmében a budapesti állomás a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszéken kapott helyet.

Az Eurocontrol adatgyűjtő hálózatának munkáját a párizsi székhelyű EEC (*Eurocontrol Experimental Centre*) központ irányítja. A hálózatot *(1. ábra)* jelenleg (2004 novemberében) 15 állomás mintegy 20 vevőberendezése alkotja. Ez a szám korántsem végleges: néhány újabb állomás bevonását, ill. vevők telepítését tervezik.



1. ábra. Az Eurocontrol adatgyűjtő hálózata (2004. okt.)

A budapesti EGNOS tesztállomás

Az állomás bemutatása

A tesztállomás antennáját (NovAtel GPS-600) a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Központi épülete déli szárnyának tetőszerkezetén lévő, használaton kívüli kéményre erősített antennatartó rúdon rögzítettük. A NovAtel antennához tartozó NovAtel MiLLennium OEM3 kétfrekvenciás, tízcsatornás vevőberendezés pedig a BME Általános- és Felsőgeodéziai Tanszék által üzemeltetett permanens GPS-állomás munkahelyiségében, az antenna közelében kapott helyet *(Ádám és társai 2004) (2. ábra)*.

2. ábra. Az antennák helyzete

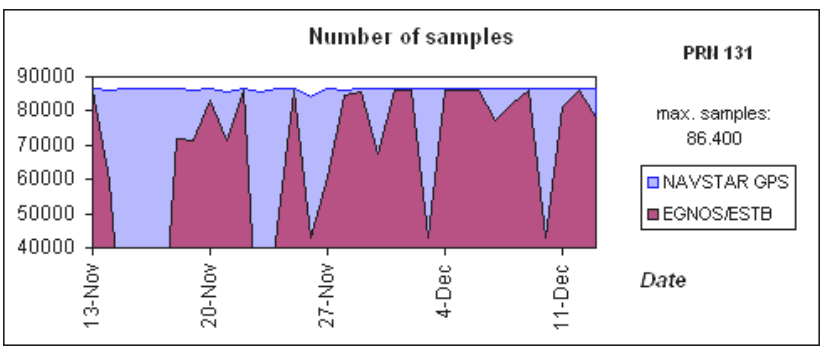
Az állomáson 2003. november 13.-ától folynak permanens észlelések. Az adatgyűjtést és feldolgozást az Eurocontrol által meghatározott fejlesztői környezetben végezzük. A mérési adatokat egyórás egységekben, másodpercenként rögzítjük.

A mérések feldolgozását és táblázatos-grafikus kiértékelését a Pegasus*Plus nevű szoftverrel végezzük, amelynek folyamatos fejlesztését az Eurocontrol végzi. Kezdetben a méréseket naponta, manuálisan dolgoztuk fel, jelenleg a feldolgozás folyamata a DoIt program felhasználásával teljesen automatizált. Az adatokat az Eurocontrol adatgyűjtő hálózatának tagjai a permanens GPS-állomás web szerverén *(http://stargate.fgt.bme.hu/estb/en),* jelszóval védett könyvtárakban érhetik el: ide szintén automatikusan kerülnek fel.

A GPS-EGNOS/ESTB eredmények összehasonlítása

Annak eldöntésére, hogy az EGNOS milyen mértékben növeli a pontosságot, a budapesti állomás üzemelésének első hónapjában (2003. november 13. – december 13.) összehasonlítottuk az EGNOS korrekciókkal ill. azok nélkül kapott helymeghatározási eredményeket.

A GPS- és az EGNOS-mérések esetén az első szembetűnő különbség az észlelések számában mutatkozik *(3. ábra).* Mivel a vevő egymásodperces rögzítési idővel dolgozik, az egy nap alatt észlelhető maximális epocha-szám 86.400. A vizsgált időszakban az EGNOS rendszer ritkán közelítette meg ezt az értéket, míg a GPS-szel észlelt epochák száma alig maradt el ettől.

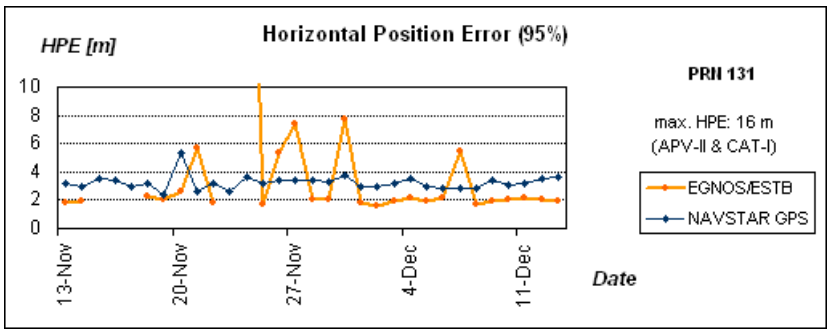


3. ábra. A napi észlelések száma

A folyamatos észlelések ellenére az EGNOS rendszerrel gyakran nem voltak mérési eredményeink. Ez a foghíjas adatsor nemcsak a vizsgált időszak jellemzője, hanem az éves statisztika összeállításakor is megmutatkozott. Az ok: ezeken a napokon – vagy alacsony epochaszám esetén néhány órában – szünetelt a korrekciók sugárzása, így bár voltak rögzített méréseink, azokat feldolgozva, EGNOS-korrekciókkal javított pozíciók nem születtek.

A két rendszer teljesítménye leginkább a helymeghatározás vízszintes és magassági hibáinak elemzésével hasonlítható össze. Általánosan elfogadott gyakorlatként ezeket az értékeket 0,95 valószínűségi szinten vizsgálják.

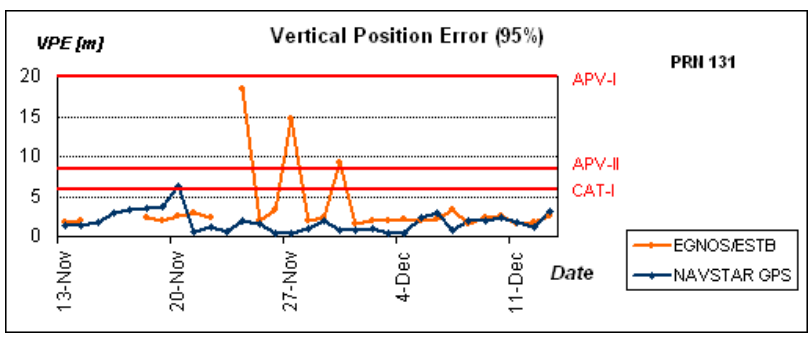
Az abszolút helymeghatározás vízszintes hibájának *(4. ábra)* vizsgálatából a következőket állapíthatjuk meg. Míg a GPS-mérések esetében a vízszintes pozícióhiba (HPE – *Horizontal Position Error*) 2-4 méter közötti érték, az EGNOS rendszer meglehetősen változó teljesítményt mutat. Az EGNOS korrekciókkal javított mérések HPE értékei jellemzően 2 méter körül ingadoznak, de gyakran találhatunk kiugróan magas pozícióhibákat is.



4. ábra. A vízszintes pozícióhiba napi értékei

A polgári repülésben előírt követelmények szerint az EGNOS akkor alkalmas precíziós megközelítési eljárás irányítására, ha vízszintes értelemben a maximális pozícióhiba 16 méter alatt marad. Ez a követelmény a vizsgált időszakban csak egy napon nem teljesült, ekkor viszont a HPE értéke 38 méter (!) volt.

A helymeghatározás magassági értelmű hibája (VPE – *Vertical Position Error*) a GPS mérések esetében 0-4 méter körüli érték volt, míg ugyanez korrekciók felhasználásával átlagban 1-3 méterre módosult *(5. ábra).* Természetesen itt is előfordultak kiugróan magas értékek, amelyek már csak az APV-I (*Approach with Vertical Guidance*) megközelítési eljárás előírásainak tesznek eleget. A legszigorúbb repülési előírás, a CAT-I (Categoria) követelményei akkor teljesülnek maradéktalanul, ha a magassági pozícióhibák 6 méter alatt maradnak *(Kratochvilla 2004)*.



5. ábra. A magassági pozícióhiba napi értékei

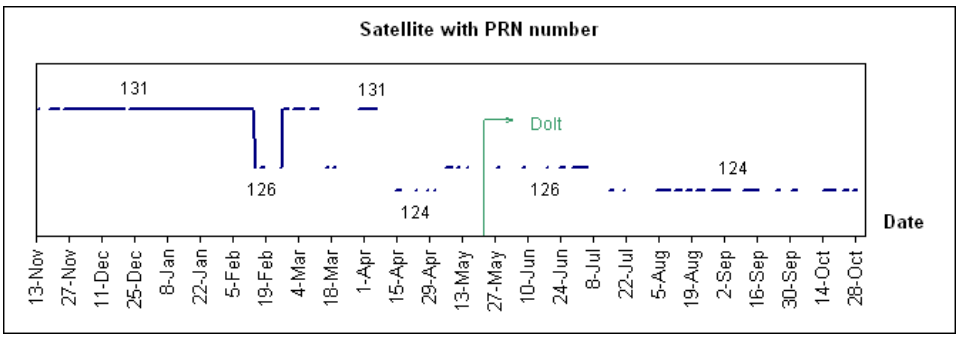
Az eredmények tehát azt mutatják, hogy a GPS alaprendszer működése egyelőre mind a rendelkezésre állás, mind a pontosság tekintetében megbízhatóbb. A 2003. november-decemberi időszakban a kiegészítő rendszer magasabb integritási szintje, valamint pontosságnövelő tulajdonságának pozitív hatása nem jelentkezett, igaz, ekkor még csak az ESTB szolgáltatott korrekciókat. Bár a GPS rendszer alkalmazásával jelenleg pontosabb eredményeket kapunk, figyelembe kell vennünk, hogy az EGNOS még mindig csak kísérleti üzemmódban működik, és a rendszer fejlesztését folyamatosan végzik.

A mérési eredmények éves statisztikája

Az állomás működésének kezdete óta közel egy év telt el, ezalatt az állomás és az EGNOS/ESTB rendszer „életében" sok változás történt; időszerű tehát az éves adatok összegzése és értékelése.

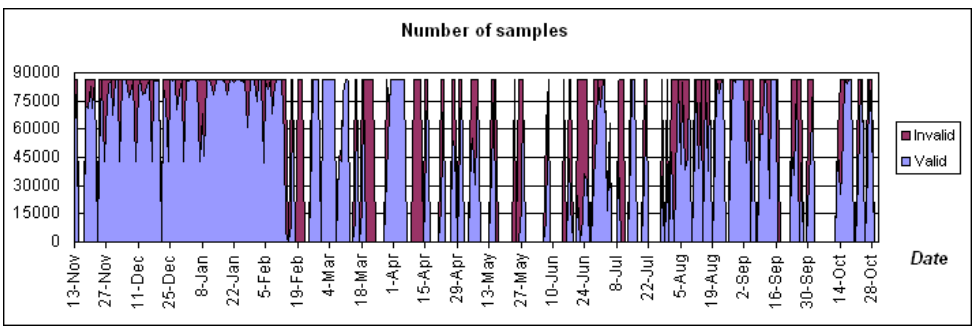
Az állomáson telepített 10 csatornás vevő csak egy csatornáján képes a korrekciókat fogadni, tehát az EGNOS több műholdja közül mindig csak egynek a jeleit észleljük. Az egy év alatt, az

adott időpontban tesztelt korrekciós műholdnak megfelelően, az Eurocontrol utasításai szerint többször is más PRN számú műhold észlelésére álltunk át *(6. ábra)*.



6. ábra. Az állomáson észlelt, EGNOS-korrekciót sugárzó műholdak

Az átállás érezhető változásokat hozott a mérési eredmények pontosságában és megbízhatóságában. Az egyik ilyen tapasztalt változás a napi észlelések számában mutatkozott, ez a korrekciók sugárzásának szünetelésére vezethetők vissza *(7. ábra)*.



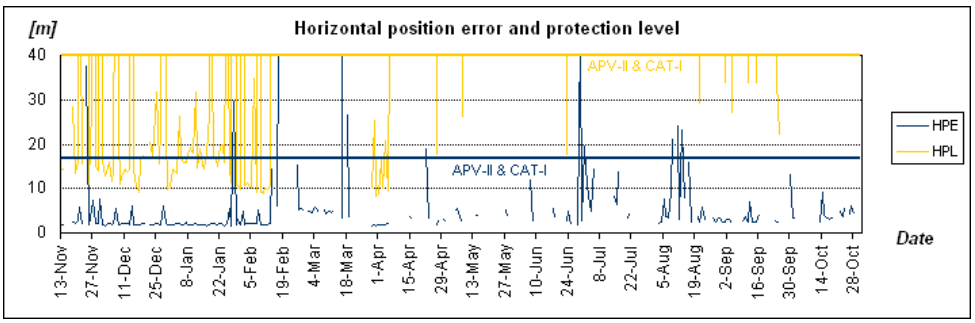
7. ábra. Az észlelések száma a 2003. november – 2004. október időszakban

Az EGNOS rendszer a korrekciókat 2004 augusztusától folyamatosan sugározza, ezt a mi méréseink is visszaigazolják azzal a különbséggel, hogy a jelek még nem mondhatók elég stabilnak.

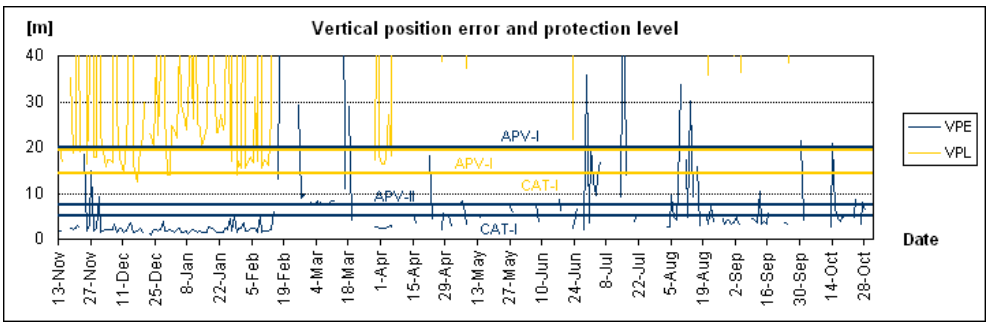
Az EGNOS talán egyik legizgalmasabb alkalmazási területe a légi navigáció. A repülőgépek navigációjában alapvető kérdés a leszállás irányítása. Az EGNOS számára előírt repülési követelményeket az ICAO (*International Civil Aviation Organization*) határozta meg. A pontosságra vonatkozó előírások az APV-I eljárástól a CAT-I eljárás irányába szigorodnak.

A különböző megközelítési eljárások vízszintes értelemben azonos pontosságot kívánnak meg: ezt az értéket 16 méteres pozícióhibában (HPE) maximalizálták. A meghatározott pozíciónak ezen felül még egy meghatározott sugarú hibakörön, tehát az ún. védelmi szinten (*protection level*) belül kell lennie, a hibakör sugarának megengedett értéke vízszintes értelemben (HPL) 40 méter. Magassági értelemben a pontossági követelmények a megközelítési eljárások szerint szétváltak: a magassági hiba (VPE) maximális értéke az APV-I esetében 20 m, az APV-II eljárásnál 8 m, míg a CAT-I fázisnál 6 m lehet. A hozzájuk tartozó védelmi szintek (VPL) határértékei az előbbi sorrendnek megfelelően 50, 20 ill. 12 méter.

Az EGNOS rendszer abban az esetben alkalmas a leszállás irányítására, ha a helymeghatározást jellemző HPE/VPE ill. HPL/VPL értékek az említett, a *8. és 9. ábrák*on is jelölt határokon belül maradnak, és a rendszer mindezt a nap 24 órájának több mint 99%-ában biztosítani tudja.



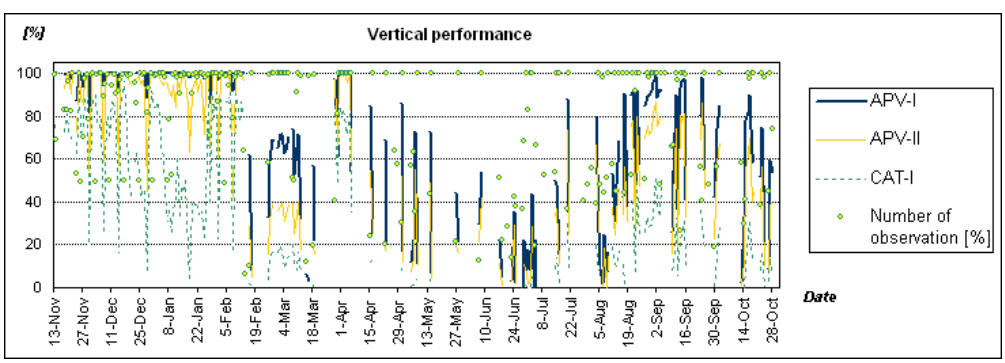
8. ábra. Vízszintes pozícióhiba (HPE) és védelmi szint (HPL)



9. ábra. Magassági pozícióhiba (VPE) és védelmi szint (VPL)

A helymeghatározási eredmények vízszintes és magassági összetevőinek hibája (HPE/VPE) az első időszakban, amíg az ESTB rendszer korrekcióit észleltük, általában a megfelelő határok alatt maradt. Kiugró értékek azonban mindkét esetben előfordultak, amelyek az EGNOS rendszerre való átállást követően (2004. február 14.) gyakoribbá váltak. Az augusztus hónaptól folyamatosnak mondott, de még mindig nem elég stabilnak tapasztalt korrekció-sugárzásnak köszönhetően sűrűbb adatsorral, pontosabb eredménnyel rendelkezünk.

A következőkben az EGNOS rendszer alkalmazhatóságát vizsgáljuk. A helymeghatározás vízszintes összetevőjének esetében a hibahatár 16 méter; ezt mind az EGNOS, mind a GPS rendszer minden nehézség nélkül teljesíti. Ennek következtében az EGNOS rendszer teljesítményének vizsgálatát csak a magassági összetevő elemzésére érdemes korlátozni. A *10. ábra* azt mutatja, hogy a rendszer az adott nap 24 órájának hány százalékában biztosította a navigációhoz szükséges pontosságot. Ha a teljesítmény az adott megközelítési eljárásban 99% feletti, a rendszer alkalmas a vizsgált repülési fázis irányítására.



10. ábra. Az EGNOS magassági teljesítménye

Az ábrán az egyes megközelítési eljárások esetén kapott teljesítmény látható % egységben. Az állomás működésének első néhány hónapjában az APV-I repülési fázisban való alkalmazhatóság 99% feletti, a CAT-I eljárás esetében a teljesítmény 0 és 96% között mozgott. A későbbiekben a rendszer teljesítménye gyengült, majd ez év augusztusától ismét emelkedő tendenciát mutatott. Az epochamennyiség és a teljesítmény között korreláció nem tapasztalható, magas észlelési szám mellett is előfordult alacsonyabb teljesítmény, valamint ennek ellenkezője is.

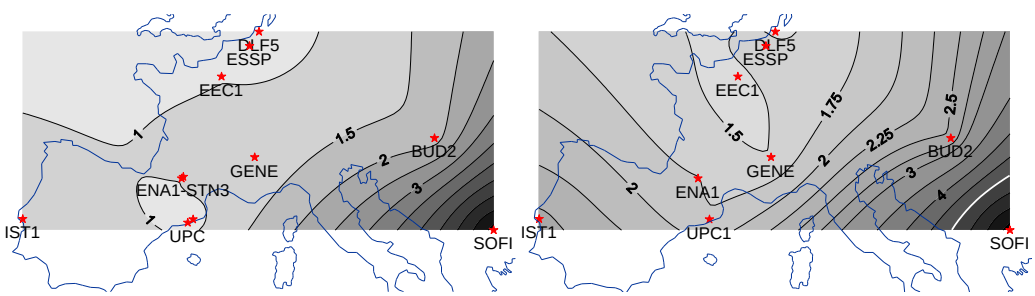
Az Eurocontrol adatgyűjtő állomáshálózatának összesített teljesítménye

Az EGNOS rendszer teljesítményéről a legátfogóbb képet a teljes Eurocontrol adatgyűjtő hálózat állomásainak feldolgozott adataiból kaphatjuk. Ennek feltétele, hogy minden állomás azonos paraméterekkel (adott EGNOS korrekciós műhold észlelésével, előírt feldolgozási beállításokkal) dolgozzon.

A következőkben a 2004. szeptember 1-jén, a PRN 124 (Artemis) EGNOS műhold korrekcióival, az előírt paraméterekkel (MOPS C Standard, 100 sec. szűrés) végzett, 24 órás mérések összesített táblázatának grafikus elemzését láthatjuk. Az eredményeket izovonalas térképeken, az ábrázolt értékeknek megfelelő izovonalközzel ábrázoltuk.

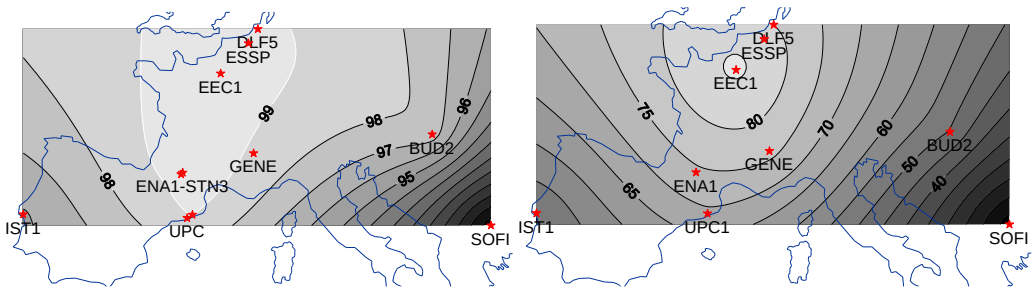
Az eredmények elemzésére kedvezőtlenül hat az állomások inhomogén földrajzi elhelyezkedése, az adatok extrapolálása, az egymáshoz közel lévő állomások eltérő adatai, valamint a hálózat peremén levő SOF1 (Szófia) állomás átlagtól való nagymértékű eltérése is. Ez utóbbit az okozhatja, hogy a korrekciós műhold észlelése viszonylag alacsony magassági szög alatt történik.

A *11. ábra* a hálózat állomásainak vízszintes és magassági pozícióhibáit mutatja. Elmondható, hogy az EGNOS mind a HPE, mind a VPE esetén nagyon jó eredményeket adott. A vízszintes pozícióhibák mindegyike az előírt 16 méteres határérték alatt marad. A Delftben (DLF5), Brüsszelben (ESSP) és Párizsban (EEC1) mért vízszintes pozícióhiba 1 méternél kisebb. A magassági pozícióhibák átlagos értéke 2 méter körüli, egyedül a szófiai állomáson kapott VPE érték került a CAT-I megközelítési eljárás követelményeinek teljesítéséhez szükséges 6 méter fölé. Az APV repülési eljárás követelményeinek minden állomás kiválóan megfelel.



11. ábra. Vízszintes (HPE) és magassági (VPE) pozícióhiba

A hálózaton belül a magassági teljesítmény *(12. ábra)* az APV-I eljárás esetén szintén jónak mondható: a vizsgálatban részt vevő 11 állomás közül 5 kapott 99% feletti eredményt. A magasabb pontossági követelményeket előíró APV-II megközelítési eljárás esetén már kisebb a teljesítmény: egyetlen állomáson sem éri el a 99%-ot, bár 8 állomás teljesítménye is jobb 96%-nál. Jelenleg a CAT-I az a megközelítési eljárás, amelyhez szükséges pontosságot az EGNOS még nem tudja garantálni. A jobb oldali ábra nem csak a vizsgált napi teljesítményt jellemzi, hanem a rendszer jelenlegi korlátait is mutatja. Az EGNOS fejlesztői a pontosság olyan mértékű növelésén dolgoznak, hogy a rendszert alkalmassá tegyék a CAT-I követelmény teljesítésére is.



12. ábra. Magassági teljesítmény APV-I (balra) és CAT-I (jobbra) megközelítési eljárás esetén

Összefoglalás

A budapesti monitorállomás közel egy éves működése alatt az EGNOS rendszerről kialakult kép még nem meggyőző, hiszen többször tapasztaltuk a rendszer hibáit és hiányosságait. A műholdak gyakran nem sugároztak korrekciókat, esetenként a sugárzott korrekciók megbízhatatlannak bizonyultak.

Két dolgot azonban ne feledjünk: egyrészt az EGNOS még mindig kísérleti jelleggel működik, tehát célunk a hibák és azok okainak keresése, valamint kiküszöbölése. Másrészt augusztus óta a budapesti állomáson az alacsonyabb magassági szög alatt észlelhető PRN 124 (Artemis) műhold jeleit vesszük, tehát a különböző észlelési nehézségek (pl. jelkimaradás) ill. a gyengébb eredmények oka a kis magassági szög is lehet.

Az Eurocontrol hálózatát alkotó állomások mérései alapján az EGNOS rendszer kezdeti eredményei jók, a helymeghatározás a GPS-nél kisebb vízszintes és magassági pozícióhibákkal jellemezhető. Mindez lehetővé teszi az EGNOS alkalmazását a polgári repülés navigációja területén, jelenleg az APV-II megközelítési eljárásig.

Hivatkozások

Ádám J, Ober B, Rózsa Sz, Szűcs L, Takács B (2004): Sitting Report of the BUTE EGNOS/ESTB station. *Dept. of Geodesy and Surveying*, Budapest University of Technology and Economics, Budapest.

Kratochvilla K (2004): Európa műholdas helymeghatározó rendszerei: az EGNOS és a Galileo. *Diplomamunka. BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék*, Budapest.

Ventura-Traveset J (2004): The EGNOS System Architecture Status and Future Plan. *EGNOS Workshop*, Krakow.

EGNOS News. 4, Issue I. (2004). ESA EGNOS *Project Office*.

ALAPPONTMEGHATÁROZÁS RTK-VAL

Busics György[*]

Position-fixing of control points with RTK GPS *- The RTK GPS technology has been applied for detail surveys and staking for a decade. Nowadays this technology gets wide range use in Hungary as well. The evolution of GPS instruments and the infrastructure raise the question of the application of RTK GPS for control point determination. We have known that positive answer can be given that is based on the experiences of the past and the present. In our study we point out that the control, the redundancy and the clear documentation are also the essential conditions of this technology.*

Kulcsszavak: GNSS, RTK, alapponthálózat, alappontsűrítés

Az RTK GPS technológiát egy évtizede kezdték használni a geodéziában részletmérésre és kitűzésre, Magyarországon mostanában kezd szélesebb körben elterjedni a módszer. A GPS műszerek és az infrastruktúra fejlődése felveti azt a jogos kérdést, hogy az RTK alkalmas-e alappontok meghatározására? A múlt és a jelen tapasztalatai alapján erre a kérdésre pozitív válasz adható. Ugyanakkor arra is rámutatunk, hogy az ellenőrzés, a nyomonkövetés és a fölös adatok lehetőségét is meg kell teremteni, ezért nem kerülhető el az utófeldolgozás és dokumentálás biztosítása.

Keywords: GNSS, RTK, geodetic network, control point densification

Bevezetés

Az 1990-es évek elejétől kezdődően a GPS bevonult a hazai alappontsűrítésbe és az egyik leggyakrabban alkalmazott technológiává vált. Elsősorban a GPS statikus és gyors statikus mérési módszere került alkalmazásra, erre vonatkozó szakmai szabályzatok is születtek. A GNSS műszer- és szoftvertechnika fejlődésével valamint a GNSS infrastruktúra bővülésével természetes módon vetődik fel a kérdés a felhasználók részéről: alkalmas-e a félkinematikus illetve az RTK GPS mérési módszer alappontsűrítésre? E cikkben erre a kérdésre szeretnénk válaszolni, de a válasz megalapozásához fontosnak tartjuk a múltbeli technológiák tanulságainak és az alappontokkal szembeni feltételrendszernek az áttekintését is. A kérdés megválaszolásában segítenek az RTK alkalmazásával gyűjtött eddigi gyakorlati tapasztalatok.

A technológia változása a múltbeli alappontmeghatározásoknál

A geodéziai alappontmeghatározás technológiája mindig a kor legmagasabb technikai színvonalát követte, a mérés és számítás módszerei a kor technikai színvonalához igazodtak. Ezt az igaznak vélt megállapítást illusztráljuk néhány példával a magyar vízszintes hálózat történetéből.

A ma használatban lévő vízszintes alapponthálózatunk kiépítése a klasszikus iránymeréses háromszögelés módszerével indult az 1950-es években, mind a felsőrendű, mind a negyedrendű hálózat vonatkozásában. Ennek az volt az oka, hogy abban az időben a szabatos vízszintes mérés szinte egyetlen mérőeszközeként a teodolitot használhatták (néhány alapvonalat mértek csak mérődróttal). A számítás segédeszköze abban az időben a mechanikus számológép volt, ami nem tette lehetővé a nagyméretű hálózatok együttes kiegyenlítését. Ezen a problémán is segített Hazay István ún. domináns pontok módszere, amely fiktív mérések levezetésével kevesebb pontból és adatból álló hálózat számítását kívánta csak meg.

Az 1960-as évek közepén jelentek meg az elektronikus távmérők Magyarországon, amelyek lehetővé tették a negyedrendű alappontmeghatározás tisztán iránymeréses technológiájának felváltását a hosszúoldalú sokszögeléssel. A sokszögelés módszerével jobban lehetett igazodni a terep-

[*]*NyME GEO, 8000 Székesfhérvár, Pirosalma u. 1-3.*
E-mail: bgy@geo.info.hu

adottságokhoz, a vonalas létesítményekhez, kevesebb ideiglenes pontjelre volt szükség, lényegesen nőtt a munka hatékonysága.

Az 1980-as években egy speciális magyar újítás, a létraállvány (más szóval mérőlétra) alkalmazásával a távméréses munkaterületek váltak jellemzővé. Az alumíniumból készült, viszonylag gyorsan szétszedhető és újraépíthető létraállványok a távmérést és a zenitszög mérést tették lehetővé. Az ideiglenes jelépítés és a gyorsan végrehajtható távmérés összességében – a pontossági követelmények feladása nélkül – az előző technológiánál gazdaságosabb munkavégzést eredményezett.

Az 1980-as évektől a személyi számítógépek és a hálózatkiegyenlítő programok megjelenése az irány- és távméréses hálózatok számításában jelentett nagy előrelépést.

1991-től, az első GPS vevők hazai megjelenésétől kezdve, a negyedrendű alappont-meghatározás a statikus GPS mérés technológiájával folytatódott. Az új technológia a mérési munkákat felgyorsította, amire nagy szükség volt a külterületen sürgetően jelentkező kárpótlási, kitűzési igények miatt. A statikus GPS technológia – azzal, hogy nem igényelt pontok közötti összelátást és a mérési idő is lecsökkent – lehetővé tette, hogy több mint 4000 alappont meghatározásával időben elkészüljön az országos negyedrendű alapponthálózat. A negyedrendű alappont-meghatározásnál alkalmazott technológiákat *(Bölcsvölgyi, 2003)* nyomán az *I. táblázat* tekinti át.

I. táblázat. A különböző technológiákkal lefedett negyedrendű munkaterületek százalékos aránya és a pontok becsült száma

Módszer	terület (%)	pontszám (db)
Iránymméréses háromszögelés	18,3	8 600
Hosszúoldalú sokszögelés	27,7	13 000
Távméréses háromszögelés	45,2	21 300
Statikus GPS technika	8,8	4 100
Σ	**100**	**47 000**

A fenti igen vázlatos áttekintéssel csak azt kívántuk jelezni, hogy szakmai elődeink bátran alkalmazták a technikai fejlődés új eszközeit, hogy ezzel is javítsák a hatékonyságot.

Egy új technológia, az RTK GPS

A valós idejű, nagypontosságú kinematikus helymeghatározás (*real time kinematic – RTK*) első műszer-együttese 1994-ben jelent meg, az első magyar tapasztalatokat 1996-ban publikálták *(Borza 1996).* Az RTK GPS vevők és módszerek kifejlesztését az a nyilvánvaló igény ösztönözte, hogy GPS-szel is lehessen cm-es pontosságú kitűzést végezni, ami a geodézia egyik duális feladata a felmérés mellett. A „GPS-korszak" kezdetén a DGPS technika révén legfeljebb méteres pontossággal lehetett a kitűzés-navigáció feladatát megoldani. Az RTK mai fogalmaink szerint valósidejű, kinematikus, cm-es pontosságú (ponthibájú), fázismérésen alapuló műholdas helymeghatározást jelent. A referenciavevőt (bázisvevőt) a WGS84 (ETRS) vonatkoztatási rendszerben ismert ponton kell telepíteni és valamilyen kommunikációs csatornán továbbítania kell a kód- és fázismérés adatait. A mozgó vevő (*rover*) is végez kód- és fázismérést, valamint veszi a bázisvevő adatait és gyakorlatilag azonnal feldolgozza azokat, vagyis számítja a referencia és a rover közötti térbeli vektorokat, amelyeket a referencia ismert koordinátáihoz hozzáadva, meghatározza a rover koordinátáit, transzformáció útján akár rögtön a helyi rendszerben is. Kitűzési feladat esetén a mozgó vevőhöz tartozó vezérlőegységben (*terminal, controller*) célszoftver segíti a ponthely megtalálását: a pillanatnyi helyzetet és egy kiválasztott tájékozó irányt alapvonalnak véve, akár poláris, akár ortogonális rendszerben láthatjuk a célpont kitűzési paramétereit.

Az elmúlt évtizedben az RTK technológia nagy fejlődésen ment keresztül, ennek csak néhány fontosabb jellemzőjét kívánjuk (műszertől függetlenül) kiemelni.

Az inicializálási idő lényegesen csökkent. Ismeretes, hogy a fázismérésen alapuló kinematikus módszerek közös problémája a fázistöbbértelműség feloldása egész számként. Az RTK esetében erre praktikus okokból csak a menet közbeni (*on the fly–OTF*) inicializálás alkalmas. Ennek

szükséges minimális időtartama kezdetben több perc volt (régebbi egyfrekvenciás műszereknél az öt percet is elérte), ma ez 30 másodperc alá csökkent. Ez a szoftverek fejlődésének köszönhető, mint ahogyan szoftverfejlesztés eredménye a meghatározás biztonságának javulása is.

Növekedett a relatív helymeghatározás pontossága, a kezdeti 2-3 cm-ről 1 cm-re. Növekedett az a bázistávolság is, amelyen a szoftver képes egész számú (fix) megoldásként számítani a fázistöbbértelműséget: ez régebben 15 km volt, ma 40 km fölött is lehet.

Lényeges változás következett be a kommunikációs csatornák, adattovábbítási lehetőségek választékában. A kezdeti RTK rendszerek része csak egy saját rádióadó volt a bázisnál illetve egy saját rádióvevő a mozgó vevőnél. A rádióadó teljesítménye korlátozott volt, így vételkörzete csak néhány kilométerre szűkült. Ezt a hatótávolságot tovább korlátozták a rádióadás vételét kedvezőtlenül befolyásoló terepadottságok (hegyek, dombok, katlanok). E tekintetben a mobiltelfonok (GSM hálózat) jelentik a távközlési korlátok megszűnését illetve a saját rádiójel vétele hiányában a kiegészítő adattovábbítási csatornát. Az Internet, mint adattovábbítási csatorna további lehetőségeket jelent, terepi körülmények között ehhez is szükséges azonban a GPRS mobil kapcsolat.

A GNSS infrastruktúra *(Ádám et al. 2004)* megteremtése, fejlesztése az RTK technológiára is hatással van. A permanens állomások hálózatának kiépítése szükségtelenné teszi a saját bázis üzemeltetését, de további előnyökkel is jár. Amennyiben a permanens állomások hálózatban működnek, lehetővé válik több állomás adatainak felhasználása, ami a meghatározás biztonságát (integritását), pontosságát növelheti vagy a referenciától való eltávolodást (a maximális bázistávolságot) növelheti. A hálózatban való működés feltételezi egy központi állomás jelenlétét, ahol nemcsak a különböző állomások adatainak összegyűjtése, hanem a felhasználók földrajzi helyzetétől függő modellezése, a korrekciós adatok helytől függő sugárzása is megvalósul. Az EUPOS projekt célkitűzése olyan hardver- és szoftver környezet kidolgozása, amely az egy vevővel történő, cm pontosságú RTK mérést is támogatja.

Az RTK rendszerek kényelmi szolgáltatásai is fejlődtek: így például egyes vevőknél vezeték nélküli (*bluetooth*) kapcsolat létesíthető a GPS antenna és a vezérlőegység között; a kijelzőn háttértérkép jeleníthető meg; a navigációt hangos utasítás is támogatja; az egész egység integrált és könnyű; intelligens adatátvitel valósítható meg a GPS egység és egy mérőállomás között.

Az RTK, mint kinematikus típusú mérés, lehet folyamatos (útvonalmérés) illetve félkinematikus (amikor a diszkrét, pontokat a terepen azonosítjuk) – alappontok esetében természetesen csak ez utóbbi módszer jöhet szóba.

A fenti vázlatos áttekintéssel arra kívántunk rávilágítani, hogy az RTK technológia biztosíthatja a cm-es pontosságot, akár az eddiginél nagyobb bázistávolság esetén is.

A geodéziai alappontokkal szemben támasztott követelmények, és azok érvényesítése az RTK esetében

Az alappontokkal szembeni általános követelmények a következő 10 pontban foglalhatók össze.

1. Kicsi azonosítási hiba terheli.
2. Fölös számú méréssel van meghatározva.
3. Az adott pontok ugyanahhoz a vonatkoztatási rendszerhez tartoznak.
4. Helymeghatározó adatai nagy pontossággal ismertek.
5. A mérések mindegyike hibahatáron belül van.
6. A mérés és számítás folyamata jól dokumentált.
7. Állandó módon van megjelölve.
8. Mozdulatlannak tekinthető.
9. Magasabb rendű (esetleg azonos rendű) pontokból származik.
10. A koordinátaszámítás számszerű eljárással, az összes mérés figyelembevételével történt.

Nézzük meg e 10 követelmény közül az első hatnak az értelmezését az RTK esetében, mivel az utóbbi négy követelmény kevésbé függ a meghatározás módjától.

A kicsi azonosítási hiba az RTK módszernél nemcsak azt jelenti, hogy a pont egyértelmű módon van megjelölve, hanem azt is, hogy a pontraállás is egyértelmű, szabatos. A szokásos RTK

részletmérésnél a mozgó vevőt tartórúdon helyezik el és a kézben tartott rudat teszik a pontra. Alappont esetén a szabadon tartott antennarúd nem fogadható el, azt feltétlenül ki kell támasztani a megállás, pontraállás alkalmával. Nagyon fontos a tartórúd libellájának igazított volta. Tartórúd helyett természetesen műszerállvány is alkalmazható, de így a pontraállás és szállítás időveszteséget jelent. Ideális megoldásnak tekinthető, ha a pontjel a ma gyakran alkalmazott műanyag fejű fémcső *(2. ábra)*, az antennát pedig tartórúdon helyezzük el, így a pontraállás a tartórúd fémcsőbe helyezésével, majd kitámasztásával egyértelműen és gyorsan megoldható. Gondoskodni kell viszont a pontjel magasságának helyes értelmezéséről.

A fölös adat szükségessége azt jelenti, hogy a szokásos RTK mérés nem felel meg az alappontmeghatározás feltételeinek. A szokásos RTK esetében ugyanis egyetlen referenciapontról térbeli poláris pontként határozzuk meg a mozgó vevő helyzetét, ami síkban poláris pontnak felelne meg, ahol nincs fölös adat. A fölös adat kívánalma azt is jelenti, hogy több adott pontra kell támaszkodnia a meghatározásnak. A gyakorlatban ez azzal jár például, hogy két referenciavevőt telepítenek és a mozgó vevő időosztásos módban, felváltva veszi és értékeli a két referencia adatait. Bár ez a megoldás a mai műszerekkel teljesíthető, de a nyilvánvaló költségigény miatt egyelőre nem életszerű. Sokkal valószínűbb, hogy a második bázisvevőt a meglévő közeli permanens állomások közül választjuk ki, akár real-time, akár utólag feldolgozva annak adatait. Az EUPOS projekt megvalósulásakor több referenciaállomás adatait tudjuk valós időben feldolgozni és ez a feltétel az aktív hálózatra építve teljesíthető lesz. A fölös adatok biztosításának további lehetőségét jelenti a hagyományos irány- és távmérések bevonása a számításba. Ez a mai viszonyok között utófeldolgozást feltételez, azonban alappontok esetében az utófeldolgozás természetes, hiszen a dokumentálás követelménye ezt mindenképp igényli. A pontraállások függetlenségét kétszeri bejárással, időben elkülönülő pontraállással biztosíthatjuk.

A vonatkoztatási rendszer azonosságát az RTK esetében úgy értelmezzük, hogy a mérés és a térbeli kiegyenlítés WGS84 rendszerben történik, majd csak a folyamat legvégén térünk át helyi rendszerre. A mai szoftverek lehetővé teszik, hogy a munkaterület transzformációs paramétereinek megadása után látszólag helyi rendszerben dolgozzunk, ezt azonban ne tegyük, mert a mérés kiértékelése mindenképp WGS84 rendszerben történik s a két rendszer váltogatása zavarokat és ellentmondásokat okoz. Tegyük fel, például, hogy két adott OGPSH pontról határozunk meg egy új pontot RTK GPS-szel úgy, hogy az adott pontoknak csak az EOV koordinátáit adjuk meg továbbá a munkaterület transzformációs paramétereit. A szoftver előbb az adott pontokat EOV-ből WGS rendszerbe számítja át, hiszen a mért vektorokat csak ilyen rendszerben képes értelmezni. Az átszámításkor nem kapjuk meg az adott pontok eredeti, WGS84-rendszerű koordinátáit a kerethibák illetve transzformációs maradék hibák miatt. Így nem ugyanaz lesz az új pont WGS84 koordinátája, mintha az adott pontok WGS koordinátáiból indultunk volna ki…

A geodéziai alappontok pontossági kategóriáit szakmai szabályzatok adják meg. A felmérési alappontok esetében például 3 cm-es ponthiba az előírás, amibe a transzformáció hibája is beleértendő. Ebből következően olyan RTK módszert és szoftvert kell választani, a bázistávolságot is úgy kell meghatározni, hogy a vektor-meghatározás pontossága 1 cm körüli érték legyen, ami a legújabb szoftverekkel teljesíthető. A GPS mérések hibahatárai ma még nem, vagy nem teljeskörűen kidolgozottak. A szakmai szabályozás feladata a hibahatárok olyan megadása, amelyek mellett a végeredmény pontossága megfelelő lesz.

Alappontmeghatározás esetében a mérés és a számítás folyamatának nyomonkövethetősége, reprodukálhatósága fontos követelmény, ezért kívánjuk meg például a mérési eredmények megőrzését, az összes beavatkozás dokumentálását. Ebből következik, hogy a szokásos RTK-dokumentáció, amennyiben az csak a végeredmény (koordináta-jegyzék és ponthiba) megadására szorítkozna, – nem fogadható el. Semmi akadálya nem lehet azonban annak, hogy az eredeti mérési eredményeket tároljuk, minden beavatkozást (bevitt koordinátákat, antennamagasságokat, transzformációkat) dokumentáljunk, így a számítás bármikor megismételhető legyen. Ez voltaképpen utófeldolgozást jelent, de ez nem valójában okozhat lényeges többletmunkát.

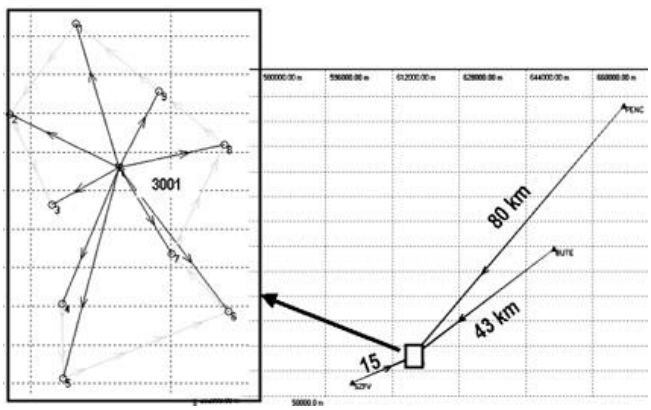
A hagyományos földi pontsűrítéshez képest az RTK előnye, hogy nincs szükség összelátásra az adott pont és az új pont között továbbá ez a távolság akár több tíz kilométeres is lehet.

A statikus GPS pontsűrítéshez képest az RTK előnye, hogy azonnali ellenőrzésre van lehetőség a terepen, mert látjuk a meghatározás minőségét (ponthibáját). Ennek a visszajelzésnek azért van nagy jelentősége, mert a fázistöbbértelműség meghatározása (a műholdgeometria, a takarás miatt) rendszerint nehézségekkel jár, s ha ezzel már a mérés során szembesülünk, elkerülhetjük a pótméréseket. A másik kiemelhető előny a statikus méréshez képest, a rendkívül rövid mérési időtartam, ami az OTF inicializálásnak köszönhető.

Az RTK előnyei végeredményben a pontmeghatározás gazdaságosságát növelik. Alappontok esetében meg kell felelni azoknak a követelményeknek is, amelyeket fentebb megfogalmaztunk.

Alappontsűrítés RTK módszerrel egy konkrét munkaterületen

Az RTK alappontsűrítési alkalmazhatóságára, az elérhető pontosságra egy sukorói munkaterületen végeztünk méréseket. A munkaterületen a főiskolai terepgyakorlatok során 9 pontot (1-9 jelűeket) fémcsővel, egyet (3001) kővel (benne hilti szeggel) állandósítottunk. A pontok dombos, nyílt, GPS mérésre alkalmas terepen, néhány száz méteres körzetben helyezkednek el *(1. ábra)*. Régebbi mérések során a 3001-es pontot bekapcsoltuk az OGPSH rendszerébe, 6 közös pont alapján meghatároztuk a munkaterület transzformációs paramétereit. A 3001-es pont GPS-mérésből transzformált EOV-koordinátái és más ismert pontok alapján irány- és távmérésekkel a 9 pont EOV koordinátáit egy kötött, szabatos, vízszintes hálózatban kiegyenlítettük. Ezeket a vízszintes koordinátákat a továbbiakban viszonyító (hibátlan) pontként fogadtuk el.



1. ábra. A munkaterület pontjainak valamint néhány „közeli" referenciapont (SZFV, BUTE, PENC) elhelyezkedése

Összesen öt RTK mérésre, öt független bejárásra került sor, ezeket római számokkal jelöljük a továbbiakban. Az I. mérés időpontja 2004. szeptember 2-a, a II. és II. mérésé szeptember 3-a; ezeken a napokon a referenciavevő a 3001-es ponton üzemelt. A IV. és V. mérésre szeptember 27-én került sor, itt a referenciavevő a pákozdi emlékműnél lévő 54-2441-es negyedrendű ponton volt (fejelőkövön). Az első négy bejárás során a mozgó vevő folyamatos bekapcsolt állapotában, gyalogosan kerestük fel a pontokat, itt az útvonalbejárás során általában nem volt jelvesztés a nyílt terepnek köszönhetően. A bejárás kb. egy órát vett igénybe, magán a ponton (kitámasztással, igazított libellával történt gondos pontraállás után) a mérés 30 másodperces volt. Az V. számú mérés esetében az útvonalbejárás kikapcsolt műszerrel történt, azt a gyakorlati helyzetet feltételezve, hogy a zavart, takart környezet nem teszi lehetővé a GPS mérést, vagy pedig nagy a távolság a mérendő alappontok között. Ez esetben a műszert csak közvetlenül a pontraállás előtt kapcsoltuk be, a kinematikus mérés teljes időtartama pontonként kb. 2-3 perc volt.

A mérésekre jó műholdgeometria mellett, jellemzően 8 hold észlelésével került sor. A mérésekhez két darab Leica GPS 530-as műszert használtunk, saját rádióadóval illetve vevővel, a feldolgozást Leica SKI Pro 2.0 illetve 3.0 verziójú szoftverrel végeztük. Végeredményként a mért pontok transzformált EOV koordinátáit és EOMA magasságait, valamint azok középhibáit kaptuk. Nem-

csak ezeket az adatokat tároltuk, hanem az eredeti méréseket is, így az utófeldolgozás is lehetővé vált. Ugyanazon referenciapontból kiindulva valós időben és utólag ugyanazt az eredményt kapjuk.

2. ábra. Az antenna elhelyezése tartórúdon és a fémcső pontjel

Az utófeldolgozáshoz felhasználtuk még a munkaterülettől 15 km-re lévő székesfehérvári permanens állomás (SZFV), a 43 km-re lévő budapesti (BUTE), a 80 km-re lévő penci (PENC), a 116 km-re lévő kaposvári (KAPO) és a 141 km-re lévő zalaegerszegi (ZALA) permanens állomás adatait.

Az ismételt méréseket többféle módon értékeltük ki, azzal a céllal, hogy

1. az elérhető pontosságra következtessünk,
2. megbecsüljük a maximális bázistávolságot és a minimális mérési időtartamot különböző szoftverek esetén,
3. kialakítsunk egy optimális technológiát.

Az utófeldolgozás során a különböző referenciapontokhoz képest, a szokásos paraméterekkel kiértékeltük a GPS vektorokat, csak azt elfogadva, ahol a fázistöbbértelműség egész számként volt meghatározható. Hangsúlyozzuk, így ugyanazt az eredményt kapjuk, amit hasonló paraméterekkel, real-time, mobiltelefonos modemmel kapnánk; az utófeldolgozás így a GSM-modemes RTK módszert modellezi. A transzformációt minden esetben ugyanazokkal a térbeli hasonlósági paraméterekkel végeztük. A 9 vizsgálati pont így kapott EOV koordinátáit kivontuk a földi mérésből ismert koordinátákból. A koordináta-eltérések abszolút értékeit átlagoltuk, ezeket a mérést jellemző átlagokat mutatjuk be a *II. és a III. táblázat*ban.

II. táblázat. A földi hálózathoz viszonyított koordináta-eltérések abszolút értékeinek átlaga, egyetlen referenciapont esetén mm egységben. A kiegyenlített hálózat (kiegy) adott pontjai a SZFV és BUTE állomások

mérés sorszáma	RTK		SZFV		BUTE		kiegy	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx
I.	3	10	11	5	17	37	18	23
II.	6	9	15	25	8	36	8	29
III.	4	6	17	14	10	10	14	10
IV.	18	16	17	15	7	10	15	13
V.	20	17	13	16	5	21	12	16

A *II. táblázat* az RTK mérések összesített eredményét, valamint a munkaterülettől legfeljebb 50 km-re elhelyezkedő permanens állomásokhoz viszonyított, egyenkénti utófeldolgozás eredményét tartalmazza. Csak a vízszintes értelmű koordináta-eltéréseket tüntettük fel. A táblázatban szereplő számadatok a 9 vizsgálati pontnál tapasztalt eltérések abszolút értékeinek átlagértékei. A bázistávolság növekedésével nőnek az eltérések, de általában nem haladják meg a 3 cm-t. A táblázat utolsó két oszlopa azokat az eltéréseket tartalmazza, amelyeket a saját bázisállomás kihagyásával, csak a SZFV illetve BUTE állomások felhasználásával kaptunk.

III. táblázat. A földi hálózathoz viszonyított koordináta-eltérések abszolút értékeinek átlaga, egyetlen referenciapont esetén mm egységben. A kiegyenlített hálózat adott pontjai a PENC, KAPO és ZALA állomások.

mérés sorszáma	PENC		KAPO		ZALA		kiegy	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx	dy	dx
I.	24	26	5	29	5	29	7	23
II.	27	29	8	36	17	13	18	23
III.	34	25	26	49	5	41	26	26
IV.	33	33	6	24	8	19	13	22
V.	29	34	8	27	7	25	10	32
átlag	**29**	**29**	**11**	**33**	**8**	**25**	**15**	**25**

A *III. táblázat*ot érdekességként állítottuk össze, azt érzékeltetve, hogy fázismérés felhasználásával, megfelelő szoftverrel, az 50 km-nél távolabbi permanens állomások adataival is elérhető néhány cm-es pontosság. Az utolsó két oszlop adatai kizárólag a három távoli permanens állomásról számított és együttesen kiegyenlített koordinátákból származnak. A meglepően jó eredmények az SKI 3.0 szoftvernek köszönhetők, amely 2004-ben jelent meg. Korábban, az SKI 2.0 szoftverrel ilyen hosszú kinematikus vektorok esetében nem lehetett fix megoldást elérni. Most csak az V. számú, mindössze kétperces mérések esetében a legtávolabbi (ZALA) adott pontról nem lehetett öt vektort kiértékelni, az összes többit igen.

Az összefoglaló táblázatok azt mutatják, hogy a gondosan végzett félkinematikus méréssel akár 50 km-es bázistávolságnál is tartani lehet a 2 cm-es pontosságot.

Az optimális technológia kialakítását elsősorban az adott körülmények befolyásolják, annak kiválasztása mindig a felmérést irányító mérnök feladata. Itt csupán ajánlásokat teszünk a fölös adatok biztosítására. E tekintetben jelenleg a következő lehetőségek közül választhatunk:

1. Kétszer keressük fel a mérendő pontokat. Ez azt jelenti, hogy két független pontraállást végzünk, vagyis a pontraállás és az antenna-magasságmérés is ellenőrzött lesz. A kétszeri mérésnél más-más referenciát használunk fel, ezzel biztosítjuk a két adott ponthoz való csatlakozás követelményét. A kétszeri bejárás idő- és költségigénye természetesen nagyobb, mintha csak egyszer keressük fel a pontokat, de így is termelékenyebb, mint a statikus módszer. A gazdaságosságot megfelelő munkaszervezéssel, logisztikával növelhetjük. A saját munkaterületünkön példaként a III. és IV. számú méréseket dolgoztuk fel együttesen, hálózatkiegyenlítéssel, a két legközelebbi referenciapont (3001 és SZFV) mellett. Az eredményeket, vagyis a 9 vizsgálati pont koordináta-eltéréseit a IV. táblázat 2. és 3. oszlopa tartalmazza.
2. Másik lehetőség, hogy a saját referenciaállomás mellett még további, a munkaterülethez közeli egy vagy több permanens állomás adatait is felhasználjuk, és utófeldolgozással, kiegyenlítéssel kapjuk meg a végleges koordinátákat. Esetünkben, példaként az I. számú RTK mérés adatait nemcsak a 3001-es saját bázisállomás alapján, hanem az SZFV permanens állomás bevonásával is feldolgoztuk és kiegyenlítettük. Az eredmény a IV. táblázat 4. és 5. oszlopában látható.

3. További lehetőség a fölös adatok biztosítására, hogy az RTK mérésből származó koordinátákat földi irány- és távmérésekkel egészítjük ki. A kétféle hálózat közös számítására többféle megoldás alkalmazható, amit a terepi mérési, összelátási körülmények tovább árnyalnak. Alapelvként érdemes figyelembe venni, hogy a kiegészítő földi mérések ne csak ellenőrzésre szolgáljanak, hanem a végleges koordinátaszámításban is részt vegyenek. A saját munkaterületünkön példaként a III. számú RTK mérésből kapott EOV koordinátákat egy vízszintes szabad hálózat előzetes koordinátáinak tekintettük, kiegyenlítettük a földi irány- és távméréseket, így kaptuk meg a vizsgálati pontok végleges koordinátáit. Az összehasonlítás eredményét a *IV. táblázat* utolsó két oszlopa tartalmazza.

IV. táblázat. A földi hálózathoz viszonyított koordináta-eltérések a 9 vizsgálati pontnál mm egységben, több mérés egyesítése esetén.

pont száma	III. + IV.		RTK+SZFV		RTK+földi	
	dy	dx	dy	dx	dy	dx
1	-1	2	-2	7	0	5
2	2	4	9	15	0	5
3	2	2	-1	10	-1	5
4	3	8	-2	10	-1	6
5	9	8	5	11	-2	6
6	-1	-2	0	6	0	4
7	-2	5	0	2	0	5
8	15	6	2	10	-1	4
9	0	8	1	13	-1	3
absz átlag	**4**	**5**	**3**	**10**	**1**	**5**

Összefoglalás

Az RTK GPS technológia eddigi geodéziai alkalmazása főként részletmérésre és kitűzésre, ritkán mozgásvizsgálatra irányult. Az RTK alappontsűrítési célra való felhasználásához elsősorban a szabatos pontraállást, a fölös adatok biztosítását és a megfelelő dokumentálást kell megoldani. A fölös adatok lehetősége már ma is adott: a meglévő permanens állomások további referenciapontként szolgálnak a saját bázisállomás mellett. Bemutattuk, hogy a fázismérések utófeldolgozásával az eddig megszokott 15-20 km-es bázistávolságoknál lényegesen nagyobb hosszak esetén is elérhető az ún. fix megoldás megfelelő szoftver esetén. A jövőben, az EUPOS program valóra váltásakor, a GNSS infrastruktúra harmadik generációjával a hálózatban történő tényleges valós idejű kiértékelés is megoldható lesz.

Az RTK, mint valós idejű, félkinematikus módszer nagyon rövid idő alatt, viszonylag hosszú vektorok megfelelő pontosságú meghatározását teszi lehetővé, így hatékonyan segítheti az alappontsűrítési munkálatokat is. A technológiához kapcsolódó feltételek meghatározására és a megfelelő szakmai szabályozásra azonban ez esetben is szükség van.

Hivatkozások

Ádám-Bányai-Borza-Busics-Kenyeres-Krauter-Takács (2004): Műholdas helymeghatározás. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Borza T (1996): Az első cm-pontosságú valós idejű kinematikus GPS-technika Magyarországon. *Geodézia és Kartográfia*, 2, 24-29.

Bölcsvölgyi F (2003): Az új negyedrendű vízszintes alapponthálózat létrehozása. *Geodézia és Kartográfia*, 11, 12-28.

ABSZOLÚT ANTENNAKALIBRÁLÁSI ADATOK FELHASZNÁLÁSA GEODINAMIKAI HÁLÓZATOKBAN

Rózsa Szabolcs[*]

Absolute antenna calibration in geodynamic networks *- At the processing of GPS geodynamic networks the use of relative antenna phase centre variation (PCV) models is the standard. Different test computations however proved that the application of such antenna PCV models may introduce significant discrepancies in the coordinate time series.*
Additionally the set of standard antenna models published by the IGS (International GPS Service) or the NGS (US National Geodetic Survey) do not contain PCV models for antennae equipped with weather dome.

Since the absolute PCV calibration results of several antennae are available we performed test computations in a GPS geodynamic network to assess the error budget of the antenna PCV mismodeling.

The computations proved that the inconsistencies caused by the relative PCV models may reach the 1 cm level in the horizontal coordinate components. Moreover the Trimble weather dome has also a great impact on the derived position. The error in the vertical coordinate component reaches the level of 3,5 cm.

The investigations proved that all of these errors can be significantly reduced by using absolute antenna calibration results.

Keywords: GPS, antenna calibration, geodynamics

A geodinamikai célú GPS mérések feldolgozása során általánosan elfogadott eljárás az ún. standard antennamodellek alkalmazása, amelyek a GPS antennák fáziscentrumának külpontosságát, illetve annak változásait egy-egy antennatípusra állandónak tekintik. A cikkben közölt vizsgálatok arra mutatnak rá, hogy ezeknek az antennamodelleknek az alkalmazása jelentős hibákat okozhat a nagypontosságú GPS technikán alapuló helymeghatározásban.

A nemzetközi IGS szolgálat (International GPS Service) és az amerikai NGS (National Geodetic Survey) által közölt standard antennamodellek geodinamikai hálózatokban történő alkalmazásának azonban van még egy hátránya, nevezetesen az, hogy nem tartalmazzák a permanens állomásoknál gyakran alkalmazott időjárásvédő kupolák hatását.

A jelen cikkben bemutatandó geodinamikai hálózatban lehetőség nyílt mindkét hibahatás vizsgálatára, mivel több antenna abszolút kalibrálási adatai is rendelkezésünkre álltak.

A vizsgálatok azt mutatták, hogy a standard antennamodellek alkalmazása akár 1 cm-es vízszintes koordináta-hibákat is okozhat. A Trimble cég által gyártott kúp alakú időjárásvédő kupola szintén jelentősen befolyásolta a GPS mérésekből meghatározott koordinátákat. A magasság értékében a kupola okozta hiba elérte a 3,5 cm-t.

A vizsgálatok rámutattak, hogy ezek a hibák jelentős mértékben csökkenthetők az abszolút antennakalibrálási adatok felhasználásával.

Kulcsszavak: GPS, antennakalibrálás, geodinamika

Bevezetés

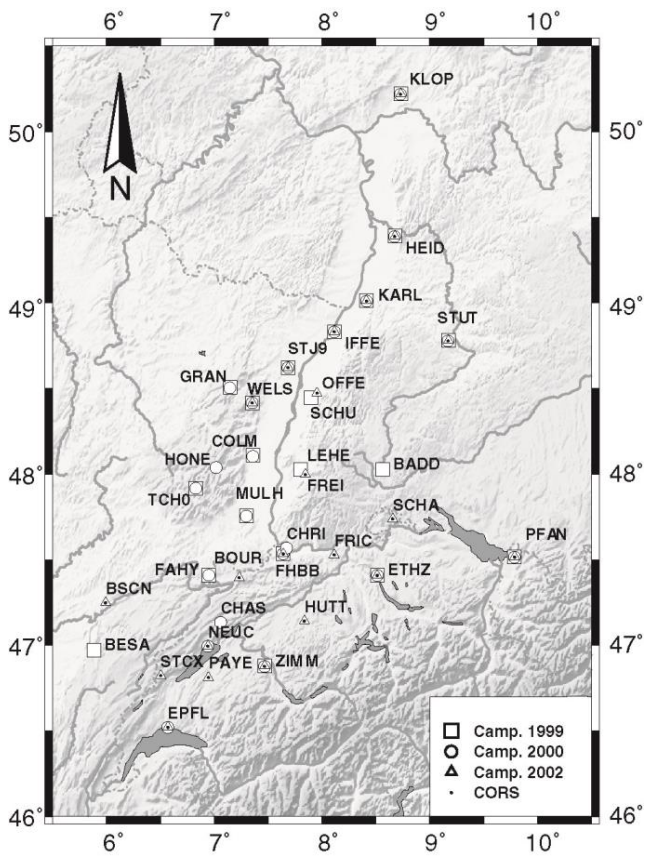
A Rajna-árok felső szakaszának mozgásvizsgálati hálózatában (*1. ábra*) az ún. kampány-állomások mellett több permanens állomás is szerepel. Ezek a permanens állomások a három szomszédos ország (Franciaország, Németország és Svájc) GPS hálózatainak részei (Németország – SAPOS, Svájc – AGNES, Franciaország - RGP, REGAL). A rendelkezésünkre álló információk alapján a vizsgált területen meglehetősen kis mértékű kéregmozgások várhatók, ezek nagyságrendje nem

[*]*BME Általános-, és Felsőgeodézia Tanszék, BME/MTA Fizikiai Geodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport*
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 1-3.
E-mail: szrozsa@sci.fgt.bme.hu

haladja meg az 1mm/év értéket *(Rózsa et al. 2004)*. A GPS technikával történő helymeghatározás során nagyon gondosan kell eljárnunk, hogy ezeket a mozgásokat is ki tudjuk mutatni.

A pontossági igényeknek megfelelően a mérési kampányokat mindig az év azonos időszakában végeztük, emellett ügyeltünk arra, hogy ugyanazon a ponton mindig ugyanaz a vevő és antenna mérjen minden alkalommal. Az utóbbi feltételt azonban csak korlátozottan lehetett érvényesíteni, mivel a hálózatban permanens állomások is szerepeltek, amelyeken a rendszeres karbantartás és fejlesztés során esetenként antennacseréket is végrehajtanak. Ez történt a hálózat két állomásán is, a KARL (Karlsruhe) és a KLOP (Kloppenheim) állomásokon, amelyek nem csak a SAPOS (Satellite Positioning Service) hálózatának, hanem az EUREF hálózatának is pontjai. A jelen cikkben közölt vizsgálatok ennek a két állomásnak az antennáira vonatkoznak.

A relatív fáziscentrum vándorlási modellek (a továbbiakban FCV) problémája évek óta ismert. Az IGS legalább két éve tervezi az abszolút modellek bevezetését, azonban az ez által okozandó globális skálaugrás kompenzációja miatt a GPS holdak antennáira is új, konzisztens modelleket kell bevezetni. A modellek tesztelése lezárulóban van, előreláthatóan 2005-ben bevezetésük megoldja a jövőbeni problémákat.



1. ábra. A Rajna-árok felső részének geodinamikai GPS hálózata

GPS adatok feldolgozása

A GPS mérések L3 ionoszféra-mentes lineáris kombinációját dolgoztuk fel IGS precíz végleges pályaelemeket felhasználva a Bernese 4.2 feldolgozó szoftverrel *(Hugentobler et al., 2001)*. A ciklustöbbértelműség feloldásához a szigma algoritmust alkalmaztuk, a troposzféra okozta zenitirányú késést pedig 2 órás intervallumokban becsültük a mérési adatok felhasználásával. A napi mérések

feldolgozása után a megoldásokat egy-egy hétre vonatkozóan együttesen is kiegyenlítettük, így heti megoldásokhoz jutottunk.

Az antennák fáziscentrumainak külpontosságát és annak vándorlását általában az NGS által közölt modellekkel írtuk le, azokban az esetekben, amikor más antennamodelleket alkalmaztunk, a cikkben hivatkozni fogunk rájuk.

A fáziscentrum külpontossága és annak vándorlása

A fáziscentrum a vevőantenna vonatkozási pontja, a műhold-vevő távolság vevőoldali elméleti végpontja. A fáziscentrum vízszintes külpontossága azt jelenti, hogy ez a pont nincs az antenna geometriai tengelyén, azon a mérés idejére függőlegessé tett egyenesen, amelynek meghosszabbítása átmegy a mérésre kijelölt műszerálláspont terepi megjelölésén. A magassági külpontosság azt jelenti, hogy a fáziscentrum nincs az antennaburkolaton vonatkozási pontként megjelölt ponton átmenő és a geometriai tengelyre merőleges síkban.

A külpontosság figyelembevételét megnehezíti, hogy a nagysága nem csak műszertípusonként, hanem sok esetben műszerpéldányonként is eltérő lehet. Emellett függ a vett jel frekvenciájától, sőt a beérkező jel magassági szögétől és azimutjától is, tehát a mérés közben vándorolhat *(Ádám et. al, 2004)*.

A fáziscentrum külpontossága és annak vándorlása a vevőantenna kalibrálásával határozható meg. Abszolút kalibráláskor az antennába érkező jelek beesési irányát (azimutját és magassági szögét) program szerint változtatják a robotkarra szerelt vevőantenna három, egymásra kölcsönösen merőleges tengely körüli forgatásával. A Hannoveri Egyetem Geodéziai Intézete (IfE) a Geo++ társasággal közösen évek óta végez abszolút antennakalibrálást a SAPOS állomások részére *(Stöger, 2002)*. A *2. ábrán* a KARL EUREF állomás TRM22020.00 antennájának abszolút kalibrálással meghatározott fáziscentrum vándorlását láthatjuk az L1 és L2 frekvenciákra vonatkozóan.

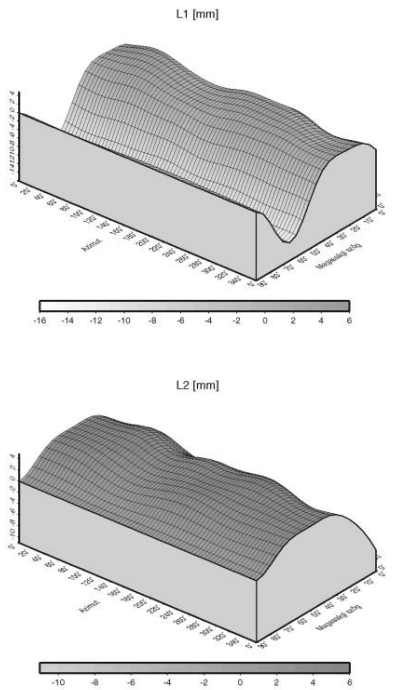
Relatív kalibráláskor az antennát egy ún. null-antennával használják együtt relatív mérési elrendezésben. A null-antenna egy abszolút kalibráláson átesett, stabil fáziscentrummal rendelkező GPS-antenna (mind az IGS, mind az NGS AOA Dorne/Margolin típusú antennát használ null-antennaként). A vizsgált és a null-antenna fáziscentruma helyzetének/vándorlásának különbségéből levezethető a kalibrálandó antenna fáziscentrumának relatív helyzete és relatív vándorlása.

Az IGS és az NGS által közölt antenna-modellek antennatípusokra vonatkozóan adják meg a fáziscentrum helyzetét a vett jel L1, L2 frekvenciája, a magassági szög, valamint 2000 óta az azimut függvényében. Az egyedi sajátosságokat illetően megállapítható, hogy a fáziscentrum külpontosság szórása ± 1-2 mm-re tehető a korábban kifejlesztett Trimble TRM 22020, míg ± 0,2 mm az újabb Trimble TRM 29659.00 típusú "choke-ring" antennákra vonatkozóan.

A teljesség kedvéért meg kell jegyeznünk, hogy a szabatos meghatározás eredményét a műholdak (adó)antennái fáziscentrumának külpontossága is befolyásolja; erre nézve mind az IGS, mind az NGS közöl adatokat.

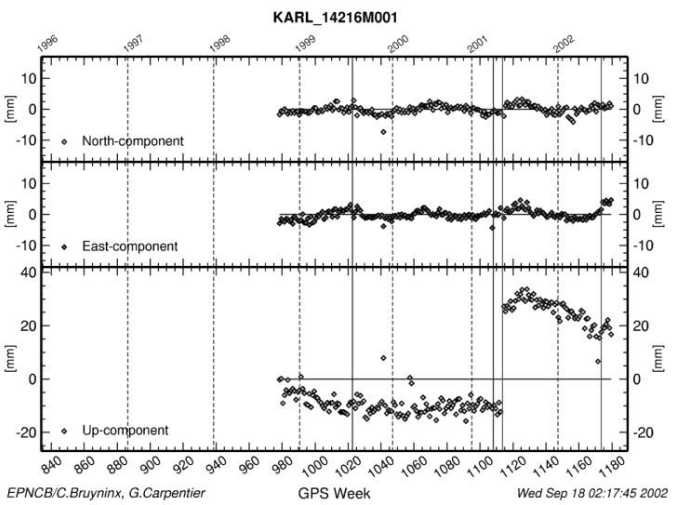
Az antennacserék hatása a hálózatban

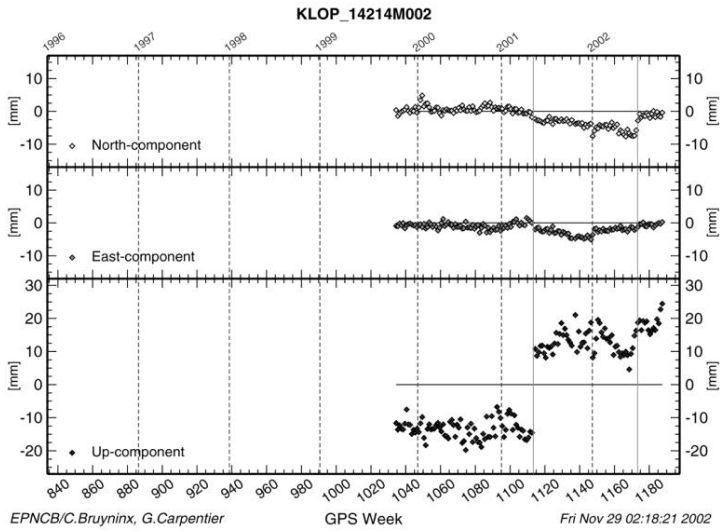
A fáziscentrum külpontosságának és vándorlásának hibás modellezése következtében a különféle antennákkal végzett mérések más-más koordináta-megoldásokat szolgáltatnak. Emiatt egyazon mozgásvizsgálati ponton ugyanazon antennával kell végezni a méréseket, és – amennyiben ez kivitelezhető – a hálózat összes pontján egyforma mérési felszereléssel kell mérni *(Langley, 1998)*. Abban az esetben, ha a relatív úton meghatározott antennamodellek helyesek, akkor az alkalmazásuk csak nagyon kis méretarány hibát eredményez *(Springer, 1999)*.



2. ábra. A fáziscentrum vándorlása az L1 és L2 frekvencián a TRM22020.00 antenna esetén.

Az azonos antennatípusok alkalmazásának követelményét nem csak a globális és regionális hálózatok, de a különböző mérési kampányok esetében sem lehet garantálni. Előfordulhat olyan eset, amikor valamilyen műszaki vagy egyéb okból le kell cserélni a GPS antennákat. Abban az esetben, ha az antennák nem voltak egyedileg kalibrálva, és a relatív antennamodellek nem írják le megfelelően a fáziscentrum külpontosságát és annak vándorlását, akkor az antennacsere előtti és az azt követő koordináta-megoldások között jelentős eltérés is lehet. A *3. ábrán* a KARL és a KLOP állomások EUREF által meghatározott koordináta idősorait mutatjuk be. Jól látható, hogy 2001 májusában több centiméteres változás mutatkozik a vertikális koordinátakomponensben mindkét állomáson, ezen felül a vízszintes koordinátákban is megfigyelhető néhány milliméteres változás (*3. ábra*).





3. ábra. KARL és KLOP állomások koordinátáinak EUREF idősorai *(Kenyeres et al. 2002)*

2001 májusában mindkét állomáson antennacserét hajtottak végre. A korábbi antennák Trimble 22020.00 típusú antennák voltak árnyékoló lemezzel és időjárásvédő kupolával, amelyeket Trimble 29659.00 "choke-ring" típusú antennákra cseréltek le és ezeket már nem szerelték fel időjárásvédő kupolával. Mivel sem az IGS sem az NGS a relatív antennakalibrálás során nem használ időjárásvédő kupolát, felmerült a kérdés, hogy az időjárásvédő kupola eltávolítása okozhatja-e ezeket a koordinátakülönbségeket. A koordináta eltéréseket *Kenyeres et al. (2002)* határozta meg az antennacsere előtti és utáni 33 hét mérési eredményeinek feldolgozásából, az eredmények az *I. táblázatban* találhatók.

I. táblázat. Az antennacsere okozta koordináta-ugrások a KARL és a KLOP állomásokon heti megoldásokból [m]

	északi	**keleti**	**magassági**
KARL	0,0020	0,0020	0,0380
KLOP	-0,0040	-0,0020	0,0344

Az antennacsere okozta hatások vizsgálatához, az antennacsere előtti és utáni 1-1 teljes hét mérési eredményeit dolgoztuk fel, a korábbiakban említett módszert alkalmazva. A feldolgozáshoz a KARL és a KLOP állomásokon kívül a BRUS (Brüsszel), a PFAN (Pfaender), a POTS (Potsdam) és a ZIMM (Zimmerwald) EPN (EUREF Permanent Network) állomásokat is felhasználtuk.

Az NGS által közölt antennamodellek felhasználásával meghatározott heti koordinátamegoldásokat 7 paraméteres Helmert-transzformációval hasonlítottuk össze a BRUS, PFAN, POTS és ZIMM állomásokat közös pontként felhasználva. Amennyiben az antennamagasságok, fáziscentrum külpontosságok és azok vándorlásainak modellezése mindkét antenna esetében helyes, a koordináták nem változhatnak meg az antennacserétől. Az összehasonlítás eredményét a *II. táblázatban* adtuk meg.

II. táblázat. Az antennacsere okozta koordináta-ugrások a KARL és a KLOP állomásokon transzformációból [m]
(A szórás a maradék ellentmondásokból számított érték)

	északi	**keleti**	**magassági**
KARL	-0,0096	-0,0040	0,0365
KLOP	-0,0077	-0,0026	0,0321
Szórás	0,0017	0,0011	0,0024

A *II. táblázat* magasság ellentmondásai jól egyeznek az *1. táblázatban* közölt értékekkel, ugyanakkor a vízszintes koordinátákban jelentős eltérések mutatkoznak, amelyek megközelítik az 1cm-es értéket.

Az EUREF által és az általunk meghatározott koordináta-ugrások vízszintes összetevőinek jelentős eltérését az okozhatja, hogy az EUREF az IGS által publikált antennamodelleket használja a feldolgozás során, míg mi az NGS modelljeit használtuk. Ha összehasonlítjuk az általunk számított koordinátákat az EUREF által közzétett heti megoldásokkal, akkor megállapíthatjuk, hogy melyik antennatípus esetében térnek el jelentősen az NGS és az IGS modelljei. Az összehasonlítás eredményeit a *III. táblázatban* adtuk meg.

III. táblázat. Az NGS modellekkel számított heti megoldások ellentmondásai az EUREF heti megoldásokhoz képest (A szórás a maradék ellentmondásokból számított érték)

		északi	**kelet**	**magassági**
KARL (1112 GPS hét)	antennacsere előtt	-0,0059	-0,0013	-0,0031
KLOP (1112 GPS hét)		-0,0060	-0,0011	-0,0087
Szórás (1112 GPS hét)		0,0015	0,0016	0,0040
KARL (1114 GPS hét)	antennacsere után	0,0002	-0,0002	0,0043
KLOP (1114 GPS hét)		0,0008	0,0000	-0,0025
Szórás (1114 GPS hét)		0,0020	0,0031	0,0057

A *III. táblázat* alapján megállapítható, hogy az antennacsere előtti, tehát a TRM22020.00 NGS és IGS által közölt antennamodelljei különböznek olyannyira, hogy ez 6 mm-es eltérést is okozhat az északi koordinátában. A számítások ellenőrzésére feldolgoztuk az egy-egy heti méréseket mind IGS, mind NGS antennamodellekkel is, és ebben az esetben is hasonló eredményeket kaptunk.

Abszolút antennakalibrálási eredmények felhasználása

A SAPOS már évek óta elvégezteti a GPS antennák abszolút kalibrálását, ezért rendelkezésünkre álltak a KARL és a KLOP állomások abszolút kalibrálási adatai is. Meg kell azonban említenünk, hogy a TRM22020.00 antennák közül csak a KARL állomáson lévő antenna volt kalibrálva.

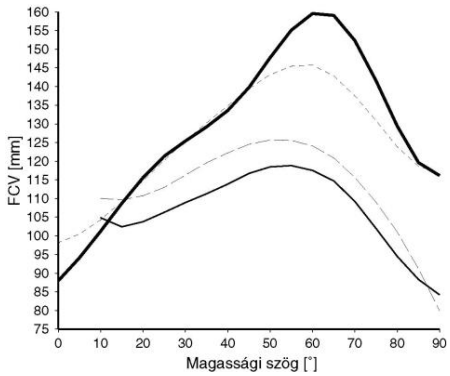
Mivel a hálózat többi antennájának csak a relatív antennakalibrálási adatai álltak a rendelkezésünkre, valamint a műholdak abszolút antennakalibrálási eredményeit sem ismertük, az említett antennák abszolút kalibrálással nyert modelljeit át kellett számolnunk relatív modellekké *(Menge et al. 2001)*.

Az abszolút kalibrálási eredmények tartalmazták a fáziscentrum vándorlásának azimut függő részét is, így első lépésként azimut szerinti átlagolással meghatároztunk egy tisztán frekvenciától és magassági szögtől függő fáziscentrum vándorlás függvényt. A *4. és 5. ábrán* ezek a függvények láthatóak az L3 ionoszféra mentes lineáris kombinációra vonatkozóan.

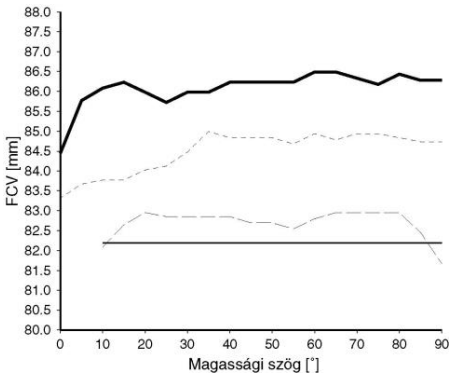
A *4. ábrán* jól azonosítható az időjárásvédő kupola hatása, mivel a KARL állomás antennájának abszolút kalibrációját kupolával és a nélkül is elvégezték. Ezen felül azt is megállapíthatjuk, hogy a különféle modellek között meglehetősen nagyok az eltérések.

Miután meghatároztuk a frekvenciától és a magassági szögtől függő fáziscentrum vándorlás függvényeit, következő lépésként az abszolút antennakalibrálási eredményeket relatív antennamodellekké alakítottuk át. Ehhez felhasználtuk az IfE által kalibrált null-antennát.

A korábban leírt eljárással egy-egy relatív antennamodellt határoztunk meg a csere előtti TRM22020.00 antennákra időjárásvédő kupolával és árnyékolólemezzel, valamint külön-külön a KARL és a KLOP állomásokon felhasznált új TRM29659.00 "choke-ring" antennákra is.



4. ábra. Magassági szögtől függő FCV az L3 lineáris kombinációra a KARL állomáson (vastag: absz. kalibrálás időjárásvédő kupolával; pontvonal: absz. kalibrálás kupola nélkül; szaggatott: NGS modell; folytonos: IGS modell)



5. ábra. Magassági szögtől függő FCV az L3 lineáris kombinációra (vastag: absz. kalibrálás KARL; pontvonal: absz. kalibrálás KLOP; szaggatott: NGS modell; folytonos: IGS modell)

Ezekkel az antennamodellekkel szintén feldolgoztuk a már említett egy-egy heti mérési eredményeket, majd ezeket összevetettük az EUREF által közölt heti megoldásokkal. Az összehasonlítás során szintén 7 paraméteres Helmert-transzformációt használtunk (*IV. táblázat*). Megállapítható, hogy az időjárásvédő kupolának elsősorban a magasságra van jelentős hatása. Ugyanakkor az is látható, hogy néhány mm-es vízszintes eltérés is tapasztalható az új antennák alkalmazása esetén.

IV. táblázat. Az abszolútból levezetett relatív kalibrálási eredményekkel meghatározott koordináta-megoldások ellentmondásai az EUREF heti megoldásokhoz képest, transzformációból [m]
(A szórás a maradék ellentmondásokból számított érték)

		északi	**keleti**	**magassági**
KARL (1112 GPS hét)		-0,0001	0,0009	0,0294
KLOP (1112 GPS hét)	antennacsere előtt	-0,0008	0,0010	0,0348
Szórás (1112 GPS hét)		0,0006	0,0007	0,0040
KARL (1114 GPS hét)		-0,0017	0,0004	-0,0085
KLOP (1114 GPS hét)	antennacsere után	0,0037	0,0020	0,0000
Szórás (1114 GPS hét)		0,0020	0,0031	0,0057

A *IV. táblázat* eredményei alapján ellenőrzésként meghatározhatunk egy-egy korrekciós értéket, amelyet az EUREF heti koordináta-megoldásokból kellene levezetnünk az antennacsere miatt. Ezek az értékek az *5. táblázatban* szerepelnek.

Az *V.* és az *I. táblázatban* szereplő eredmények összevetése alapján kijelenthetjük, hogy az EUREF által meghatározott koordináta-ugrások megmagyarázhatók az időjárásvédő kupola eltávolításával, amelyet nem vettek figyelembe az EUREF feldolgozások során sem. Másrészről a vízszin-

tes koordinátákban található eltérésekért főként a TRM29659.00 antennák IGS és az abszolút kalibrálási modelljeinek az eltérései a felelősek.

V. táblázat. Koordinátaugrások, amelyeket az abszolút kalibrálási eredmények felhasználása nélkül kellene észlelnünk

	északi	keleti	magassági
KARL	0,0016	0,0005	0,0379
KLOP	-0,0045	-0,0010	0,0348

Összefoglalás

A vizsgálatok kimutatták, hogy a GPS technikával végrehajtott nagypontosságú helymeghatározás során az időjárásvédő kupolák hatása nem elhanyagolható. A Trimble időjárásvédő kupola főként a magasságra gyakorolt jelentős hatást, amely elérte a 3,5 cm-t.

Az eredmények azt is alátámasztják, hogy nagy pontosságú helymeghatározás során – különös tekintettel a geodinamikai alkalmazásokra – mindenképpen szükséges az abszolút kalibráláson átesett antennák alkalmazása. Rövid távon ugyan biztosítható, hogy az egymást követő kampányok során ugyanazzal a mérőfelszereléssel mérjünk egy-egy ponton, azonban hosszabb távon a műszerek meghibásodása, elöregedése elkerülhetetlenné teszi azok lecserélését. Abban az esetben, ha két olyan mérési kampányt hasonlítunk össze, amelyeket más-más antennákkal mértünk, az abszolút kalibrálási eredmények felhasználása nyújt lehetőséget az antennák szabályos hibáinak figyelembevételére.

A vizsgálatok azt is megmutatták, hogy az NGS által publikált TRM22020.00+GP antennamodell a két vizsgált állomás esetében nem volt megfelelő, annak alkalmazása megközelítőleg 6mm-es hibát okoz a vízszintes koordinátákban. Természetesen a bemutatott vizsgálatok alapján nem lehet egyértelműen eldönteni, hogy maga a modell hibás-e, vagy pedig a két antennában voltak olyan egyedi gyártási eltérések, amelyek miatt a modellek nem voltak megfelelőek.

A vízszintes koordinátakomponensekben az EUREF által tapasztalt ellentmondások oka elsősorban az újonnan elhelyezett TRM29659.00 antenna IGS modelljének a hibája. A vizsgálatok bebizonyították, hogy ez a két antenna jelentősen eltér a standard antennamodellektől.

Összegezve megállapíthatjuk, hogy az abszolút antennakalibrálási adatok felhasználása jó alternatívát kínál az empirikus korrekciós paraméterek meghatározására, amelyek az idősorokban tapasztalható koordinátaugrások eltávolítására is felhasználhatók.

Köszönetnyilvánítás

A munka elvégzését az MTA Bolyai János ösztöndíja támogatta.

Hivatkozások

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás, *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Hugentobler U, Schaer S, Fridez P (2001): Bernese GPS Software Version 4.2. *Astronomical Institue, University of Bern*.

Kenyeres A, Bruyninx C, Carpentier G (2002): Improved velocity estimation based on consistency analysis of the EPN time series. *Physics and Chemistry of the Earth, in press.*

Langley RB (1998): A primer on GPS antennae. *GPS World, 9, July,* 50-54.

Menge F, Böder V, Seeber G, Schmitz M (2001): Absolutkalibrierung: Aktueller Stand und spezielle Anwendungen. *In: Campbell, J., Görres, B (Eds.), 3. GPS-Antennen Workshop 2001. Geodaetisches Institut, Rheinische Friedrich Wilhelms Universitaet,* Bonn.

Rózsa Sz, Mayer M, Westerhaus M, Seitz K, Heck B (2005): Towards the determination of displacements in the Upper Rhine Graben area using GPS measurements and precise antenna modelling. *Quaternary Science Reviews. Accepted for publication. Elsevier.*

Springer TA (1999): Modelling and validating orbits and clocks using the GPS. *Dissertation, Astronomical Institute, University of Berne,* Bern.

Stöger R (2002): Személyes kommunikáció.

Wübbena G, Schmitz M, Menge F, Böder V, Seeber G (2000): Automated field calibration of GPS antennas in real-time. *Proceedings of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, ION GPS,* Sept. 19-22, Salt Lake City, ÚT.

JAVÍTOTT VALÓS IDEJŰ HELYMEGHATÁROZÁS INTERNETEN KERESZTÜL

Horváth Tamás[*]

Enhanced real-time positioning via the Internet *- Hundreds of European GNSS reference stations transmit information via the Internet to a dynamically growing number of users. The success of this transmission approach lies in its simplicity, a couple of high capacity computers enable tens of thousands of users to access cheap real-time corrections. Since April 2004 such an Internet GNSS server is operating in Hungary broadcasting permanent station data of the Hungarian gpsnet.hu network. The paper gives an overview of the development of ground based augmentation systems, the status of the Hungarian infrastructure and its future potential.*

Keywords: GNSS reference station networks, Internet, GPRS, Network RTK

Európa több száz műholdas referenciaállomása továbbít GNSS információt az Interneten keresztül, egyre szélesebb felhasználói kör számára. A módszer sikere egyszerűségében van, néhány nagy kapacitású számítógép lehetővé teszi, hogy felhasználók tízezrei jussanak olcsón valós idejű korrekciókhoz. 2004 áprilisa óta Magyarországon is működik ilyen Internetes GNSS-szerver, mely a hazai permanensállomás-hálózat adatait továbbítja. A dolgozat bemutatja a műholdas rendszerek földi kiegészítő rendszereinek fejlődését, a hazai infrastruktúra helyzetét és további lehetőségeit.

Kulcsszavak: GNSS hálózatok, Internet, GPRS, hálózati RTK

Bevezetés

Az európai permanens GNSS (*Global Navigation Satellite System*; az amerikai GPS, az orosz GLONASS és a fejlesztés alatt álló európai Galileo navigációs műholdrendszerek gyűjtőneve) hálózatok fejlődése az elmúlt öt évben jelentősen felgyorsult. Nyugat-Európában már évek óta folyamatosan üzemelő referenciaállomások százai működnek. A számítóközpontokban hálózat-kiegyenlítő szoftverekkel együttesen dolgozzák fel az állomásokról bejövő adatokat, aminek köszönhetően nagy területeken egyetlen GNSS vevővel is elérhetővé válik a homogén, geodéziai pontosságú, valós idejű helymeghatározás. A közép- és kelet-európai régió országai (köztük Magyarország) 4-5 éves lemaradással most próbálnak felzárkózni a nyugati fejlettségi színvonalhoz. Számunkra nagy előnyt jelent, hogy kiforrott technológiai megoldásokat vehetünk át, így elkerülhetjük a fejlesztési szakasz néhány zsákutcáját. Ismeretes, hogy Nyugat-Európában a kiépült hálózatok egymással gyakran nem kompatibilisek. A szoftvergyártó cégek versengése nyomán több megoldás is született, de ezek egyikét sem fogadták még el nemzetközi szabványként. Közép- és Kelet-Európa országai német vezetés mellett összefogtak, hogy a nyugati példákon okulva létrehozzanak egy egységes, országokon átívelő rendszert, ahol szabványos eljárások biztosítják majd az átjárhatóságot.

A dolgozatban bemutatjuk a műholdas alaphálózatok fejlődési folyamatát, a Földmérési és Távérzékelési Intézet (FÖMI) Kozmikus Geodéziai Obszervatóriumában (KGO) folyó GNSS hálózatfejlesztési munkálatok jelenlegi helyzetét és az ott alkalmazott technológiát. Eredményekkel érzékeltetjük a jelenlegi szolgáltatásokkal elérhető helymeghatározási minőséget, végül áttekintést adunk a közeljövő feladatairól és a várható fejlesztésekről.

A múlt – passzív GNSS-hálózatok (első generációs hálózatok)

Az egyetlen GNSS-vevővel végrehajtott abszolút helymeghatározás minősége (pontossága, megbízhatósága és rendelkezésre állása) széles felhasználói rétegek igényeit már nem elégíti ki. Jobb minőségű helymeghatározást relatív mérési módszerrel lehet elérni, ehhez azonban referenciapontokra van szükség. A passzív GNSS-hálózatok olyan referenciapontokból állnak, amelyeknek ismertek a

[*]*FÖMI-KGO, 1592 Budapest, Pf. 585.*
E-mail: Horvath@sgo.fomi.hu

WGS 84 koordinátái, ugyanakkor rendelkeznek „hagyományos" síkvetületi koordinátákkal és tengerszint (geoid) feletti magassággal is. Ilyen a hazai Országos GPS Hálózat (OGPSH) is, amelynek 1153 pontja kb. 10 km-es pontsűrűséggel fedi le Magyarország területét. Az első generációs műholdas alaphálózatok lehetővé tették (teszik), hogy kapcsolatot teremtsünk a műholdas rendszerek geocentrikus térbeli derékszögű koordináta-rendszere és a nemzeti vetületi és magassági rendszerek között. A közös pontok segítségével transzformációs paramétereket határozhatunk meg, majd lokális transzformációt hajthatunk végre a két rendszer között.

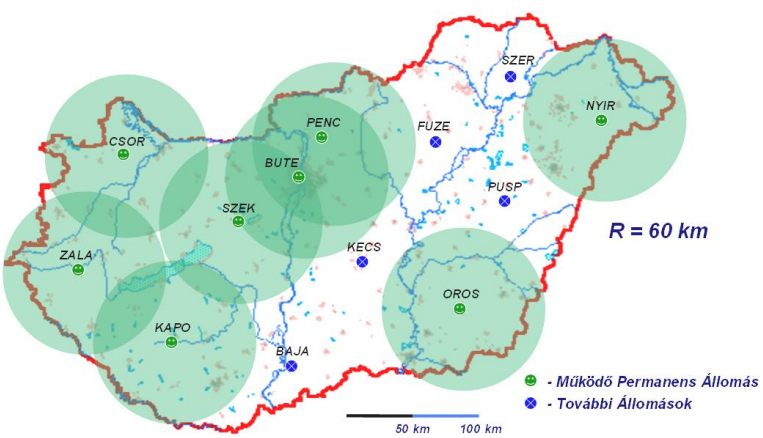
Relatív módszerrel, utólagos feldolgozással cm-es, sőt akár mm-es pontosság is elérhető. Valós időben differenciális korrekciókkal (DGNSS) méter alá csökkenthető a maradékhiba, fázismérése RTK (*Real-Time Kinematic*) módszerrel pedig 1-2 cm-es pontosság érhető el. Az első generációs hálózatok esetén a relatív helymeghatározáshoz a felhasználónak két GNSS-vevővel kell rendelkeznie, egy referenciavevővel, amely ismert ún. közös ponton van felállítva (a pontnak WGS 84 és EOV koordinátái is ismertek) és egy mozgó, ún. rover vevővel.

A jelen – aktív GNSS-hálózatok (második generációs hálózatok)

A második generációs, ún. aktív GNSS-hálózatok esetében a hálózat fenntartói a GNSS-alaphálózat kiválasztott pontjain vagy azokból levezetett pontokon folyamatosan működő (permanens) referenciaállomásokat üzemeltetnek, amelyek adatait utólagos feldolgozáshoz és valós idejű alkalmazásokhoz egyaránt fel lehet használni. A második generációs hálózatok felhasználói egyetlen vevő segítségével, tehát referenciavevő nélkül érhetik el ugyanazt a helymeghatározási minőséget, amihez korábban két vevőre volt szükségük, ez számottevő megtakarítást jelent. A FÖMI KGO 2003-ban ilyen aktív GNSS-hálózat kiépítését kezdte meg, gpsnet.hu néven.

A gpsnet.hu 12 tervezett permanens állomása egyenletes eloszlással, kb. 100 km-es állomásközi távolsággal fedi le az országot. A hely kiválasztásának fontos szempontjai a korszerű kommunikációs hálózat kiépítettsége, a biztos fennmaradás és a jó megközelíthetőség. Magyarországon több, mint 100 földhivatal van, amelyeket biztonságos belső számítógépes hálózat köt össze, ennek a belső hálózatnak egyik csomópontja Pencen van. Adott volt tehát a lehetőség, hogy az aktív GNSS-hálózat állomásai jórészt földhivatalokba kerüljenek.

A hálózat pontjaiban geodéziai kétfrekvenciás GNSS-vevők gyűjtik és továbbítják az adatokat a nap 24 órájában. A GNSS-antennák pontosan ismert koordinátájú (EUREF 89 és EOV) pontokon állnak. Az állomáskoordinátákat korábban kereskedelmi szoftver segítségével az OGPSH hálózat közeli pontjairól, utólagos feldolgozással határozták meg. Újabban az állomások helyét a teljes aktív hálózat méréseit együttesen feldolgozva, az IGS precíz pályaadatait felhasználva a tudományos BERNESE szoftverrel határozzuk meg.



1. ábra. A gpsnet.hu hálózat működő és tervezett állomásai

Jelenleg (2004 november) a penci obszervatórium által üzemeltetett gpsnet.hu aktív hálózatban 8 permanens állomás működik *(1. ábra)*. Ezek a következők: *Penc* (1997-től), *Budapest* (a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Általános- és Felsőgeodézia Tanszéke üzemelteti 2000-től), *Orosháza* (2001-től), *Nyírbátor* (2002-től), *Székesfehérvár* (2003-tól), *Kaposvár* (2004-től), *Zalaegerszeg* (2004-től) és *Csorna* (2004-től).

A 2004. év végéig további két permanens állomás kiépítése várható, az egyik Kecskeméten a másik pedig Sümegen. Ez utóbbi a nemzetközi CERGOP-2/Environment projekt keretében kiépülő közép-európai kéregmozgás-vizsgálati hálózat egyik pontja lesz, emellett természetesen része lesz a gpsnet.hu hálózatnak is.

Adatszolgáltatás utólagos feldolgozáshoz

Az állomások méréseit folyamatosan rögzítjük, az adatokat utólagos feldolgozáshoz az elterjedten használt RINEX 2.1 formátumban biztosítjuk a felhasználók számára. Regisztráció után térítés ellenében a gpsnet.hu weboldalról a következő állományokat lehet letölteni:

24 órás adatok 30 másodperces rögzítéssel,
6 órás adatok 15 másodperces rögzítéssel, és
1 órás adatok szintén 15 másodperces rögzítéssel.

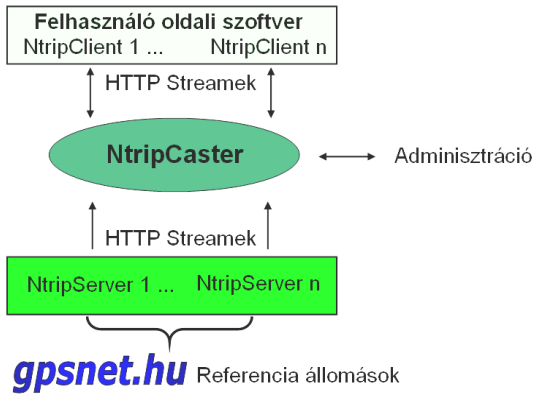
A 24 órás adatok a következő napon, a 6 órás és 1 órás fájlok a rögzítés befejezte után kb. egy órával már elérhetők. A penci webszerveren az adatokat 1 hónapra visszamenőleg tároljuk, régebbi állományokat igénylés esetén biztosítunk. A budapesti állomás adatait a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszéke szolgáltatja.

Az *1. ábrán* látható állomások 60 km-es körzetében, kétfrekvenciás vevővel, 1 órán belül 1-3 cm pontos alappont-meghatározás végezhető geodéziai utófeldolgozó szoftverekkel. Nagyobb bázisvonalakon ennél hosszabb ideig célszerű mérni, a mérés időtartama természetesen függ az észlelés körülményeitől (pl. műholdak száma) is.

A valós idejű adatszolgáltatás műszaki háttere

2004 áprilisa óta valós idejű szolgáltatás is működik Pencen. A referenciaállomásokról differenciális GNSS (DGNSS) és RTK korrekciókat továbbítunk a felhasználók felé RTCM SC-104 (*Radio Technical Commission for Maritime Services - Special Committee*) formátumban az Interneten. A szolgáltatás fejlesztési időszakában a korrekciókhoz térítésmentesen lehet hozzáférni. Az adattovábbítás a HTTP/1.1 (*Hypertext Transfer Protocol*) protokollra épülő Ntrip (*Networked Transfer of RTCM via Internet Protocol*) szabvány szerinti. A német Szövetségi Kartográfiai és Geodéziai Hivatal (BKG) által kifejlesztett megoldás lehetővé teszi, hogy néhány száz korrekciós adatsort egyidőben akár több ezer felhasználó is elérhet az Interneten keresztül. Az adattovábbítás három pillére a referenciaállomásokon futó NtripServer, a penci központban dolgozó NtripCaster és a felhasználóoldali NtripClient szoftver *(2. ábra)*. A GNSS-vevők nyers méréseiből a referenciaállomásokon futó szoftver állítja elő az RTCM-korrekciókat, és írja ki az adatfolyamot TCP/IP portra. Az NtripServer program feladata, hogy innen a központi szoftverbe juttassa ezeket az adatokat. A központban futó NtripCaster (vagy BroadCaster) az eredetileg mp3 formátumú zenefájlok továbbítására kidolgozott Icecast nevű program továbbfejlesztése, mellyel bináris GNSS adatstreameket lehet feltenni az Internetre *(Gebhard és Weber, 2003)*. Az NtripCaster úgy sokszorozza meg a gpsnet.hu állomásokról bejövő adatfolyamokat, hogy közben semmilyen egyéb változtatást nem hajt végre azokon, így lehetőséget biztosít arra, hogy egyszerre több regisztrált felhasználó is ugyanazt a referenciaállomást használja valós időben. A penci Internetes BroadCaster IP címe: 82.131.181.15. Minden korrekciós adat egyetlen TCP/IP porton, esetünkben a 2101-es porton érhető el a világhálón. A korrekciós adatokhoz csak jogosult felhasználók férhetnek hozzá az NtripClient program segítségével. Ez az ingyenes felhasználó oldali szoftver bejelentkezik a központi szerverbe és azonosítás után hozzáférést biztosít a valós idejű adatokhoz. Az NtripClient-nek természetesen terepi méréshez kell biztosítania a korrekciókat, így létezik kézi számítógépen (palmtopon) futtatható szoftververzió is, sőt ma már van olyan mobiltelefon is, amelyben megtalálható az Ntrip modul. Miután idén szeptemberben az RTCM szabványügyi bizottság befoglalta a GNSS-felhasználók által széles körben használt

szabványába az Ntrip protokollt, a jövőben minden jobb térinformatikai és geodéziai GNSS-vevő már önmaga is tartalmazni fogja az NtripClient programot. Erre már ma is van példa, egyes GNSS gyártó cégek már integrálták termékeikbe a szoftvert, így nincs szükség külön eszköz használatára ahhoz, hogy terepen is fogadni tudjuk a korrekciókat.



2. ábra. Az Ntrip protokollra épülő adattovábbítás

Az Internetes adattovábbítás nagy előnye, hogy a korrekciós adatok bárhol elérhetők, ahol csatlakozni lehet a világhálóra. Mivel a mobil kommunikációban elterjedt GPRS (*General Packet Radio Service*) adatátviteli technika a szolgáltató által lefedett területen bárhol biztosítja az Internet hozzáférést (a magyarországi mobilszolgáltatók közül a leggyengébben kiépített hálózattal rendelkező is 97%-os lefedettséget hirdet), az országos RTCM korrekciós lefedettség biztosított. A terepi felhasználónak ahhoz, hogy el tudja érni a valós idejű szolgáltatásainkat, szüksége van tehát egy olyan mobiltelefonra, amely GPRS-en keresztül kapcsolódni tud az Internetre. Ezen kívül (ha nem magában a mobiltelefonban található az Ntrip felhasználó oldali modul) szüksége van egy kézi számítógépre, vagy olyan GNSS-vevőre, aminek terepi kezelőeszközén, vagy magában a vevőben található számítógépen megtalálható az NtripClient program. A mobiltelefont a kézi számítógéppel vagy GNSS-vevővel Bluetooth-kapcsolat vagy soros adatkábel kötheti össze. A Bluetooth egy kis hatótávolságú szélessávú rádiókommunikációs szabvány, amely minden újabb mobiltelefonban, kézi PC-ben és a legújabb GNSS vevőkben megtalálható, használatával teljesen vezeték-mentessé tehető a rover felszerelés. A geodéziai GNSS-gyártók fejlesztése abba az irányba halad, hogy új termékeikbe már gyárilag beépítenek egy GPRS-modult és az Ntrip szoftvert, így hamarosan nem lesz szükségünk semmilyen külső eszközre a nagy pontosságú terepi helymeghatározáshoz.

Differenciális korrekciókat természetesen nem csak Interneten keresztül lehet eljuttatni a felhasználókhoz. Évtizedes múltra tekint vissza a rádiós RTCM továbbítás. Magyarországon is voltak próbálkozások DGNSS-korrekciók rádiós sugárzására. RTK-korrekciókat eddig kizárólag rádión keresztül lehetett a referenciavevőből a mozgó vevőbe juttatni. A rádiós adatátvitelnek legnagyobb hátránya, hogy az Internettel összehasonlítva igen drága. Drága mind a kiépítése, mind az üzemeltetése, ezen felül országos sugárzáshoz a frekvenciaengedély megszerzése is nehézségekbe ütközik. A rádiós adatátvitel felhasználhatóságát alapvetően két tényező befolyásolja, a sávszélesség és a hatótávolság. A kettő fordított viszonyban van, azaz minél nagyobb sávszélességre van szükségünk, annál kisebb területet tudunk besugározni egyetlen rádióadóval. Középhullámon nagyobb területeket lehetne lefedni egyetlen állomással, de a korlátozott sávszélesség miatt nem lehetséges nagymennyiségű adat továbbítása. (Már egyetlen RTK-korrekció sor adatmennyisége is jócskán meghaladja a rendelkezésre álló kapacitást.) Az FM frekvencia esetében a sávszélesség elegendő lenne pl. DGNSS-korrekciók sugárzására, mivel azonban egyetlen rádióadó jelét nem lehet országosan venni, átjátszóállomásokra lenne szükség, ami nem gazdaságos. RTK-korrekciók átvitelére elterjedten használnak URH-rádiós kapcsolatot, a megfelelő sávszélesség (kb. 5 kbit/s állomásonként) biztosított, ugyanakkor ennek a technikának határt szab a rádióadó néhány kilométeres hatótávolsága. Ami

a kontinensméretű területeket lefedő kommunikációs műholdak alkalmazásának lehetőségét illeti, ismeretes, hogy ezeken a műholdakon nagyon drágán lehet sávszélességet bérelni. További nehézség, hogy a geoszinkron műholdak Magyarországról olyan alacsony szög alatt látszanak, hogy a kitakarás okozta gyakori jelvesztés pl. városi környezetben alkalmatlanná teszi a módszert.

A GSM (*Global Standard for Mobile Communication*) mobil távközlési szabvány a hangtovábbítás mellett minimális adatkommunikációt is lehetővé tesz. A GPRS elterjedése előtt (pl. a német SAPOS hálózatában) sikeresen alkalmazták a GSM-en történő adattovábbítást. A kisebb sávszélesség mellett a GSM további hátránya, hogy jóval drágább a GPRS-nél, mivel a mobil szolgáltató nem a letöltött adatmennyiség után számláz, hanem percdíjat állapít meg.

A fentiekből látszik, hogy az Internet a jelenleg elérhető egyetlen olyan kommunikációs csatorna, amin keresztül nagyobb mennyiségű adatot lehet országosan, jelentős befektetés nélkül eljuttatni a felhasználókhoz. A terepi Internet hozzáférés GPRS-el olcsón biztosítható. A GPRS adatátvitel sebessége 115 kbit/s, ami elvileg bőven elegendő bármilyen GNSS-adat továbbítására. A rendszer működését RTK-mérésekkel teszteltük Pencen, és azt tapasztaltuk, hogy a GPRS-kapcsolat a mérés időtartama (kb. 2 óra) alatt stabil volt. Tudjuk ugyanakkor, hogy nagyobb városokban, így Budapesten is, a mobilszolgáltatók a nagy hangforgalom miatt nem tudnak garantált GPRS sávszélességet biztosítani, mert a hangkommunikációhoz szükséges kapacitást az adatkommunikáció rovására kénytelenek növelni. A lecsökkent adatátviteli sebesség egyes esetekben oda vezethet, hogy megszakad a kapcsolat a központi szerver és a felhasználói program között.

Kommunikációs szakemberek véleménye szerint a GPRS elért technikai lehetőségeinek határaihoz, ezért szükségessé vált egy új technológiai alapokon nyugvó, korszerű, nagy kapacitású mobil rádiótávközlő rendszer kifejlesztése. Az UMTS (*Universal Mobile Telecommunication System*) technológiára épülő, világszerte egyre inkább terjedő harmadik generációs mobil rendszerek Magyarországon is hamarosan meg fognak jelenni. Az UMTS hálózat a telefont használó helyzetétől és mozgásától függően 144 kbit és 2 megabit közötti adatátviteli sebességre képes másodpercenként, ez az ADSL (*Asymmetric Digital Subscriber Line*) vonalak sebességének felel meg. Az UMTS hálózat kezdetben mindenhol szigetszerűen épül ki, így lesz ez nálunk is, első lépésben Budapesten készül majd el a rendszer 2006 januárjára, majd a megyeszékhelyek lefedése következik 2008 elejére. Jó remény van tehát arra, hogy a közeljövőben minden felhasználó zavartalanul jut majd Internetes korrekciókhoz.

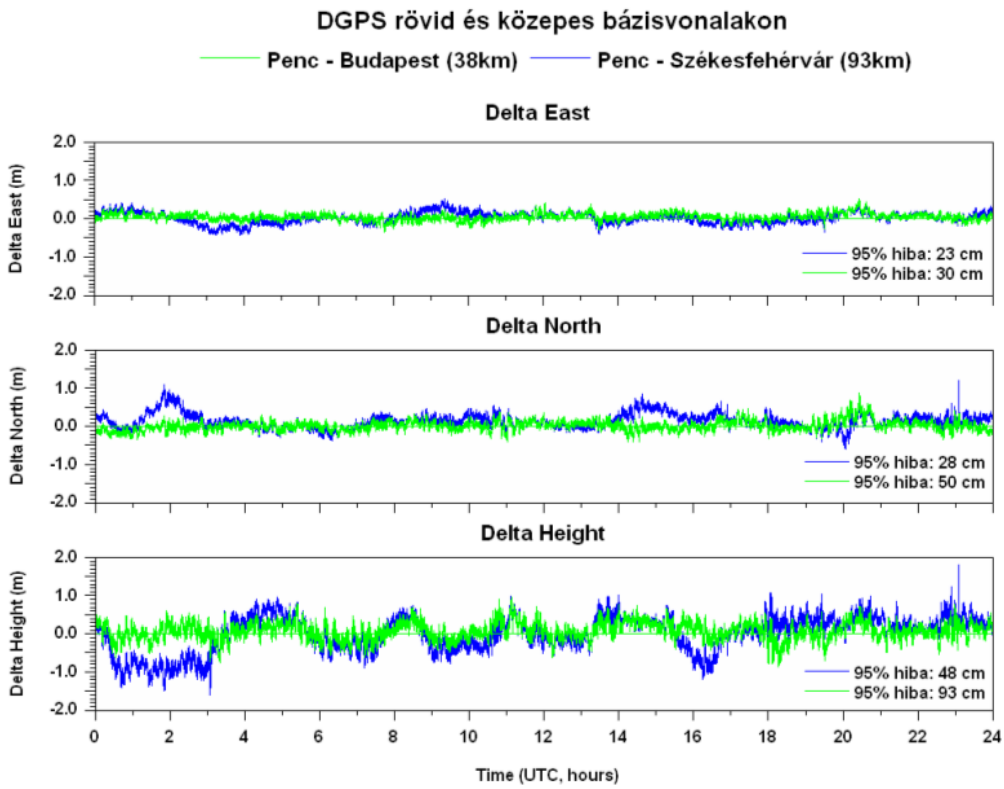
Mindenképpen meg kell említeni, hogy van lehetőség nemcsak a nyílt Internet használatára, hanem olyan már meglevő, vagy fejlesztés alatt álló zárt (rádió)kommunikációs hálózatokon való adatátvitelre is, mint pl. a MÁV, a Matáv, az Antenna Hungária, az MVM, vagy a Vízügy hálózata. További lehetőséget biztosít a digitális televíziózás és rádiózás megjelenése, ahol jelentős még a kihasználatlan kapacitás.

Az elsősorban a készenléti (rendőrség, mentők, határőrség, vám- és pénzügyőrség és a katasztrófavédelem) és a kormányzati szervek biztonságos rádiókommunikációját lehetővé tevő EDR (*Enhanced Digital Radio* vagy Egységes Digitális Rádió) távközlő rendszer kiépítésére idén írtak ki pályázatot. Ez szintén olyan zárt, szélessávú kommunikációs hálózat lesz, melyen garantálni lehet a szükséges átviteli sebességet. A több tízmilliárdos beruházás jövő év második felében indul és a tervek szerint a Budapestet lefedő hálózat 4 hónap alatt készül el, az országos lefedettség várhatóan 1 év alatt valósul meg.

Látható, hogy kommunikációs megoldásokban nincs hiány, célunk, hogy mindig a lehető legmagasabb színvonalú technológiát alkalmazzuk. Ez jelenleg Magyarországon a GPRS, a jövőben vélhetően több módszer együttes alkalmazása lesz.

A KGO DGNSS szolgáltatása

Differenciális GNSS-korrekciókat használva a kódmérésen alapuló helymeghatározás pontossága legfeljebb szubméteresre javítható. A jelenleg üzemelő 8 különálló referenciaállomás környezetében, a bázis-rover távolság függvényében, a valós időben elérhető pontosság (95%) *vízszintes értelemben 25-30 cm és 60-80 cm, magasságilag 40-50 cm és 100-120 cm* között van. (Ezek az értékek a geodéziai és a jobb térinformatikai GPS-vevőkre vonatkoznak, egy 100.000 Ft-os hobbi GNSS-vevő esetén ne számítsunk 2-3 méternél kedvezőbb pontosságra!)



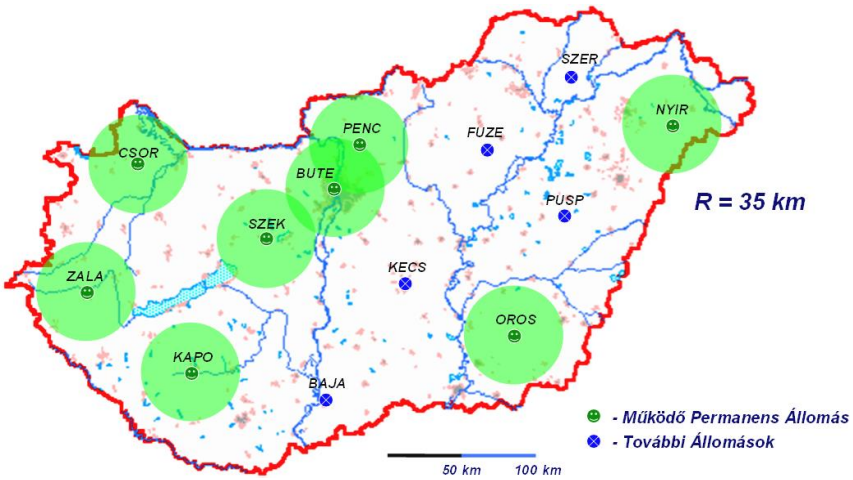
3. ábra. Internetes DGNSS helymeghatározás rövid és közepes bázisvonalakon

Az *3. ábrán* egy 2004. július 6-án Pencen végzett 24 órás DGPS tesztmérés eredményei láthatók. Differenciális korrekciókkal külső szoftverben javítottuk egy geodéziai GPS-vevő nyers méréseit és a kapott pozíciót másodpercenként rögzítettük. Két állomás korrekcióit is felhasználtuk a méréskor, amivel a távolságfüggő hibák pontosságrontó hatását szerettük volna szemléltetni. A Penctől 38 km-re lévő budapesti állomás javításainak hatását a 93 km-re lévő Székesfehérvár korrekcióival vetettük össze. A két javított koordináta idősort a penci mozgó vevő (rover) GPS-antennájának pontosan ismert helyzetével hasonlítottuk össze, a maradék pozícióhibák három komponensre bontva a *3. ábrán* láthatók. A mérésnél az obszervatórium belső Internetes hálózatát használtuk a korrekciók továbbítására, és az NtripClient asztali számítógépen futtatható verzióját alkalmaztuk.

Látható, hogy a KGO által biztosított DGNSS-korrekció már most méter alatti vízszintes helymeghatározást tesz lehetővé. Az elérhető pontosság azonban nem homogén. Elsősorban a GNSS-helymeghatározást terhelő távolságfüggő hibák (műhold pályahiba, az ionoszféra és a troposzféra okozta hibák) miatt az állomásoktól távolodva csökken a korrekciók érvényessége és így az elérhető pontosság is.

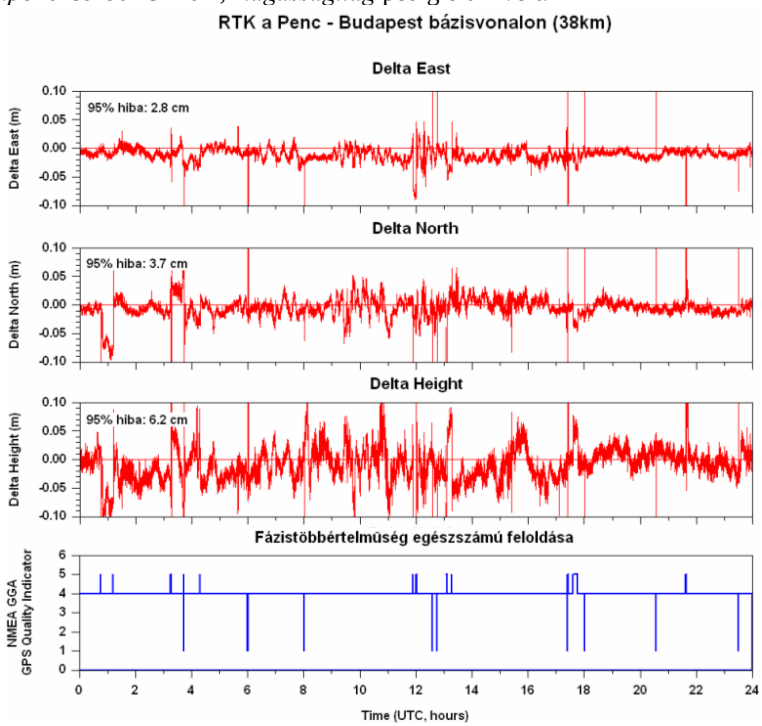
A KGO RTK szolgáltatása

A fázismérésen alapuló *Real-Time Kinematic* helymeghatározás nagyságrendileg pontosabb a DGNSS-nél. A módszerrel elérhető cm-es pontossághoz a felhasználóknak rendelkezniük kell két-frekvenciás geodéziai GNSS-vevővel és RTK-korrekciókkal. Ahhoz, hogy valóban cm-es pontosságot kapjunk, a fázismérés ciklus-többértelműségét (*ambiguity*) egész típusú megoldást biztosítva kell feloldani, ezt a műveletet nevezzük inicializálásnak. Az inicializálás sikeressége és időtartama a referenciavevő és a mozgó vevő távolságától és külső paraméterektől, így az ionoszféra aktivitásától függ. A referenciaállomástól távolodva egyre kisebb az esélye, hogy sikerül a ciklus-többértelműséget egész típusú megoldással feloldani. A különálló RTK-állomások hatótávolsága ezért néhányszor 10 km-re korlátozódik *(4. ábra)*.



4. ábra. A gpsnet.hu működő RTK állomásainak hatótávolsága

Az Interneten elérhető RTK-korrekciókat felhasználva újabb 24 órás pontosságvizsgálatot végeztünk 2004. október 20-án. Az első méréshez hasonlóan most is egy penci geodéziai vevő méréseit javítottuk, ezúttal budapesti RTK-korrekciókkal. A közel 40 kilométeres bázisvonal egyébként már meghaladja azt a távolsághatárt, amin belül az RTK-korrekciókat még megbízhatónak tekinthetjük. Az *5. ábráról* leolvasható, hogy a 24 órás teszt során az RTK-helymeghatározás pontossága (95%) a *vízszintes komponensekben 3-4 cm*, *magasságilag* pedig *6 cm* volt.



5. ábra. Internetes RTK helymeghatározás 38 km-es bázisvonalon

A meglepően jó eredmények a „laboratóriumi” körülményeken kívül annak is köszönhetők, hogy az adott napon az ionoszféra aktivitása alacsony volt. Az *5. ábra* utolsó sorában a GNSS-vevő által

meghatározott mérési minőség mutatószámát ábrázoltuk az idő függvényében. Ez az érték *4*, ha egész típusú (*fix*) megoldása van a ciklus-többértelműségnek, *5* abban az esetben, ha csak valós típusú (*float*) a megoldás, és *1*, amikor a GNSS vevő teljesen elvesztette a korrekciókat (megszakadt az Internetes kapcsolat). A néhány másodperces Internet kimaradások nem befolyásolták jelentősen a 24-órás 95%-os pontosságot, a korrekciók újbóli beérkezése után a vevő pillanatokon belül biztosította a szakadás előtti cm-es pontosságot. Természetesen, ha nem sikerül feloldani a ciklus-többértelműséget, jelentősen romlik a pontosság, ez látható az ábrán többek között 01 órakor, 04 óra előtt és 18 óra előtt is. Ha a bázis-rover távolságot tovább növeljük, vagy ionoszférikusan aktívabb napon mérünk, azt tapasztaljuk, hogy egyre nagyobb arányban kapunk csak float megoldást. A következő fejezetben kapunk választ arra a kérdésre, kiterjeszthető-e a centiméter pontos RTK-meghatározás hatótávolsága.

A jövő – hálózati DGNSS és RTK (harmadik generációs hálózat)

Napjaink legfejlettebb, harmadik generációs GNSS-hálózataiban a referenciaállomások adatait központilag, együttesen dolgozzák fel, jelentősen növelve ezzel az elérhető pontosságot, megbízhatóságot és rendelkezésre állást. Az adatok együttes feldolgozásának célja, hogy olyan korrekciós felületet határozzunk meg valós időben, amely az ország egész területén homogén pontosságú helymeghatározást biztosít a felhasználók számára.

A relatív GNSS-méréseket terhelő hibahatások közül a műhold pályahibájának hatása, valamint az ionoszféra és a troposzféra hibahatása a referenciaállomás és a felhasználó távolságától függ, ezeket a komponenseket távolságfüggő hibáknak nevezzük. Minél távolabb van a két vevő egymástól, annál jobban nő az említett hibák hatása, az állomástól távolodva a referenciavevő által előállított korrekciók egyre kevésbé lesznek érvényesek. Differenciális korrekciók tekintetében 100 km-enként durván 1 m-es pontosságromlással számolhatunk. RTK esetében a távolságfüggő hibák hatása legfeljebb néhányszor 10 km-re korlátozza a cm-es pontosságú helymeghatározást, 30-40 km fölött a mozgó vevő nem képes a ciklus-többértelműségre egész típusú megoldást adni.

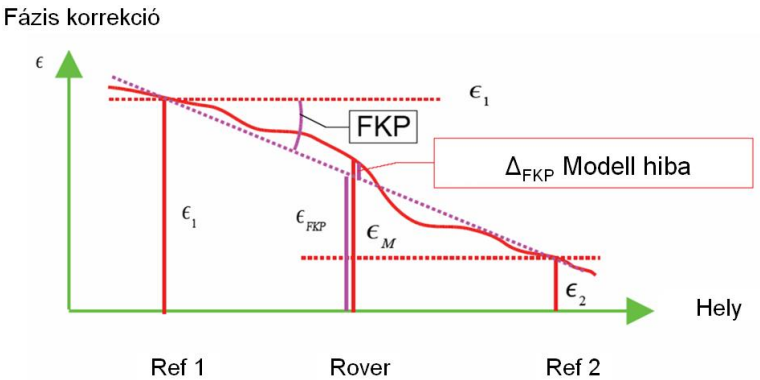
Ha referenciaállomás-hálózatunkban elég jól tudjuk modellezni a távolságfüggő hibák térbeli változását, olyan korrekciós felületet állíthatunk elő, amely segítségével a mozgó vevő az állomásoktól távolabb is a megszokott pontosságot biztosítja. A hálózati korrekciós módszerrel jóval kevesebb referenciaállomás mellett legalább ugyanaz a pontosság biztosítható, mint egy hagyományos, különálló állomásokból álló igen sűrű hálózattal. További nagy előnye a hálózati megoldásnak, hogy jóval kevésbé érzékeny az egyes állomások működési zavaraira. A környező állomások adataiból ugyanis a szoftver képes modellezni a hiányzó állomás korrekcióit, így a felhasználó jelentős pontosságromlás nélkül folytathatja a terepi mérést. Hagyományos esetben a referenciaállomás üzemzavara a mérés végét jelentené.

Korrekciós felületet Differenciális GNSS helymeghatározáshoz már kevés, de geometriailag jól elosztott referenciaállomás adataiból is elő lehet állítani. A 12 tervezett aktív GNSS-állomás adatait együttesen feldolgozva már biztosítani lehetne a közel azonos pontosságot az ország egész területére. RTK-módszer esetén ennél sűrűbb hálózatra van szükség. Hálózati kiegyenlítő szoftver alkalmazása esetén sem növelhetjük azonban az állomások közötti távolságot a terepviszonyoktól függően 50-70 km-nél (egy legalább 15 állomásból álló hálózat esetén 100 km-nél) nagyobbra. Ekkor ugyanis a becsült hibafelület maradékhibái már megakadályoznák a ciklus-többértelműség egész típusú feloldását.

Gyakorlati megvalósítás

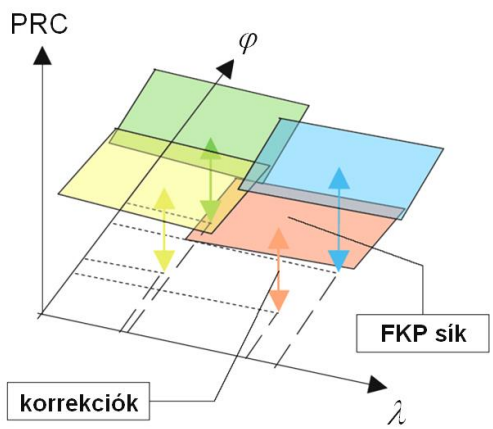
Az RTK-hálózatok távolságfüggő hibáinak modellezésére több megoldást is kifejlesztettek, ezek közül világszerte két kereskedelmi szoftver terjedt el. A KGO nemzetközi együttműködéseinek köszönhetően a német Geo++ cég GNSMART (*GNSS State Monitoring And Representation Technique*) szoftvercsomagját fogja erre a célra használni a jövőben. A szoftver sík felületdarabokkal modellezi a távolságfüggő hibák hatásának térbeli változását. Egy egyszerű kétdimenziós ábrán *(6. ábra)* könnyű érzékeltetni, hogy amíg a referenciaállomások által számított hagyományos RTK-korrekciók (vízszintes pontozott vonalak) jól láthatóan nem érvényesek már a mozgó vevőnél, a

hálózati kiegyenlítő szoftver által előállított lineáris modell (meredek pontozott vonal) nagyon jól közelíti a valódi hibahatást (görbe vonal). Lehetőség van magasabb fokú polinommal közelíteni a valódi hibahatás görbéjét, de a gyakorlati tapasztalatok szerint a lineáris modell már megfelelő eredményt ad.



6. ábra. Helyfüggő hibák hatásának csökkentése lineáris interpolációval

A központi szoftver minden referenciaállomásra számít egy felületdarabot *(7. ábra)*, amit a hagyományos korrekciók mellett elküld a felhasználóknak. A felületdarabon a mozgó vevő közelítőleg ismert koordinátái alapján már számítani lehet a helyfüggő hibák hatását az adott pontra. A hibamodellt mint a korrekciós felületdarabok paramétereit (FKP-paraméterek) továbbítják az állomások a felhasználók felé az RTCM-szabvány által biztosított szabadon definiálható 59-es típusú üzenet formájában. Az FKP-paraméterek gyakorlatilag a hibafelület (sík) meredekségét adják meg. A paraméterek értelmezéséhez megfelelő GNSS-vevőre van szükség (az újabb modellek már tartalmazzák az FKP-algoritmust), vagy külön dekódert kell alkalmazni, ami az alapkorrekciót (20/21-es RTCM típus) és az RTCM 59-es típusú felületi paramétereket együttesen hagyományos korrekcióvá képes alakítani.



7. ábra. Lineáris korrekciós felületek négy referenciaállomás esetén

Az FKP hibamodell egy, a WGS 84 ellipszoiddal a referenciaállomás magasságában párhuzamosan felvett felületre vonatkozik. A fázismérést végző mozgó vevő erre a felületre vonatkozó és radiánban kifejezett (φ, λ) koordinátái alapján a következő összefüggések adják a távolságfüggő hibákat *(Wübbena és Bagge, 2002)*:

$$\delta r_0 = 6.37\left(N_0\left(\varphi-\varphi_R\right)+E_0\left(\lambda-\lambda_R\right)\cos\varphi_R\right), \quad (1)$$

$$\delta r_I = 6.37H\left(N_I\left(\varphi-\varphi_R\right)+E_I\left(\lambda-\lambda_R\right)\cos\varphi_R\right), \quad (2)$$

ahol

N_0 az FKP É-D irányú komponense az ionoszféra-mentes lineáris kombináción [ppm],

E_0 az FKP K-NY irányú komponense az ionoszféra-mentes lineáris kombináción [ppm],

N_I az FKP É-D irányú komponense a narrow-lane lineáris kombináción [ppm],

E_I az FKP K-Ny irányú komponense a narrow-lane lineáris kombináción [ppm],

φ_R, λ_R a referenciaállomás WGS 84 koordinátái [rad],

H $H = 1 + 16(0.53 - E/\pi)^3$,

E a műhold magassági szöge [rad],

δr_0 a távolságfüggő hiba az ionoszféra-mentes lineáris kombináción [m],

δr_I a távolságfüggő hiba a narrow-lane lineáris kombináción [m].

Ezek alapján a méterben kifejezett távolságfüggő hiba az L1 és L2 jeleken számítható:

$$\delta r_1 = \delta r_0 + (120/154)\delta r_I , \tag{3}$$

$$\delta r_2 = \delta r_0 + (154/120)\delta r_I . \tag{4}$$

A mozgó vevő fázismérésből meghatározott *R* pszeudotávolságából a helyzettől függő hibák hatásával javított R_k pszeudotávolság méterben:

$$R_k = R - \delta r . \tag{5}$$

A központi szoftver a fentiek szerint definiált korrekciós felületdarabot állít elő minden egyes referenciaállomás minden műholdra végzett L1, L2 méréseinek ionoszféra-mentes és narrow-lane lineáris kombinációira.

A fejlesztés hazai lépései

Magyarország aktív résztvevője a közép-kelet-európai országok által létrehozott EUPOS (*European Position Determination System*) kezdeményezésnek. Az EUPOS célja, hogy a régióban egységes elvek alapján építse ki a harmadik generációs GNSS referenciaállomás-hálózatokat. A távolságfüggő hibák modellezésére kifejlesztett korrekciós felületek módszere szerves része az EUPOS által definiált szabványnak. A FÖMI KGO az EUPOS együttműködésnek köszönhetően már a 2004. év végén elkezdheti a Geo++ GNSMART tesztelését. Az FKP módszer szükséges feltétele, hogy legalább négy, egymástól 40-70 km-nél nem messzebb lévő referenciaállomás adatai álljanak rendelkezésre. A hálózati RTK teszteléséhez tehát további állomásokra lesz szükség. A fejlesztés két lépésben valósul meg:

1. Létrehozzuk a Budapest környéki mintahálózatot, melyhez Penc, Budapest és Székesfehérvár állomásokon kívül csatlakozni fog további 2-3 állomás (a tervezett pontok Monor, Jászberény és Tata).
2. Az ország egész területére kiterjesztjük az összesen kb. 19-20 állomásból álló RTK-hálózatot.

A Budapest környéki hálózat már 2005 végére létrejöhet, az országos hálózatsűrítés 2006-ban indul. A hálózatfejlesztést elsősorban pályázati forrásokból finanszírozzuk, de a KGO nyitott minden olyan együttműködésre, melynek keretében lehetőség lenne külső cégek vagy intézmények által kiépített referenciaállomásokkal bővíteni a hálózatot.

Terveink között szerepel a referenciaállomások antennáinak abszolút kalibrálása. Erre azért van szükség, mert az antennák fáziscentruma sok esetben akár 1-2 cm-el is eltérhet a megadott modelltől. Ez a hiba továbbterjedve rontja a helymeghatározás pontosságát (elsősorban magassági értelemben). Abszolút kalibrálást csak néhány országban (köztük Németországban) végeznek, az összes antenna vizsgálata valószínűleg hosszú időt vesz majd igénybe.

Összefoglalás

A dolgozatban ismertettük a GNSS referenciaállomás-hálózatok fejlődését, elsősorban a hazai rendszer példáján keresztül. Bemutattuk, hogy a magyar GNSS-hálózat jelenlegi kiépítettsége mellett már országos szinten biztosítja a méternél kedvezőbb pontosságú helymeghatározást, az állomások közelében pedig akár a néhány centiméteres pontosságot is. Ismertettük az Európában egyre inkább elterjedő és a KGO-ban is bevezetett, Interneten keresztül végrehajtott GNSS korrekció-továbbítás műszaki hátterét. Átfogó képet adtunk azokról a mobil kommunikációs lehetőségekről, melyek a növekvő igények mellett is biztosíthatják a korrekciók zavartalan eljuttatását a felhasználókhoz. Távlati áttekintést adtunk a néhány éven belül elérhető szolgáltatásokról és a penci obszervatórium munkatársaira ezen a téren váró feladatokról.

Köszönetnyilvánítás

A szerző szeretné megköszönni a GKM GVOP-3.1.1.-2004-04-0001/3.0 program és a MŰI TP145-ös projekt támogatását, amely elősegíti a magyarországi GNSS referenciaállomás-hálózat kiépítését és a penci obszervatóriumban végzett kutatómunkát.

Hivatkozások

Gebhard H, Weber G (2003): Networked Transport of RTCM via Internet Protocol. Ntrip, Version 1.0, Design – Protocol – Software, Part I & II, *Federal Agency for Cartography and Geodesy (BKG)*, Frankfurt, Németország.

Wübbena G, Bagge A (2002): RTCM Message Type 59-FKP for transmission of FKP. Version 1.0, *Geo++® White Paper,* 01, Garbsen, Németország.

AZ ERZSÉBET HÍD MOZGÁSVIZSGÁLATA GPS-TECHNIKÁVAL

*Takács Bence**

Deformation analysis of the Erzsébet Bridge using GPS technique *- During the last decades it was proved several times, that the Global Positioning System operated by the U.S. Department of Defense can be successfully applied in many areas of geodesy. This paper presents our first results in deformation analysis of bridges. This work may be considered as a pioneer investigation in Hungary, since according to our best knowledge no one else used the GPS technique so far for the same purpose. In this paper we intend to determine the magnitude of height differences of the bridge structure caused by seasonal temperature variations and momentary loading (caused by the traffic); furthermore we provide possible ways to measure these deformations using GPS-techniques.*

Keywords: bridge, deformation analysis, GPS, accuracy

Az elmúlt évtizedek bebizonyították, hogy a GPS (Global Positoning System), az Egyesült Államok Védelmi Minisztériuma által üzemeltett globális navigációs műholdrendszer a geodézia számos területén sikerrel alkalmazható. Tanulmányunkban a hidak mozgásvizsgálatának területén végzett eddigi eredményeinket mutatjuk be. Mindez Magyarországon „úttörő" munkának tekinthető, hiszen tudomásunk szerint hasonló feladatok megoldására más idehaza még nem alkalmazta a GPS-technikát. Tanulmányunk választ ad többek között arra a kérdésre, hogy az Erzsébet híd esetében az évszakos hőmérsékletváltozás, vagy a pillanatnyi terhelés (pl. a hídon átrobogó autóbuszok) mekkora lehajlásokat okoz, illetve mindezt hogyan lehet GPS-technikával megmérni.

Kulcsszavak: híd, mozgásvizsgálat, GPS, pontosság

Bevezetés

Hidak mozgásvizsgálatával évtizedek óta foglalkoznak a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékének, valamint elődintézményeinek munkatársai. A számos értékes vizsgálat közül kiemelkednek az Erzsébet híd próbaterhelése kapcsán végzett mérések. A geodéziai és fotogrammetriai mérések eredményei meggyőző összhangban mutatták, hogy a hőmérsékletváltozás következményeként a pályaszerkezet magasságában jelentős, deciméter nagyságrendű elmozdulások várhatóak. A próbaterhelések alkalmával néhány napi rendszeres mérés elvégzésével meghatározták a napi hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező függőleges elmozdulást, de tudomásunk szerint hosszabb periódusban még senki nem vizsgálta az Erzsébet híd mozgását.

A vizsgálatok legfőbb nehézsége, hogy a hőmérsékletváltozás és a forgalom hatása együtt jelentkezik és a rendelkezésre álló mérési módszerekkel a két hatás nem választható szét egyértelműen. Egy autóbusz áthaladására a pályaszerkezet néhány perc alatt lefutó, jónéhány cm-es lehajlással „válaszol". Mivel egyszerre több hasonló hatás érvényesül, ezért a mozgások igen bonyolult egymásra halmozódását kell meghatározni. Az ilyen feladat csak automatizált és legalább 10 Hz-es mintavételezési gyakorisággal eredményt biztosító mérési módszerrel oldható meg. Könnyen belátható, hogy a hagyományos geodéziai módszerek (szintezés, trigonometriai magasságmérés stb.) erre nem alkalmasak. A GPS-technika megfelel a feltételeknek, nehézséget okoz viszont, hogy a kinematikus mérésekkel elérhető pontosság (különösen magassági értelemben) legjobb esetben is csak néhány cm.

A szakirodalomban számos hasonló feladatról, megoldásról olvashatunk. A közelmúltban épített, esetenként 1 km-nél is hosszabb tenger feletti kábelhidak vizsgálatához folyamatos GPS-méréseket végeznek. A rendszer valós időben szolgáltatja a hidak mérésre kijelölt pontjainak térbeli koordinátáit, így folyamatosan kimutatható a különböző terhelések (szél, hőmérséklet, forgalom)

*BME ÁFGT, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: bence@agt.bme.hu

hatása. Egy ilyen rendszerről olvashatunk *Wong et al. (2001)* tanulmányában három hongkongi híd esetében. A szerzők szerint a rendszer nélkülözhetetlen a hidak hosszú távú biztonságos üzemeltetéséhez.

A mozgásvizsgálatok egyik igen érdekes alkalmazása pl. a szerkezetek földrengésekkel szembeni ellenálló képességének vizsgálata. *Tsakiri et al., (2001)* a görögországi Evripos csatornán átívelő kábelhíd mozgásait vizsgálták GPS vevők és gyorsulásmérők segítségével, hogy tanulmányozzák a híd földrengésekre adott „válaszának" tanulmányozására.

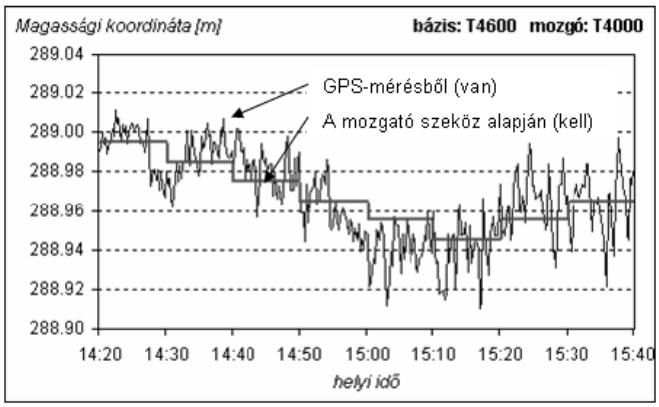
Az alkalmazott GPS mérési módszerek pontossága

A GPS-technikával elérhető pontosságról számos helyen olvashatunk a szakirodalomban, pl. *(Ádám et al. 2004),* ugyanakkor bizonyos kérdések (lásd később) tisztázása érdekében számos vizsgálatot végeztünk. Ezek lényege, hogy a GPS-antennát egy különleges eszközzel szabatosan mérhető módon mozgattuk (*1. ábra*). A GPS-mérésekből levezethető koordináta-változásokat ezután összehasonlítottuk a mozgatás hibátlannak tekintett mértékével, így kaptuk meg a GPS-szel meghatározott elmozdulás (valódi) hibáit. A technika pontossága a hibák statisztikai jellemzőivel becsülhető. Vizsgálataink szempontjából a magasságok meghatározásának pontossága a döntő, ezért a továbbiakban csak függőleges értelmű mozgatásokkal, illetve pontossággal foglalkozunk.

1. ábra. GPS-antenna irányított mozgatása

A módszer alkalmas arra, hogy a pontosságot befolyásoló számos tényező hatását (műholdak száma és geometriája, feldolgozó szoftver, valós idejű, vagy utólagos feldolgozás stb.) is megvizsgáljuk. A vizsgálatok során méréseket végeztünk több különböző GPS-vevővel, ezeket a méréseket különböző szoftverekkel dolgoztuk fel, majd az eredményeket egymással összehasonlítottuk. Összehasonlítottuk továbbá a valós időben meghatározott, illetve az utófeldolgozással levezetett koordináták pontosságát. Ezen kívül megvizsgáltuk a feldolgozás különböző paramétereinek hatását az eredményekre. Hely hiányában a vizsgálatok részleteit nem közöljük, mindössze egy jellemző idősort mutatunk be (*2. ábra*), illetve összefoglaljuk a legfontosabb tapasztalatokat.

Első lépésben kompakt antennákkal felszerelt egyfrekvenciás vevőket vizsgáltunk. A méréseket Trimble Geomatics Office (TGO) v.15 változatával dolgoztuk fel és megállapítottuk, hogy a GPS-mérésekből levezethető mozgáspálya és a hibátlannak tekintett mozgáspálya legnagyobb eltérései több esetben meghaladják a 4 cm értéket, az eltérések középhibája 15 mm. Ezután elvégeztük a vizsgálatot Leica SR530-as RTK vevőpárral is. Az eredmények alig javultak, akár valós időben, akár utófeldolgozással dolgoztuk fel a méréseket. Ha viszont 10 perces statikus méréseket végzünk, akkor a legnagyobb eltérés 20 mm-re, az eltérések középhibája 8 mm-re csökken.



2. ábra. GPS-antennák mozgáspályája a GPS-mérésekből és a mozgató eszköz alapján

Belátható tehát, hogy GPS-technikával csak a legfeljebb dm nagyságrendű, gyors lefutású mozgások mérhetők meg biztonsággal. A korábbi vizsgálatok tapasztalatai alapján az Erzsébet híd évszakos hőmérsékletváltozásának a pályaszerkezet magasságára gyakorolt hatása dm nagyságrendű, ennek meghatározására végzett méréseinkkel foglalkozunk a következő fejezetben. Megjegyezzük, hogy a napi hőmérsékletváltozás és a forgalom hatása ennél kisebb (mintegy 5-8 cm), de a hatás kimutatása érdekében végzett eddigi méréseink eredményei ezen a téren is bíztatóak.

Az éves hőmérsékletváltozás hatása

A kutatás egyik legfontosabb célkitűzése, hogy kimutassuk az Erzsébet híd évszakos hőmérsékletváltozás okozta mozgásait. Nagyjából havi rendszerességgel végeztünk GPS-méréseket, a mérések időpontját és a mérés idején a levegő árnyékban mért hőmérsékletét az *I. táblázat* foglalja össze. Megjegyezzük, hogy a deformációmérések szempontjából a szerkezet hőmérséklete a mértékadó, de a szerkezet hőmérsékletének mérése nem egyértelmű feladat. Már azt is nehéz megállapítani, hogy melyik pontban (pl. a kábel árnyékos vagy napos oldalán) mértékadó a szerkezet hőmérséklete. Méréseink során a legalacsonyabb hőmérséklet 0°C, a legmagasabb 24°C volt.

I. táblázat. Az Erzsébet hídon végzett mérések időpontja (helyi idő) és a levegő hőmérséklete

dátum	Idő	hőmérséklet
2003. 07. 15.	11:05 – 12:10	23ºC
2003. 10. 29.	9:25 – 11:30	3ºC
2004. 02. 06.	12:05 – 12:35	15ºC
2004. 03. 05.	13:35 – 14:45	0ºC
2004. 03. 12.	13:35 – 14:45	8ºC
2004. 04. 09.	13:30 – 14:50	14ºC
2004. 05. 03.	14:55 – 16:10	20ºC
2004. 05. 20.	14.45 – 13:25	24ºC
2004. 10. 08.	13:30 – 14:50	18ºC

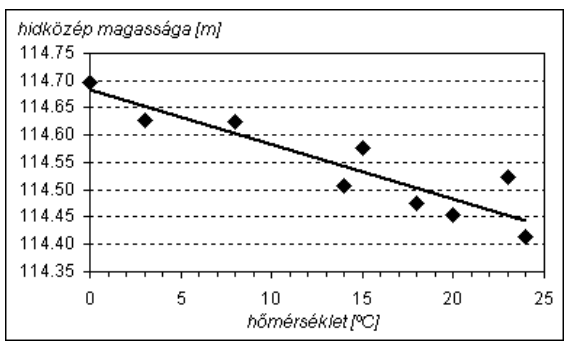
A mérések alkalmával a hídközép déli oldalán állandósított pont magasságát határoztuk meg. Bázisnak a pesti oldalon, a hídfő közelében állandósított pontot használtuk. Ennek mozdulatlanságát a BME permanens állomásáról ellenőriztük. Megjegyezzük, hogy ez az ellenőrzés csak a durva hibák, vagy jelentős elmozdulások kimutatására alkalmas, mert a BME permanens állomásának antennája

sem tekinthető mozdulatlannak, illetve az eredmények azt mutatják, hogy a BME – bázispont magasságkülönbsége is csak néhány cm pontosan határozható meg.

3. ábra. Az Erzsébet híd mozgásai, illetve a referencia és a vizsgált pont helye

A hídközép déli pontjának különböző magasságait a *4. ábra* mutatja be. Az ábra tanúsága szerint a 24°C hőmérsékletváltozáshoz mintegy 25 cm magasságváltozás tartozik; a regressziós egyenes meredeksége – 0,95 cm/ºC. A hőmérséklet és a magasság összefüggése jól látszik, a korrelációs együttható értéke 0,91. Az egyes mérésekhez tartozó pontok 4 cm-es szórással illeszkednek a regressziós egyeneshez. Ennek több oka is van:

- a hőmérsékletmérés korábban már említett bizonytalansága;
- a napi hőmérsékletváltozás hatását egyelőre nem sikerült szétválasztani az évszakos hőmérsékletváltozás hatásáról;
- a forgalom következtében a pont egy néhány cm-es tartományban folyamatosan mozog.



4. ábra. Az Erzsébet híd közepén, a déli oldalon állandósított pont magassága a léghőmérséklet függvényében

A napi hőmérsékletváltozás hatása

Az előző fejezetben említettük, hogy a magasságváltozás és a hőmérsékletváltozás közötti kapcsolat a lineáris összefüggésnél valamivel összetettebb. Ennek egyik oka a napi hőmérsékletváltozás hatása lehet. Egy forró nyári napon a levegő napi hőmérsékletváltozása elérheti a 15-20º-ot is.

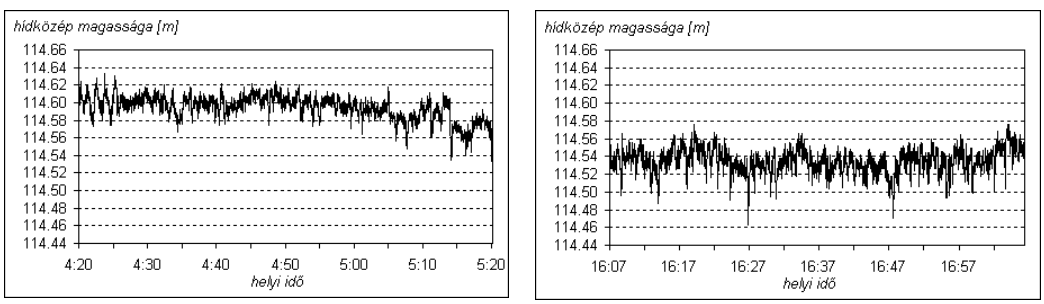
A hatás tanulmányozása érdekében több folyamatos 24 órás mérésre lenne szükség. A legnagyobb nehézséget az okozza, hogy a mérőfelszerelés folyamatos őrzéséről gondoskodnunk kell. Eddig mindössze arra vállalkoztunk, hogy egy napon 5x1 órás mérést végeztünk különböző napsza-

kokban. A mérésre 2001. július 3-án került sor. Az egyes periódusok időtartamát és a levegő hőmérsékletét a *II. táblázat* tartalmazza. A méréseket Geotracer 3140 vevőkkel végeztük, bázispontként a budai oldalon, a vízesés előtti virágágyásban megjelölt pontunkat használtuk. A bázispontot később a pesti oldalra helyeztük át a Gellérthegy jelentős kitakarása miatt. Mindkét bázispontot a BME permanens állomásáról vezettük le.

II. táblázat. 2001. július 3-án végzett mérési periódusok és a levegő hőmérséklete

periódus jele	Idő	hőmérséklet
a	4:20 – 5:20	14ºC
b	8:10 – 9:10	21ºC
c	13:05 – 14:05	31ºC
d	16:10 – 17:10	26ºC
e	19:50 – 20:50	19ºC

Az öt periódusnak megfelelő öt koordináta idősor közül hely hiányában csak kettőt, a hajnali (a jelű) és a délutáni (d jelű) periódushoz tartozót mutatjuk be (5. ábra). Ez a két idősor felel meg a magasságok szempontjából a két szélső értéknek. A koordináta idősorok számtani középértéke között mintegy 6 cm a különbség. Megjegyezzük, hogy nem a legmagasabb léghőmérséklethez (c jelű periódus, 31ºC) tartoznak a legkisebb magasságok (d jelű periódus), mivel a hőtehetetlenség miatt a szerkezet hőmérséklete lassabban változik, mint a levegő hőmérséklete. Az ábrákon jól látszik továbbá a forgalom hatása is, erre a következő fejezetben térünk ki.



5. ábra. Az Erzsébet híd közepén, a déli oldalon állandósított pont magasságának idősora 2001. július 3-án hajnalban és délután

A forgalom hatása

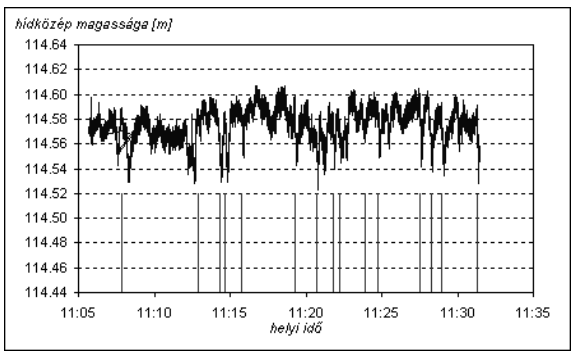
Hajós (1999) korábbi vizsgálatai már mutatták, hogy a forgalom hatása szempontjából az autóbuszoknak van meghatározó szerepük. A forgalom okozta hatás érzékelésére először bemutatjuk a 2004. február 6-án végzett kinematikus mérés egyik jellemző idősorát, ahol a függőleges vonalak jelzik az autóbuszok (Budáról Pestre) áthaladásának időpontját. Az ábrán jól látszik, hogy (1) a magasságok mintegy 8 cm-es tartományban változnak, illetve (2) a lokális minimumok időpontjai meggyőzően egybeesnek a buszok áthaladásának időpontjával.

Az idősorok rövid periódusú változásain jól megfigyelhetőek a forgalom okozta, egy-két percig tartó, néhány cm-es lehajlások. Az adott forgalmi helyzet és a magasságok közötti erős korrelációt legmeggyőzőbben a valós idejű mérések alapján ellenőrizhetjük, erre számos alkalommal voltak kedvező tapasztalataink.

A részletesebb elemzések szempontjából sajnos a vizsgálatainknak alapvető korlátja, hogy egyelőre nem megoldott a forgalom rögzítése. Legtöbbször azt a megoldást alkalmaztuk, hogy felír-

tuk az autóbuszok áthaladásának időpontját. Ennek a módszernek több hátránya is van, egyrészt az információgyűjtés nem teljes (a személygépkocsik is torlódhatnak; a buszok súlya között jelentős eltérés lehet stb), másrészt a módszer nem automatizálható. Ezen a téren a korszerű fotogrammetriai módszerek jelenthetnek áttörést: a hídon zajló forgalmat digitális videokamerák automatikus kiértékelésével lehetne számszerűsíteni. Terveink szerint a közeljövőben ilyen jellegű vizsgálatokat fogunk végezni a BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszékének munkatársaival közösen.

Méréseink során több alkalommal is vizsgáltuk a híd különböző pontjainak mozgását egymáshoz képest. Az eredményeket a szerkezet összetett mozgásainak kimutatása céljából lehetne hasznosítani.



6. ábra. A hídközép pont magassága GPS-mérésekből és az autóbuszok áthaladási időpontja, mérés 2004 február 6-án (balra); GPS antenna a mozgásvizsgálati ponton (jobbra)

Összefoglalás

Tanulmányunkban bemutattuk a GPS-technika alkalmazási lehetőségének néhány kérdését és az eddig elért eredményeket nagyméretű, rugalmas mérnöki szerkezetek mozgásvizsgálatának területén. Megvizsgáltuk a GPS-technikával elérhető pontosságot és megállapítottuk, hogy a számításba jöhető módszerekkel a magasságok centiméteres pontossággal határozhatók meg. Számos alkalommal végeztünk méréseket a téma szempontjából legkedvezőbb hidunkon, a budapesti Erzsébet hídon. A havi rendszerességgel végzett mérések kapcsán megállapítottuk, hogy a legmelegebb és a leghidegebb hónapok között az évszakos hőmérsékletváltozás hatására a hídközép magassága legalább 25 cm-et változik, ismereteink szerint ennek meghatározását GPS-technikával mi végeztük el először.

A legizgalmasabb kérdés a forgalom okozta, időben gyorsan lejátszódó terhelések kimutatása. A GPS-technikával elérhető pontosság egyelőre nem teszi lehetővé a forgalom hatásának megbízható kimutatását, de az RTK mérések már most is számos alkalommal adták látványos bizonyítékát a korábbi tapasztalatoknak, miszerint egy-egy autóbusz áthaladása a pályaszerkezet egy-két percig tartó, több centiméteres lehajlását okozza.

A közeljövtőben várhatóan nemcsak a mozgásvizsgálati, hanem bizonyos építésirányítási feladatok is igénylik majd a GPS-technika alkalmazását. Elsősorban a hídépítés területén került előtérbe az az építési technológia, amellyel a megépítendő híd nagyobb részegységeit mérnöki felügyelet, tehát az elhelyezés folyamatos irányítása és ellenőrzése mellett juttatják végleges helyükre és rögzítik a híd már végleges helyzetű részegységeihez. Ilyen jellegű feladatokhoz külföldön már több alkalommal is sikerrel használták a GPS-technikát. Reményeink szerint a közeljövő hídépítése kapcsán erre Magyarországon is sor kerül.

Köszönetnyilvánítás

A cikkben bemutatott kutatásokat a Magyar Űrkutatási Iroda a TP204 számú témapályázat és az OTKA a T43382 számú pályázat keretében támogatta, a támogatásért ezúttal is köszönetet mondunk. A cikkben bemutatott mérések elvégzésében és feldolgozásában több egyetemi hallgató (elsősorban Mnyerczán András, Szeverényi Nikolett és Rácz Zoltán) vett részt.

Hivatkozások

Ádám-Bányai-Borza-Busics-Kenyeres-Krauter-Takács (2004): Műholdas helymeghatározás. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Hajós B (1999): Az Erzsébet híd hőmérsékletváltozás okozta mozgásának vizsgálata. *Tudományos Diákköri Dolgozat*, BME.

Tsakiri M, Leikidis V, Stewart M (2001): GPS for monitoring cable-stayed bridges in seismic areas. Presented at the „*Vistas for Geodesy in the New Millennium*" IAG Scientific Assembly, Budapest, Hungary, 2-7 September.

Wong K, Man K, Chan W (2001): Monitoring Hong Kong's Bridges. *GPS World*, 12; 7, 10-18.

A SOPRONI KECSKE TEMPLOM MOZGÁSVIZSGÁLATA FOLYAMATOS DŐLÉSMÉRÉSSEL

*Mentes Gyula**

Investigation of the movements of the church Kecske by continuous tilt measurements in Sopron *- There are new requirements in the engineering surveying to carry out the health monitoring of objects without disturbing their operation. This paper shows that in some cases natural signals (e.g. wind, sunshine, Earth tide, etc.) can be used for movements and deformation investigations of objects as input signals. As test object the church Kecske in Sopron, Hungary was used.*

Keywords: building, deformation, tiltmeter, cyclic movements, Earth tides

A mérnökgeodéziai méréstechnikában új követelmény, hogy a különböző építmények „egészség monitorozását" az objektum funkciójának zavarása nélkül végezzék el. Ez a cikk azt mutatja be, hogy néhány esetben természetes jelek (pl. szél, napsütés, árapály, stb.) használhatók bemeneti jelként létesítmények mozgásának és deformációjának vizsgálatához. A tesztméréseket a soproni Kecske templomban végeztük.

Kulcsszavak: épület, deformáció, dőlésmérő, ciklikus mozgás, árapály

Bevezetés

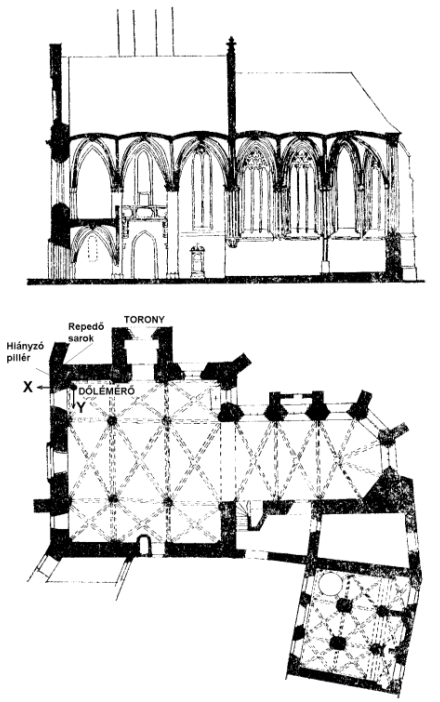
A mérnökgeodéziában az utóbbi években megnőtt az igény olyan új vizsgálati módszerek kidolgozására, amelyek segítségével épületek, hidak, ill. egyéb ipari létesítmények „egészségi állapotának" felmérése a vizsgált objektum működésének akadályoztatása nélkül legyen lehetséges. Ilyen követelmény, hogy egy híd terhelési próbája a forgalom zavarása nélkül történhessen meg. Ehhez hidak esetében, pl. olyan módszert szeretnének kidolgozni, melynek segítségével a forgalom által létrehozott rezgéseket az egyes szerkezeti elemeken rendszeres időközönként regisztrálva, a „rezgéskép" megváltozásából lehet következtetni az egyes elemek teherbíró képességének megváltozására. A teljes Európai Uniót átfogó SAMCO kutatási projekt célja olyan módszerek kidolgozása, melynek során természetes (pl. szél, mikroszeizmikus rezgések, stb.), ill. mesterséges gerjesztő jelek felhasználásával lehet az objektumok vizsgálatát, azok funkciójának zavarása nélkül elvégezni. E program, valamint egy korábbi német-magyar tudományos együttműködés keretében az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet a soproni TV-toronynál végzett vizsgálatokat, annak megállapítása céljából, hogy miképp mozog és deformálódik a torony napsugárzás, szél, mikroszeizmikus rezgések, ill. földrengések hatására. E mérések során vizsgáltuk a torony és a talajmozgások közötti kapcsolatot is. Ez utóbbi kutatás az objektumok földrengésbiztonsága szempontjából alapvető fontosságú *(Mentes és Fabian, 2001a, 2001b, Mentes 2002a)*.

A TV torony ciklikus mozgását vizsgálva, kiderült, hogy a frekvenciaspektrum tartalmazza az árapály-hullámokat is *(Mentes 2004a, 2004b) (www.fig.net/nottingham/technical programme.htm)* (*www.fig.net/pub/bratislava).* Ez a későbbiekben lehetőséget adna a torony szerkezeti állapotának rendszeres vizsgálatára, mivel az árapályhullámok csillagászati adatokból nagy pontossággal meghatározhatók, így a vizsgálathoz szükséges gerjesztőjel mindig ismert. Mivel a TV torony 175 m magas és gneisz kőzetre épült, ezért az árapályhullámok megjelenése a spektrumban várható volt. Annak megállapítása céljából, hogy a módszer esetleg kisebb, üledékre épített objektumok esetében is alkalmazható-e, a soproni Kecske templomnál folytattunk dőlésmérővel vizsgálatokat. Itt 2001. május 22. és 2003. január 6. között végeztünk folyamatos dőlésmérést, hogy megállapítsuk egy falrepedés okát *(Mentes 2002b)*. Az adatsor hossza lehetővé tette a templom ciklikus mozgásainak vizsgálatát egy olyan széles frekvenciasávban, amely a mikroszeizmikus rezgésektől az éves periódusig terjed.

*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: mentes@ggki.hu

A dőlésmérés célja és a dőlésmérő felszerelése

A Kecske templom 1280-ban épült és most renoválják. A templom alaprajza az *1. ábrán* látható. A felújítás előtt a falakat átvizsgálták és az *1. ábrán* jelzett sarokban egy repedést találtak. Keletkezésével kapcsolatban több elmélet merült fel. Ezek közül az egyik, hogy az 1. ábrán jelzett helyen egy támpillér hiányzik, a másik, hogy az utcában végzett csatornázási munkálatok miatt keletkezett a repedés. A folyamatos dőlésmérés elsődleges célja annak megállapítása volt, hogy a mozgás milyen gyors, meg kell-e támasztani a sarkot a felújítás előtt vagy sem. A kérdés eldöntése céljából az *1. ábrán* bejelölt helyen szereltünk fel a vizsgált falra egy Applied Geomechanics Inc. gyártmányú 722A típusú dőlésmérőt. A műszerbe egy kétkomponensű, elektromos érzékelővel ellátott, 0,1 μrad felbontóképességű, folyadék-dőlésmérő és egy hőmérő van beépítve. A dőlésmérőt bilincsekkel erősítettük a vizsgált falra a *2. ábrán* látható módon. Az adatgyűjtőt és az akkumulátort egy lezárható ládában helyeztük el. A dőlésmérőt úgy szereltük fel, hogy az X irányú dőléskomponens a vizsgált falra merőleges, ahogy azt az *1. ábra* mutatja. A nyilirányok a pozitív dőlésirányokat jelzik.

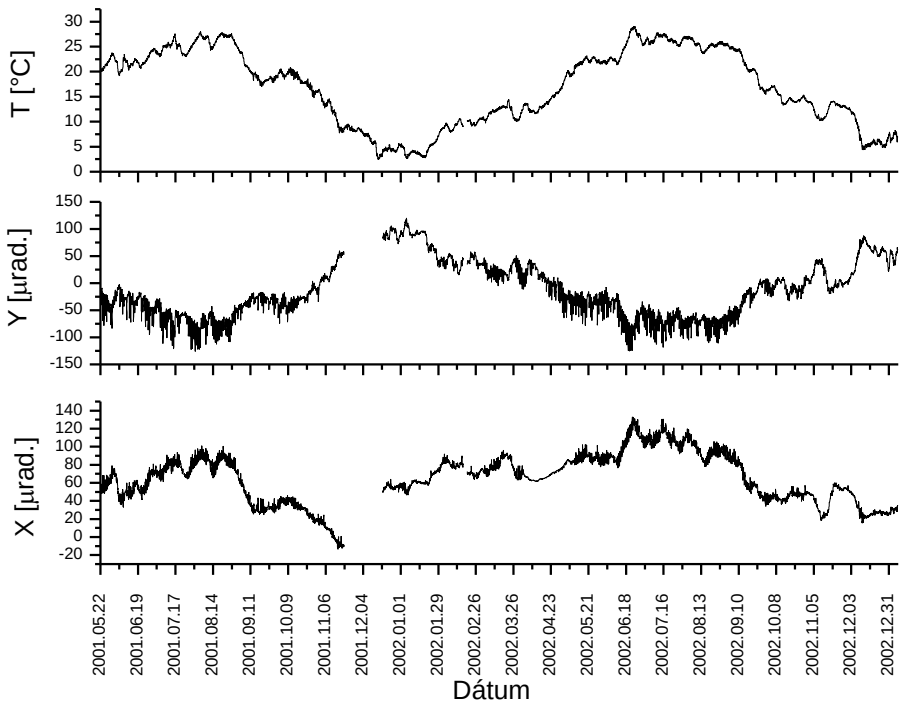


1. ábra. A Kecske templom alaprajza a dőlésmérő helyének feltüntetésével

2. ábra. A dőlésmérő elhelyezése a vizsgált falon

A mérési eredmények feldolgozása és értelmezése

A 2001. május 22. és 2003. január 6. között regisztrált nyers adatokat a *3. ábra* mutatja. Az ábrán X és Y jelöli a megfelelő irányokban regisztrált dőléseket, T pedig a hőmérsékletet. A dőlésgörbék hosszúidejű trendjéből meghatározható a dőlés sebessége. Ez X irányban: 3,1 μrad/év, Y irányban pedig: 20,1 μrad/év. A hosszúidejű dőlés által okozott repedés becsléséhez a falat 10 m magasnak becsülve és teljesen merevnek feltételezve, a kialakulható repedés mértéke 100 év alatt: X irányban 0,3 mm, Y irányban 2 mm. Ezek alapján, ha feltételezhető, hogy a dőléstrend nem változott számottevően az idők folyamán, akkor a repedés csak hosszúidejű folyamat eredménye lehet. A *3. ábrából* már szabad szemmel is látható, hogy a dőlések szoros korrelációban vannak a hőmérséklettel. A dőlésértékeket a hőmérséklettel korrelálva megkapjuk az 1 °C hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező dőlésváltozást. Ez X irányban: 2,1 μrad/°C, illetve Y irányban: -6,7 μrad/°C.

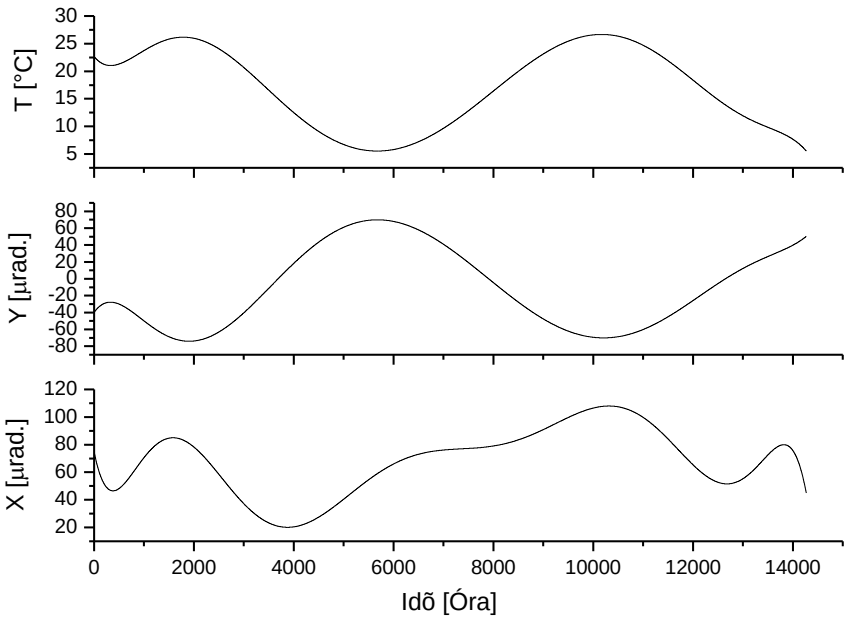


3. ábra. A Kecske templomban regisztrált nyers adatok

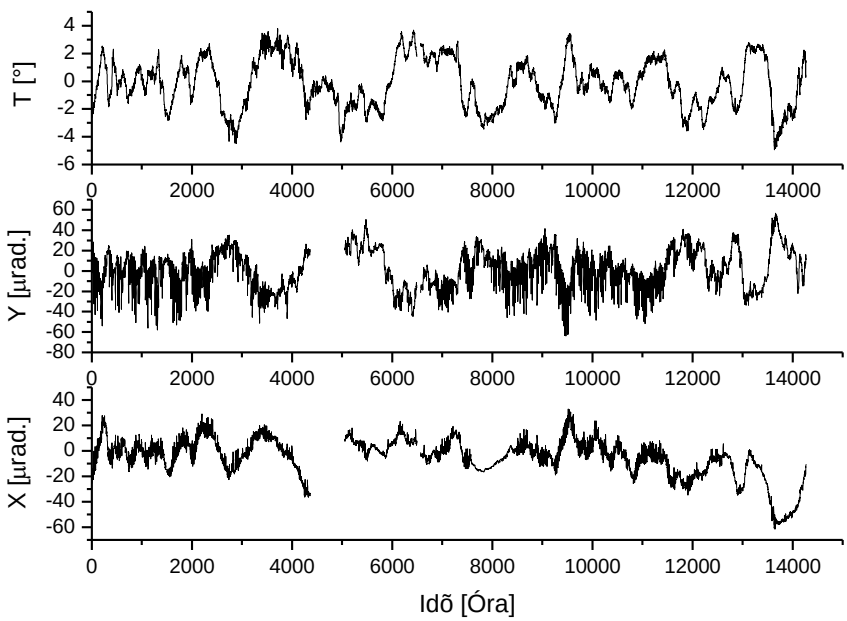
A nyers adatokra kilenced fokú polinomot illesztettünk, amely megadja a lassú, hosszúperiódusú dőléseket. Az így kapott polinom megfelel az adatoknak egy aluláteresztő szűrővel történő igen erős szűrésének. A *4. ábrán* láthatók a polinomok, amelyek periódusideje 1 év (1 év = 8760 óra), tehát a polinomok a szezonális hatások miatti dőlést adják meg. Az ábrán a hőmérséklet és a dőlések szoros korrelációja még szembetűnőbb, mint a nyers adatok esetében. A polinomokat a megfelelő nyers adatsorokból levonva a rövidperiódusú változások maradnak vissza (*5. ábra*). A *4. és 5. ábrákon* a vízszintes tengelyen az időt órában adtuk meg. Az *5. ábrán* látható jelek estében is szembetűnő a dőlések korrelációja a hőmérséklettel. Az 1 °C hőmérsékletváltozás hatására bekövetkező dőlésváltozás a rövidperiódusú dőlés és hőmérséklet adatok korrelációjából: X irányban: 4,8 μrad/°C, ill. Y irányban: -8,2 μrad/°C. Ezek az értékek kicsit nagyobbak, mint a nyers adatokból számítottak.

A rövidperiódusú jelek Fourier-spektruma megadja a jelben előforduló jellegzetes frekvenciákat. *A 6. ábra* mutatja az X és Y irányú dőlések, valamint a hőmérsékleti adatok amplitúdó spektrumait. A vízszintes tengelyeken a frekvenciát ciklus/nap (cpd) egységben tüntettük fel. A hőmér-

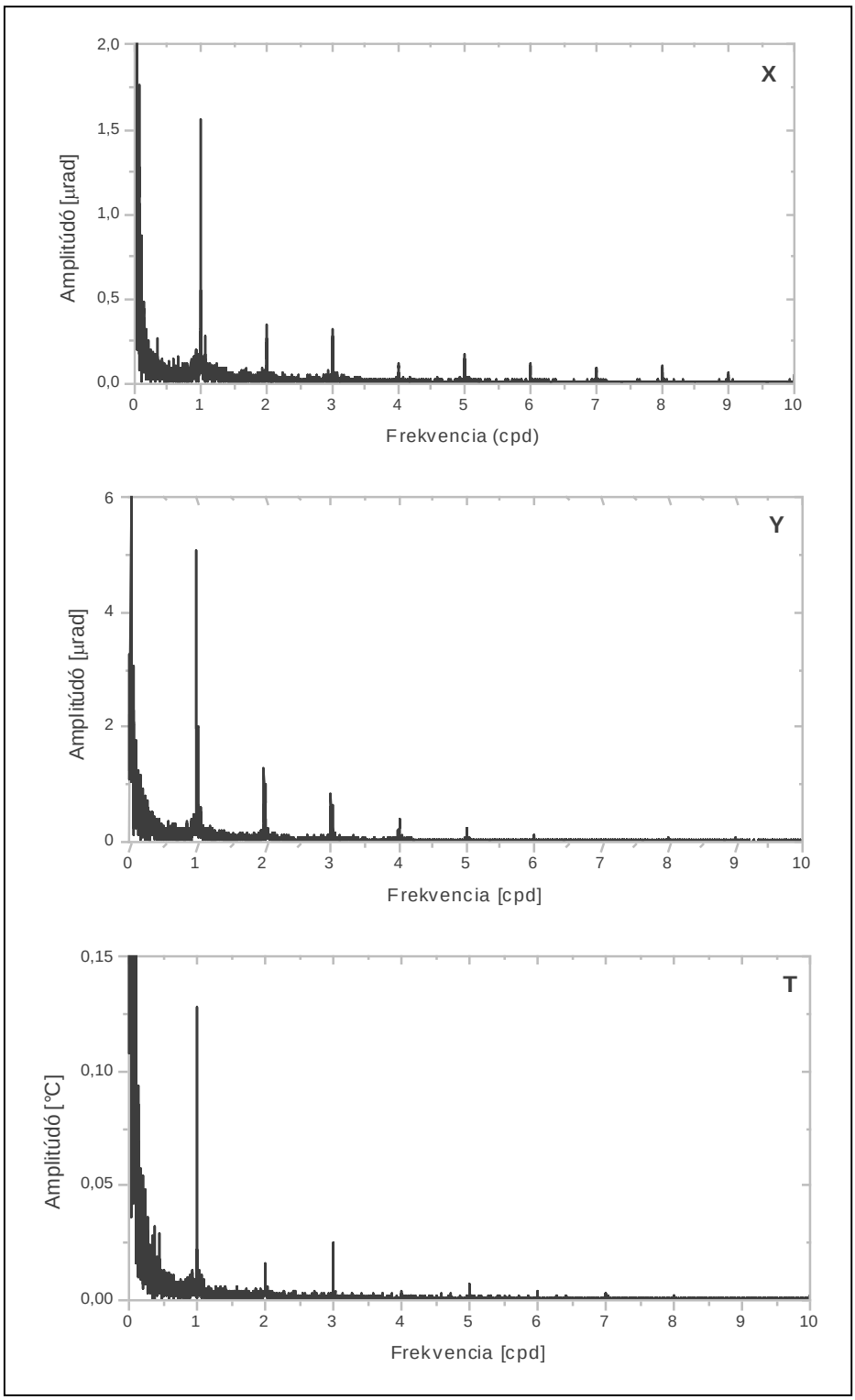
séklet amplitúdó spektrumát azért adtuk meg, hogy könnyebb legyen a hőmérsékletváltozás által okozott dőléseket az egyéb okokból bekövetkezett dőlésektől megkülönböztetni.



4. ábra. A lassú, hosszúperiódusú változások



5. ábra. A gyors, rövidperiódusú változások



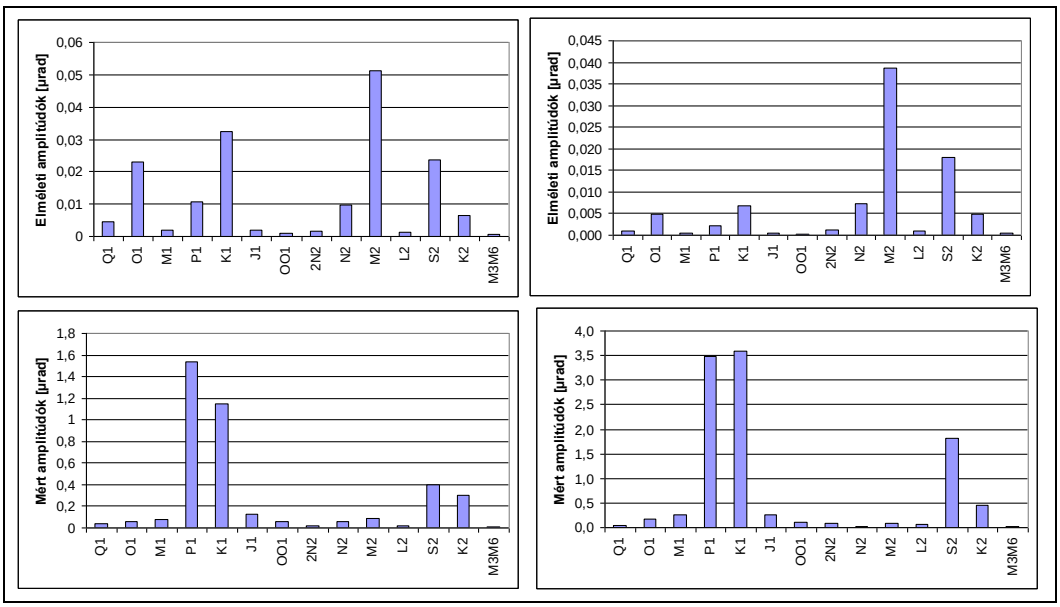
6. ábra. Az adatsorok amplitúdó spektruma

A *6. ábrából* azonnal kitűnik, hogy a legnagyobb amplitúdójú hullám egynapos frekvenciájú (1 cpd). A hőmérséklet amplitúdó spektrumában csak egy vonal látható 1 cpd-nél, míg a dőléskomponenseknél még több kisebb is. Az X irányú dőléskomponensnél ez a maximális érték 1,56523 μrad, az Y komponens esetében, pedig 5,06725 μrad. Ezeknek a komponenseknek a frekvenciája 1,00049 cpd, megegyezik a hőmérsékleti komponens frekvenciájával. Ez azt jelenti, hogy ezek a dőléskomponensek hőmérsékleti eredetűek. Ugyanígy van a félnapos (2 cpd) hullámok esetében is a hőmérséklettől függő dőléskomponens, de megjelennek más hullámok is a spektrumban. Már a soproni TV torony vizsgálatánál *(Mentes, 2004a)* is feltűnt, hogy nem az összes dőléskomponens hőmérsékleti eredetű, ezért az adatsort árapály analízisnek vetettük alá és kimutattuk, hogy a spektrumban árapályhullámok is vannak. Ugyanez feltételezhető a Kecske templom esetében is, annak ellenére, hogy a templom méreteiben, alapozását tekintve nagymértékben eltér a TV-toronytól. Mivel a *6. ábrán* a napos és félnapos hullámcsoportokban az egyes hullámok nem válnak szét, ezért az amplitúdóspektrum adatsorából az *I. táblázatban* összefoglaltuk a főbb árapályhullámok elméleti frekvenciáit, az ezeknek megfelelő - Fourier-analízissel kapott - frekvenciákat és a hozzájuk tartozó dőléshullámok amplitúdóit. Az elméleti és számított frekvenciák közötti kis különbség valószínűleg abból adódik, hogy az időmérés pontossága nem az árapály-regisztrálásnál megkövetelt pontosságú volt. E kicsi eltérések ellenére a táblázatban felsorolt dőléshullámok árapály eredetűnek tételezhetők fel. Ennek megerősítése céljából elvégeztük a dőlésadatok árapály analízisét is az ETERNA 3.30. programmal *(Wenzel, 1996)*.

I. táblázat. A Kecsketemplom dőlésvizsgálata során Fourier-analízissel kapott árapály hullámok amplitúdói és frekvenciái

Árapály hullám	Elméleti árapály frekvencia [cpd]	Számított árapály frekvencia [cpd]	X irányú dőlés amplitúdója [μrad]	Y irányú dőlés amplitúdója [μrad]
Q1	0.893244836	0.89355	0.06414	0.18501
O1	0.929532006	0.92871	0.08523	0.13500
P1	0.997264448	0.99756	1.14715	2.60418
K1	1.002738963	1.00195	1.56523	5.06725
J1	1.039036005	1.03557	0.14551	0.37570
N2	1.895984200	1.89697	0.02873	0.03168
M2	1.932280717	1.93213	0.06227	0.06041
S2	2.000000000	1.99951	0.34653	1.30189
K2	2.005477926	2.00537	0.26298	0.38748

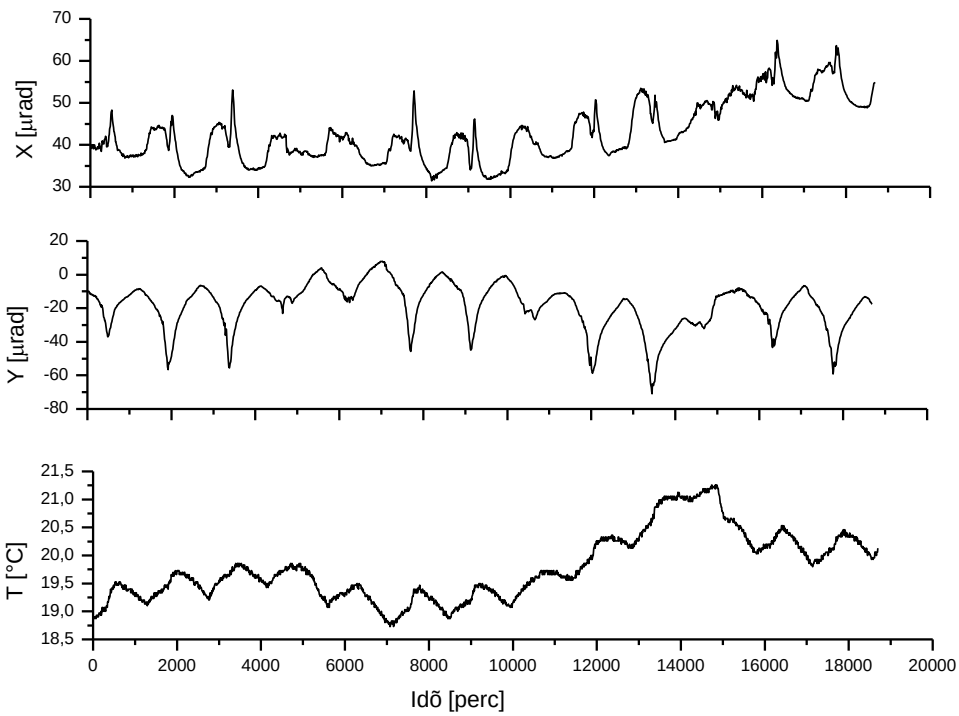
Az árapály-analízis eredményeit az X és Y dőléskomponensek estében a *7. ábra* szemlélteti. A templom koordinátáit megadva először meghatároztuk az elméleti hullám-amplitúdókat, majd ezt követően az adatsorokból a méréssel kapott amplitúdókat. Az ETERNA program hullámcsoportokat képez és ezek együttes amplitúdóját adja meg. A vízszintes tengelyen a hullámok (hullámcsoportok) elnevezése szerepel a függőleges tengelyen pedig az amplitúdók. Az X irányú dőléskompones (*7a. ábra*) esetében az elméleti amplitúdók valamivel nagyobbak, mint az Y irányú komponens esetében (*7b. ábra*). Mindkét komponens mért amplitúdói a P1, K1 hullámok kivételével jól egyeznek az elméleti értékekkel. A mért és elméleti amplitúdók léptékei eltérnek az ábrán, mivel a P1 és K1 hullámok amplitúdói sokkal nagyobbak, mint az elméleti értékek. Ez abból adódik, hogy ezeket a napos hullámokat a Nap generálja és a hőmérséklet változása is napos periódusú, ezért ezeket a hullámokat a hőmérsékleti hatás felerősíti. Ugyanez mondható el az Y irányú dőlések estében (*7b. ábra*) is. A mérésből kapott árapály-amplitúdók egymáshoz képesti aránya csak egy-két hullám (pl. M1, O1, Q1) esetében tér el az elméleti arányoktól, melynek okát jelenleg még nem ismerjük. Lehet, hogy ez is összefüggésben van a hőmérsékleti hatással. A Fourier-analízis és az árapály-analízis eredményét összevetve láthatjuk, hogy az amplitúdók nagyságrendileg egyeznek, az eltérések abból adódnak, hogy az ETERNA hullámcsoportokra adja meg az eredményeket.



7a. **7b.**

7. ábra. Az árapály-analízis eredményei: (a) X irányú, (b) Y irányú dőlés

A napi hőmérsékleti mozgások bemutatására a *8. ábrán* egy perces mintavételezéssel kapott kb. 13 napos adatsor látható. A dőlést a Nap kelet-nyugati mozgása során a napsugárzás okozta felmelegedés hozta létre. A napos hőmérsékleti mozgások amplitúdója legalább három nagyságrenddel nagyobb, mint az árapály-hullámoké. Ez is bizonyítja az erős hőmérsékleti hatást a K1 és P1 hullámok esetében.



8. ábra. A napi dőlésváltozások a hőmérsékleti hatás következtében

Összefoglalás

A kapott eredmények azt mutatják, hogy nagy objektumok állapotának rendszeres ellenőrzéséhez természetes gerjesztő jelként napsugárzás, hőmérséklet, szél, mikroszeizmikus rezgések, néha földrengések és egyes speciális esetekben a szilárd Föld árapálya is felhasználható *(Mentes 2004a, 2004b)*. Ez utóbbi azért nagy jelentőségű, mivel állandóan jelenlevő bemeneti jelről van szó, továbbá az elméleti árapály-hullámok könnyen meghatározhatók egy adott koordinátájú pontban. Ha a dőlésméréseket kiegészítjük a környezeti paraméterek (hőmérséklet, légnyomás, szélsebesség, stb.) teljeskörű mérésével, akkor ezek a hatások korrekcióba vehetők és az árapály-hullámok amplitúdói pontosabban határozhatók meg. Ugyanakkor a környezeti paraméterek is felhasználhatók bemeneti jelként az épület mozgásainak vizsgálatához. A SAMCO nevű EU projekt keretében átfogó kutatás folyik abból a célból, hogy hogyan lehet az egyes természetes gerjesztőjelek esetében az objektum mozgásaiból, deformációjából, egyszóval válaszából az egyes szerkezeti elemek hibájára következtetni. Ez a következő évek egyik fő feladata lesz a mérnökgeodéziában, mivel egyre nagyobb az igény objektumok (tornyok, hidak, nagy építmények, veszélyes létesítmények, stb.) egészségi állapotának felmérésére azok funkciójának zavarása nélkül.

Köszönetnyilvánítás

Ez a tanulmány a T046264 számú OTKA és a G1RT-CT-2001-05040 számú SAMCO EU projektek támogatásával készült.

Hivatkozások

Mentes Gy, Fabian M (2001a): Investigation of motions due to mechanical coupling between ground and the TV tower at Sopron, Hungary. In: Zhenglu, Z. Retscher, G. Guo, J. (Eds.): *Proceedings of the IAG Workshop on Monitoring of Constructions and Local Geodynamic Processes*, Wuhan, China, May 22-24, 56-62.

Mentes Gy, Fabian M (2001b): Investigation of ground and object motions at the TV tower in Sopron, Hungary. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 36; 4, 391-398.

Mentes Gy (2002a): Monitoring of Building and Related Ground Motions by Tiltmeters. In: Kahmen, H. Niemeier, W. Retscher, G. (Eds.): Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering II., Department of Applied and Engineering Geodesy, Institute of Geodesy and Geophysics, *Vienna University of Technolgy*, Vienna, Austria, 18-26.

Mentes Gy (2002b): Monitoring Building Motions by Tiltmeters. In: Kopáčik, A., Kyrinovič, P. (Eds): Proceedings of the 2nd International Conference of Engineering Surveying INGEO 2002, *Slovak University of Technology*, Bratislava, 217-224.

Mentes Gy (2004a): Measurement and Analysis of Cyclic Deformations and Movements of the TV Tower in Sopron. 1st FIG International Symposium on Engineering Surveys for Construction Works and Structural Engineering. Workshop on Measurements and Analysis of Cyclic Deformations and Structural Vibrations. *University of Nottingham*, Nottingham, United Kingdom, 28 June – 1 July 2004. CD, International Federation of Surveyors, Frederiksberg, Denmark (ISBN 87-90907-35-3), TS8. 2, 1-13.

Mentes Gy (2004b): Health Monitoring of Structures Using Natural Effects as Excitation Signal. *Proceedings of the 3rd International Conference on Engineering Surveying and FIG Regional Conference for Central and Eastern Europe INGEO* November 11-13, Bratislava, Slovakia, CD, International Federation of Surveyors, Frederiksberg, Denmark (ISBN 87-90907-34-5), TS5 1-9.

Wenzel HG (1996): The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 124, 9425-9439.

AZ MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓ INTÉZET EXTENZOMÉTEREKKEL VÉGZETT VIZSGÁLATAI

Eperné Pápai Ildikó[*]

Extensometric measurements carried out by the Geodetic and Geophysical Research Institute of the Hungarian academy of Sciences *- The paper briefly demonstrates the extensometric network installed in the Pannonian Basin and gives the main parameters of the instruments. On the examples of extensometric data measured at the Geodynamical Observatory in Sopronbánfalva and in the uranium mine in Pécs the paper shows that the rates of the tectonic movements are not constant in the time series available up to now. Therefore a reliable estimation of the rates of the movements can only be made on the base of long data series.*

Keywords: extensometer, tectonics, Earth tide, Pannonian Basin

A cikk röviden bemutatja a Pannon-medencébe telepített extenzométeres hálózatot és megadja a műszerek paramétereit. A tanulmány a Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban és a pécsi uránbányában mért adatok alapján megmutatja, hogy az extenzométeres mérések alapján meghatározott tektonikai mozgások sebessége nem állandó, időről-időre változhat. Ezért a mozgási sebességek megbízható becslése csak hosszú regisztrálási idősorok alapján végezhető el.

Kulcsszavak: extenzométer, tektonika, földi árapály, Pannon-medence

Bevezetés

A geodinamika céljai közé tartozik a szilárd földkéreg deformációinak meghatározása. E deformációk közül kiemelkedő fontosságúak a szilárd föld árapálya, valamint a tektonikai mozgások által okozott deformációk. Az előbbiekből a Föld belső szerkezetére lehet következtetni, mivel a csillagászati adatokból nagypontossággal meghatározható árapály erők hatására a földkéreg a Föld belső szerkezetétől függően válaszol. A lokális és regionális tektonikai mozgások vizsgálata egyrészt a földrengések keletkezési okainak kutatásában játszik nagy szerepet, másrészt a mindennapi életben pl. veszélyes ipari létesítmények helyének kijelölésekor nyújthat fontos földtani információkat. Geodinamikai deformációvizsgálatok céljából a Pannon-medencét mintegy körülölelve hat ponton valósult meg extenzométerekkel történő regisztrálás.

Extenzométeres hálózat a Pannon-medencében

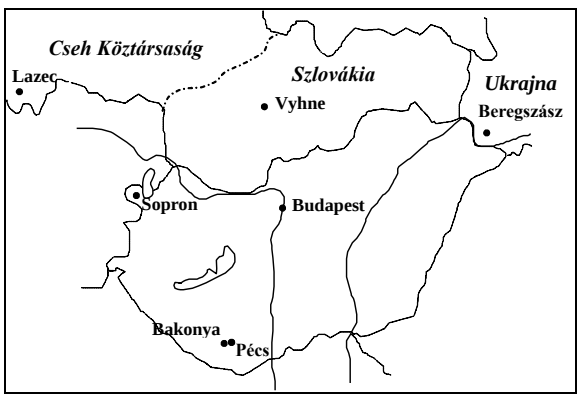
A szilárd földkéreg deformációinak és a földárapály vizsgálata céljából az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézet (GGKI) Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumában 1971-től folyamatos dőlésmérések folytak egy Tomaschek-Ellenberger, majd a Belga Királyi Obszervatóriummal együttműködve egy Verbaandert-Melchior-féle kvarc ingapárral. 1975-től az intézetben kifejlesztett kapacitív érzékelésű, fémszálas horizontális ingapárral történtek mérések *(Mentes 1979, 1985)*. Mivel ezek a műszerek nagyon érzékenyek a lokális hatásokra, 1990-ben a moszkvai Földfizikai Intézettel közösen egy 22 m hosszú kvarccsöves extenzométer telepítésre került sor az obszervatóriumban *(Mentes 1991)* és megszűnt a horizontális ingákkal való regisztrálás. Hasonló extenzométert telepített az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet a budapesti Mátyáshegyi Obszervatóriumban 1980 tavaszán *(Latinina et al. 1984)*, majd egy második extenzométer telepítésére került sor a 80-as évek végén *(Varga, és Varga 1991)*. Ezek a műszerek is a moszkvai Földfizikai Intézettel együttműködve készültek. A Szlovák Tudományos Akadémia Földfizikai Kutatóintézete 1984-ben Výhne-ben létesített extenzométeres állomást, szintén a moszkvai Földfizikai Intézettel közösen *(Brimich 1988)*. Az eddig említett extenzométerek még fotoelektromos regisztrálóval működtek. A GGKI-ban *Mentes (1991)* fejlesztett ki nagyérzékenységű és nagy stabilitású kapacitív érzékelőket ezekhez a műszerekhez, amelye-

[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: papai@ggki.hu

ket azóta már több országban (Cseh Köztársaság, Németország, Szlovákia) is alkalmaznak. 1990-ben a GGKI a prágai Földfizikai intézettel közösen Lazeč-ben egy grafitbányában telepített két kapacitív érzékelésű extenzométert, ezt követően pedig a Mecseki Uránbányák megrendelésére a pécsi uránbányában, 1040 m mélyen épített egy műszert lokális geodinamikai mozgásvizsgálatok és tudományos megfigyelések céljából *(Mentes, Berta 1997)*. 1999-ben az uránbányát bezárták és a GGKI a Mecsekérc Rt. megrendelésére 2000-ben Bakonyán egy négy extenzométerből álló háromdimenziós extenzométeres állomást épített a Mecsekérc Rt.-vel közösen *(Mentes 2000)*. A 3D állomás a megépítés után benedvesedett, a vágatban csepegő víz jelent meg, ezért az állomást 2002 őszén a GGKI a Mecsekérc Rt.-vel közösen átépítette. A regisztrált adatok már jók, azonban az adatsor hossza geodinamikai következtetések levonásához jelenleg még rövid.

A Mátyáshegyi Obszervatórium műszerei anyagi okok miatt 1997-től 2003-ig nem működtek. 2004-ben a GGKI felújította a műszereket, az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet biztosította a korszerű digitális regisztrálást. Jelenleg az installált műszerek stabilizálódása még tart.

A Pannon-medencében illetve annak peremén elhelyezkedő extenzométeres obszervatóriumokat az *1. ábra* mutatja, a műszerek fontosabb adatait pedig az *I. táblázat* foglalja össze.



1. ábra. A Pannon-medencében illetve annak peremén található extenzométeres obszervatóriumok

I. táblázat. A Pannon-medencében illetve annak peremén lévő extenzométerek adatai

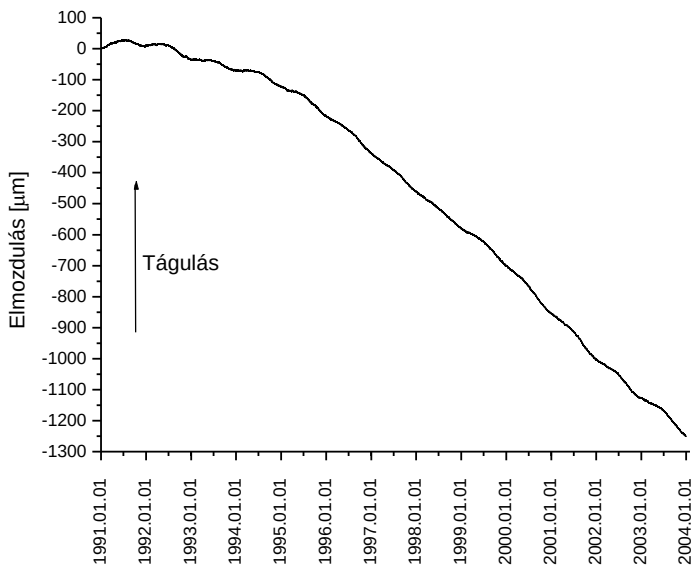
Extenzométer	Állomás koordináták		Azimut	Műszer hossza [m]	Regisztrálás	Hivatkozás
	Szélesség	Hosszúság				
Bakonya Ext1.	46.1°	18.1°	0°	20	Kapacitív	Mentes 2000
Bakonya Ext2.	46.1°	18.1°	0°	1.7	Kapacitív	
Bakonya Ext3.	46.1°	18.1°	90°	1.7	Kapacitív	
Bakonya Ext4.	46.1°	18.1°	Vertikális	1.7	Kapacitív	
Beregszász I. Ukrajna	48.2°	22.7°	73°	27.5	Foto	Varga és Varga 1994
Beregszász II. Ukrajna	48.2°	22.7°	37°	11.4	Foto	
Budapest I.	47.6°	19.0°	114°	21.3	Kapacitív	Varga et al. 1993
Budapest II.	47.6°	19.0°	38°	13.8	Kapacitív	
Lazeč I. Cseh Köztársaság				20	Kapacitív	-
Lazeč II. Cseh Köztársaság				20	Kapacitív	
Pécs	46.1	18.1	19°	20.5	Kapacitív	Mentes és Berta 1997
Sopron	47.7°	16.5°	116°	22	Kapacitív	Mentes 1991
Vyhne	48.5°	18.5°	55°	20.5	Kapacitív	Brimich 1988

Valamennyi műszer kalibrálása a *Mentes (1995a, 1995b, 1997, 1999)* által kifejlesztett módszerrel történt, ami azt jelenti, hogy a műszerek által szolgáltatott adatok azonos megbízhatóságúak *(Mentes, Brimich 1996)*. Tudomásunk szerint ilyen jellegű vizsgálatot extenzométerek esetében még nem végeztek.

Az egyes obszervatóriumokban kapott mérési eredmények publikálása rendszeresen megtörténik. A budapesti és výhnei mérések korábbi eredményeit az alábbi publikációkban találhatjuk meg: *Varga és Varga (1994), Varga et al. (1993)*. Ebben a tanulmányban a fentiek miatt csak a Sopronbánfalvi Obszervatóriumban és a Mecseki Uránbányában mért extenzométeres adatok bemutatására, feldolgozására és értelmezésére koncentrálunk, az új mérési adatok kiértékelésével kiegészítve az eddig megjelent eredményeket *(Mentes, Berta 1997; Eper, Mentes 1999; Mentes 2001)*.

A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban mért extenzométeres adatokból számított eredmények

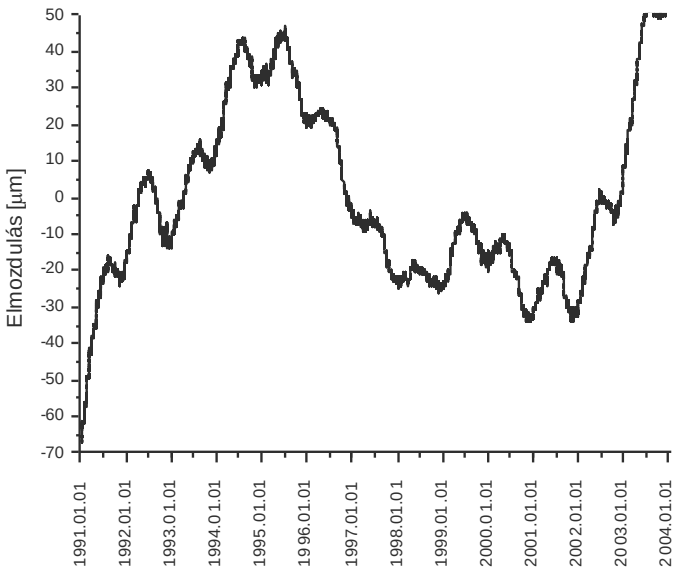
A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban 1991. január 1. és 2003. december 31. között mért adatokat a *2. ábra* mutatja. Az ábrából jól látható, hogy a műszer kompressziót regisztrál, amelynek sebessége 1995-től jelentősen megnövekedett. Annak eldöntése céljából, hogy ez a nagymértékű elmozdulás tényleges tektonikai mozgás vagy esetleg műszerjárás eredménye-e, az extenzométerre több elektronikus érzékelőt szereltünk fel, amelyek együttfutása azt bizonyítja, hogy nem az érzékelő egység okozta a mért nagy változást *(Mentes 1997)*. A tektonikai mozgás sebessége változó. Az első négy évben a deformáció sebessége 20-50 µm/év tartományba esett, majd 1995-től erősen megnövekedve 120-160 µm/év közötti értékek adódtak. Az éves deformáció mértéke 2000-ig növekvő, utána csökkenő tendenciát mutat a 2003 végéig tartó adatsor alapján. A vizsgált időszakra egy erősen közelítő átlagos értéket a mért görbére illesztett regressziós egyenes meredekségéből kapunk. Ez 105 µm/év értéknek adódik, ami valószínűleg nem tisztán tektonikus mozgás, hanem az obszervatórium környezetének topográfiája által befolyásolt érték.



2. ábra. A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban regisztrált adatok

Korábbi vizsgálatok azt bizonyítják, hogy az obszervatóriumban mért extenzométeres adatokra a hőmérséklet és a légnyomás változása nincs lényeges hatással *(Mentes 2001; Eper, Mentes 2002)*. Ezek a szezonális hatások a hosszúidejű tektonikai mozgásvizsgálat során nem játszanak szerepet. A hosszúidejű trendet másodfokú görbével közelítve és a görbét a mért adatokból levonva a szezonális

változások jobban láthatók (*3. ábra*). Az ábra szemléletesen mutatja az éves periódusú szezonális változások amplitúdójának arányát a hosszabb léptékű változásokhoz viszonyítva.

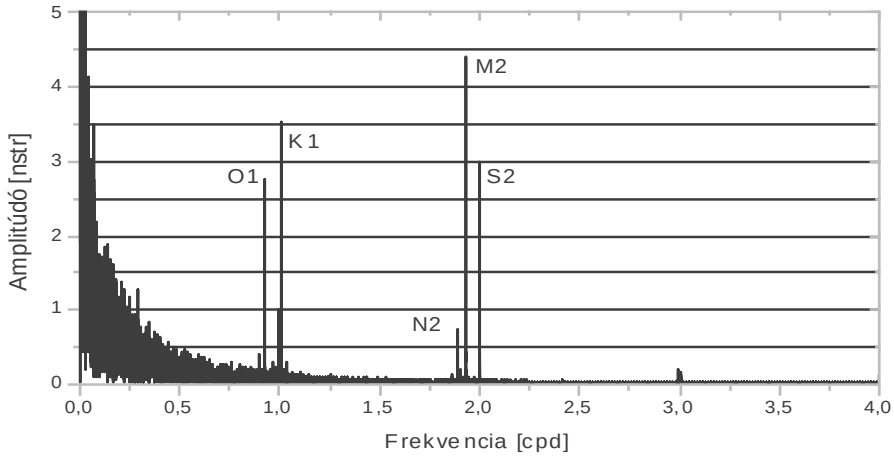


3. ábra. A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban regisztrált adatok a másodfokú trend levonása után

A tektonikai mozgásvizsgálatok céljából nem elég az extenzométer rendszeres kalibrációjával meggyőződni a műszer stabilitásáról, hanem meg kell bizonyosodni a műszer és a kőzet megfelelő, stabil kapcsolódásáról is. A kapcsolat megfelelő, ha az adatsorból a különböző frekvenciájú árapály-hullámok egyértelműen kimutathatók. Erről egyrészt az adatok Fourier-transzformációval kapott amplitúdó spektrum illetve az árapály-kiértékelés eredménye alapján győződhetünk meg.

A *4. ábrán* több éves mérési adatsor Fourier-transzformációval nyert amplitúdó spektruma látható a hosszúidejű trend eltávolítása után. A trend meghatározása céljából a mért adatokra egy kilencedfokú polinomot illesztettünk. Ezt a polinomot kivonva az eredeti adatokból a visszamaradó görbében már csak a rövidperiódusú változások lesznek, ezáltal a kapott spektrumban az árapályhullámok jól elkülöníthetőek Az árapály-kiértékelés eredményeit a szokásos megjelenítési módnak megfelelően a vízszintes tengelyen a frekvenciát cpd (ciklus/nap) egységben, a függőleges tengelyen az amplitúdót nstr (nanostrain) egységben ábrázoltuk. Ez utóbbit úgy kapjuk, hogy a mért elmozdulást elosztjuk az extenzométer hosszával (1 nstr = 10^{-9} relatív hosszváltozás). Az ábrán bejelöltük a fontosabb napos és félnapos árapály-hullámokat. A napos periódusúakat 1-es a félnaposakat 2-es számmal jelöltük. A jelölésnél a nemzetközi gyakorlatot követtük.

Az adatok árapály-kiértékelését az ETERNA 3.3 programmal végeztük el. Ezt a szoftvert a szupravezető graviméterek megjelenése után a megnövekedett pontossági követelményeknek megfelelően fejlesztették ki *(Wenzel 1996)*. A szoftver a graviméteres adatok mellett alkalmas dőlésmérőkkel és extenzométerekkel mért adatok feldolgozására is. Ez utóbbi mennyiségekre a program tesztelés alatt van, mivel az extenzométeres adatok nagymértékben függenek a kőzet helyi sajátosságaitól. A kiértékelés elvégezhető csak az extenzométeres adatsorokon, de az ETERNA lehetővé teszi a mérési helyen regisztrált valamilyen meteorológia adatsor (pl. légnyomás) megadását is és automatikusan elvégzi az extenzométeres adatok korrekcióját. Vizsgálataink szerint a kétféle (korrigálatlan, korrigált) kiértékeléssel kapott eredmények között nincs lényeges különbség, ami azt mutatja, hogy az obszervatórium és a műszer stabilitása megfelelő.



4. ábra. A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban regisztrált adatok amplitúdó spektruma

Az árapály-kiértékelés eredményét a *II. táblázat* mutatja. A táblázatban a mért értékek mellett feltüntettük az ETERNA programmal számítható elméleti hullámokat is. A mért és elméleti amplitúdók közötti különbség az obszervatórium helyi sajátosságainak, a közvetlen környezet topográfiájának, geológiai, hidrológiai, stb. viszonyainak a függvénye. Mind a spektrumanalízis, mind pedig az árapály-kiértékelés azt mutatja, hogy a műszerek jók, a műszerek kőzethez való csatlakozása megfelelő. A mért adatsorból számított árapály-amplitúdók nagyságrendje egybevág az elméletileg az adott földrajzi helyre számított, adott azimuttal rendelkező lineáris deformációk nagyságrendjével. Ugyanakkor az egynapos hullámcsoporton belül a fő hullámok arányának eltérése az elméleti értéktől rövidperiódusú (közel egynapos) feltehetően meteorológiai hatás jelenlétére utal.

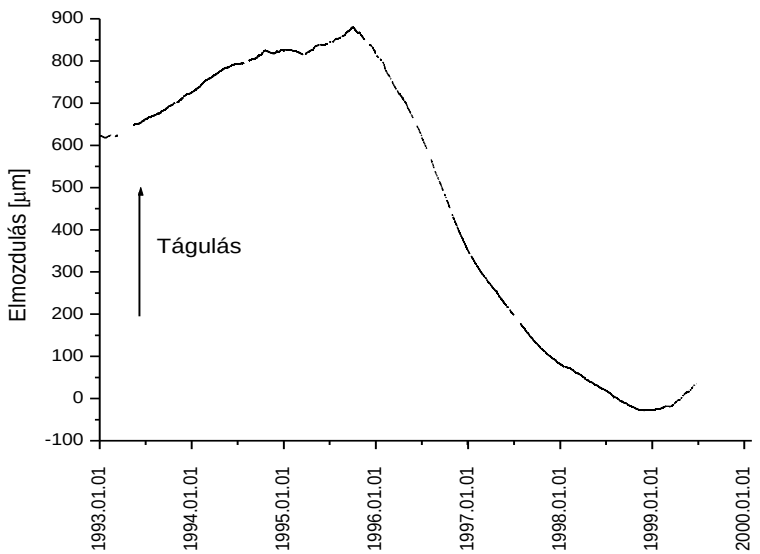
II. táblázat. A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban mért adatokból meghatározott árapály-hullámok paramétereinek összehasonlítása az elméleti értékekkel

Hullámcsoport	Elméleti amplitúdó [nstr]	Mért amplitúdó [nstr]	Fáziseltérés az elméleti hullámhoz képest [fok]
Q1	1,262	0,646±0,060	-3,752±6,824
O1	6,594	4,205±0,013	-4,261±1,152
M1	0,518	0,388±0,151	-8,801±11,575
P1	3,067	0,746±0,027	17,004±6,369
K1	9,269	4.517±0,009	-0,058±1,093
J1	0,519	0,339±0,160	0,920±14,056
OO1	0,284	0,146±0,279	-11,643±30,962
2N2	0,155	0,129±0,125	-12,387±8,609
N2	0,968	1,023±0,026	-10,930±1,425
M2	5,057	5,313±0,005	-13,233±0,277
L2	0,143	0,136±0,171	-26,034±10,341
S2	2,353	3,942±0,011	-4,112±0,372
K2	0,639	0,659±0,043	-15,615±2,387

A pécsi uránbányában mért extenzométeres adatokból számított eredmények

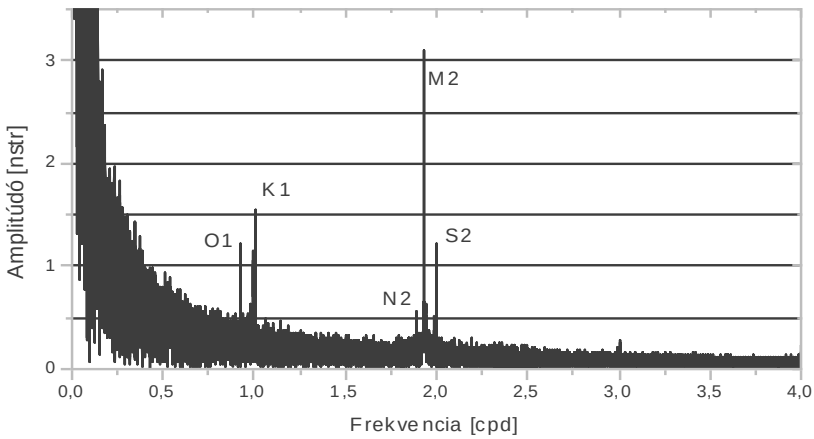
A pécsi uránbányában értékelhető extenzométeres adatokat 1993 és 1999 között kaptunk. Ez, eltekintve a műszer installálását követő megnyugvási, stabilizálódási időszaktól, gyakorlatilag azonos az obszervatórium fennállási idejével. A regisztrált nyers adatokat az *5. ábra* mutatja. Az ábrából jól látható, hogy az 1993-1995 időszakban tágulást mért a műszer, ezt követően 1999-ig egy igen gyorsnak mondható összenyomódást regisztrált, majd a bánya bezárásáig ismét tágulást. Sajnos a regisztrálás egy igen érdekes szakaszban ért véget, ezért már nem dönthető el egyértelműen, hogy a változó irányú elmozdulás a bányászati tevékenység következménye vagy összefüggésben van-e a Mecsek hegység emelkedésével és a területen lezajló tektonikai folyamatokkal. Amennyiben a bakonyai 3D állomás hosszú időn keresztül jó adatokat szolgáltat, talán választ kaphatunk a fenti kérdésre.

A tektonikai mozgás mértékének megállapítására a mozgás irányának illetve sebességének változása miatt a hosszúidejű trendből (a regressziós egyenes meredekségéből) csak igen durva közelítő érték adódna. Kicsit jobb a becslés, ha a vizsgált időszakra a tényleges elmozdulás értékét osztjuk az idővel. Ennek alapján 85 μm/év az összenyomódás sebessége.



5. ábra. A pécsi uránbányában regisztrált extenzométeres adatok

A pécsi adatok kiértékelését a sopronbánfalvi extenzométer adatainak kiértékelésével azonos módon végeztük. A *6. ábra* mutatja az extenzométeres adatsorból számított spektrumot, és a *III. táblázat* tartalmazza az árapály-kiértékeléssel kapott eredményeket. Ha a két állomás eredményeiből összehasonlítjuk a mért és az elméleti amplitudók arányát (az amplitúdó faktort) illetve a fáziskésés értékeit a táblázatokban (*II. és III. táblázat*), megállapítható, hogy a pécsi mérés eredményeiben ezek a mennyiségek nagyobb változékonyságot mutatnak. Valószínűleg a pécsi mérőállomáson, bár a műszer megfelelően stabilizálódott, a bányászati tevékenységek zavaró hatásai érintették a mérés folyamatát.



6. ábra. A pécsi uránbányában regisztrált adatok amplitúdó spektruma

III. táblázat. A pécsi uránbányában regisztrált adatokból meghatározott árapály hullámok paramétereinek összehasonlítása az elméleti értékekkel

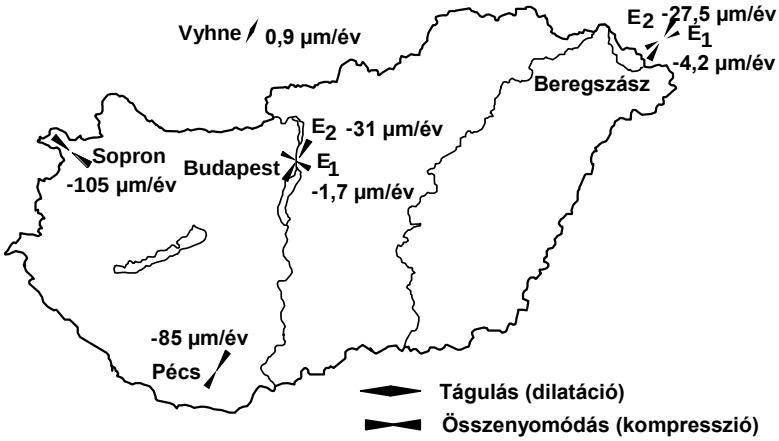
Hullámcsoport	Elméleti amplitúdó [nstr]	Mért amplitúdó [nstr]	Fáziseltérés az elméleti hullámhoz képest [fok]
Q1	0,909	0,232±0,165	-41,754±37,092
O1	4,749	2,235±0,036	-21,029±4,331
M1	0,373	0,059±0,344	-108,542±123,984
P1	2,209	1,077±0,065	-41,343±7,6573
K1	6,676	2,662±0,024	-19,322±3,485
J1	0,373	0,410±0,428	-10,949±22,330
OO1	0,204	0,204±0,998	-37,368±54,235
2N2	0,333	0,181±0,237	-54,951±25,128
N2	2,087	1,024±0,052	-39,696±6,021
M2	10,902	5,041±0,010	-46,265±1,271
L2	0,308	0,296±0,405	-74,083±24,168
S2	5,072	2,382±0,022	-45,408±2,734
K2	1,378	0,711±0,106	-48,696±11,810

Összefoglalás

A sopronbánfalvi és pécsi állomásokon regisztrált extenzométeres adatok alapján megállapítható, hogy a hosszúperiódusú változások mértéke nem állandó. Annak megállapítására, hogy a regisztrált hosszúléptékű deformációban milyen szerepet játszanak a mérési hely geológiai, hidrológiai hatásai és a műszerek driftje, további vizsgálatok folynak. Ezenkívül nagyon fontos a hosszú időtartamú mérés, mivel rövid adatsorok alapján mind a deformáció mértéke, mind pedig hosszabb időszakra vonatkozó iránya helytelenül állapítható meg. Ugyanakkor a hosszúidejű adatsorokból olyan új földtani ismeretek is származhatnak, amelyek az eddigi, időszakosan, kampányszerűen végzett mérésekből nem voltak felismerhetők.

Az állomások adataiból meghatározott árapály-frekvenciás amplitúdók az extenzométeres méréstechnikában szokásos pontossággal rendelkeznek. Ebből a tényből arra következtethetünk, hogy a deformációt mérő műszer elhelyezése, kőzethez való csatolása megfelelő, adatai a kőzetpontok közötti mozgásokat híven tükrözik ezeken az állomásokon. A *7. ábrán* feltüntettük az eddigi mérések alapján feltételezhető tektonikai mozgássebességeket és irányokat. A megadott értékek

mindenütt csak a mért adatsorok időtartamára érvényesek, ezért a korábban megadott értékek *(pl. Mentes 1997, 2001)* az új adatoknak megfelelően változtak.



7. ábra. A Pannon-medencében mért tektonikai elmozdulások sebességei és irányai

Köszönetnyilvánítás: A tanulmány az OTKA T046264 számú kutatási pályázat keretében készült.

Hivatkozások

Brimich L (1988): Extensometric measurements at the Výhne tidal station. Contributions of the Geophysical Institute of the *Slovak Academy of Sciences*, 18, 58-62.

Eper IP, Mentes Gy (1999): Results of Extensometric Tidal Measurements at the Sopron Station. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 131, 10201-10206.

Eper IP, Mentes Gy (2002): The effect of atmospheric pressure on strain measurement at the Sopron Observatory, Hungary. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 137, 10901-10906.

Latinina LA, Szabó Gy, Varga P (1984): Observations of the deformation of the Earth' crust in the Mátyáshegy cave near Budapest. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 19; 197-205.

Mentes Gy (1979): Development of horizontal pendulum recordings. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung*., 14; 1-2, 101-109.

Mentes Gy (1985): Horizontal pendulum with electrical recording. *Bulletin Géodésique*, 59; 1, 94-102.

Mentes Gy (1991): Installation of a quartz tube extensometer at the Sopron Observatory. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 110, 7936-7939.

Mentes Gy (1995a): In-situ calibration of quartz tube extensometers. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 121, 9070-9075.

Mentes Gy (1995b): High Precision Calibration of Quartz Tube Extensometers. Prceedings of the Twelfth International Symposium on Earth Tides (ed. H. T. Hsu), *Science Press, Beijing*, New York, 209-214.

Mentes Gy, **Brimich L** (1996): Calibration of quartz-tube extensometer at the Vyhne tidal station. *Contributions of the Geophysical Institute of the Slovak Academy of Sciences*, 26, 85-92.

Mentes Gy (1997): Folyamatos mérési módszerek geodinamikai, környezeti és ipari deformációk megfigyelésére. MTA doktori értekezés, *Sopron (Magyar Tudományos Akadémia)*, 173 p.

Mentes Gy (1999): Extenzométeres adatok megbízhatóságának növelése a műszerek egységes kalibrálásával. MTA FKK Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, Sopron, *Geomatikai Közlemények* I, 11-20.

Mentes Gy, Berta Zs (1997): First results of the extensometric measurements in South Hungary. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 127, 9744-9749.

Mentes Gy (2000): Geodinamikai mérőállomás, 3D extenzométer. Kiviteli terv és az elkészült mérőállomás felépítése. *Kutatási jelentés* a Mecsekérc Rt. részére, MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, Sopron, p. 29.

Mentes Gy (2001): Results of Extensometric Measurements at the Sopron and Pécs Stations in Hungary. *Journal of Geodetic Society of Japan*, 47; 1, 101-106.

Varga P, Varga T (1991): A study of the nature of the drift curves recorded with different quartz tube extensometers. *Marees Terresrtres Bulletin d'Informaton*, 110, 8027-8030.

Varga P, Varga T (1994): Recent horizontal deformation of the Pannonian basin measured with extensometers. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 29; 1-2, 57-80.

Varga T, Latynina LA, Brimich L, Mentes Gy, Katona Gy, Varga P (1993): Study of the extensometric records in non-tidal frequency domain. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 116, 8537-8545.

Wenzel HG (1996): The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Marees Terrestres Bulletin d'Informations*, 124, 9425-9439.

DUNAFÖLDVÁRI FÖLDCSUSZAMLÁSOK MECHANIZMUSÁNAK TANULMÁNYOZÁSA A GEODÉZIAI MOZGÁSVISZGÁLATI MÉRÉSEK ÉRTELMEZÉSE CÉLJÁBÓL

Szőcs Vilma Éva[*]

Studying landslide mechanism of Dunaföldvár in order to interpret geodetic movement measurements *- A test site was established in Dunaföldvár, Hungary for landslide movements monitoring. There is continuous borehole tiltmeter measurement in the loess wall and repeated geodetic measurements are carried out on the area (GPS, geodetic levelling and gravity measurements). This article presents the investigated loess wall's detailed structure and geological characteristics.*

Keywords: Dunaföldvár, segmental landslide, loess fall, loess wall

Az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutató Intézetének Dunaföldváron létesített geodéziai mérőhálózata a földcsuszamlások vizsgálatára irányul. Az itt elhelyezett két fúrólyuk-dőlésmérő segitségével folyamatosan történik a partfal mozgásának vizsgálata. Ezek mellett periodikusan GPS, szabatos szintezés és gravimetriai méréseket is végeznek. Ez a cikk a partfal részletes szerkezetét és geológiai jellemzőit mutatja be, amelyek a mérési eredmények értelmezése céljából szükségesek.

Kulcsszavak: Dunaföldvár, szeletes földcsuszamlás, löszomlás, löszmagaspart

Bevezetés

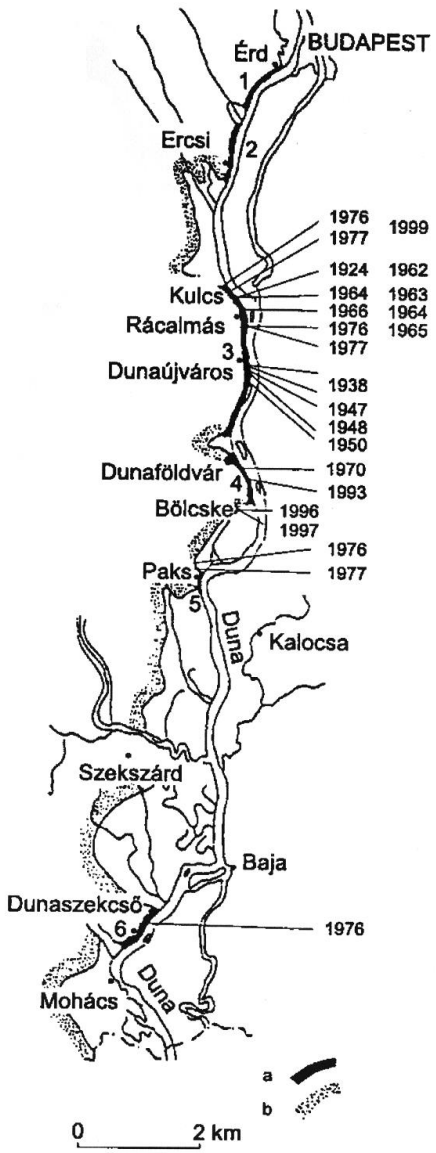
A földcsuszamlások az utóbbi évtizedekben Magyarországon is jelentős környezeti károkat okoztak. Dunaföldváron az utolsó nagy földcsuszamlás az 1994-ben bekövetkezett Felső Öreghegyi löszomlás volt, amely ugyan nem okozott nagy jelentőségű károkat, de ennek ellenére felhívta a szakemberek figyelmét a partfal instabilitásából adódó veszélyekre az adott lakóterületekre vonatkozóan. Ennek következtében sok tanulmány készült, amelyek a partfal vizsgálatára és stabilizálásának a megoldására irányultak. Ezen tanulmányok alapján készült ez a dolgozat, összegezvén és értékelvén a partfalnak azokat a szerkezeti adottságait, amelyek a mozgásvizsgálati eredmények értelmezéséhez szükségesek.

A Dunaföldvári magaspartok áttekintő ismertetése

A Dunaföldvári magaspartszakaszt északról a Baracsi patak völgye, délről a Bölcskei-Madocsai süllyedék határolja. *1. ábra*, amely kb. 15-25 m magasságú partfal. Ez a partfalszakasz a dunaföldvári hídig tart fokozatosan emelkedve.

A partfal legmagasabb része a Duna hídtól D-re az Alsó-Öreghegy, amely a Duna szintje fölé függőleges partfallal emelkedik kb. 50-60 m. Az Alsó-Öreghegyi vonulatrészlet után a part fokozatosan lealacsonyodik és kb. 30 cm magasságra csökken. A vizsgált partfal a Duna-hídtól északra 15-20 m magas és nagyon meredek.

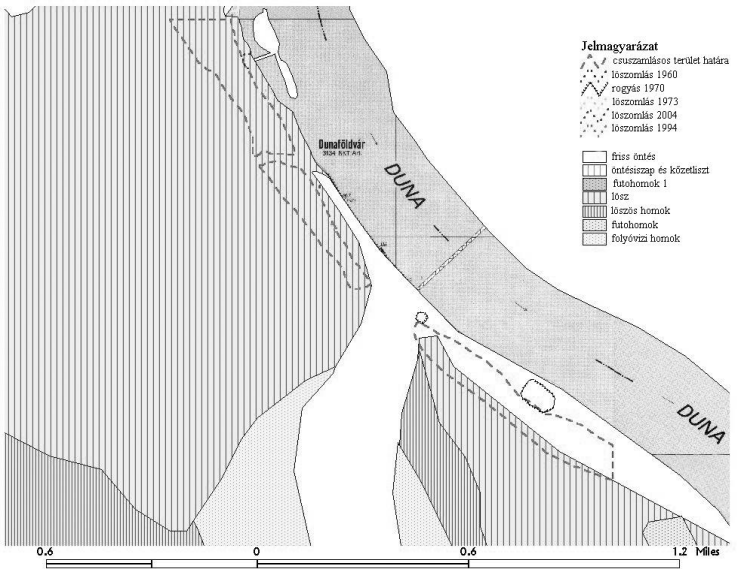
[*]*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail:szeva@ggki.hu



1. ábra. A dunai magaspartok áttekintő helyszínrajza
Jelmagyarázat: 1. Érdi magaspart, 2. Ercsi magaspart, 3. Dunaújvárosi magaspart, 4. Dunaföldvári magaspart, 5. Paksi magaspart, 6. Dunaszekcsői magaspart. a. Duna menti magaspart, b Dunától távolabb eső magaspart. (*Scheuer, 1979*)

A partfalak egyensúlyi állapota gyakran kritikussá vált, aminek következtében mozgások alakultak ki. A szakemberek azonban csak a jelentősebb károkat okozó mozgásokat jegyezték le és vizsgálták. A kisebb, szőnyegszerű csuszamlásokról még csak jelentések sem születtek.

Jelen kutatási területen zajlott mozgások idő és térbeni megjelenítését az alábbi földtani térkép, amelyet ArcView segítségével készítettem *2. ábra* szemlélteti.



2. ábra. Dunaföldvári földcsuszamlások típusai és időpontjai
(Dunaföldvár részletes földtani térképe 1:10 000 M, készítette Szőcs V. Éva a MÁFI adatai alapján, 2004)

A magaspartok főbb típusai

A magaspartokat változatos formák, kifejlődési adottságok és gazdag formakincs jellemzi. Általánosságban megállapítható, hogy a magaspartokat felsőpannon és negyedkori rétegek építik fel. A magaspartok osztályozása, különböző szempontok alapján *Scheuer Gyula (1979)* szerint:

Vízföldtani adottságok alapján
- Felszíni vízkilépésektől mentes part
- Egyszerű talajvízforrásos vagy vonalmenti vízkilépéses magaspart (Dunaföldvár)
- Duzzasztott talajvízforrásos magaspart
- Rétegforrásos magaspart (Dunaföldvár)
- Összetett magaspart (rétegvíz és talajvíz egyaránt előfordul)

Eróziós tevékenység alapján
- Előtérrel, folyóvízi üledékkel védett (mozgásmentes)
- Előtérrel és csuszamlásos üledékkel rendelkező (instabil)
- Közvetlenül erodálódó magaspart (mozgásveszélyes)

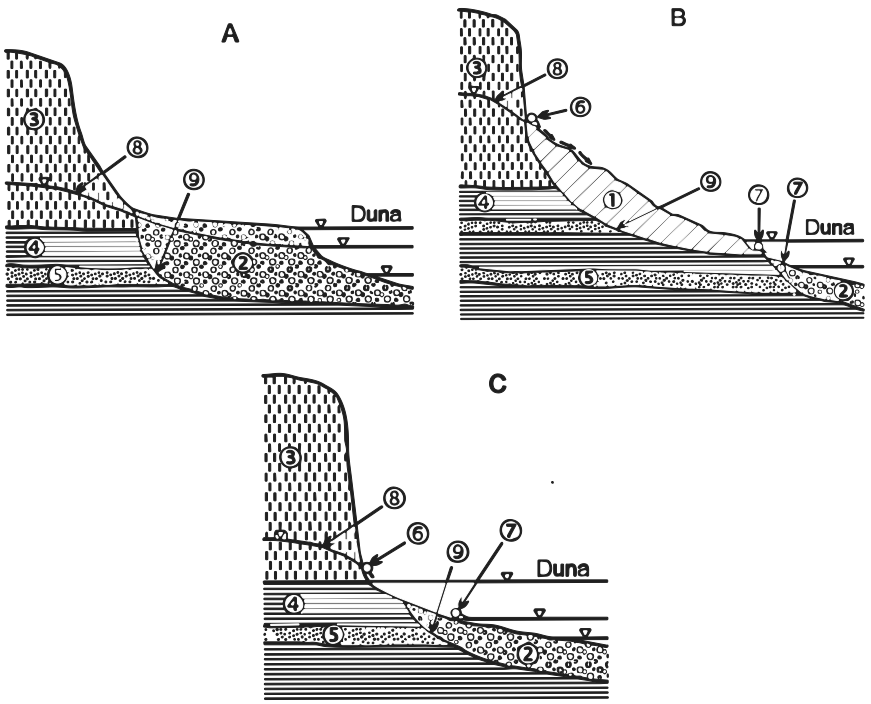
Földtani szempontok szerint
- Pannon magaspartok
- Pleisztocén magaspartok
- Összetett magaspartok (Dunaföldvár)

Csúszólap földtani helye szerint
- Pleisztocén rétegekben
- Felső pannóniai rétegekben
- Vegyes (pleisztocén és pannon) rétegekben

Csúszólap alakja szerint
- Ferdén ívelt (Dunaföldvár)
- Íves (Érd)
- Összetett (sík és íves együtt, Dunaújváros, Rácalmás, Dunaföldvár)

A magaspartok mozgásának tanulmányozásával már több évtizede foglakoznak. A vizsgálatok alapján megállapítható, hogy a mozgások kialakulásában jelentős szerepet játszanak a vízföldtani adottságok, melyet a geomorfológiai-, geológiai viszonyok és a Duna határoznak meg.

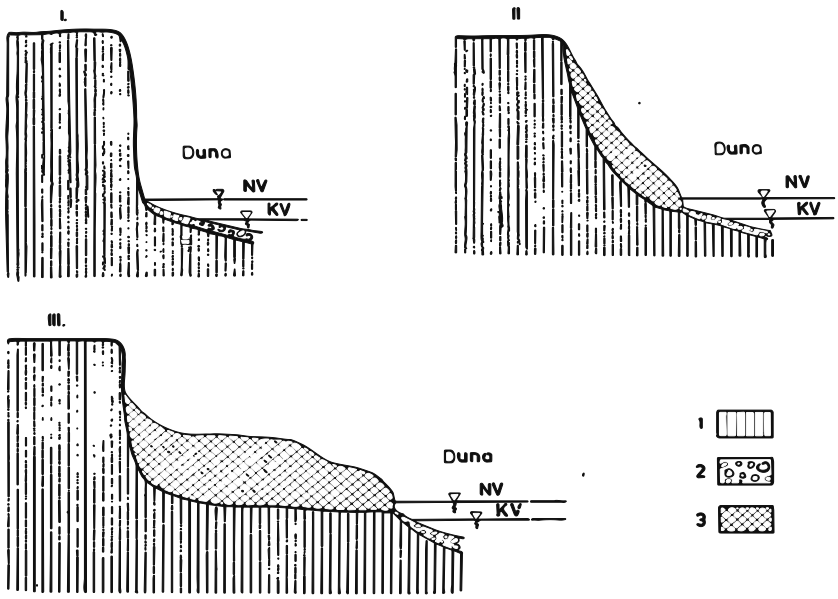
A térség fő erózióbázisa a Duna, szerepe eróziós tevékenysége és vízszintingadozása révén is jelentős. Az eróziós tevékenység alapján *Karácsony és Scheuer (1972)* három fő parttípust különített el, amit a *3. ábra* tartalmaz.



3. ábra. A előtérrel és folyóvízi üledékkel védett gyakorlatilag mozgásmentes magaspart **B** előtérrel és csuszamlásos üledékkel rendelkező magaspart **C** közvetlenül erodálódó magaspart
1- régi mozgások kevert anyaga, 2-holocén homokos kavics, 3-pleisztocén lösz összlet, 4-felső pannóniai agyag, iszap, 5-homok, 6-talajvízforrás, 7-rétegforrás, 8-talajvíz, 9-rétegvíz. (*Karácsony és Scheuer, 1972*)

Az olyan magaspartszakaszokon, ahol a Duna-meder és a magaspart között csuszamlásos földhalmaz fordul elő, ami egyrészt védi a partfalat a Duna oldalazó eróziója ellen, és ellensúlyként támasztja a magaspartot, másrészt felduzzasztja a magaspartból kilépő forrásvizeket, megnövekszik a földhalmazban a víz nyomása és így átnedvesíti a fölötte lévő lösz összletet. A magaspartok azon szakaszain, ahol a Duna elhordja a lejtőlábi omladékot, a forrásvizek szabadon távoznak, és nem nedvesítik át a magasparti lösz összletet. A Duna vízállása és a partfalmozgások kapcsolatát *Mentes (2004)* vizsgálta.

A dunaföldvári magaspartok mérnökgeológiai vizsgálata során *Horváth Zs és Scheuer Gy (1976)* az alábbi három parttípust különböztette meg, amely a *4. ábrán* látható:



4. ábra. A Dunaföldvár Öreg-hegyi magaspartok típusai. Jelmagyarázat: I. Eróziós magaspart, mozgásformák nélkül II. Helyileg kialakult, kisebb csúszásokkal jellemezhető magaspart III: Partrogyásokkal erősen tagolt magaspart
1. Pleisztocén, felső pannóniai üledék 2. Duna-kavics 3. Megcsúszott anyag

Magaspartok mozgásformái

Vizsgálati adatok alapján a dunai magaspartoknál igen változatos mozgástípusok mutathatók ki. A dunai magaspartok esetében a következő mozgásformák vannak jelen:

Omlás: azokon a partszakaszokon ismeretesek, ahol a folyó közvetlenül pusztítja és alámossa a magaspartot. Ezen túl a fagy és a csapadékkimosás is okozhat omlásokat, olyan helyeken, ahol nincs folyóvízi tevékenység. Ezeken a helyeken a kisebb mozgások hatására labilis tömbök dőlnek ki vagy szakadnak le.

Talajfolyás: rendszerint ott keletkezik, ahol a partfalból duzzasztott talajvízforrások lépnek ki és ezek másodlagos mozgásformaként jelentkeznek a már megcsúszott anyag felszínén (Dunaföldvár).

Kúszás: ott figyelhető meg, ahol a partfalból időszakos vagy folyamatos vízkilépés mutatható ki, de a mennyisége azon határérték alatt van, ami ahhoz szükséges, hogy a rétegek talajfolyásként meginduljanak.

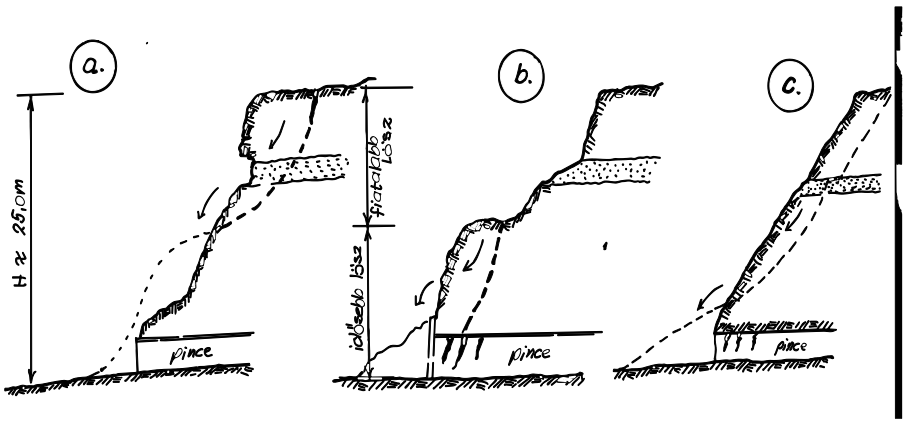
Leszakadásos csúszási mozgásforma, azokon a területeken ismert, ahol a Duna erőteljes anyag elhordó tevékenysége miatt meredek vagy függőleges partfalak keletkeznek, amelyek a fokozott alámosás miatt helyenként elvesztik az állékonyságukat. Főleg azokon a területeken fordul elő, ahol a partfalak földtani felépítését nagy vastagságú pleisztocén rétegek alkotják. A csúszás kialakulásában a talajvíz és a rétegvizek nem játszanak szerepet, csak a csapadékvíznek és a partélről a partfalra lefolyó vizeknek van hatása.

Suvadás: létrejöttére ott adottak a feltételek, ahol a löszösszlet a folyó középvízi medre alatt is folytatódik, amely szakasz eléri a 15-30 méteres vastagságot. Jelentős mennyiségű anyag mozgását okozzák, ezért is sorolják a jelentős vagy nagy mozgások sorába.

Partrogyás: a dunai magaspartok esetében a legrészletesebben vizsgált mozgásforma, ami veszélyességével és nagyságával is kitűnik a többi közül. A partrogyások csúszólapjai a vizsgálatok szerint a felsőpannóniai rétegösszlet felső szakaszán alakulnak ki. A csúszólap alakja szerint Dunaföldváron az összetett csúszólapú rogyások az ismeretesek.

A *GeoTeszt Kft.* 1995-ben végzett veszélyelhárítási javaslatában a Felső Öreghegyen végzett vizsgálatok alapján az *5. ábrán* szereplő jellegzetes mozgás megjelenési formákat írták le.

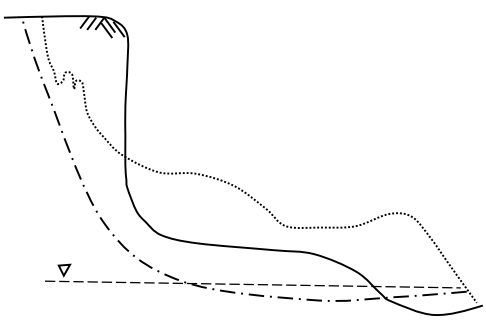
a partél felső harmadának folyamatos omlása illetve lecsúszása
a partfal alsó harmadának a talpponti csúszólaphoz közelítő lezökkenése és
a teljes felső áztatott részének kúszás jellegű mozgása



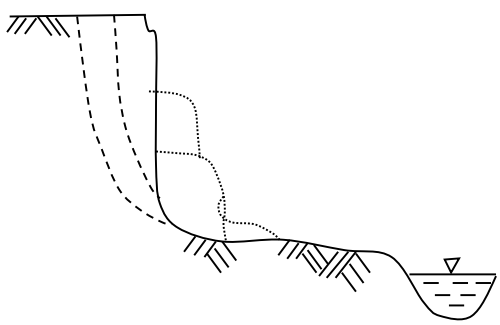
5. ábra. Jellegzetes mozgásformák a dunaföldvári Felső-Öreghegyen. a) partél közeli omlás b) talpponti csúszás c) felszínközeli kúszás jellegű mozgás

Az „a" jelű mozgások kialakulásakor a partfal koronaszintje alatti omlások legfőbb kiváltó oka a betelepült futóhomok eróziós tevékenysége. A „b" és „c" jelű mozgásoknál az „a" esetben végbement omlás egyensúly keresése szerepel, amihez még különböző emberi hatások adódnak hozzá, mint például a hasznosított terek érdekében végzett bevágások, pincekialakítások.

A geológiai, földtani adottságokból kifolyólag az Alsó- és Felső- Öreghegy különbözik egymástól. Ezért is van az, hogy a két részen zajló mozgások, mozgástípusa is különböző. A szakirodalomi leírások és megfigyelések alapján a következő két ábra hívatott jellemezni a két hegycsoportra jellemző csuszamlási típusokat. Az *6. ábra* az Alsó-Öreghegyre jellemző mozgástípust mutatja, míg a *7. ábra* a Felső-Öreghegy jellegzetes mozgástípusát szemlélteti.



6. ábra. Alsó-Öreghegy szeletes földcsuszamlás

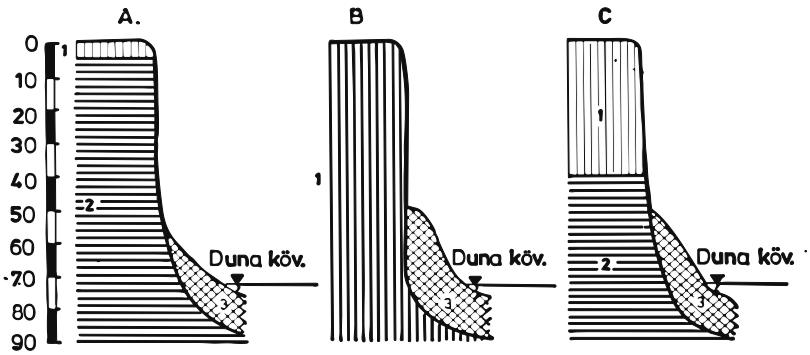


7. ábra. Felső-Öreghegy löszomlás, roskadás

Magaspartok földtani felépítése

A magaspartokat felépítő képződmények kifejlődésének és korának változatossága azzal magyarázható, hogy sok esetben helyi tényezők is közre játszottak az egyes magaspartokat felépítő rétegösszletek kialakításában.

Általánosságban megállapítható, hogy a magaspartokat felsőpannon és negyedkori rétegek építik fel. A földtani viszonyok alapján három fő típust különít el *Scheuer (1979)* a *8. ábra* alapján.

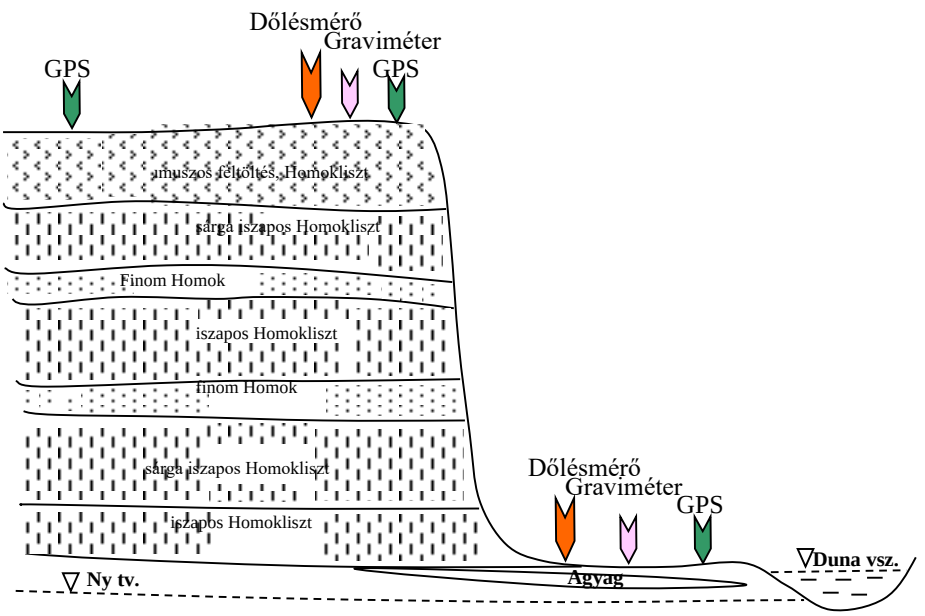


8. ábra. A magaspartok csoportosítása földtani felépítés alapján. A felsőpannóniai rétegekből álló magaspart B pleisztocén rétegekből álló magaspart C összetett pleisztocén és pannon rétegekből álló magaspart
Jelmagyarázat: 1. pleisztocén rétegek 2. felsőpannóniai rétegösszlet 3. a magaspartról leomlott lecsúszott áttelepült anyag (*Scheuer, 1979)*

Az első típus az, amikor a magaspartot teljesen felsőpannon rétegösszlet alkotja. Ezt a parttípust az érdi magaspart képviseli. A második típusba azon magaspartfalak sorolhatók, ahol a földtani felépítésben a felsőpannóniai és negyedkori rétegek egyaránt részt vesznek. Ilyen partszakaszok Kulcsnál, Rácalmásnál és Dunaújvárosnál ismeretesek.

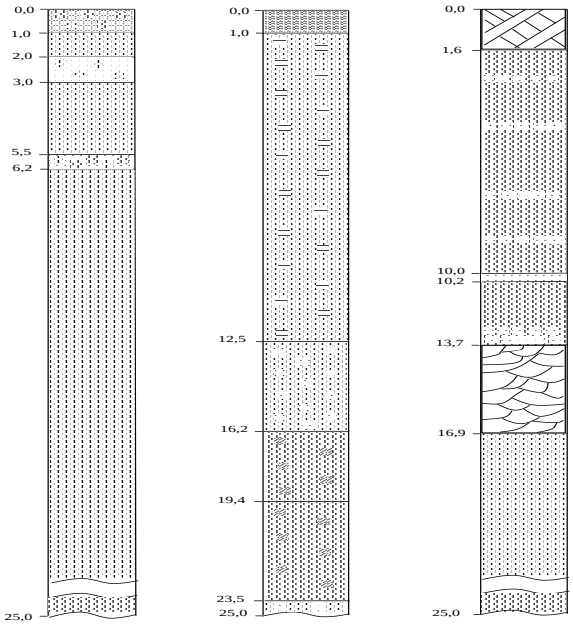
A harmadik típusba azok a magaspartok sorolhatók, amelyeket teljes magasságukban a negyedkori képződmények építenek fel, sőt a Duna szintje alatt is tovább folytatódnak különböző mélységig. Ilyen felépítésű magaspartok a dunaszekcsői Várhegynél, a dunaföldvári Öreghegynél vannak *Scheuer (1979).*

Az előzőekben felsorolt alaptípusok mellett ezeknek az átmenetei is megtalálhatóak.
A dunaföldvári partfalra a szakirodalomban említett „szendvics" szerkezet jellemző, ami a *9. ábra* alapján is jól látható. Az elhelyezett geodéziai mozgásmérők a GPS, graviméter és dőlésmérő helyei vannak feltűntetve, amelyeket igyekeztek különböző rétegekben, szerkezeti egységekben elhelyezni, a mérés pontossága érdekében *Mentes (2004)*.



9. ábra. Felső-Öreghegy „szendvics" szerkezete a *GeoTeszt* rétegsora lapján, mérési pontok

A partfal szerkezetének pontosabb ismerete céljából a Pyrus Kft. és a Magyar Állami Földtani Intézet 1994-ben leírt földtani és geofizikai rétegsorait értékeltem, amelyet 1994-ben a löszomlás helyén feltárás során leírt rétegsorral hasonlítottam össze. A rétegsorokat a *10. ábra* mutatja be.



10. ábra. Felső Öreghegyi partfalon leírt fúrások, balról jobbra haladva földtani, geofizikai és a feltárás során leírt rétegsorok

Az első rétegsor a földtani fúrás egy részletéből van, a második a geofizikai fúrások egy része 25 m mélységig, a harmadik pedig a feltárás során leírt rétegsor szintén a felszíntől számított 25 m mélységig, azaz a partfal talppontjáig. A három rétegsoron jól látható a partfal szerkezete, a betelepült homok lencsékkel, amelyek a löszképződés során eolikus úton települtek be. A homoklencsék a Duna irányába vastagodnak, ezt bizonyítja az is, hogy a geofizikai fúrások során az adott fúrástól távolabbi fúrásban nem jelentkezik egyáltalán a homokos szerkezetű összlet. A 2. és 3. rétegsorban 13,5-16,9 és 12,5-16,2 m mélységekben található összletek a homokos kőzetliszt és a közép, durva szemű homok

Összefoglalás

A Dunaföldvári partfal szerkezetében jelentős szerepük van a betelepült homokrétegeknek a mozgások kialakulásánál. A partfal szerkezetének még pontosabb megismeréséhez, nagy pontosságú geofizikai méréseket kellene végezni, mivel a geofizikai rétegsor bizonyult a legponotsabbnak és a legmegbízhatóbbnak, szemben a földtani fúrás során kapott rétegsorral. A partfal szerkezetének pontos ismerete segít egy nagy pontosságú geodéziai mérő, megfigyelő hálózat kialakításában és a mérési eredmények értelmezésében.

Hivatkozások

Horváth Zs és Scheuer Gy (1976): A Dunaföldvári partrogyás mérnökgeológiai vizsgálata**.** *Földtani Közlöny* 106. 425-440.
Karácsony S és Scheuer Gy (1972): A dunai magaspartok vízföldtani sajátosságai. *Hidrológiai Közlöny* 52; 9, 375-383.
Scheuer Gy (1979): A dunai magaspartok mérnökgeológiai vizsgálata. *Földtani Közlöny* 109, 230-254.
GeoTeszt Kft. (1994): Előzetes helyzetfelmérés a dunaföldvári löszpartomlások veszélyelhárítási munkálataihoz. *Budapest*.
Pyrus Kft. (1994): Részletes geotechnikai vizsgálat a dunaföldvári lösszmagaspart Hősök tere 20-21. sz. ingatlanok mögötti szakaszára. *Budapest*.
Mentes Gy (2004). Landslide monitoring by borehole tiltmeters in Dunaföldvár. In: Gy. Mentes, I. Eperné (Eds): Landslide monitoring of loess structures in Dunafölvár, Hungary. *Geodetic and Geophsical research Institute of Hungarian Academy of Sciences*, Sopron, 67-76.

GEODÉZIAI MÓDSZEREK EGYIPTOMBAN A BIR-MINIHI ÁSATÁSON

*Gregori Ákos, Szűcs László**

Surveying Methodes At The Excavation Of Bir-Minih In Egypt *- The ancient settlement of Bir-Minih is located in the Eastern-Desert of Egypt. The professor of the Egyptology Department of the Eötvös Lóránd Science University carries on an excavation with his team at that scene since 1998. From the year 2001 he also invited two surveyors to the members of his expedition, whose task was to map the territory. The following article is to summarize the measurements and the given results.*

Keywords: GPS, GIS, surveying, Egypt, mapping, archaeology

Egyiptomban a Keleti-sivatagban található Bir-Minih, egy az ókorban lakott település. Az ELTE Egyiptológia Tanszékének professzora és csapata 1998 óta folytat ásatásokat a helyszínen. A 2001-es évtől két földmérőt is meghívott az expedíció tagjai közé, akiknek a feladata a terület térképezése volt. A cikk összefoglalja az eddig történt méréseket és a kapott eredményeket.

Kulcsszavak: GPS, GIS, térinformatika, régészet, Egyiptom, térképezés

Bevezetés

A régészetben a leleteket megtalálási helyük függvényében két csoportra oszthatjuk. Az egyik a szórvány lelet, amelynek nem ismerjük a pontos származási helyét. A másik a helyhez kötött lelet, amelynek származási helye pontosan ismert, ezért a régészek magában a leletben, mint tárgyban hordozott információból egyéb, következtetett információkat nyerhetnek. Ezek alapján könnyen belátható, hogy a régészeti munka alapja - a többi terepi munkához hasonlóan – a térkép.

2001 áprilisában az ELTE Egyiptológia Tanszéke régészeti munkához két földmérőt keresett. Felvettük a kapcsolatot Dr. Ulrich Luft professzor úrral, az ásatás vezetőjével. A megbeszéléseken képet kaptunk az egyiptomi tartózkodás körülményeiről, az utazásokról, a helyszínről és az elvégzendő feladatokról. Azóta háromszor dolgoztunk az ásatás helyszínén. A 2002-es ásatáson az egyiptomi hatóságok késedelmes engedélyeztetési eljárása miatt magát a terület térképezését nem tudtuk végezni, így a jelenleg elkészült térkép csak a 2001-es és a 2003-as térképezési munkán alapul.

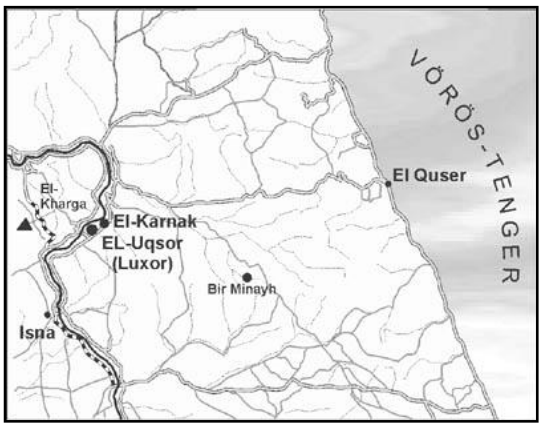
(Ulrich 2000a, (http://www.sulinet.hu/eletestudomany/archiv/2000/0018/szikla/szikla.html) 2000b, 2001 *(http://www.mhk.hu/eltu/g_hireink5608.html#320))*

Az médiában számos helyen találhatók tanulmányok, hírek Egyiptomban zajló ásatásokról, ahol GPS-t használnak. Főleg nagy kiterjedésű régészeti objektumok, területetek (pl. Tell-El-Amarna) feltárásánál vették nagy hasznát. Tudomásunk szerint magyar expedíció eddig még nem használt GPS-t a saját ásatási munkájánál. A távoli ásatásoknál megkülönböztetett szerepe van a műszerezettségnek, hiszen a sivatag közepén semmiféle támpontunk nincs, amihez a felméréseinket köthetnénk.

Az ásatás helyszíne és az elvégzendő feladatok

Az ásatás az egyiptomi Arab-sivatagban (más néven Keleti-sivatagban) zajlik (*1.ábra*). Az Arab-sivatag nem a szokásos homoksivatagok képét mutatja, hanem kősivatag. A táj mindenhol hegyekkel, óriási sziklákkal, nagy völgyekkel szabdalt, szinte teljesen növényzet nélkül. A völgyek talaja az esők alkalmával a hegyekből hirtelen lezúduló víz által szállított színes kavicsokból áll, amely leginkább a száraz sóderre emlékeztet.

**SZIE YMMF, 1146 Budapest, Thököly út. 74.*
E-mail: Gregori.Akos@ymmfk.szie.hu
Szucs.Laszlo@ymmfk.szie.hu



1. ábra. Az ásatás helyszíne Egyiptomban

A helyszín kb. Luxor földrajzi szélességén a Nílus és a Vörös-tenger között félúton található (φ = 25° 33', λ = 33° 36'), ahol egy ókori település maradványára lelhet az utazó házakkal, sírokkal, amely azonban a térképeken csak kútként szerepel. A hely neve Bir Minih magyarul Minih vádi kútja. Nevét a területen található ásott kútról kapta, melyet a beduinok maguk és állataik itatására használnak. A szakirodalom szerint a területen található sziklarajzok a késő neolit kor (Kr. e. 3500-tól) és az arab időszak között készültek *(Farkas, Luft 2000a, 2000b, 2001). (http://ibisz.freeweb.hu/hun/magyarok/birminih/birmin~1.htm)*

Az ókorban a Keleti sivatagot ásványi anyagok, többek között arany és féldrágakövek bányászata miatt lakták.

A régészeti munka több feladatra bontható.

1. A sziklákon található rajzok és feliratok felkutatása és szakszerű lemásolása. Ez az epigráfusi munka. Azonban fontos, hogy minden rajzról tudni kell, hol helyezkedik el.
2. A területen több építmény található. Ezek lakóépületek, szentélyek és sírok. Az ásatási munka feladata, hogy az építményekben ásott szondákkal meghatározza az építmény funkcióját és megvizsgálja az építményből származó leleteket, egykori használati tárgyakat (cserepek, gyöngyök, csontvázak, stb.).
3. Az építmények felmérésével és szerkezetük lerajzolásával képet kaphatunk a település és a hozzá kapcsolódó temetkezési területek fejlődéséről.

Látható, hogy a fenti feladatok mindegyikében az információ helyhez kapcsolódik, tehát minden feladat alapja a térkép. A probléma az ásatási területtel az volt, hogy Egyiptom sivatagi területeiről a legrészletesebb térkép 1:50 000 méretarányú. Ebben a méretarányban a kutatási terület (amely kb. 2x2 km) igen kicsi, a domborzat részletei nem látszanak.

A kiutazás előtti megbeszéléseken kiderült, hogy a sivatagban sátrakban fogunk lakni. A felszerelést és a sátrat mindenkinek saját magának kellett kijuttatnia. Ez – a repülőgépen megengedett 20 kg-os súlyhatár miatt – behatárolta a méréshez használható eszközeink listáját.

A műszerfelszerelés

A felszerelést úgy kellett összeállítanunk, hogy a lehető legkönnyebb legyen, de minden felmerülő feladatot meg lehessen vele oldani, ám azt is figyelembe kellett venni, hogy a területen az áramellátás nem megoldott. A tervezett és véghezvitt mérési feladatok a következők voltak:

- 5 m oldalhosszúságú négyszöghálózat kitűzése (derékszög kitűzés, távolságmérés),
- tahiméteres felmérés, szintezés,
- helymeghatározás (földrajzi vagy UTM koordináták meghatározása),
- mágneses és csillagászati észak meghatározása,
- manuálé rajzolás, jegyzőkönyvezés, helyi előfeldolgozás és térképezés a terepen.

A fentiek alapján a következő műszereket és eszközöket használtuk:

- THEO 080 A építészteodolit, kis méretű fa szintezőállvánnyal,
- navigációs GPS-vevő,
- 50 m-es és 30 m-es mérőszalag,
- 3 db függő,
- 20 cm-re összecsukható 2 m-es szintezőléc,
- MOM 39/49M tájoló,
- kréta, papír alátét, A4 és A3 méretű írógép- és milliméterpapír, számológép.

A függők feladata kettős. Egyrészt ennél a teodolitnál a pontraállás csak függővel lehetséges. Másrészt gyakran előfordult, hogy a mérendő pontok között valamilyen zavaró objektum (szikla, fal) emelkedett, ami lehetetlenné tette a földön való mérést. Ekkor a szalagot a levegőben tartva a két végét függővel levetítve tudtuk a távolságot megmérni. 2002-ben és 2003-ban a Garmin cég e-Trex Vista nevű navigációs GPS-vevőjét használtuk. Jelenleg ez a műszer a korszerű navigációs kézi GPS-vevők körébe tartozik. A műszer mobiltelefon méretű, súlya a két ceruzaelemmel 0,2 kg. A két elem kb. 12 óra mérést tesz lehetővé.

Mérések a terepen

A négyszöghálózat kitűzése és elhelyezése

A terepi munka egyik része egy 5 méteres oldalakból felépített négyszöghálózat kitűzése és bemérése volt. Felhasználása:

- az építészek az építményeket és sírokat ez alapján könnyen és gyorsan meg tudták rajzolni,
- a régészek a kiásott objektumokat be tudták róla mérni,
- a települési részen a részletes magassági felmérést megkönnyítette.

Mivel a területen az építmények csoportjai szétszórva találhatók, több (összesen nyolc) négyszöghálózatot létesítettünk. Minden négyszöghálózat létesítésénél szükséges egy hálózati kezdőpont és egy alapirány.

A hálózatok kezdőpontjai mindig sziklára kerültek, ahol a pontok fennmaradása biztosítva volt. A részletpontok kitűzésekor azonban nem mindig sziklára jöttek ki a pontok. Ilyenkor, ha a kitűzendő pont homokba vagy a kavicsos talajra esett, helyére egy nagy (kb. 15-20 kg) követ vittünk és erre jelöltük le a pontot. Állandósításkor sem cöveket, sem szeget nem tudtunk alkalmazni, ezért más módszerhez folyamodtunk. A kitűzendő helyre kis lapos kavicsot tettünk, környékét vörös festékkel megfestettük, majd a kavicsot elvettük. Ekkor a pontot egy piros folt közepén található kis átmérőjű festetlen folt jelölte. A pontmegjelölési módszer bevált, még a 2001-ben megfestett pontok is jól látszottak 2003-ban. Minden egyes négyszöghálózatról milliméterpapírra vázlatot készítettünk

A hálózat alapirányának megválasztásánál két lehetőséget találtunk célszerűnek. Az egyik, hogy alapiránynak az északi irányt válasszuk, mert akkor a térképre történő beillesztés egyszerűen megoldható. A másik, hogy az alapiránnyal az építmények elhelyezéséhez alkalmazkodjunk. A településen az utcák és épületek által kijelölt „építési főirány" közel északi volt, ezért ott északot választottuk a hálózat alapirányául. A vádiban a sziklafal mellett azonban sokkal hasznosabbnak bizonyult, ha a vádi iránya által megszabott építkezések irányához alkalmazkodunk.

Ahhoz, hogy a négyszöghálózatot beilleszthessük a térkép koordinátarendszerébe, meg kellett határoznunk a kezdőpont koordinátáit és a hálózati alapirány azimutját. Mivel a térkép pontjainak meghatározása abszolút helymeghatározással történt, a hálózatnak a térképen való elhelyezését sem volt érdemes pontosabban végezni. Ennek megfelelően a hálózat kezdőpontján is abszolút helymeghatározást végeztünk a navigációs vevővel. Ez csak a hálózat elhelyezésének pontosságát befolyásolja, a hálózat belső pontosságát nem.

A hálózati alapirányt csillagászati méréssel határoztuk meg. A méréshez a Polárist használtuk fel. A sivatagban délután 5 óra körül kezdett lemenni a Nap. Másnap reggel 5 órakor azonban még nem kelt fel a Nap, de már kezdett világosodni. Mindkét időpont kedvező volt a csillagászati mérésre, mert a lemenő ill. felkelő Nap fénye mellett is látszódott a Sarkcsillag. A hálózati kezdő-

ponton mérést végeztünk a hálózati alapirányban egy távoli pontra és a Polárisra. A mérést elvégeztük egyszer délután, majd másnap hajnalban is, a délutáni időpontot követően 12 órával. Ez azért történt, mert a Poláris sem a pontos északi irányban van, hanem attól mintegy 1°-ra eltér. A Poláris is, mint minden csillag a pólus körül „keringeni" látszik. A keringés periódusideje 24 óra. Így elvileg, ha megmérjük egy csillag helyzetét két időpontban, amelyek között 12 óra telik el, a két pozíció átlagértéke adja a pólus helyzetét. Ez csak elvileg van így, mivel a csillagok és az égi pólus is mozog, de ezek a mozgások a mi méréseinkhez és műszerünk mérési pontosságához képest elhanyagolhatók.

A hálózati pontok magasságát trigonometriai magasságméréssel határoztuk meg.

Tájolóval egyszerűsített tahiméteres felmérés

A négyszöghálózatra alapozott régészeti felmérés azokon a területeken gazdaságos, ahol olyan közel vannak egymáshoz az építmények, hogy felmérésükhöz szinte minden pontra szükség van. Azonban vannak olyan temetkezési területek, ahol a tumuluszok távolsága viszonylag nagy (10-30m). Ezeken a részeken a pontok nagy része soha nem lenne felhasználva. Ezért itt más módszert alkalmaztunk. Minden egyes felmérendő objektum déli oldalán megjelöltünk egy pontot, melyet tahimetrikusan bemértünk egy alappontról. Az alapponton a műszert a Polárisra tájékoztuk és koordinátáit GPS-szel határoztuk meg. A bemért ponton tájolóval és függővel kijelöltük a mágneses északi irányt, majd ebben az irányban mérőszalaggal kitűztük az 5 méterre lévő második pontot. Nagyobb kiterjedésű objektumnál pontot tettünk 10, vagy akár 15 méterre is. A módszer előnye, hogy igen sok felesleges pont kitűzését megspóroltuk.

Amennyiben nem tudtuk a hálózati kezdőpontról folytatni a mérést, a részletpontok mérése után új alappontot létesítettünk. Az új alapponton visszatájékoztunk a kezdőpontra, majd folytattuk a pontok bemérését.

Elszórt objektumok térképezése GPS-szel

Egyes objektumok elszórtan, magányosan, vagy laza csoportokban egymástól viszonylag távol (50-100 m) helyezkednek el a területen. Ezek lehetnek helyőrségi épületek, sírok, szentélyek (tumuluszok), sziklarajzok, feliratok, stb. Ezen objektumoknál nem gazdaságos a tahiméteres felmérés és nem baj, ha nagyobb helyzeti hibával határozzuk meg elhelyezkedésüket. Ilyenkor a GPS abszolút helymeghatározásával dolgoztunk. A vevővel egy pontban megállva 0.1" értéknél nagyobbat nem változtak a koordináták (ez kb. 4 méternek felel meg). A koordinátákat visszakaptuk akkor is, amikor egy-egy objektumot újra bemértünk. Gyakorlatilag tehát vízszintes értelemben 10 méternél nagyobb hibát biztos, hogy nem vétettünk. A térkép 1:3000 méretarányát figyelembe véve, ez a hiba hozzávetőlegesen 3 milliméternek felel meg, ami ebben az esetben elhanyagolható.

A magasságokat a vevőbe épített barométeres magasságmérővel határoztuk meg, mivel ez pontosabb a GPS abszolút helymeghatározásánál. A barométeres mérésnél azt feltételeztük, hogy a mérés alatt (ami kb. 3-4 órán át tartott) a légnyomás lineárisan változott. Ezért a táborunk előtti területen kijelöltünk egy alapszintet. Az itt végzett GPS-es magasságmérések 365 méteres WGS84 ellipszoid feletti magasság körül mozogtak. Így az alapszint magasságát 365 méterben határoztuk meg. Minden mérés előtt a műszert erre az értékre állítottuk. A mérések végén, amikor a táborba visszaértünk, megnéztük a kijelölt helyen, hogy milyen magasságot mutat a műszer. Ezt is felírtuk. A magyarországi feldolgozás során ezt a „záróhibát" lineáris interpolációval küszöböltük ki

Az 1:3000 méretarányú térkép készítése GPS-szel

Az előző három felmérési módszer mind a régészeti objektumok bemérését szolgálta. Feladatunk másik fontos összetevője a terület topográfiai térképének előállítása volt. A terület tervezett lehatárolásának ismeretében eredetileg az 1:2000-es méretarányt választottuk, de végül a térképezendő terület növelése miatt az 1:3000 mellett döntöttünk. Ebben a méretarányban az új határok által megjelölt terület is ráfér egy A1 formátumú lapra. Nem célszerű a nagyobb méretarány érdekében a térképet szelvényekre bontani, mivel az a régészek munkáját nehézkesé tenné (és a térképezésben is többletfeladatok jelentkeznének).

A felmérés előtt terepbejárásokat végeztünk, hogy képet kapjunk a terület domborzati viszonyairól. A domborzat változékonysága miatt a területet kisebb részekre osztottuk fel. A sivatagban töltött behatárolt időnk miatt egy-egy kisebb terület felmérésére fél-egy nap jutott. Először, lehetőleg egy távolabbi helyről (pl. a szemközti sziklafalról) meg kellett rajzolni a területegység manuáléját. Azért volt célszerű ezt távolról végezni, mert úgy lehetett jól átlátni a domborzat nagyobb elemeit. 2003-ban már sokat segített az előzetes térkép, amelyet a korábbi mérések alapján készítettünk. A részleteket ezen vázoltuk fel. A területegységek jellemző domborzati elemeinek felmérése az előző pontban említett GPS-vevővel és a beépített barométeres magasságmérővel történt. A műszeren a WGS84 ellipszoidi földrajzi koordinátákat jelenítettük meg. A terepen haladva a bemért pontokat feltüntettük a manuálén, a koordinátáikat pedig papíron jegyzőkönyveztük. A pontokhoz koordinátákon kívül leíró adatok is kerültek (pl. nyereg teteje, domb teteje, plató széle, szikla, stb.). Méréseinket nehezítette, hogy a magasabb falú (20-80 méter), szűk vádikban a műholdszám néha annyira leesett, hogy ott a GPS-mérés bizonytalanná (akár 100 méteres hibával terheltté), vagy teljesen lehetetlenné vált.

Szintezések

A régészeti munka egyik fontos feladata az ún. szondázás, amikor egy szelvényben egymásra rakódott különböző rétegeket vizsgálnak. Ilyenkor szintezéssel lehet a legegyszerűbben meghatározni a rétegek vastagságát. A szintezést teodolittal(THEO 080 A) végeztük. A mérést a négyszöghálózat egyik pontján kezdtük (amelynek a magasságát trigonometriai vagy barométeres magasságméréssel határozzuk meg). A szintezőlécet a lépcsőzetesen kiásott rétegekre helyeztük, amelyekről a régészek szelvényrajzot készítettek. Érdekesség volt például, hogy egy épület falán belül és kívül is tűzrakási nyomok látszottak. A szintezésből kiderült, hogy a két tűzrakó hely magassága megegyezik, így gyanítható, hogy a ház jelenleg álló fala ráépült egy előzőleg már használt tűzrakó helyre. Ez azt mutathatja, hogy az idők folyamán a település folyamatosan változott, épületeket bontottak és építettek a régiek helyére.

A mérések feldolgozása

A térkép a WGS84 geodéziai dátumhoz tartozó UTM vetületben készült. A pontok adatait a mérések után azonnal fel is szerkesztettük az M=1:2000 méretarányú, 2001-es térképre. Hogy a felszerkesztés könnyebb legyen, a térképen nem a km hálózatot tüntettük fel, hanem a földrajzi koordináták fokhálózatát másodperces felbontásban, mivel ezt rögzítettük a jegyzőkönyveinkben. Ez nagyban segítette a magyarországi utófeldolgozást.

Az utófeldolgozás során az összes pont koordinátáját számítógépre vittük, és a különböző transzformációk elvégzése után AutoCad programmal megszerkesztettük a térképeket, amelyre felkerültek a bemért síkrajzi elemek és a régészek lelőhelyei is. A síkrajz elkészülte után a bemért pontokra támaszkodva szerkesztettük meg a szintvonalakat.

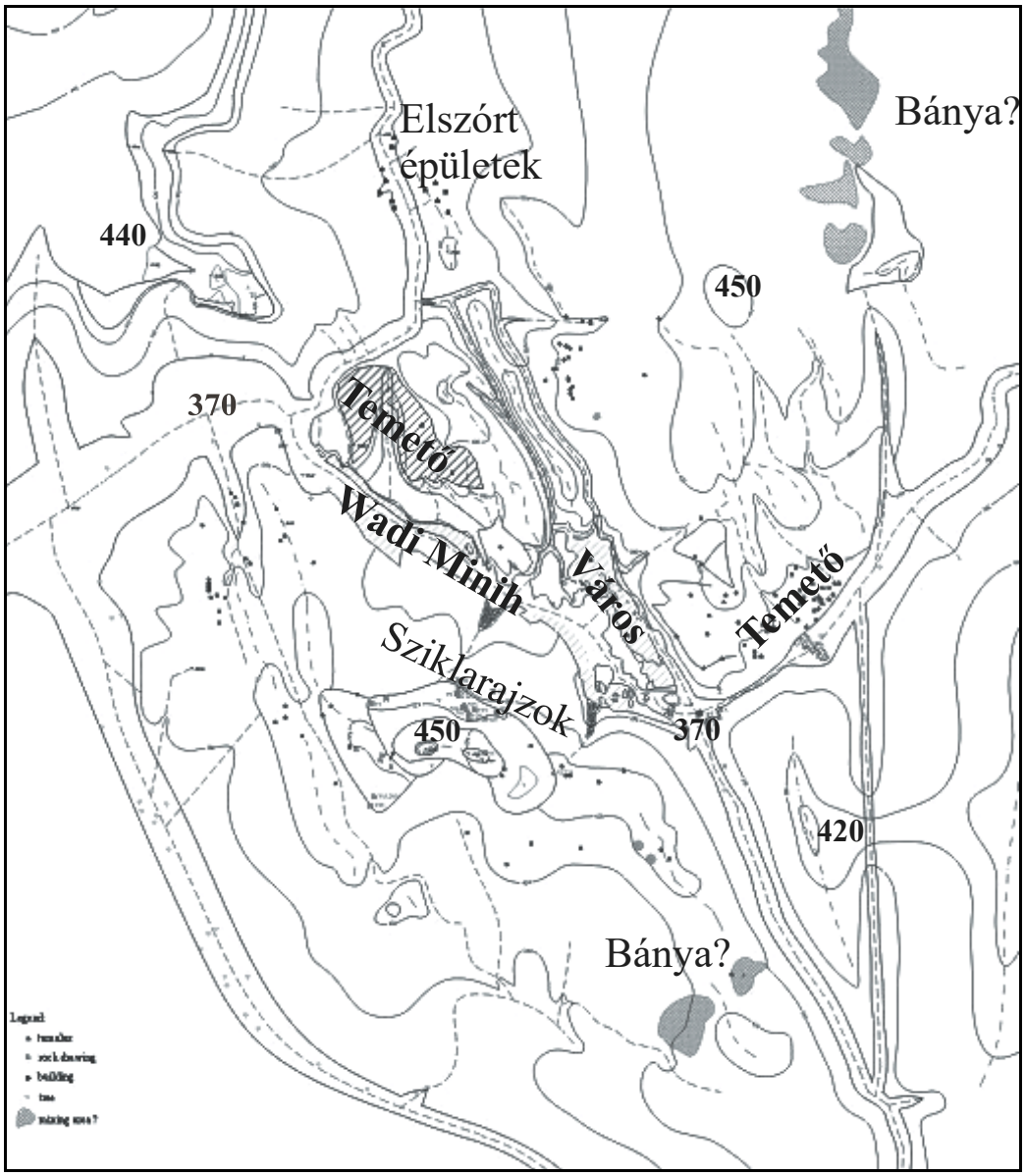
Az elkészült digitális térkép térinformatikai rendszer alapjául is szolgálhat, mivel a különböző térképi objektumokat objektumosztályokba soroltuk és külön-külön fedvényeken helyeztük el.

Összefoglalás

Tapasztalataink szerint a sivatagban töltött idő meglehetősen kevés, hogy két ember a fentiekben ismertetett méréseket mind elvégezze egy ásatási szezon alatt. Ezért minden évben akadt munka a négyszöghálózatok kitűzése, bemérése és a térképezés terén is. Célszerű, ha az elvégzendő munkával mindig az előző évben elvégzett feladatok eredményeire támaszkodunk.

A terepi és irodai munka eredményeként elkészült egy 1:3000 méretarányú topográfiai térkép (*2.ábra*), amely tartalmazza a domborzat szintvonalait, a terület legfontosabb síkrajzi elemeit és a régészek által kért adatokat. A térkép WGS84 geodéziai dátumban készült, mivel nem volt célszerű az egyiptomi topográfiai térképek rendszerében maradnunk azok hibái miatt. Azért is jobb a

WGS84 dátum, mert a jövőben, ha valaki a területen dolgozik, egy kézi GPS-szel bármely bemért objektumot meg fogja találni. Ez nagyon fontos például az eldugott sziklarajzok esetében.



2. ábra. Az elkészült M=1:3000-es méretarányú térkép kicsinyített mása (a térképezett terület 1600x1400 m)

A műszerfelszerelés összeállítását erősen befolyásolta, hogy poggyászként kellett kiszállítani. Ezért hagyományos műszerekhez kellett fordulnunk. Azért sem lenne lehetséges a mérőállomások használata, mert a területen az akkumulátorok töltése nem megoldható a sivatagban rendelkezésre álló eszközeinkkel.

Tapasztalataink szerint a négyszöghálózatra alapozott régészeti felmérés ott hatékony, ahol a felmérendő objektumok közel vannak egymáshoz. Azonban olyan területeken, ahol ezek az objektumok szétszórtan találhatók, a sok feleslegesen kitűzött és fel nem használt pont miatt nem gazdaságos. Ezért ott célszerűbb a tahiméteres felmérés, szükség szerint tájolóval segítve. A terepen al-

kalmazott mérési eljárások nem nyújtanak centiméteres pontosságot. Erre azonban nincs is szükség. Az objektumok vagy objektum csoportok térképen való elhelyezéséhez elegendő a GPS-szel mért abszolút helymeghatározás néhány méteres pontossága.

A felhasznált navigációs GPS-műszer a mérések szinte minden területén alkalmazható volt. A négyszöghálózatok és tahimetriai felmérések esetében a hálózati kezdőpont vagy a műszerállás-pont koordinátáit határoztuk meg vele. A térképezés folyamán a terület jellegét meghatározó pontok bemérését is elvégeztük a műszerrel. Az abszolút helymeghatározás magassági értelemben nagy hibával terhelt, ami számunkra sem volt már elfogadható, ezért a magasságokat a GPS-vevőbe beépített barométeres magasságmérővel határoztuk meg. GPS-vevő nélkül, hagyományos mérési eljárásokkal a terület térképezése csak nagyon nagy anyagi ráfordítással lett volna megoldható, amit az expedíció költségvetése sajnos finanszírozni nem tud.

A térképezési munka 2003-ban sem fejeződött be. A területnek még mindig vannak olyan részei, amelyek bejárására és felmérésére nem maradt időnk. Ezt 2004-ben fogjuk pótolni. A feldolgozások területén a jövőben célszerű lenne egy, a térképre alapozott térinformatikai rendszert létrehozni, amelyben szerepelnek a különböző felmérések (régészeti, építészeti, epigráfusi) eredményei. Végeredménynek azt tekintetnénk, amikor a térinformatikai rendszerben rámutatva egy objektumra, annak az adatai lekérdezhetők lennének, az adatbázisban történő válogatással pedig új következtetéseket (pl. a település időbeli fejlődése) tudnánk levonni.

Fontosnak tartjuk megemlíteni, hogy a létrejött térkép az alapja az összes eddigi munkának. Az ásatás 1998-ban kezdődött. Egészen 2001-ig csak részeredmények voltak a különböző szakterületek (epigráfusi, régészeti, építészeti) munkája által. Ám ezen részeredményeket elhelyezni a meglévő 1:50 000-es térképre lehetetlen volt a méretarány miatt, hiszen olyan nagy mértékű információs anyag gyűlt össze, amit ebben a méretarányban nem lehetett jelkulccsal ábrázolni. Ezért volt szükség az ásatási terület egy szűkebb környezetéről készült nagyobb méretarányú térképre. Ezt a meglévő térképek alapján lehetetlen volt elkészíteni egyrészt azok pontatlansága, másrészt az egyiptomi állam katonaszemlélete miatt. Ugyanis minden adat titkos, a pontatlan térképeket is igen körülményesen hosszas utánajárás után lehet beszerezni, nem beszélve a légi- vagy űrfelvételekről. Tehát maradt a helyszíni felmérés. Geodéta nélkül, akik a terület egészét egységbe foglalják, igen hátrányos helyzetben volnának a kutatók. Kintlétünk alatt minden szakterületen dolgozó a segítségünket kérte. A régészek szintezési feladatokkal láttak el (lásd: szondázás), az építészeknek négyzethálót kellett kitűzni a helyszínen, a nélkül el sem tudták volna kezdeni a munkájukat. Az epigráfusok által lemásolt sziklarajzok pontos helyét is a geodétáknak kellett rögzíteni, hiszen ebből értékes következtetéseket lehet levonni a környéken élők szokásairól, mindennapi életéről. Végül elmondhatjuk, hogy az ásatás vezetői úgy döntöttek, hogy a jövőben ásatást csak geodéziai segítséggel fognak végezni, hogy a leleteket megtalálási helyükhöz tudják kapcsolni és a nagymennyiségű, több régészeti ágat lefedő leletanyagot egy rendszerben tudják kezelni.

Hivatkozások

Farkas AM: Az ELTE keleti sivatagi expedíciója.
Ulrich L (2000a): Magyar egyiptológusok Bir Minayhban. Sziklarajzok és feliratok. *Élet és Tudomány* 2000/18, 559-561.
Ulrich L (2000b): Magyar egyiptológusok Bir Minayhban. Sziklarajzok és feliratok. *Élet és Tudomány* 2000/19, 596-599.
Ulrich L (2001): Magyar egyiptológusok a sivatagban. *Élet és Tudomány*, 2001/8.

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉRREL KAPCSOLATOS FIZIKAI ALAPFOGALMAK ÁTTEKINTÉSE

Völgyesi Lajos[*1,2]

Review of technical terms used in gravity field interpretation *- Correct usage of certain terms and units is the question in dispute of experts of the Earth's gravity field. In relativistic physics force field is equivalent to accelerating field. As the theory of relativity will come in common use, among the terms of the Newtonian mechanics only the acceleration will be needed for the representation of the gravity field.*

Keywords: gravitation, gravity, gravity intensity, acceleration of the free fall

Hosszú idő óta vitatéma a Föld nehézségi erőterével foglalkozó szakemberek között bizonyos elnevezések és mértékegységek helyes használata. Mivel a relativisztikus fizikában az erőtér és a gyorsuló tér egyenértékű, a relativitás elmélet általános elterjedésével a newtoni mechanika fogalmai közül az erőtér leírására egyedül a gyorsulás fogalmának használata lesz indokolt.

Kulcsszavak: gravitációs erő, tömegvonzási erő, nehézségi erőtér, nehézségi gyorsulás

Bevezetés

Ha a természettudományokkal foglalkozó szakembereket nehéz helyzetbe akarjuk hozni, akkor a lehető legegyszerűbb kérdéseket kell feltenni a számukra. A különböző fizikai erőterekkel kapcsolatos kérdések felvetése a legalkalmasabb erre a célra. Ilyen kérdések például: mi a gravitációs erőtér, miképpen ered az anyagon belül, hogyan és mekkora sebességgel terjed a gravitációs hatás, vagy miképpen „érzi" az egyik tömeg a másik hatását? Természetesen a fizikusok a kérdések egy részére elméleti fizikai megfontolások alapján rendelkeznek különféle elképzelésekkel, de a számunkra láthatatlan, kezünkkel megfoghatatlan erőterek továbbra is misztikus homályban rejtőzködnek előttünk.

Az univerzum tömegei egyetlen pontba zuhannának, ha a tömegek között csak gravitációs (tömegvonzási) erő hatna. A tömegvonzási erővel azonban a keringési centrifugális erő tart egyensúlyt – biztosítva ezzel a világegyetem létezését. *Mivel a természet csak azonos fizikai mennyiségeket képes összeadni, ezért jó okunk van feltételezni, hogy a gravitációs és a keringési centrifugális erőtér ekvivalens.*

A Föld nehézségi erőtere

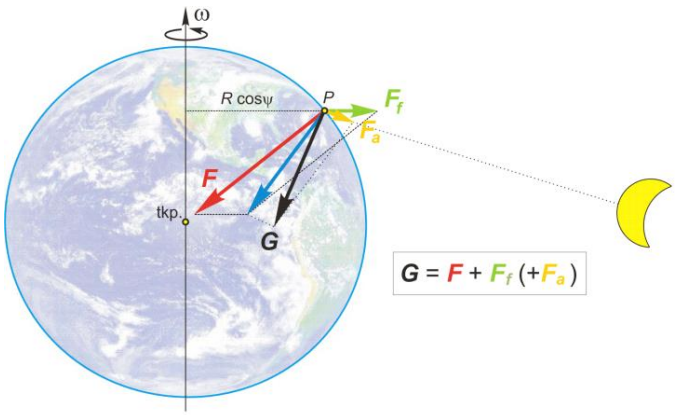
A földi nehézségi erőt általában a két legjelentősebb összetevő: a Föld tömegének Newton-féle tömegvonzásából származó $\mathbf{F}$ erő és a Föld tengelykörüli forgásából keletkező $\mathbf{F_f}$ centrifugális erő eredőjeként értelmezzük. Emiatt élesen meg kell különböztetni a *tömegvonzási, vagy gravitációs erő (gravitation)* és a *nehézségi erő (gravity)* fogalmát – ugyanis a gravitációs (tömegvonzási) erő a nehézségi erőnek csupán az egyik összetevője *(Biró, 1989a, 1989b, 1993)*. Szigorú értelemben azonban a nehézségi erő nem csak a Föld tömegvonzása és a tengelykörüli forgásból származó centrifugális erő eredője, hanem ehhez még hozzájön a Földön kívüli égitestek (elsősorban a Hold és a Nap tömege) vonzó hatásának, valamint a Föld és a Hold, illetve a Föld és a Nap közös tömegközéppontja körüli keringésből származó centrifugális erők $\mathbf{F_a}$ eredője, amelyet *árapálykeltő erőnek* nevezünk.

Így végül is a Föld tetszőleges pontjában valamely m tömegű testre ható $\mathbf{G}$ nehézségi erő (a test súlya) az *1. ábra* tanúsága szerint:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \mathbf{F_f} + \mathbf{F_a} \ , \qquad (1)$$

[*1] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
[*2] *Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport*
H-1521 Budapest, E-mail: volgyesi@eik.bme.hu

ahol **F** az *m* tömegre ható Newton-féle tömegvonzás, $\mathbf{F_f}$ a forgási centrifugális erő és $\mathbf{F_a}$ a Földön kívüli égitestektől származó árapálykeltő erők eredője.



1. ábra. A földi nehézségi erő összetevői

Valamely test nehézségi erőterét akkor tekinthetjük ismertnek, ha a tér minden $P(x,y,z)$ pontjában meg tudjuk adni a nehézségi erő $\mathbf{G}(x,y,z)$ vektorát. A nehézségi erő definíciója azon az erőhatáson alapul, amelyet a nehézségi erőtér a különböző testek tömegére gyakorol.

A pontszerűnek képzelt *M* és *m* tömeg között fellépő erőhatást a jól ismert *Newton-féle tömegvonzási törvény* írja le:

$$\mathbf{F} = k\frac{Mm}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right), \qquad (1)$$

ahol **r** a tömegek közötti vektor, *r* a vektor hossza (a tömegek közötti távolság); *k* pedig pozitív arányossági tényező, a Newton-féle gravitációs együttható. Az $\mathbf{F}(x,y,z)$ erőfüggvény elvileg alkalmas a tömegvonzási erőteret keltő test körüli tér jellemzésére, azonban erre a célra mégsem használjuk, mivel az értéke nem csak a vizsgálandó teret keltő *M* tömegtől, hanem a vizsgálatot végző műszerek különböző *m* érzékelő tömegeitől is függ. Az (1) viszont az

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E} \qquad (2)$$

formában is felírható, ahol

$$\mathbf{E} = k\frac{M}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \qquad (3)$$

már csak az *M* tömeg erőterét jellemző vektormennyiség: a *tömgvonzási (gravitációs) térerősség*. A (2) alapján egyébként a tömegvonzási térerősség úgy is értelmezhető, mint az egységnyi tömegre ható erő – amennyiben a térerősséget 1 kg értékkel megszorozzuk.

Mivel a térerősség vektormennyiség, ezért a megadásához minden pontban 3 összetevőjét kell ismernünk, mint a hely függvényét. A vektoriális megadási mód körülményessége azonban megkerülhető, mivel a teret egyetlen olyan skaláris mennyiséggel is le tudjuk írni, melyből az erőtér vektorösszetevői a gradiens-operátor alkalmazásával származtathatók *(Völgyesi, 1999)*. Ez a skaláris mennyiség az *erőtér potenciálja*. Valamely *M* tömegtől *r* távolságra a tömegvonzási potenciál értéke:

$$V = k\frac{M}{r}. \qquad (4)$$

A térerősség összetevői a potenciálfüggvény megfelelő koordináták szerinti differenciálásával egyszerűen adódnak. Mindezt egyetlen vektoregyenletben felírva:

$$\mathbf{E} = -grad\, V \tag{5}$$

vagyis a térerősség a potenciál gradiense.
Ebben az **E** erőtérben bármely *m* tömegre az erőhatás:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\, m = k\frac{Mm}{r^2}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) . \tag{6}$$

Ugyanakkor a tengelykörüli forgás következtében az *m* tömegű testre

$$\mathbf{F_f} = m\omega^2\mathbf{p} \tag{7}$$

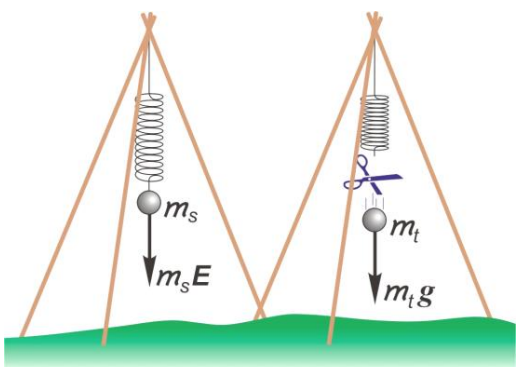
forgási centrifugális erő is hat; ahol **p** az **r** vektor forgástengelyre merőleges összetevője (a hossza: $p = r\cos\psi$, ahol ψ a két vektor által bezárt szög), ω pedig a Föld forgási szögsebessége.

Nehézségi térerősség, vagy nehézségi gyorsulás?

Tapasztalatunk szerint a *2. ábrán* látható módon rugóra felfüggesztett test a rugót megfeszíti. A rugó megnyúlása arányos a rugót feszítő erővel és fordítottan arányos a rugó erősségével (ami a rugóállandóval jellemezhető). A rugót feszítő erő a felfüggesztett test tömegével és a nehézségi térerősséggel arányos:

$$\mathbf{G} = m_s\mathbf{E} . \tag{8}$$

Itt m_s a test azon tulajdonságát jellemzi, hogy adott nehézségi erőtérben mennyire képes megnyújtani egy rugót. A test e statikai tulajdonságát az m_s *"súlyos"* tömegének nagyságával jellemezhetjük. A rugóra felfüggesztett test most nyugalomban van, hiszen a rá ható erők eredője zérus, mert a **G** súlyerőt pontosan kiegyensúlyozza az ellentétes irányú rugóerő.



2. ábra. A súlyos és a tehetetlen tömeg viselkedése nehézségi erőtérben

Vizsgáljuk meg, mi történik abban az esetben, ha a rugó elszakad, vagy levágjuk a rugóra függesztett tömeget. Ekkor megszűnik az a rugóerő, mely egyensúlyt tartott a súlyerővel, de változatlanul ugyanaz az erőtér fog ugyanarra a testre hatni. Így a test a rá ható eredő erő, a súlyerő hatására Newton II. $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvényének megfelelően gyorsuló mozgást fog végezni. Ha a légellenállástól eltekintünk, a test a szabadesés gyorsulásával, a *g* nehézségi gyorsulással fog mozogni, tehát

$$\mathbf{G} = m_t\mathbf{g} , \tag{9}$$

ahol m_t a test azon tulajdonságát jellemzi, hogy adott nehézségi erőtérben mennyire képes ellenállni annak a gyorsító erőnek, amely a mozgásállapotát igyekszik megváltoztatni. A test e dinamikai tulajdonságát az m_t *"tehetetlen"* tömegének nagyságával jellemezhetjük.

Tekintettel arra, hogy a (8) és a (9) egyenletek baloldalán ugyanaz a súlyerő szerepel, ezért

$$m_s\mathbf{E} = m_t\mathbf{g} \quad . \tag{10}$$

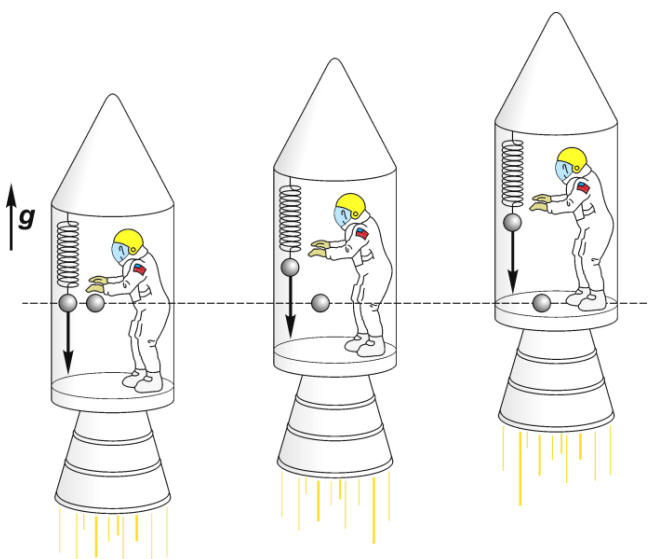
Galilei olasz természettudós több mint 300 évvel ezelőtt egyidejűleg két testet: vas és fagolyót ejtett le, és azt tapasztalta, hogy a két test a nagy súlykülönbség ellenére gyakorlatilag egyidőben ért a talajra. Eötvös Loránd továbblépett, és az akkori technikai lehetőségeknek megfelelően a kilencedik jegyig terjedő pontossággal igazolta a súlyos és a tehetetlen tömeg azonosságát *(Renner, 1964; Perjés 2005)*. Einstein az ekvivalencia-, tehát a súlyos és a tehetetlen tömeg azonossága elvére építette fel az általános relativitás elméletét. Minden elméleti fizikai megfontolás és minden megfigyelés amellett szól, hogy a súlyos és a tehetetlen tömeg ugyan a testek két teljesen eltérő tulajdonságát jellemzi, mégis a két mennyiség egyenlő egymással *(Misner et al. 1973)*, tehát az

$$m_s = m_t \tag{11}$$

egyenlőség miatt a (10) alapján

$$\mathbf{E} = \mathbf{g} \quad . \tag{12}$$

Eszerint tehát *a szabadon eső test gyorsulása, a nehézségi gyorsulás, irány, értelem és nagyság szerint megegyezik a nehézségi térerősséggel.* Fogalmilag, azonban a kettőt megkülönböztetjük, és mindegyiket a maga helyén használjuk. Így, pl. a nehézségi erőtér *potenciálját* az (5) szerint a *térerősséghez* rendeljük (így lesz a jellege fajlagos munka). Az eredmény tulajdonképpen nem is meglepő, hiszen a (11) egyenlőség elfogadása után a (12) nem más, mint Newton II. törvényének a tömegegységre vonatkoztatott alakja, ami a keletkező gyorsulást és az őt létrehozó erőt kapcsolja összse.



3. ábra. A gyorsuló erőtér hatása

Eddig a kérdést a newtoni gravitáció elmélet alapján tárgyaltuk. Nézzük meg a kérdést az általános relativitás elmélet alapján. Végezzünk el egy fontos gondolatkísérletet Einstein ötlete alapján *(Jones, Childers, 1990)*! Képzeljünk el egy űrhajót a világegyetem olyan távoli részén, ahol sem a közeli, sem a távoli környezetben semmiféle tömegek nem találhatók és ennek megfelelően a gravitációs erőtér zérus. Ha elindítjuk az űrhajó rakétahajtóművét, a tolóerő hatására Newton II. törvényének megfelelően az űrhajó gyorsuló mozgással elindul. Alkalmazzunk olyan erős rakétahajtóművet, amely éppen

$\mathbf{a} = \mathbf{g}$ gyorsulással mozgatja az űrhajót! Mivel az űrhajó kabinjában lévő tömegek a tehetetlenségük miatt igyekeznek helyben maradni, az űrhajós által elengedett tömeg a kabinhoz viszonyítva $-\mathbf{g}$ gyorsulással a padlóra „esik", a rugóra felfüggesztett tömeg pedig a *3. ábrán* látható módon $\mathbf{F} = m_t \mathbf{g}$ erővel megnyújtja a rugót. Az ekvivalencia elvnek megfelelően az űrhajós a zárt kabin belsejében semmiféle fizikai kísérlettel nem tudja eldönteni, hogy az űrhajó a Föld nehézségi erőterében a Föld felszínén egyhelyben áll és a kilövésre vár, vagy éppen a világegyetem távoli, térerősség-mentes részén g gyorsulással mozog. Számára a nehézségi erőtér teljesen azonos a gyorsuló erőtérrel.

Elsőként Einstein vetette fel azt a forradalmi gondolatot, hogy a tömegek a maguk környezetében megváltoztatják a számunkra egyszerűnek tűnő téridő szerkezetét úgy, hogy a szabadon mozgó testek nem az Euklideszi geometriának megfelelő egyenes vonalak mentén, hanem görbe pályán haladnak. Így a gravitációt keltő tömegek hatására a fénysugarak sem egyenes vonalú pályán mozognak, hanem mindenkor a számukra legegyszerűbb, ún. geodetikus vonalak mentén terjednek. Mindez úgy értelmezhető, hogy a tömegek a maguk környezetében megváltoztatják az Euklideszi geometriával leírható téridő egyszerű szerkezetét és maguk körül a *Bolyai-geometriával* leírható bonyolultabb görbült tér-idő szerkezetet alakítanak ki. Einstein általános relativitás elmélete a Newton-féle gravitáció elmélet geometriai magyarázata, ami szerint tehát a fényt és a mozgó tömegeket az egyenes vonalú pályájukról nem a gravitációs erő téríti el, hanem ezek a mozgások éppen a gravitációs tömegek által kialakított görbült tér legegyszerűbb (legegyenesebb) ún. geodetikus vonalai mentén történnek. Tudjuk, hogy a klasszikus fizika megfogalmazása szerint a görbe pályán mozgó testeknek gyorsulása van, így szükségképpen bizonyos erő hat rájuk. A gravitáció jelenségét tehát a gyorsulás magyarázza, ami az általános relativitás elmélet szerint a tér sajátsága. Mivel maga a tömegek által kialakított tér görbült, a hatás minden tehetetlen tömegre ugyanakkora, következésképpen az ekvivalencia elve is magyarázatot nyer. Az Einsten-féle gravitáció elméletnek ma már több kísérleti bizonyítékát ismerjük; ilyenek pl. a Merkúr perihéliumának elfordulása, a fénysugarak elhajlása a Nap és a csillagok közelében, továbbá a vöröseltolódás jelensége a nagyobb tömegű csillagok színképében *(Misner et al. 1973)*.

Mivel az általános relativitás elméletben valamely vonatkoztatási rendszer, amelyben tömegvonzás hat, egyenértékű egy gyorsuló mozgásban lévő másik vonatkoztatási rendszerrel (lásd az előbbi gondolati kísérlet), az elmélet a jelenségek leírását alapvetően a *gyorsulás* fogalmához kapcsolja. Ugyanakkor szakít – a geodéziában ma még kiterjedten használt – *potenciál* fogalmával.

*

Ma még a relativisztikus fizika és a newtoni mechanika egymás mellett él (sőt az általános relativitás elmélet határesetként a newtoni gravitációs elméletet tartalmazza is). Így nem meglepő, ha a felhasználói (alkalmazói) kör szakszerzői – fizikai világképüknek megfelelően – különböző fogalomrendszereket használnak. A newtoni mechanika ismeri, és használja a *térerősség*, a *gyorsulás* és az *erőtér potenciálja* fogalmát (a megfelelő mértékegységekkel), a relativisztikus fizika talaján állva, ezekből csak a *gyorsulás* fogalmának használata indokolt.

Köszönetnyilvánítás

A nehézségi erőtér időbeli változásával kapcsolatos kutatások a T-037929 sz. OTKA anyagi támogatásával folynak.

Hivatkozások

Biró P (1989a): A nehézségi erőtér matematikai leírásával kapcsolatos fogalmak pontosítása. *Geodézia és Kart*, 41. 1-6.
Biró P (1989b): Zum Begriff "Schwere" und zu den SI Maßeinheiten. *Zeitschrift f. Vermessungswesen*, 114. 209-218.
Biró P (1993): On the representation of the earth's gravity field. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, Intern. Ed*, 10. 14-20.
Jones ER, Childers RL (1990): Contemporary College Phisics. *Addison-Wesley Publ. Comp.*
Misner CW, Thorne KS, Wheeler JA (1973): Gravitation. *W.H Freeman and Comp.* San Francisco.
Perjés Z (2005): Precíz gravitációs kísérletek, *Fizikai Szemle*, LV, 45-48
Renner J (1964): Az Eötvös-kísérlet, *Fizikai Szemle*, XIV, 6-10
Völgyesi L (1999): Geofizika. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR IDŐBELI VÁLTOZÁSA

Völgyesi Lajos[*1,2]

Time variation of gravity field *- The gravity field of the Earth is a resultant of three different force field: the gravitational, the centrifugal and the tidal force field. Time variation of each component causes the time variation of gravity field. The theoretical figure of the Earth is continuously changing because of the time variation of gravity, potential surfaces of the gravity field continuously "pulsate" with amplitude of few dm in consequence of Earth's tide, flattening of the Earth is changing because of the decreasing rotation speed, and the inner mass rearrangements leads to the secular variation of geoid forms. All the possible reasons will be investigated in this paper which cause the time variation of Earth's gravity field.*

Keywords: Earth's tide, time variation of gravitational constant, decreasing rotation speed, polar motion, expanding Earth, surface movements, mass rearrangements.

A földi nehézségi erő három különböző erőhatás: a tömegvonzási, a forgási centrifugális erő és az árapálykeltő erők eredője. Bármely összetevő időbeli változása a nehézségi erőtér időbeli megváltozását eredményezi. A nehézségi erőtér időbeli változása miatt a Föld elméleti alakja sem állandó: az árapály hatására a nehézségi erőtér potenciál szintfelületei állandóan néhány dm-es amplitúdóval "lüktetnek", a tengelykörüli forgás szögsebességének csökkenése miatt a lapultság változik, a belső tömeg-átrendeződésekből pedig a geoid alakjának szekuláris változása következik. Az alábbiakban megvizsgáljuk mindazon okokat, amelyek a nehézségi erőtér időbeli változásait eredményezik.

Kulcsszavak: árapály, gravitációs állandó időbeli változása, lassuló forgási szögsebesség, pólusmozgás, táguló Föld, felszínmozgások, tömeg-átrendeződések.

Bevezetés

1583 táján Galilei vette észre, hogy a lengő inga periódusideje állandó, amikor a pisai székesegyházban egy lámpa lengését hasonlította össze a saját pulzusával. Hamarosan kiderült, hogy az inga lengésidejére hatással van az inga Földhöz viszonyított helyzete; az inga alacsonyabb helyeken és a pólusok közelében gyorsabban leng, mint a magasabb hegyeken és az egyenlítő vidékén. Ezzel megnyílt a lehetőség a földi nehézségi erőtér vizsgálatára. Az első fonálinga mérésekkel mindössze három értékes jegyre, azaz csupán 10^{-3} m/s^2 pontossággal sikerült meghatározni a nehézségi gyorsulás értékét. Később speciális fizikai ingákkal sikerült elérni a mGal pontosságot (1 Gal = 1 cm/s^2 – az elnevezés éppen Galilei tiszteletére született). A nehézségi erőtér mérésében az igazi előretörést az asztatizáció alapelvét felhasználó rugós graviméterek alkalmazása jelentette, az ezekkel elérhető $10^{-6} \div 10^{-7}$ m/s^2 mérési pontosság már megkövetelte a nehézségi erőtér időbeli változásainak-, nevezetesen az árapály jelenségek hatásának figyelembe vételét. A mérőműszerek teljesítőképességének fejlődését az *I. táblázatban* láthatjuk összefoglalva.

Napjainkban a nehézségi erőtér mérésére szolgáló műszerek elérték azt a pontosságot, amely mellett komolyan foglalkozni kell a nehézségi erőtér nem árapály jellegű időbeli változásaival is. A legújabb szupravezető graviméterek nGal nagyságrendű mérési pontossága már megköveteli valamennyi elképzelhető gravitációs hatás időbeli változásának vizsgálatát és figyelembe vételét. Az alábbiakban számba vesszük és megvizsgáljuk mindazokat a lehetséges fizikai, geofizikai és földtani hatásokat, amelyek a nehézségi erőtér legalább nGal nagyságrendű változását eredményezhetik.

[*1] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
[*2] *Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport*
H-1521 Budapest, E-mail: volgyesi@eik.bme.hu

I. Táblázat. Nehézségi gyorsulás mérések pontosságának fejlődése.

mérési eszközök	felbontóképesség $[m/s^2]$	nagyságrend
egyszerű fonálinga	$10^{-3} \div 10^{-4}$	
speciális fizikai ingák, reverziós ingák	10^{-5}	(mGal)
korábbi kvarcgraviméterek (Worden, Askania,	$10^{-6} \div 10^{-7}$	
újabb (LaCoste-Romberg) graviméterek	$10^{-7} \div 10^{-8}$	
abszolút lézergraviméterek	10^{-8}	(μGal)
szupravezető graviméterek	$10^{-9} \div 10^{-11}$	(nGal)

Az időbeli változások lehetséges okai

A Föld tetszőleges pontjában valamely *m* tömegű testre ható **G** nehézségi erő (azaz a test súlya):

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F}_a \qquad (1)$$

ahol $\mathbf{F}$ az *m* tömegre ható Newton-féle tömegvonzás, $\mathbf{F}_f$ a forgási centrifugális erő és $\mathbf{F}_a$ a Földön kívüli égitestektől származó árapálykeltő erő. Az ennek megfelelő térerősség, illetve gyorsulás:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_n + \mathbf{g}_f + \mathbf{g}_a$$

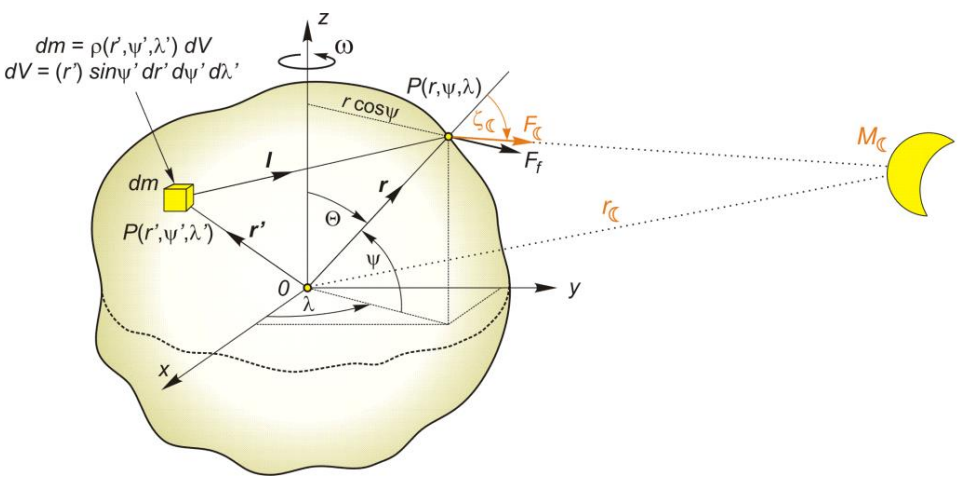
ahol

$$|\mathbf{g}_n| = k \iiint_{r'\psi'\lambda'} \frac{\rho(r',\psi',\lambda')\, r'^2 \sin\psi'}{(r-r')^2}\, dr'\, d\psi'\, d\lambda' \qquad (3)$$

$$|\mathbf{g}_f| = \omega^2 r^2 \cos^2\psi \qquad (4)$$

$$|\mathbf{g}_a| = kM_{\leftmoon} \frac{r}{r_{\leftmoon}^3}\left(3\cos^2\zeta_{\leftmoon} - 1\right) + kM_{\odot} \frac{r}{r_{\odot}^3}\left(3\cos^2\zeta_{\odot} - 1\right) + \ldots \qquad (5)$$

az *1. ábra* jelöléseinek megfelelően, és *k* a gravitációs együttható *(Völgyesi 1999)*. Az árapálykeltő erőtér közelítő számítása esetén csak a Hold (☾)és a Nap (☉) hatását vettük figyelembe.



1. ábra. Jelölések a földi nehézségi erő összetevőinek számításához

A (3), (4) és az (5) összefüggések alapján a tömegvonzási, a forgási centrifugális és az árapálykeltő erő hatását figyelembe véve megállapítható, hogy melyek azok a mennyiségek, amelyek időbeli változása a nehézségi erőtér időbeli változását eredményezheti. Jelöljük (t)-vel azokat a tagokat, amelyeknek valamilyen okból szerepe lehet a nehézségi erőtér időbeli változásában:

$$g(t) = k(t) \int_{r'(t)} \int_{\psi'(t)} \int_{\lambda'(t)} \frac{\rho(r',\psi',\lambda',t)\,[r'(t)]^2 \sin[\psi'(t)]}{\left[r(t) - r'(t)\right]^2} dr'\,d\psi'\,d\lambda' +$$
$$+ \left[\omega(t)\right]^2 \left[r(t)\right]^2 \cos^2\psi(t) + \qquad (6)$$
$$+ k(t) M_{\leftmoon}(t) \frac{r(t)}{[r_{\leftmoon}(t)]^3} \left\{3\cos^2[\zeta_{\leftmoon}(t)] - 1\right\} + k(t) M_{\odot}(t) \frac{r(t)}{[r_{\odot}(t)]^3} \left\{3\cos^2[\zeta_{\odot}(t)] - 1\right\}$$

A (6) összefüggés alapján a *II. táblázatban* összefoglaltuk az időbeli változás lehetséges okait, majd a táblázat szerinti sorrendben részletesebben megvizsgáljuk a kiváltó okokat.

II. Táblázat. A nehézségi erőtér időbeli változásának lehetséges okai.

δg_a	árapály $\{ k(t), r(t), M_{\leftmoon}(t), r_{\leftmoon}(t), \zeta_{\leftmoon}(t), M_{\odot}(t), r_{\odot}(t), \zeta_{\odot}(t), \ldots \}$
$k(t)$	gravitációs állandó időbeli változása
$\omega(t)$	lassuló forgási szögsebesség
$\psi(t), \lambda(t)$	pólusmozgás
$r(t)$	táguló Föld
$\rho(r',\psi',\lambda',t)$	sűrűségváltozás
$r(t)$	felszínmozgások
$r'(t)$	tömegátrendeződések

Az árapály

A nehézségi erőtér legjelentősebb változása a Földön kívüli égitestek – elsősorban a Hold és a Nap – által okozott tömegvonzás következménye. Az árapály sokfajta különböző periódusú és amplitúdójú hullámból tevődik össze és a nehézségi erőtér rövid periódusú változásait okozza. Az erőtér időbeli változásainak vizsgálata során érdemes különválasztani az árapály következtében kialakuló-, és a nem árapály jellegű változásokat. Az elkülönítésnek több kézenfekvő indoka van. A legfontosabb ok az, hogy az árapály tized mGal nagyságrendű változása valamennyi más változásnál markánsabb, így az árapály hatását már a korábbi kisebb pontosságú graviméterek is „érezték". Ezért az árapály – ellentétben a többi egyéb időbeli változással – meglehetősen részletesen kutatott és feltárt jelenség, amit különböző modellekkel jól le tudunk írni *(Melchior 1976, Wenzel 1996)*. A nagy pontosságú mérések esetében fontos tudni, hogy a tengeri árapály még a kontinensek belsejében is hat, döntő mértékben a félnapos (M_2, S_2) hullámok esetében közepes szélességeken a tengerektől 1000-1500 km-re a hatás 1-2 μGal lehet (az egyenlítő térségében ez akár a 3 μGal értéket is meghaladhatja. A továbbiakban csak a nehézségi erőtér nem árapály jellegű változásaival foglalkozunk.

A gravitációs "állandó" időbeli változása

A Newton-féle tömegvonzást leíró egyenletben szereplő k együttható állandósága a mérési pontosságon belül csupán az emberi megfigyelés eddig rendelkezésre álló igen rövid időtartamára vonatkozik. Ma már tudjuk, hogy a klasszikus mechanika törvényei is csak az emberi élet méretarányához viszonyítva tekinthetők közelítőleg érvényesnek, az igen nagy sebességű jelenségek leírására nem alkalmasak. Hasonlóképpen kiderült, hogy pl. a klasszikus elektromágneses elmélet sem alkalmazható az igen kicsi, atomi méretű mikrovilágban. Nincs okunk azt sem feltételezni, hogy a

klasszikus fizika törvényei az univerzum végtelen hosszú kozmikus időskáláján minden tekintetben ugyanúgy működnek, mint az általunk megfigyelt igen rövid időtartam alatt.

P.A.M. Dirac Nobel-díjas fizikus néhány univerzális állandóból képzett dimenzió nélküli szám vizsgálatából arra a merész következtetésre jutott, hogy a gravitációs "állandó" értéke fordítottan arányos a világegyetem (vagy a világegyetem egy részének) a korával, vagyis a gravitációs állandó értéke az időben csökken *(Dirac 1937)*. Később ezt az elképzelést *Gilbert (1956)* az általános relativitáselméletből bizonyos feltételezések mellett levezette. A gravitációs együttható időbeli változása ma még nem bizonyított, de az elméleti és az asztrofizikusok körében ismert hipotézis.

Egyes elképzelések szerint a gravitációs együttható értékének csökkenése kapcsolatba hozható a csillagászati megfigyelésekből jól ismert *Hubble-effektussal*. Ennek az a lényege, hogy a színképelemzések során tapasztalható ún. vöröseltolódás azt mutatja, hogy a galaxisok annál gyorsabban távolodnak, minél messzebb vannak tőlünk. A távolodási sebesség és a távolság aránya állandó, ennek értéke a *H* Hubble-konstans. A csillagászati megfigyelésekkel összeegyeztethető dinamikus relativisztikus modellekben a tágulás kezdete óta eltelt idő nagyságrendileg $t = 1/H$, azaz mintegy 10 milliárd év (a Hubble-állandó lehetséges értéke tehát: $H \approx 3 \cdot 10^{-18} \mathrm{s}^{-1}$). A gravitációs együttható csökkenése igen lassú, *Nielsen (2003)* vizsgálatai szerint

$$\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial t} = -\frac{1}{3}\frac{1}{t} \quad , \tag{7}$$

ahol

t az univerzum jelenlegi életkora.

Próbáljuk megbecsülni, hogy a *k* időbeli változása milyen nagyságrendű változását okozhatja a földi nehézségi erőtérnek. A $g = kM/r^2$ nehézségi erőtér időbeli változása

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{M}{r^2}\frac{\partial k}{\partial t} + kM\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial t} \quad . \tag{8}$$

Mivel *Nielsen (2003)* szerint

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial t} = -\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial t} \quad , \tag{9}$$

ezért a (7), (8) és a (9) figyelembe vételével

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{1}{t} \quad .$$

Ez alapján a földtörténet különböző időpontjaira a *III. táblázatban* látható *g* értékek számíthatók.

III. táblázat. A *g* értékének változása a gravitációs együttható csökkenése következtében az időben visszafelé haladva *Nielsen (2003)* szerint

t [10^9 év]	0	0.5	1	2	3	4
g [m/s^2]	9.8	10.3	10.8	12.1	13.7	15.9

Megállapítható, hogy a *g* változása nem egyenletes, a csökkenése egyre lassúbb. A *III. táblázat* adatai alapján a *g* értéke az utóbbi 1 milliárd évben kb. 1m/s^2 értékkel változott, ami *évente* 0.1μGal *csökkenésnek* felel meg. Ennek megbízható kimutatása a legújabb szupravezető graviméterekkel elvileg lehetséges.

Elképzelhető tehát, hogy a jelenleg alig néhány tizedes pontossággal ismert gravitációs együttható feltételezett rendkívül csekély éves változását ilyen módon hamarosan ki lehet mutatni, - feltételezve, hogy helyesek az elméleti megfontolásaink, továbbá a gravitációs együttható változásának hatását sikerül különválasztani több más egyéb gravitációs hatástól.

A Föld lassuló forgási szögsebessége

Mivel a Föld tengelykörüli forgásának szögsebessége nem egyenletes, ezért a centrifugális erő megváltozása miatt is változik a nehézségi erőtér. A nehézségi erőtér ezen változása a forgástengelytől mért távolság függvénye, ezért a Föld felszínén az egyenlítő mentén a legnagyobb, ettől északra és délre haladva csökken, a pólusoknál pedig már nem észlelhető.

A szögsebesség időbeli változásának mértéke az

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$$

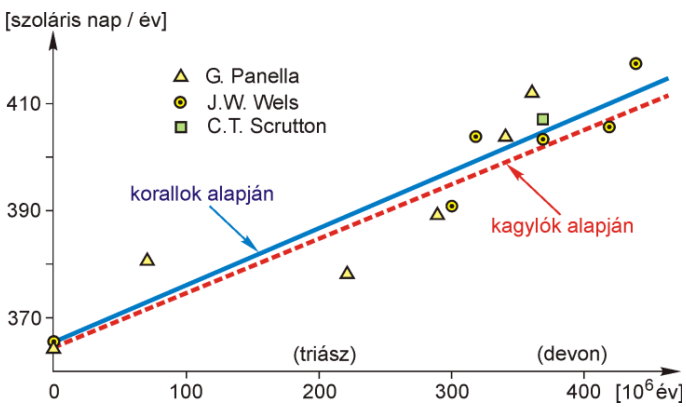
szöggyorsulással írható le; ahol

ω a forgási szögsebesség,

ε pedig az elfordulás szöge.

A Föld forgási szögsebességének vannak szekuláris (paleoszekuláris), rövid periódusú és hirtelen bekövetkező, szabálytalan változásai.

A Föld forgássebességének szekuláris lassulását geológiai bizonyítékokkal sikerült alátámasztani és a földtörténeti korokra is kiterjeszteni *(Denis et al. 2002, Varga 2003)*. Erre pl. egyes ősmaradványok és üledékek vizsgálata nyújt lehetőséget. A melegvizű tengerekben élő bizonyos korallok és kagylók naponta mikroszkopikus vastagságú mészréteget választanak ki *(Lambeck 1978)*. A mészrétegek vastagsága az adott élőlények életkörülményeitől függ, melegebb időben a gyorsabb életműködés miatt vastagabb, hidegebb időben vékonyabb mészréteget fejlesztenek. Az ősi korallok és kagylók nap-, illetve évgyűrűi alapján (a mészlemezek vastagságának periodikus változásából) az évek napjainak száma megállapítható. Néhány fontosabb vizsgálat eredményeit a *2. ábrán* láthatjuk. Eszerint 200 millió évvel ezelőtt, vagyis a *triászban* az év napjainak száma kb. 380-390, míg kb. 400 millió évvel ezelőtt, a földtörténeti *devon* kor elején már 400-410 nap körül volt. A Föld tehát a régebbi korokban a mainál lényegesen gyorsabban forgott. A vizsgálatok szerint a forgási szögsebesség csökkenése az egész óriási időközben egyenletesnek tekinthető és az értéke a csillagászati megfigyelésekkel jó összhangban: $\dot{\omega} = -(5.5 \pm 0.5) \cdot 10^{-22}\, s^{-2}$.



2. ábra. A napok évenkénti számának változása az utóbbi 400 millió évben **(***Lambeck 1978***)**

A Föld forgási szögsebességének változásait nagyon pontosan és egyenletesen járó atomórákkal is ki lehet mutatni úgy, hogy az általuk mutatott óraidőt összehasonlítjuk a csillagászati időmeghatározások eredményeivel, amelyek természetesen a Föld forgási sebességének ingadozásait is tartalmazzák. *Rochester* szerint négy jól elkülöníthető rövid periódusú változás mutatható ki: a kétéves periódusú kb. 9 msec amplitúdójú változás, az éves periódusú kb. 20-25 msec amplitúdójú-, a féléves kb. 9 msec amplitúdójú-, valamint a hónapos és a kéthetes periódusú kb. 2 msec amplitúdójú változás *(Rochester 1975)*. Ezek közül az éves periódusú változás amplitúdója a legnagyobb, amelynek okát a Föld tehetetlenségi nyomatékának évszakos megváltozásában kereshetjük.

A Föld forgási szögsebességének szabálytalan változásai markánsabban jelentkeznek és elérhetik az $\dot{\omega} = \pm 10^{-20}\, s^{-2}$ nagyságrendet, sőt az ugrásszerű, hirtelen változások akár $\dot{\omega} = \pm 10^{-19}\, s^{-2}$ nagyságúak is lehetnek *(Rochester 1975)*. Ezen változások valamennyi okát még nem ismerjük pontosan, de feltehetően nagy szerepet játszanak a különböző meteorológiai folyamatok, valamint az árapálykeltő és az egyéb erők hatására a Föld belső szerkezetében bekövetkező változások.

A tengelykörüli forgási szögsebesség változásának elsősorban azért van nagy jelentősége, mert a centrifugális erő megváltozása miatt a nehézségi erőtér, az erőtér szintfelületeinek alakja – tehát a Föld alakja is – időben változik. Ez a földtörténeti korok alatt a Föld lapultságának számottevő változását jelenti. A *IV. táblázatban* összefoglalva láthatjuk a forgási szögsebesség csökkenésének gravitációs hatását.

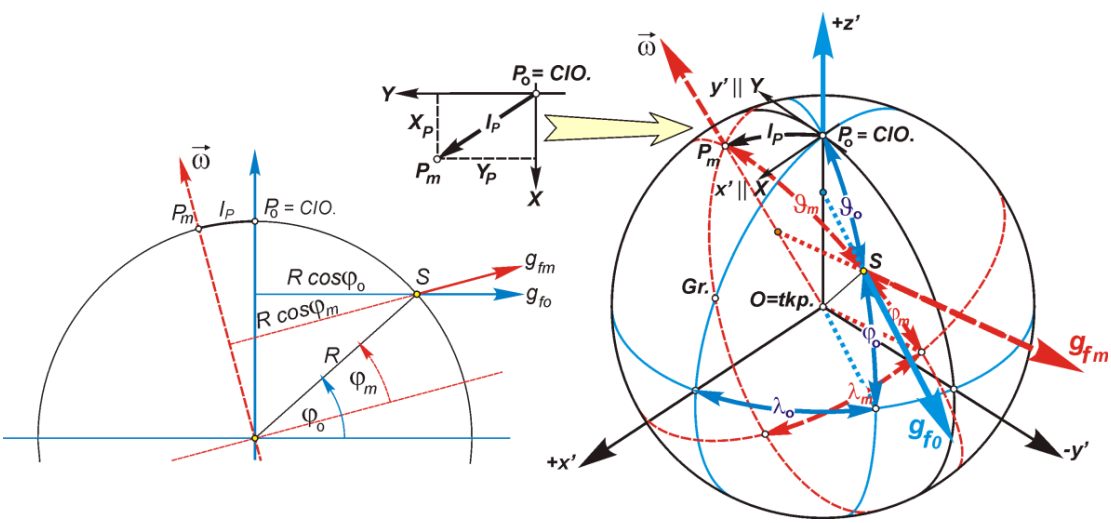
IV. táblázat. A *g* értékének változása az egyenlítő mentén a forgási szögsebesség csökkenése következtében

időpont	év hossza	forgási szögsebesség	centrifugális gyorsulás
jelenleg:	365 nap	ω=7.2921151·10^{-5} s^{-1}	g_f = 0.0338777 m/s^2
400 millió éve:	400 nap	ω=7.9913571·10^{-5} s^{-1}	g_f = 0.0406863 m/s^2

A táblázat adatai alapján egyszerűen kiszámítható, hogy a forgási sebesség lassulása következtében a nehézségi gyorsulás csökkenése közelítőleg 2 nGal/év, ami kb. 500 év alatt tesz ki 1 μGal értéket az egyenlítő vidékén.

A pólusmozgás hatása

A pólusmozgás abban nyilvánul meg, hogy a Föld forgástengelyének a tömegéhez viszonyított elmozdulása miatt a pontok koordinátái, a földrajzi szélesség és a hosszúság kis mértékben folyamatosan változnak. Ennek megfelelően a *3. ábrán* látható l_P nagyságú pólus-elmozdulás esetén az *S* megfigyelési pont eredetileg φ_0, λ_0 koordinátái φ_m, λ_m értékre változnak. A pólusmozgás legfontosabb következménye, hogy megváltozik az *S* pont forgástengelyhez viszonyított helyzete, emiatt pedig a *3. ábrán* látható módon a nehézségi gyorsulás vektor eredetileg $\boldsymbol{g}_{f0}$ centrifugális gyorsulás összetevője a $\boldsymbol{g}_{fm}$ vektorösszetevőre változik.

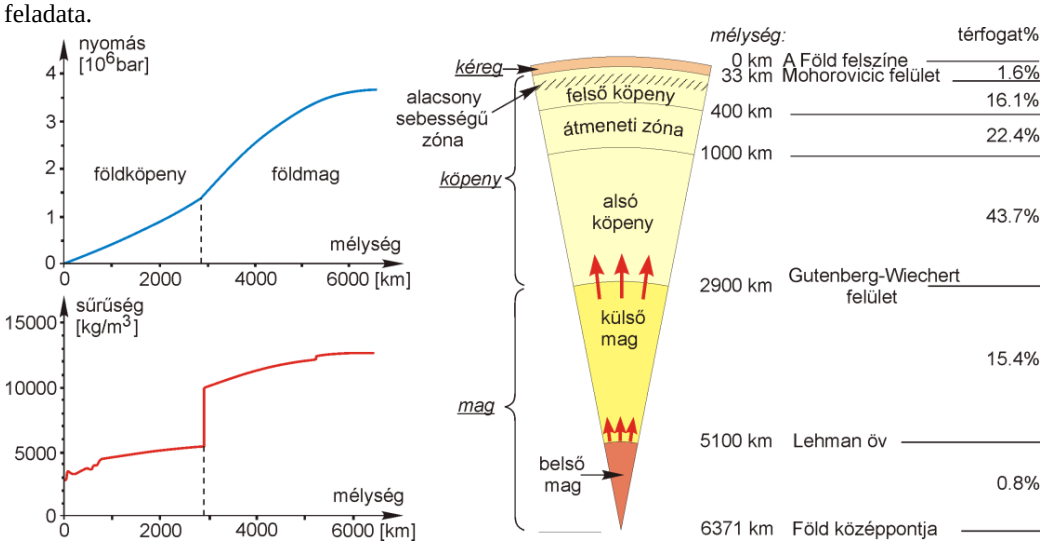


3. ábra. A pólusmozgás hatása

A pólusmozgás két összetevője a pólusingadozás és a pólusvándorlás *(Völgyesi 2002)*. A pólusingadozás következtében a forgástengely évi 10-20 m nagyságrendű közel periodikus elmozdulását tapasztaljuk. Ennek megfelelően a 3. *ábra* alapján egyszerűen kiszámítható, hogy ez a cetrifugális gyorsulásnak a $\varphi = 45^o$ szélesség környékén évente 5 μGal nagyságrendű kvázi-periodikus változását eredményezi, mely érték jó összhangban van korábbi mérésekkel *(Amalvict et al. 2003)*. Ennél lényegesen nagyobb lehet a jelentősége a pólusvándorlásnak, ugyanis a földtörténeti korok folyamán a földrajzi pólus jelentős elmozdulásával lehet számolni. Sajnos erre vonatkozóan hosszabb időszakra még nincsenek pontos megfigyeléseink. Az eddig rendelkezésre álló mérések szerint az utóbbi 110 év alatt a közepes pólus több mint 10 métert mozdult el Kanada irányába, ami a nehézségi gyorsulásnak a $\varphi = 45^o$ szélesség környékén mintegy 2-3 μGal nagyságrendű változását eredményezte.

A Föld tágulásának hatása

A Föld tágulásának hipotézise alapvetően *Egyed László (1970)* nevéhez fűződik, akinek ez az elképzelése ma még nem bizonyított, pontos és minden apró részletre kiterjedő igazolása a jövő egyik nehéz feladata.



4. ábra. A Föld belső felépítése és a fontosabb fizikai paraméterei

A jelenség magyarázatához a különböző földmodellek közül az asztrofizikai földmodell ismerete szükséges. A modell szerint a *4. ábrán* látható Gutenberg-Wiechert-felület és a Lehman-öv jelenlétét fizikai fázisátmenettel magyarázhatjuk. A modell fizikai alapját a csillagok belső felépítésének tanulmányozása adta. Vannak olyan típusú csillagok (pl. fehér törpék), amelyek belsejében a nagy sűrűség miatt az anyag nem molekuláris felépítésű, hanem *plazmaállapotban* van. Ennek eléréséhez az szükséges, hogy az anyag atomjai valamilyen okból olyan közel kerüljenek egymáshoz, hogy a szomszédos atomok külső elektronjai a kvantummechanika Pauli-féle kizárási elve megtartása mellett kölcsönhatásba lépjenek egymással *(Jeffreys 1976)*. Az asztrofizikai földmodell szerint az atomok a Föld belsejében elektronhéj-szerkezetük segítségével veszik fel a nyomást. A nagy nyomás a földköpenyben rácsos szerkezetbe kényszeríti a részecskéket és így minden egyes atomnak a környezetéhez viszonyított helyzete meghatározott, az anyag ún. *normál fázisú* állapotban van. A földköpeny és a földmag közötti Gutenberg-Wiechert-féle diszkontinuitás olyan kritikus nyomásértékű felület, ahol az anyag speciális plazmaállapotba (az ultra nagy nyomású ún. *I. ultrafázisú* állapotba) kerül és a részecskék között alapvetően csak a Coulombe-féle elektrosztatikus erők lépnek fel. Ez az I. ultrafázisú állapot térfogatcsökkenéssel jár, ezért növekszik meg ugrásszerűen a sűrűség a *4. ábrán* látható módon. A Föld középpontja felé haladva a nyomás további növekedésével a részecskék annyira közel kerülnek egymáshoz, hogy a nyomás felvételéhez a plazmaállapot ellenére is rácsszerű

elrendeződésbe, az ún. *II. ultrafázisú* állapotba kényszerülnek. Ilyen rácsszerű elrendeződésnek azonban a belső földmag határán a sűrűség újbóli ugrásszerű növekedése a következménye.

Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a Föld belsejében a gravitációs együttható feltételezett csökkenése esetén! Ekkor csökkenni fog a Föld belsejében a g értéke, emiatt pedig hidrosztatikai nyomást feltételezve csökkeni fog a nyomás értéke is. A nyomás csökkenése miatt 5000 km mélységben az instabil nagyobb belső energiájú II. ultrafázisból az I. ultrafázisba-, a Gutenberg-Wiechert felület mentén pedig az I. ultrafázisból a normál fázisba alakul vissza az anyag, miközben mindkét fázisátalakulás sűrűségcsökkenéssel és így térfogat növekedéssel jár.

Egyed László érdekes bizonyítékokat talált a Föld térfogatának növekedésére. A földtörténet kezdetén a jelentős gravitáció miatt a kémiai elemek szétkülönülése következtében kialakult a felső gránitos összetételű kőzettartomány, amely réteg a hősugárzás miatt megszilárdult és kialakult a mai magas életkorú kontinentális kéreg. A Föld térfogatának növekedése miatt ez az elsődleges gránitkéreg több helyen felhasadt és elkezdődött a másodlagos, fiatal bazaltkéreg kialakulása, melynek képződése az óceáni hátságok mentén a mai napig folyamatban van. A kontinentális gránitkéreg és a jelenlegi teljes földfelszín területi arányából bizonyos feltételek teljesülése esetén lehetőségünk van a kezdeti földsugár, illetve a sugárnövekedés mértékének meghatározására. Egyed számításai szerint a gránitkéreg kialakulásakor mintegy 4 milliárd évvel ezelőtt a Föld sugara 3500-4000 km lehetett, ezért 4 milliárd év alatt a sugárnövekedés kb. 2500 km, azaz évente közel 0.6 mm. Egyed *(1970)* és Carey *(1976)* egyéb földtani vizsgálatok során hasonló értékeket kapott.

A vertikális gradiens normálértékével számolva az éves 0.6 mm sugárnövekedés a nehézségi gyorsulás csaknem 0.2μGal nagyságú éves csökkenését eredményezi. Ez pedig azt jelenti, hogy a Föld sugarának növekedése a ma rendelkezésre álló műszerekkel megfelelő mérési módszert alkalmazva egy-két évtizedes ismételt mérések során kimutatható lehet, amennyiben más egyéb gravitációs hatásoktól külön tudjuk választani *(Biró, Völgyesi 1981; Biró 1983).*

A sűrűségváltozás hatása

Földünk jelentős területein laza fiatal üledékes kőzetek találhatók a felszínen vagy a felszín közelében. Ezekre a kőzetekre jellemző a nagy pórustérfogat, ami lehetővé teszi, hogy jelentős mennyiségű vizet vagy akár különféle szénhidrogéneket tartalmazzanak. A nagy pórustérfogat és a laza kőzetszerkezet miatt bekövetkezhet a kőzetek további tömörödése, az ún. kőzetkompakció, – különösen abban az esetben, ha ezekből a kőzetekből szénhidrogén kitermelés vagy vízkivétel is történik. A kőzetek tömörödésével egyrészt megváltozik a kőzetek sűrűsége, másrészt a térfogatcsökkenés miatt felszíni süllyedések keletkezhetnek. (A nagyságrendi tájékozódás kedvéért pl. ha az Alföld területén mintegy 400 m mélységben 10 m vastagságú vízadó rétegből kiszivattyúzzuk a vizet, emiatt a sűrűség kb.200 kg/m^3 értékkel-, a felszínen a g értéke pedig közel 80 μGal értékkel lesz kisebb.)

A felszínmozgások gravitációs hatása

A függőleges felszínmozgások során, a földfelszínen lévő pontok a Föld nehézségi erőterében más potenciálértékű helyre kerülnek, így az elmozdult pontokban más lesz a nehézségi erő értéke. A mai mérési pontosság mellett ez a változás már nem hagyható figyelmen kívül. Adott Δh nagyságú felszínmozgás mellett a δg változás mértéke a vertikális gradiens (VG) értékétől is függ:

$$\delta g = \underbrace{\partial g / \partial h}_{VG} \cdot \Delta h \ .$$

A vertikális gradiens jól ismert normálértéke $\partial g / \partial h = 0.3086$ mGal/m, a valóságban azonban a VG értéke ettől jelentősen eltérhet, – magyarországi mérések és modellszámítások alapján pl. 0.25 és 0.34 mGal/m között változik *(Csapó, Papp 2000; Csapó, Völgyesi 2002; Benedek 2002)*. A térben változó VG értékek miatt ugyanakkora Δh mértékű felszínmozgás esetén különböző pontokban más és más lehet a nehézségi erőtér δg megváltozása.

Magyarország területén a függőleges felszínmozgások átlagos értéke 1mm/év, bár helyenként ez lehet 4-5 mm/év is, sőt pl. Debrecen területén eléri a 8mm/év értéket *(Joó 1998)*. Ezért 10 éves időtartam alatt a felszínmozgások miatt átlagosan 2-4 μGal, de bizonyos területeken akár 10-20 μGal változásra is lehet számítani. Találhatók azonban a Földön olyan területek is, ahol ennél lényegesen nagyobb elmozdulások mérhetők. Skandináviában a földkéregnek az izosztatikus egyensúlyi állapot elérésére irányuló mozgása a kontinensrész évi 1 cm nagyságrendű tartós emelkedését eredményezi. Itt ennek megfelelően lényegesen nagyobb a nehézségi erőtér éves változása is *(Amalvict et al. 2003).*

A tömegátrendeződések hatása

A nehézségi erőtér domináns összetevője: *a tömegvonzási erőtér*, elsősorban az erőteret keltő tömegek átrendeződése miatt változhat meg. Az átrendeződési folyamatokban résztvevő tömegek nagyságának, sűrűségviszonyainak és mozgási sebességének megfelelően kialakulhatnak a tömegvonzási, illetve a nehézségi erőtér helyi, regionális és globális változásai; a mozgások jellegének megfelelően pedig lehetnek szekuláris, rövidperiódusú és rendszertelen (egyszeri) változások. Az alábbiakban röviden áttekintjük a lehetséges tömegváltozásokat.

Légköri meteorológiai változások

A légkör tömege jelentős szerepet játszik a nehézségi erőtér kialakításában. A légköri meteorológiai változások, elsősorban a légnyomás és a páratartalom változása a nehézségi erőtér időbeli változását okozza. A tapasztalat szerint 1 mBar légnyomásváltozás kb. 0.3 μGal nagyságú g változást eredményez. Mivel a legkisebb és a legnagyobb légnyomás közötti különbség akár 50-60 mBar is lehet és 10-20 mBar értékű változás akár fél nap alatt is bekövetkezhet, ezért a g mérések során a légnyomás változását mindenképpen figyelembe kell venni, a graviméteres méréseket az árapály és a drift javításokkal egyidőben el kell látni a légnyomás korrekcióval is.

Víztömegek mozgása

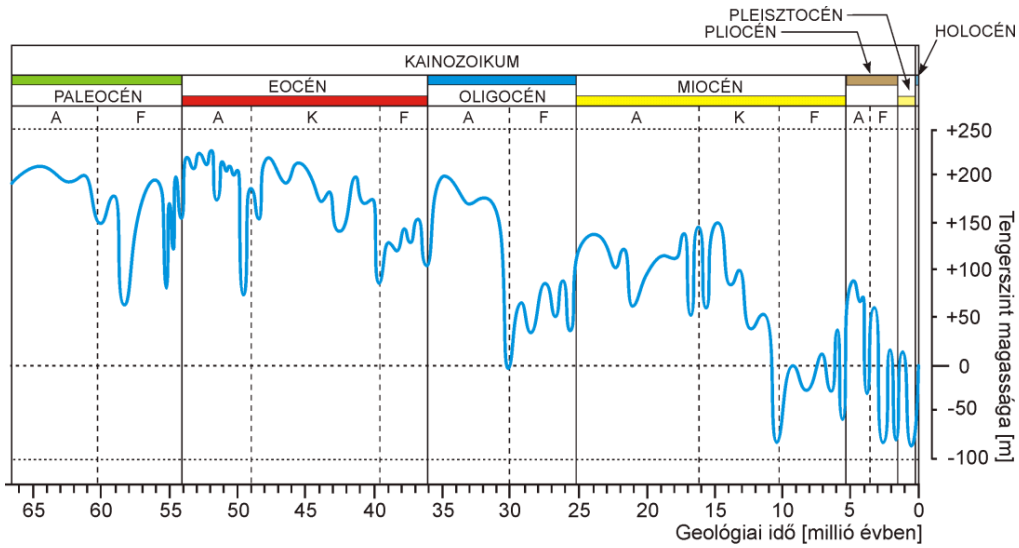
Földünk több mint 70%-át víz borítja. Nagy részét a világóceánok, tengerek és folyók teszik ki, de nem elhanyagolható tömeget képviselnek a földalatti vizek, a sarki jégsapkák, a csapadék eső és hó formájában, valamint az a víztömeg, amelynek mozgása az ember tevékenységéhez kapcsolódik. A csapadékvíz, a felszíni és a felszín alatti vizek mozgása, az eusztatikus változások egyaránt rendkívül jelentősek a nehézségi erőtér időbeli változása szempontjából, hiszen a mérőműszerek mai mérési pontossága mellett már egyik hatása sem elhanyagolható.

Érdemes külön figyelmet szentelnünk az óceánok és tengerek globális méretű vízszintváltozásaira. A földtudományokon belül a szeizmikus sztratigráfia egyre pontosabb eredményei lehetőséget adnak a nehézségi erőtér szekuláris, vagy a földtörténeti korokra kiterjedő ún. paleoszekuláris változásainak meghatározására a világtengerek eusztatikus változásainak vizsgálatán keresztül *(Haq et al. 1987)*. Az *eusztatikus tengerszintváltozás*, röviden az *eusztázia* fogalma alatt a világóceánok felszínének regionális illetve globális állapotváltozásait értjük. Az eusztatikus tengerszintváltozások legfőbb okozója a földi klíma geológiai idők során bekövetkező megváltozása *(Horváth 1988)*, emellett azonban tektonikai okok és a nehézségi erőtér megváltozása is szerepet játszik a tengerszint ingadozásokban *(Mörner 1984, Völgyesi 1996)*.

A triásztól a jelenig terjedő időszakra vonatkozó tengerszintváltozási görbéket (az ún. *Vail-görbéket*) 1987-ben publikálták *(Haq et al. 1987)*. Ezek a globális eusztatikus tengerszint-változási görbék napjainkban már többé-kevésbé elfogadott adatrendszert alkotnak, és rendelkezésre állnak a teljes mezozoikumra és kainozoikumra. A görbék szerkesztéséhez a világ valamennyi óceáni partvidékén végzett mérések adataiból képzett átlagértékeket figyelembe vették. A bemutatott eusztatikus változások megbízhatósága meglepően jó, a hiba mindössze néhány méter nagyságú. Az *5. ábrán* példaként a kainozoikumra vonatkozó görbét láthatjuk. Az ábrán látható, hogy a mai tengerszinthez viszonyítva az eddigi maximális szint csaknem 200 méterrel magasabban, míg a minimális szint mintegy 100 méterrel alacsonyabban volt; továbbá a jelenlegi tengerszint a kainozoikumra vonatkozó átlagos szintnél lényegesen alacsonyabb. Az összegyűjtött földtani bizonyítékok azt

mutatják, hogy a világtengerek felszíne hosszabb ideig egy bizonyos magasságban van, és a változások (a tengerszint-emelkedések és süllyedések) ehhez mérten gyorsan zajlanak le. A világ óceánjainak ilyen mértékű felszínmozgása a nehézségi erőtér földtörténeti korokra kiterjedő hatalmas méretű paleoszekuláris változásait mutatja.

Érdekességképpen az *5. ábrán* érdemes észrevenni, hogy a kainozoikumra vonatkozó Vail-görbe – a kváziperiodikus ingadozásoktól eltekintve – csökkenő trendet mutat. Ez akár az Egyed-féle földtágulási elképzeléssel is összeegyeztethető, ugyanis a Föld tágulásával a tengerszintek regressziós mozgása összhangban áll.

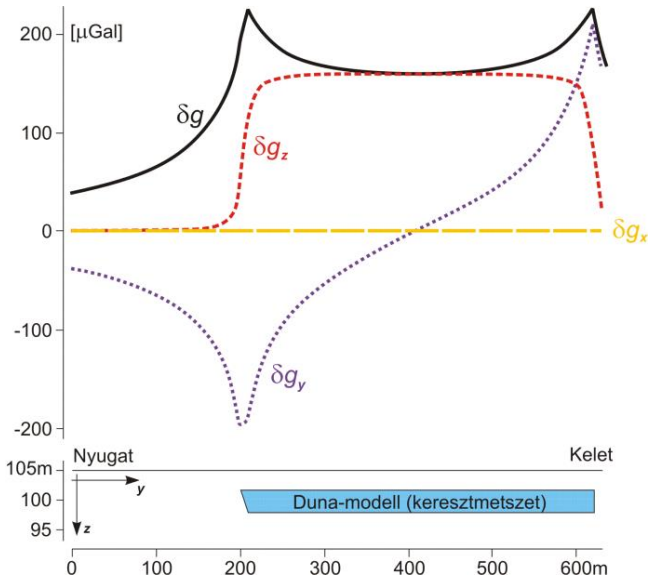


5. ábra. Globális tengerszint-változások a kainozoikumban

Természetesen nem csupán a világ óceánjainak gravitációs hatása érdekel minket, az utóbbi időkben megnőtt azoknak a kutatásoknak a jelentősége, melyek a különféle víztömegek lokális gravitációs hatásával foglalkoznak. A talajvízszint ingadozásának gravitációs hatása évtizedek óta közismert. A talajvízszint meghatározása vagy közvetlenül megfigyelő kutakban, vagy ma már közvetett módon mérnökgeofizikai szondázással is lehetséges. Debrecen környéki megfigyelések alapján a talajvíz szintje néhány év alatt több méterrel is megváltozhat a talajviszonyoktól és az időjárástól függően. Graviméteres mérések eredményei alapján 1 m talajvízszint ingadozás átlagosan 10-15 μGal nehézségi gyorsulás változást eredményez *(Csapó et al. 2003)*.

2002-ben megvizsgáltuk az augusztusi nagy dunai árvíz gravitációs hatását. Számítással meghatároztuk és graviméteres mérésekkel ellenőriztük a mintegy 4 m magasságú víztömeg gravitációs hatását. A *6. ábrán* a dunai árvízhullám gravitációs hatását láthatjuk a partvonalra merőleges szelvényben Budapestnél a maximális vízszint felett 4 m magasságban. Megállapítható, hogy a víztömeg gravitációs hatása közvetlenül a vízparton 0.2 mGal körüli érték, ami a vízparttól távolodva rohamosan csökken *(Völgyesi, Tóth 2004)*.

Számításokat és ellenőrző méréseket végeztünk a 80000 m^3 kapacitású Gellért-hegyi ivóvíz tározó medence napi vízmozgása által előidézett gravitációs változásra. Két nagy víztározó medence közötti pontban mintegy 3 m magasságban a medencék felett, 1 m vízszintváltozás esetén (ami egyébként 10000 m^3 vízmennyiségnek felel meg) 32 μGal változást kaptunk mind a méréseink mind a számításaink során *(Csapó et al. 2003)*. Hasonlóan a dunai árvízhullám gravitációs hatásához, a víztömeg hatása itt is rohamosan csökken a víztározó medencéktől mért távolság függvényében.



6. ábra. Dunai árvíz gravitációs hatása a partvonalra merőleges szelvényben Budapestnél

Kevésbé ismert tömeghatások

Föld belső tömegátrendeződései

A Föld belsejében lejátszódó tömegátrendeződésekről egyelőre még rendkívül keveset tudunk. A köpenyáramlások, vagy esetleg a belső földmag korábban feltételezett excentrikus modelljének megfelelő tömegmozgások a nehézségi erőtér hosszú periódusú *globális* változásait okozhatják. Éppen az ismételt g mérések eredményei adhatják az egyik lehetőséget ezek kutatására és megismerésére.

Geológiai, geotektonikai folyamatok

A Föld felszínén, vagy a felszín közeli tartományokban lejátszódó geológiai, tektonikai folyamatok a nehézségi erőtér tetszőleges idejű lokális, regionális vagy akár globális változásait eredményezhetik. Az eróziós folyamatok, üledékképződés, vulkáni működések, lokális és globális tektonikai folyamatok, lemeztektonika, kontinensvándorlás, ocean floor spreading mind olyan jelenségek, amelyek hosszabb időtartam alatt a nehézségi erőtér számottevő változását okozhatják. A felsorolt jelenségek gravitációs hatása további részletes vizsgálatokat igényel.

Technogén változások

Az emberi tevékenység a nehézségi erőtér jelentős mértékű *lokális* változásait okozhatja. A bányászati tevékenység következtében jelentős kőzettömegek változtatják meg helyzetüket, akár hegyek tűnhetnek el a Föld színéről, – mint pl. a Ság-hegy a Kisalföld déli részén. A másik fontos hatás az ember építő tevékenységéhez kapcsolódik; óriási völgyzárógátak, felhőkarcolók, és egyéb hatalmas építmények létrehozása szintén a nehézségi erőtér lokális változását eredményezi. Ma már rendelkezésre állnak olyan szoftverek, amelyekkel minden egyes speciális esetre ki lehet számítani az adott építmény lokális gravitációs hatását, amely akár néhány tized mGal nagyságú is lehet *(Völgyesi, Tóth, 2004).*

Összefoglalás

A vizsgálataink során röviden áttekintettük mindazon okokat, amelyek a nehézségi erőtér időbeli változásait eredményezik. A gravitációs együttható feltételezett időbeli változása a nehézségi erőtér közelítőleg 0.1 μGal/év nagyságú csökkenését okozhatja. A Föld lassuló forgási szögsebessége következtében a nehézségi gyorsulás csökkenése közel 2 nGal/év, ami 600 év alatt tesz ki kb.1 μGal

értéket az egyenlítő vidékén. A pólusmozgás következtében a forgástengely évi 10-20 m nagyságrendű közel periodikus elmozdulását tapasztaljuk. Ennek megfelelően a cetrifugális gyorsulás a 45° szélesség környékén évente 5 μGal nagyságrendű kvázi-periodikus változást mutat, amely érték jó összhangban van a mérésekkel. A Föld tágulásának Egyed-féle elképzelése alapján a feltételezett éves 0.6 mm sugárnövekedés a nehézségi gyorsulás csaknem 0.2μGal/év nagyságú csökkenését okozhatja. A tömegek átrendeződése miatt a folyamatokban résztvevő tömegek nagyságának, sűrűségviszonyainak és mozgási sebességének megfelelően kialakulhatnak a nehézségi erőtér helyi, regionális és globális változásai, melyek lehetnek szekuláris, rövidperiódusú és rendszertelen változások. A légköri, meteorológiai változások, a csapadékvíz, a felszíni és a felszín alatti vizek mozgása, az eusztatikus változások, a geológiai, tektonikai folyamatok, a Föld belső tömegátrendeződései és az emberi tevékenység egyaránt a nehézségi erőtér jelentős mértékű időbeli változásait okozhatják. Ezen változások nagyságrendje a bemutatott példák alapján igen széles skálán mozoghat.

Köszönetnyilvánítás

A nehézségi erőtér időbeli változásával kapcsolatos kutatások a T-037929 és a T-038123 sz. OTKA támogatásával folynak.

Hivatkozások

Amalvict M, Debeglia N, Hinderer J (2003): The absolute gravity measurements performed by Sakuma in France, revisited 20 years later. *In: Gravity and geoid 2002, I N Tziavos (Ed.) Ziti editions* 77-83.

Benedek J (2002): The application of polyhedron volume element in the calculation of gravity related quantities. *Geomatikai Közlemények* V, 191-206

Bilker M, Mäkinen J, Virtanen H (2004): Time series of gravity in Finland. *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions.CD kiadvány,* Porto, Portugal.

Biró P, Völgyesi L (1981): Geodinamic Interpretation of Repeated Gravity Observation. *Veröffent-lichungen des Zentralinstituts für Physik der Erde*, 63, 541-553.

Biró P (1983): Time variation of Heigt and gravity. *Akadémiai Kiadó*, Budapest.

Carey SW (1976): The expanding *Earth. Elsevier Sci. Publ. Co.*

Csapó G, Papp G (2000): Measurement and modeling of the vertical gradient of gravity on the basis of Hungarian examples. *Geomatikai Közlemények* III, 109-123.

Csapó G, Völgyesi L (2002): A nehézségi erő vertikális gradiensének mérése és szerepe a nagypontosságú graviméteres méréseknél – magyarországi példák alapján. *Magyar Geofizika*, 43, 4, 151-160.

Csapó G, Szabó Z, Völgyesi L (2003): Changes of gravity influenced by water-level fluctuations based on measurements and model computation. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, 64; 1, 143-153.

Denis C, Schreider AA, Varga P, Závoti J (2002): Despinning of the Earth rotation.. *Journal of Geodynamics* 34, 667-685.

Dirac PA (1937): The cosmological constants. *Nature*, 139, 323.

Egyed L (1970): A Föld belső szerkezetének új dinamikus felfogása. *Fizikai Szemle* XX. 354-364.

Gilbert C (1956): Dirac's cosmology and the general theory of relativity. *Monthly Not. of the Roy. Astr. Soc*. 116; 6, 684-690.

Haq BU, Hardenbol J, Vail PR (1987): Chronology of fluctuating sea levels since the Triassic. *Science* 235, 1156-1167.

Horváth F (1988): A tengerszint globális változásai. *Időjárás*, 92, 69-74.

Jeffreys H (1976): The Earth. *Cambridge University Press*, Cambridge.

Joó I (1998): Magyarország függőleges irányú mozgásai. *Geodézia és Kartográfia*, 50, 3.

Lambeck K (1978): In Brosche-Sündermann: Tidal friction and the Earth's Rotation. *Springer Verlag*, Berlin, 145-153.

Melchior P (1978): The Tides of the Planet Earth. *Pergamon Press*, Oxford.

Mörner N A (1984): Eustasy, geoid changes, and multiple geophysical interaction. *In Catastrophes and Earth history (eds. Berggren,W.A. and Van Convering,J.A.).* Pincerton Univ. Press, Pincerton, 395-415.

Nielsen L (2003): Holistic Quantum Cosmology with Decreasing Gravity, Denmark, www.rostra.dk/louis/

Palinkas V, Kostelecky J (2004): Seasonal variations of of gravity from three-year Absolute gravity measurements … *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions.CD kiadvány*, Porto, Portugal.

Rochester MG (1975): The Earth's rotation. Reports of the Dep. of. Geod. Sci., 231, 27-39, The Ohio State University.

Varga P (2003): Árapály, árapálysúrlódás és a Föld forgásának története. *Fizikai Szemle*, 9, 324-330.

Völgyesi L (1996): A geoid időbeli változása a tengerszintváltozások alapján. *Geodézia és Kartográfia*, 48; 6, 26-33.

Völgyesi L (1999): Geofizika. *Műegyetemi Kiadó*, Budapest.

Völgyesi L (2002) A pólusmozgás fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények* V, 56-73.

Völgyesi L, Szabó Z, Csapó G (2004): Relation between time variation of gravity field and vertical surface movements in the Pannonian basin. *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions. CD kiadvány,* Porto, Portugal.

Völgyesi L, Tóth Gy (2004): Modelling gravity gradient variation due to water mass fluctuations. *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions.CD kiadvány,* Porto, Portugal.

Wenzel HG (1996): The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bulletin d'Informations Mareés Terrestres*, 124, 9425-9439, Bruxelles.

GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI MÓDSZEREK EGYÜTTES ALKALMAZÁSA A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR IDŐBELI VÁLTOZÁSAINAK VIZSGÁLATÁRA

Csapó Géza[1], Völgyesi Lajos [2,3]

Application of geodetic and geophysical methods for examination of time variation of gravity *- Nowadays the high accuracy of gravity measurements motivates to examine the non tidal variations of gravity. Complex investigations of the local variations of gravity field are discussed in this study at the region Debrecen in Hungary based on geodetic and geophysical methods, and taking into account the geological, hydrological data, besides the use of maps of vertical surface movements' data.*

Keywords: time variation of gravity, vertical surface movements, rock compaction, relative and absolute gravity measurements, precise leveling, GPS measurements

Napjainkban a nehézségi erőtér mérésére szolgáló műszerek elérték azt a pontosságot, amely mellett foglalkozni kell a nehézségi erőtér nem árapály jellegű időbeli változásaival. A tanulmányban a nehézségi erőtér lokális változásának komplex vizsgálatával foglalkozunk a Debrecen környéki területen végzett geodéziai, geofizikai mérések alapján, valamint hidrológiai, geológiai adatok, illetve mozgásvizsgálati térképek adatainak felhasználásával.

Kulcsszavak: nehézségi erőtér időbeli változása, függőleges felszínmozgások, kőzettömörödés, relatív és abszolút graviméteres mérések, felsőrendű szintezés, GPS mérések

Bevezetés

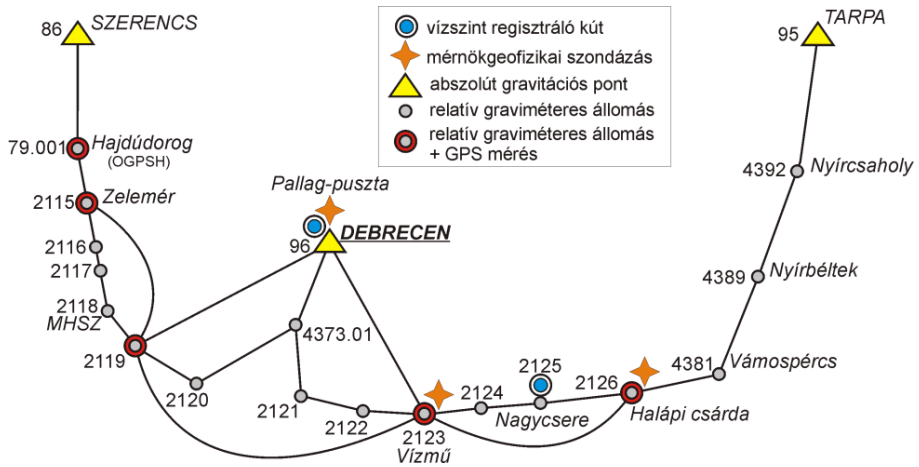
A geoid alakjának pontosításához alapvető követelmény a nehézségi erőtér szerkezetének nagyobb felbontású ismerete, ez pedig megköveteli a nehézségi erő nem árapály jellegű időbeli változásainak tanulmányozását. Az időbeli változások globálisak, regionálisak és lokálisak lehetnek. A globális és a regionális változások minden esetben geodinamikai folyamatokra vezethetők vissza, míg a viszonylag kis területre korlátozódó lokális változások rendszerint az emberi tevékenység következményei (pl. bányaművelés, vízkitermelés stb.). A nehézségi erő változása gyakran jár együtt a felszín alakjának megváltozásával, illetve függőleges felszínmozgással. A függőleges mozgások vagy felszínközeli rétegek mozgása-, vagy valódi kéregmozgások lehetnek; de gyakran a kettő együtt is előfordulhat. A kétféle mozgás szétválasztása – ha egyáltalán lehetséges – meglehetősen bonyolult. A függőleges felszínmozgások során a földfelszínen található pontok a Föld nehézségi erőterében más potenciálértékű helyre kerülnek, emiatt az elmozdult pontokban megváltozik a nehézségi erő értéke. A mai mérési pontosság mellett ez a változás már nem hagyható figyelmen kívül és a gravimetria mérési módszereivel ki is mutatható. Az alábbiakban a nehézségi erőtér lokális változásának komplex vizsgálatával foglalkozunk egy hazai területen végzett geodéziai, geofizikai mérések alapján, valamint hidrológiai, geológiai adatok *(Csapó 2004)*, illetve mozgásvizsgálati térképek adatainak felhasználásával.

A vizsgált terület

Magyarország területén a függőleges felszínmozgások átlagos értéke 1mm/év, helyenként azonban ennek többszöröse is lehet *(Joó 1985, 1998)*. Vizsgálatainkhoz olyan területet kerestünk, ahol belátható időn belül kimutathatók a változások és meghatározható ezek tendenciája. Ennek megfelelően választásunk Debrecen környékére esett, mert a Kárpát-balkán mozgássebesség térkép *(Joó 1985, 1998)*

[1] *Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, H-1145 Budapest, Kolumbusz utca 17-23. csapo@elgi.hu*
[2] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
[3] *Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport*
H-1521 Budapest, volgyesi@eik.bme.hu

ezen a területen 7-8 mm/év mozgásokat jelzett. Mivel Debrecen-Vámospércs között halad az országos kéregmozgási szintezési hálózat 19. számú szintezési vonala, ezért 1989-ben ennek közelében állandósítottuk az *1. ábrán* látható vizsgálati pontjaink egy részét, amelyeket a relatív graviméteres mérések optimális pontelhelyezésének figyelembevételével választottunk ki.



1. ábra. A debreceni mozgásvizsgálati poligon vázlata

Az alkalmazott mérési módszerek

Relatív graviméteres mérések

A mai korszerű LCR, Scintrex CG-5, Burris relatív graviméterek mérési pontossága az alkalmazott feed-back vagy CPI módszertől függően 0.003-0.015 mGal (1 mGal = 10^{-5} m/s^2). Mivel a vertikális gradiens (VG) normálértéke –0.3086 mGal/m, emiatt az említett graviméterekkel elvileg már 0.01-0.02 m magasságváltozás is kimutatható. Figyelembe kell venni azonban egyrészt azt, hogy a VG értéke erősen helyfüggő (a normálértéktől akár 20-25 %-kal is eltérhet), másrészt azt, hogy nem minden esetben lehet optimális körülményeket biztosítani a terepi graviméteres mérésekhez, továbbá az általunk alkalmazott graviméterekre vonatkozóan eddig nem volt módunk a leolvasó rendszer különböző periodikus hibáinak meghatározására. Többek között a felsorolt okok miatt graviméteres mérési módszerrel csak hosszabb idő alatt, több ciklusban végzett mérésekkel lehetséges a változások tendenciáját és mértékét kimutatni. Az egymást követő mérési ciklusokban észlelt változások a vizsgált pontok egymáshoz, vagy valamely külső ponthoz viszonyított relatív változásai. Ha a külső viszonyítási pont függőleges mozgásának mértékét a vizsgált pontok mozgásához képest elhanyagolhatjuk, akkor képet nyerhetünk a terület lokális mozgásviszonyairól.

Abszolút módszerrel végzett nehézségi gyorsulás mérések

A jelenleg használatos AXIS, JILAG abszolút graviméterek 2-4 μGal megbízhatóságúak. Magyarországon 16 abszolút állomás található, melyek többségét az országos GPS hálózat mozgásvizsgálati pontjai (keretpontok) közelébe telepítettük. Ezek között szerepel az MTA debreceni Napfizikai Intézete területén található állomás is, amelyet kifejezetten a most tárgyalt vizsgálatok céljából létesítettünk. Az abszolút mérési módszer alkalmazása azért célszerű, mert az állomásokon rendszeresen (átlagosan 5-10 évente) elvégzett ismételt meghatározások, az ismételt GPS mérésekkel együtt hasznos információt adnak az ország területének mozgásviszonyairól, meghatározhatók azok a területek, amelyek Debrecen területéhez képest „mozgásmentesnek” tételezhetők fel, illetve segítséget adhatnak a lokális és regionális mozgások szétválasztásához.

Felsőrendű szintezés

Korábban a függőleges felszínmozgások kimutatása kizárólag szintezésekkel volt lehetséges. A debreceni mozgások vizsgálatával a területen végzett szintezési munkák elemzése útján Miskolczi László *(Miskolczi 1973)*, illetve az ÉKME Felsőgeodéziai Tanszéke *(ÉKME Felsőgeodéziai Tanszék 1965)* foglalkozott. Az 1876-1965 közötti időszak magasságméréseinek elemzése alapján arra a következtetésre jutottak, hogy Debrecen a város tágabb környezetéhez képest süllyed, de a különböző szintezéseknél használt közös alappontok csekély száma miatt a süllyedés mértékére csak közelítő számértékek meghatározása volt lehetséges. Vizsgálatainkhoz 2001-ben mintegy 12 km hosszon végeztünk felsőrendű szintezést a poligon Debrecen és Vámospércs közötti szakaszán *(Paulik 2001)*.

GPS mérések

A szintén geometriai alapú GPS helymeghatározási eljárás megbízhatósága – a függőleges vektor esetében – a mérés körülményeitől függően 4-10 mm. Ezt a mérési módszert egyrészt azért alkalmaztuk, mert a graviméteres mérésekkel együtt értelmezve „kiegészítik" egymást, másrészt pedig azért, mert hosszabb távon az esetleges horizontális mozgásokra is információkat nyerhetünk. Eddig három mérési kampányra került sor 2000, 2002 és 2004-ben *(Borza, Grenerczy 2002)*.

A szintén geometriai alapú GPS helymeghatározási eljárás megbízhatósága a függőleges vektor vonatkozásában – a mérés körülményeitől függően – 4-10 mm. Ezt a mérési módszert egyrészt azért alkalmaztuk, mert a graviméteres mérésekkel együtt értelmezve "kiegészítik" egymást, másrészt azért, mert hosszabb távon az esetleges horizontális mozgásokra is információt nyerhetünk. Eddig három mérési kampányra került sor 2000, 2002 és 2004–ben *(Borza, Grenerczy 2002).*

A mérési eredmények

A graviméteres mérések jelenlegi pontossága mellett a mérési eredmények kiértékelése során több olyan tényezőt is figyelembe kell venni, amelyekkel korábban nem foglalkoztunk. Ilyen például a talajvízszint ingadozása, vagy a vertikális gradiens normálértékének használata, mely már nem nyújt elegendő pontosságot az alkalmazott műszermagassági javítás számításához.

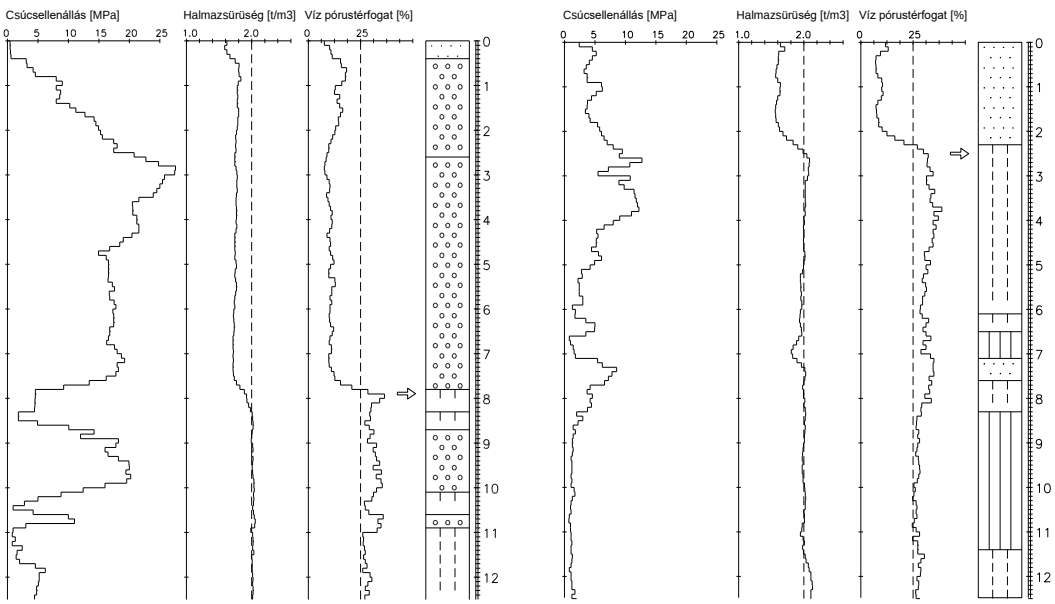
Annak eldöntésére, hogy mekkora hibát okozhat a mérések kiértékelése során, ha a műszermagassági javításnál a helyi vertikális gradiens (VG) értéket a normálértékkel helyettesítjük, számos magyarországi ponton méréssel határoztuk meg a VG értékét *(Csapó, Völgyesi 2003)*. Megállapítható, hogy a VG mért értékeivel számított eredmények két pont közötti Δg mérésekor akár 10 μGal értékkel is eltérhetnek a normálértékkel végzett számítás eredményétől. Ezt a modellszámítások is alátámasztják *(Csapó, Papp 2000)*. A VG értékének a normálértéknél pontosabb ismerete az abszolút méréseknél is elengedhetetlen akkor, amikor az abszolút graviméter referenciamagasságára vonatkozó g értéket az állandósított pontjelre vezetjük le. Azt is kimutattuk, hogy a g/H viszony általában nem lineáris, másodfokú függvénnyel jobban közelíthető *(Csapó, Völgyesi 2003)*.

Egy adott időpontban végzett abszolút, vagy relatív graviméteres mérés eredményét a talajvízszint pillanatnyi állása is befolyásolja. Debreceni vizsgálatainknál ennek azért van különösen nagy jelentősége, mert feltételezhető, hogy a felszínmozgások jelentős részét a városi vízművek által kitermelt víz talajtömörítő hatása okozza. Eddig ugyanis nem találtunk más földtani magyarázatot az itt tapasztalható viszonylag nagymértékű függőleges felszínmozgásra. Ezért megvizsgáltuk, hogy a különböző formában jelenlévő víztömegek változása milyen hatással van a graviméteres mérések eredményeire.

Elsőként zárt térben mozgó, változó víztömeg hatását számítottuk a Gellérthegyi víztározó felett végzett méréseink alapján. Mérésekkel és ettől független számításokkal megállapítottuk, hogy 1 m vízszintingadozás (ami ott 10000 m^3 víztömeg mozgásának felel meg) a víztömeg közvetlen szomszédságában lévő pontban 32 μGal változást okoz, ami jelentősen meghaladja a relatív graviméters mérések megbízhatóságát. Másik esetben a folyók vízszintingadozásából származó gravitációs hatást ellenőriztük a 2002-es dunai árvíz idején különböző vízszinteknél végzett mérésekkel. A mérések során az egyik mérési pontot a vízparttól kb. 20 méterre, a másik pontot ettől mintegy 500 m távolságra helyeztük el. A mérésekből és ettől független számításokból arra az eredményre jutot-

tunk, hogy a parthoz közeli pontban 1m vízszintváltozásnak 27 μGal változás felel meg. Ezekről a kutatásokról már korábban részletesen beszámoltunk *(Csapó et al. 2003; Völgyesi, Tóth 2004).*

A debreceni poligonon végzett vizsgálatok során a rendelkezésünkre bocsátott hidrológiai térképek alapján az látható, hogy az egyes vonalszakaszokon még ezen a viszonylag kis területen is jelentősen változik az átlagos talajvízszint magassága. A területen található megfigyelő kutak adatait is felhasználva megállapítottuk, hogy a talajvízszint ingadozásának hatása a térségben – a mérendő Δg nagyságától függetlenül 10-15 μGal, ami felhívja a figyelmet az ismételt mérési ciklusokban végzett relatív graviméteres mérések eredményeinek értelmezési korlátaira.



2. ábra. Az ELGOSCAR Kft. mérnökgeofizikai szondázásának eredménygörbéi a 96 és a 2123 jelű ponton

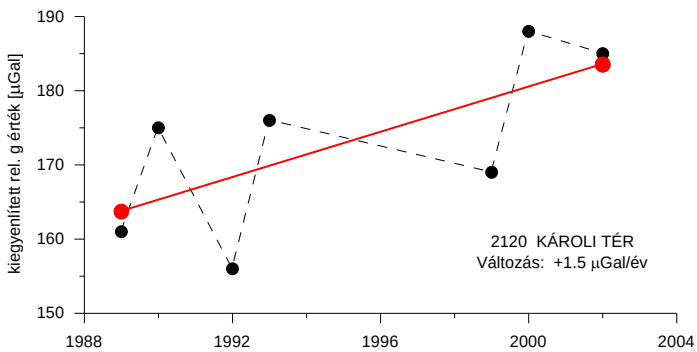
A szakirodalomból ismert, hogy a nehézségi erőtér szekuláris változásainak tanulmányozása céljából telepített számos poligonon a talajvízszint állását a mérési pontok mellett telepített megfigyelő kutak adatainak felhasználásával határozzák meg. Elsősorban gazdasági okokból nekünk nem állt rendelkezésünkre ez a lehetőség, helyette mérnökgeofizikai szondázásokat végeztünk. A módszer lényege a szakirodalomból ismert *(Fejes 1996)*, ezért itt csak az ELGOSCAR Kft. által végzett mérések eredményeit ismertetjük. A módszer amellett, hogy a talajvíz pillanatnyi állását néhány cm pontossággal megadja, alkalmas a felszínközeli 10-20 m mélységű talajrétegek pillanatnyi sűrűségének meghatározására is, ami a másik fontos adat a talajvízszint ingadozás gravitációs hatásának kiszámításához. A *2. ábrán* példaként a mozgásvizsgálati vonal két pontján végzett szondázások görbéit mutatjuk be. A talajvízszint pillanatnyi magasságát a sűrűség ugrásszerű megváltozásának helye mutatja. A szondázás eredménye alapján a debreceni 96 számú abszolút állomás esetében a szondázás szerint a pont alatti talajrétegben a talajvíz megjelenése $\Delta\rho$ = 283 kg/m^3 sűrűségnövekedést eredményez. A közelben lévő, *1. ábrán* látható pallagpusztai megfigyelőkútban tapasztalt maximális 1.47 m vízszintingadozás és a kapott sűrűségváltozás ismeretében egyszerű Bouguer lemez feltételezésével kiszámítható a vízszintingadozás által okozott δg változás. A ρ = 283 kg/m^3 és H = 1.47 m értékeknek az ismert $\delta g_B = 2\pi k\rho H$ összefüggésbe behelyettesítésével 17.4 μGal (11.9 μGal/m) érték adódik (a képletben k a gravitációs állandó, ρ a Bouguer lemez sűrűsége, H pedig a vastagsága).

A számításból az következik, hogy a debreceni abszolút állomás g értéke a talajvízszint állásától függően szélső esetben 15-20 μGal értékkel változhat (ez a hatás majdnem egy nagyságrenddel nagyobb a g abszolút módszerrel történő meghatározásának megbízhatóságánál). Az állomáson

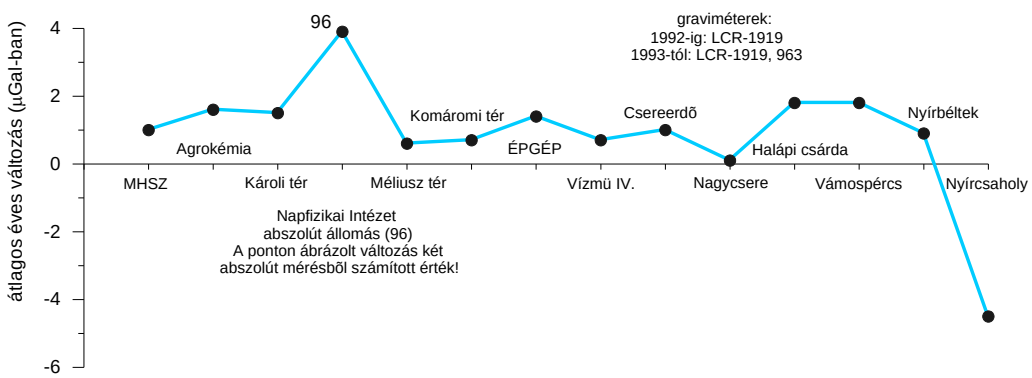
hat év eltéréssel végzett két abszolút meghatározás eredményének eltérése 44 μGal, ami azt jelenti, hogy az eltérés 30-40%-át a talajvízszint ingadozás hatása okozhatja!

A relatív graviméteres mérések eredményei

A méréseket 1989-2003 közötti időszakban, összesen 8 ciklusban, LaCoste-Romberg graviméterekkel végeztük a szakirodalomban részletesen tárgyalt módon *(Csapó 2004)*. 1991-től a FÖMI KGO végez kétévente méréseket a GPS hálózat keretpontjain, így Hajdúdorogon és a tarpai abszolút állomáshoz közeli Nagyhegyen. Ezen mérések eredményéből az derül ki, hogy Szerencs és Tarpa abszolút pontjaink függőleges mozgása közel azonos és a debreceni mozgásokhoz képest elhanyagolható. Ezért a Debrecen-Vámospércs közötti vizsgálati vonalat az *1. ábrán* látható módon néhány kötőpont közbeiktatásával Debrecentől Szerencsig, illetve Vámospércstől Tarpáig kibővítettük, és a graviméteres mérési eredmények kiegyenlítésénél Szerencs abszolút pont értékét kényszernek választottuk. Szerencsen egyébként 1980-ban és 1993-ban végeztek abszolút *g* mérést. Az ezen mérések eredményeiből meghatározott –1.7 μGal/év változást a kényszerpont értékénél figyelembe vettük.



3. ábra. A 2120 számú mozgásvizsgálati pont *g* változásai a mérések alapján, a szerencsi referencia pont rögzítésével



4. ábra A debreceni mozgásvizsgálati terület pontjain az évi átlagos relatív nehézségi gyorsulás értékek változása

A kiegyenlítésből származó legvalószínűbb *g* értékekkel minden pontra grafikont szerkesztettünk, ahol a vízszintes tengelyen a mérések éve, a függőlegesen pedig az adott évre vonatkozó *g* értékek szerepelnek. Megszerkesztettük a pontokra legjobban illeszkedő egyenest és ez alapján meghatároztuk az egyes pontok éves *g* változását. A *3. ábrán* példaként a 2120 jelű mozgásvizsgálati pontra vonatkozó eredményt mutatjuk be. Látható, hogy bár az egyes ciklusokban végzett mérések eredményei között meglehetősen nagyok az eltérések, a változás tendenciája már kirajzolódik. Az első három ciklusban az eredmények jelentős eltérésének több oka van. Egyrészt az 1989-92 közötti időszakban csak egyetlen graviméterrel végeztük a méréseket, másrészt nem tudtuk figyelembe venni a talajvízszint változásait sem. Ráadásul nem alakult még ki véglegesen a legcélszerűbb mé-

résí elrendezés sem, így a mérésbe bevont pontok sem voltak minden esetben azonosak. A *4. ábrán* a mozgásvizsgálati vonal központi részének pontjaiban ábrázoltuk az évi átlagos relatív nehézségi gyorsulás értékek változását az 1989-2002 közötti időtartamra Szerencs abszolút ponthoz viszonyítva. A 96 jelű abszolút állomás a II. számú városi vízmű közelében található, a pontra vonatkozó g változást abszolút mérések eredményeiből számítottuk. Az ábráról jól látható, hogy a terület – bár különböző mértékben – de napjainkban is süllyed, ugyanis a felszín süllyedésének a g növekedése felel meg. Ugyanakkor *Szeidovitz, Gribovszki, Hajósy (2002)* feltételezése szerint Nyírcsaholy területének környéke messze Debrecen területétől ÉK-re a környezetéhez viszonyítva, – így a debreceni területhez képest is – emelkedik. Eddigi méréseink ezt a feltevést igazolni látszanak.

Az abszolút graviméteres mérések eredményei

A relatív módszer ismertetésénél említettük, hogy az abszolút állomásokon ismételten végzett nehézségi gyorsulás mérések eredményei hasznos többlet információkat szolgáltathatnak a mozgásvizsgálatok értelmezéséhez. Vizsgálatainkba azokat az abszolút állomásokat vontuk be, amelyek viszonylag közel vannak a debreceni térséghez és ahol már legalább két mérési eredmény áll rendelkezésre. Az *I. táblázatban* ezen pontokra vonatkozó adatokat foglaltuk össze.

Az *I. táblázatban* az éves változások számított értékeit egyelőre csak tájékoztató jelleggel szabad figyelembe venni, miután két-két mérés eredményéből a mozgásokra vonatkozóan megalapozott véleményt nem szabad kialakítani. Az minden esetre látszik, hogy a debreceni pontra számított éves változás lényegesen nagyobb a másik két pontra számított értéknél, amely pontok már nem a szűkebb régióban vannak. Igen fontos lenne a jövőben 5 éves időközönként még legalább két-két mérést elvégezni ezeken a pontokon.

I. táblázat. Abszolút módszerrel végzett ismételt g mérések eredményei

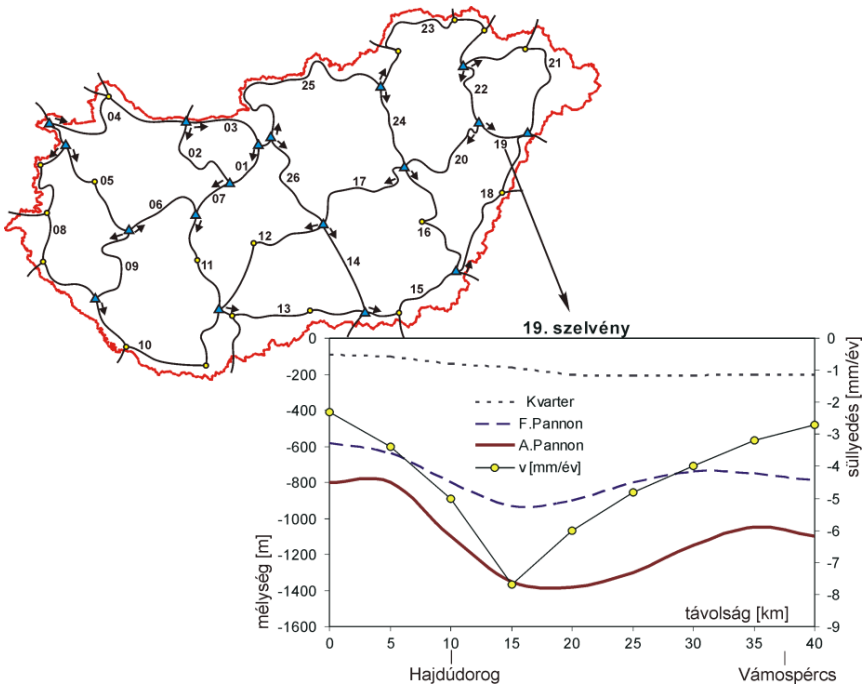
mérési pont	mérés éve	abszolút graviméter	*VG* [μGal/m]	g érték [μGal]	éves változás [μGal/év]
95 (Tarpa)	1996	JILAG-6	-271.0	980880431	+ 2.6
	2001	JILAG-6		980880444	
86 (Szerencs)	1980	GABL	-296.8	980872812	– 1.7
	1993	JILAG-6	-294.9	980872789	
96 (Debrecen)	1996	IMGC	-307.5	980825781	+ 4.2
	2001	JILAG-6		980825802	

A szintezések eredményei

Különböző pontok egymáshoz viszonyított magasságváltozásának kimutatására a szabatos szintezés jelenleg is a legalkalmasabb geodéziai mérési eljárás, hátránya az igen magas költségigénye. Az *5. ábra* felső részén a magyarországi felsőrendű szintezési hálózat I. rendű vonalait, az ábra alsó részén pedig a 19. számú vonalra vonatkozó földtani szelvényt ábrázoltuk. Ezen a vonalon 1955–ben, 1977–ben és 1982-ben végeztek felsőrendű szintezési méréseket. 2001–ben OTKA pályázat keretében megismételtük a 19. szelvény 2121–2126.1 számú relatív graviméteres mérési pontok közötti szakaszán a felsőrendű szintezési méréseket. A mérésekbe bevontuk az EOMA e vonalszakaszra eső 15 db pontját is. A mérési eredményeket hőmérsékleti, asztronómiai és normáljavítással láttuk el. Ez utóbbihoz a szükséges Faye-anomália értékeket az EOMA pontokra interpolálással határoztuk meg. A mérések során először a mozgásvizsgálati pontokat szinteztük össze, majd a legközelebbi EOMA pontokhoz kötöttük be azokat. A szintezések kilométeres középhibájának aposteriori értéke ± 0.2 mm volt.

A számítások során először a szintezési hálózat pontjainak magasságváltozásait és mozgássebességeit határoztuk meg a korábbi szintezések eredményeinek felhasználásával. Ezt követően az EOMA kötőpontjainak az 1982. évi szintezési eredmények alapján nyilvántartott magasságait kényszernek elfogadva igyekeztünk a 2001. évi szintezési eredményeket beilleszteni. Ezt csak jelentős ellentmondásokkal sikerül megtenni, ami arra utal, hogy *a mozgások az elmúlt húsz évben is folytatódtak, és a mozgássebességekre is hasonló értékek adódnak, mint a korábbiakban (Paulik 2001).* Az eredmények igazolják az *5. ábrán* bemutatott földtani viszonyokat, mivel a felszínmozgások össz-

hangban vannak a földtani adatokból számítható kőzetkompakcióval (*Völgyesi et al. 2004*). Az ábrán a baloldali függőleges tengelyen az egyes földtani rétegek talpmélységét [m] egységben, a jobboldali függőleges tengelyen a földfelszín függőleges mozgássebességét [mm/év] egységben, a vízszintes tengelyen pedig a szelvénypontok távolságát tüntettük fel [km] egységben a 19. szelvény hajdúböszörményi kezdőpontjától kiindulva.



5. ábra. Kőzetkompakció, üledékvastagság és a felszínmozgás közötti kapcsolat

II. táblázat. A GPS mérések eredményei

pont neve és száma	maradék eltérések [mm]		
	X	Y	Z
2004 – 2002			
Hajdúdorog (79.0001)	– 0.2	– 1.6	– 8.4
Zelemér (2115)	– 2.5	+ 2.5	+ 1.7
Növényvédő áll. (2119)	+ 0.1	+ 1.5	+ 9.0
IV. sz. vízmű (2123)	+ 2.8	– 2.2	+5.1
Halápi csárda (2126.1)	0.0	– 0.2	– 7.5
RMS	± 1.9	± 2.0	± 7.7
2002 – 2000			
Hajdúdorog (79.0001)	+ 1.5	– 0.3	– 2.0
Zelemér (2115)	– 0.1	– 0.5	– 8.5
Növényvédő áll. (2119)	– 2.7	+ 0.9	+ 4.7
IV. sz. vízmű (2123)	– 0.4	+ 1.0	– 1.3
Halápi csárda (2126.1)	+ 1.8	– 1.1	+ 7.1
RMS	± 1.8	± 0.9	± 6.1
2004 – 2000			
Hajdúdorog (79.0001)	+ 1.3	– 1.9	– 10.4
Zelemér (2115)	– 2.6	+ 1.9	– 6.8
Növényvédő áll. (2119)	– 2.7	+ 2.4	+ 13.7
IV. sz. vízmű (2123)	+ 2.3	– 1.2	+ 3.8
Halápi csárda (2126.1)	– 2.6	+ 1.9	– 6.8
RMS	± 2.5	± 2.0	± 9.4

A GPS mérések eredményei

A 2000. évi első GPS mérési sorozat előtt az *1. ábrán* látható GPS vizsgálatba is bevont pontok állandósított pontjeleibe antenna adaptert betonoztunk, így biztosítva, hogy a későbbi ismételt mérések során a GPS antenna azonos helyre kerüljön. A mérésekbe a penci permanens állomás adatait is bevontuk. Az egyes mérési ciklusokban szimultán méréseket végeztünk a hat pontos hálózaton 24 órás észlelési idővel. A mérések feldolgozásánál – a koordinátaszámítások után – egyszerű három paraméteres Helmert-transzformációt alkalmaztunk, amelynek eredményeit a *II. táblázatban* foglaltuk össze.

A *II. táblázat* adataiból kiolvasható, hogy a négy éves időtartamot átölelő 3 mérési ciklus alapján nem mutatható ki olyan trend, ami megbízhatóan mutatná a koordinátaváltozások jellegét. A vektorok maradékai alapján éppen a magassági vektorok meghatározása a legbizonytalanabb és ezek változásai a legnagyobbak. A 2119-2126.1 pontok a Debrecen-Vámospércs közötti NY-K irányú vonalszakaszon találhatók, a hivatkozott mozgássebességi térképen *(Joó 1985)* a mozgássebességek Debrecen belvárosától Vámospércs felé csökkennek. Ez a trend a GPS mérések alapján nem látszik. A váltakozó előjelek arra utalnak, hogy a mozgássebességek nem egyenletesek és nem egyformák az egyes pontokon. A koordináták átlagos meghatározási hibái nagyobbak mind a mért, mind a feltételezett koordináta változásoknál. Mindezek alapján úgy látjuk, hogy a GPS méréseket még több, kétévente ismételt ciklussal kellene folytatni ahhoz, hogy a változások trendje kimutatható legyen, illetve az egyes pontok mozgássebességét meghatározhassuk.

Összefoglalás

Eddigi vizsgálataink csak részben igazolták azt a feltevést, hogy a vizsgált terület süllyedése 7-8 mm/év *(Joó 1998)*. A szintezés és a graviméteres mérések kimutatták a süllyedés tényét, a GPS mérések eredményei azonban ellentmondásosak. Megállapítható, hogy olyan esetekben, amikor a felszíni elmozdulások mindössze néhány mm/év nagyságúak, még komplex vizsgálatokkal is csak hosszabb időn keresztül végzett ismételt mérésekkel lehetséges a nehézségi erőtér lokális időbeli változásainak kimutatása. Fontosnak tartjuk, hogy lehetőség szerint minden mérési kampányban ugyanazokat a mérőműszereket alkalmazzuk. Minden mérési ciklusban el kell végezni a mérnökgeofizikai szondázásokat a talajvízszint pontos meghatározása céljából és törekedni kell arra, hogy az ismételt GPS mérések és az abszolút módszerrel végzett nehézségi gyorsulás meghatározások közel azonos időben történjenek.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásaink a T-037929 sz. OTKA támogatásával folynak.

Hivatkozások

Borza T, Grenerczy Gy (2002): A Debreceni GPS Mozgásvizsgálat. *Kutatási jelentés, ELGI és KGO adattár*.
Csapó G, Papp G (2000): Measurement and modeling of the vertical gradient. *Geomatikai Közlemények* III, 109-123.
Csapó G, Völgyesi L (2003): Determination and reliability estimation of vertical gradients based on test measurements (In: *Gravity and geoid 2002*, Ed by I.N.Tziavos). *ZITI editions*, Thessaloniki, 84-89.
Csapó G, Szabó Z, Völgyesi L (2003) Changes of gravity influenced by water-level fluctuations based on measurements and model computation. *Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology*, 64; 1, 143-153.
Csapó G (2004): Felszínmozgások komplex vizsgálata Debrecen térségében. *A T031875 sz. OTKA zárójelentése*.
ÉKME Felsőgeodéziai Tanszék (1965): Mozgásvizsgálatok Debrecen területén. *Kutatási jelentés.*
Fejes I (1996): Talajmechanikai paraméterek meghatározása. *Közúti Közl. és Mélyépítéstud. Szemle,* XLVI-11, 140-149.
Joó I (1985): The new Map of Recent Vertical Movements in the Carpatho-Balkan Region. *Cartographia*, Budapest.
Joó I (1998): Magyarország függőleges irányú mozgásai. *Geodézia és Kartográfia*, 50, 3.
Miskolczi L (1973): Kéregmozgások vizsgálata szabatos szintezésekkel. *Akadémiai Kiadó*.
Paulik S (2001): A 2121-2126.1 sz. gravimetriai pontok I.rendű szintezése. OTKA kutatási jelentés melléklete, *ELGI adattár.*
Szeidovitz Gy, Gribovszki K, Hajósy A (2002): Várható földrengések. *Magyar Geofizika*, 43; 4, 161-179.
Völgyesi, Szabó, Csapó (2004): Relation between time variation of gravity field and vertical surface movements in the Pannonian basin. *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions. CD kiadvány,* Porto, Portugal.
Völgyesi L, Tóth Gy (2004): Modelling gravity gradient variation due to water mass fluctuations. *IAG Intern. Symp, Gravity, Geoid and Space Missions. CD kiadvány,* Porto, Portugal.

GRAVIMÉTERES MÉRÉSEK KIÉRTÉKELÉSE MŰSZERVIZSGÁLAT CÉLJÁBÓL

Benedek Judit és Papp Gábor**

Evaluation of gravity measurements for instrument investigation *- The LaCoste&Romberg G949 gravity meter has been used for various purposes since 2000. The paper summarises the experiences accumulated during laboratory tests and field survey measurements focusing on the inner accuracy (precision) and reliability of the instrument obtainable in different conditions. It also concerns the main correction models (tide, drift) applied to measurements during data processing.*

The instrument was calibrated twice: once in Austria in 2000 along the Vertical Gravity Base Line, Hochkar, second time in Hungary in 2004 along the Meridional Gravity Base Line crossing the territory of the country and maintained by the Eötvös Loránd Geophysical Institute, Budapest. The first calibration gave an acceptable value of 1.00037 for the so called extra calibration factor (or network scale) but the second attempt provided ambiguous result.

For the analysis of the capabilities of the instrument two test networks were used. In Ófalu, Mecsek Mountains the network consists of 3 points and the measurements of gravity differences between the net points were effectuated eight times during five years in different seasons. The repeated determinations make the investigation of the time variation of gravity possible and it seems that the (periodic) variations detected are significantly larger (20 μGal - 30 μGal per half a year; 1 $\mu Gal = 10^{-8}$ ms^{-2}) than the accuracy of the measurements (±5 μGal - ±10 μGal). The geodetic network of the Dunaföldvár test site contains 7 points and is dedicated to landslide monitoring.

Laboratory tests show that the drift rate of the meter is about –1 μGal/h, whereas the RMS accuracy of optical observations may reach ±2 μGal. During field work even if in favourable conditions multiples of these values are usually experienced (drift: +/- 5 μGal/h, RMS: ±5 μGal).

Keywords: gravity measurements, gravimetric network, relativ gravimeter, instrument calibration

A dolgozat az MTA GGKI tulajdonában lévő L&R G949 relatív graviméterrel 2000 tavasza óta végzett laboratóriumi és terepi mérések tapasztalatait mutatja be. Ismerteti a mérések módszereit, az adatok feldolgozásánál használt különböző eljárásokat és javításokat és a műszer mérési pontosságára vonatkozó megállapításokat laboratóriumi és terepi körülmények között.

A műszer kalibrálására első ízben 2000 tavaszán került sor, a Hochkar-i (Ausztria) gravimetriai kalibráló vonalon, prof. Bruno Meurers irányításával. A következő kalibrálás 2004 tavaszán történt meg, bekapcsolódva az ELGI szakemberei által az Országos Gravimetriai Kalibráló Alapvonalon végzett mérésekbe. A kalibrálások meglehetősen eltérő eredményeinek magyarázata egyrészt a második kalibrálás hosszú ideje alatt esetleg változó műszerállandóban, másrészt a referencia g értékeknek pl. a talajvízszint változás okozta időbeli változásában keresendő.

A terepi mérésekre a Mecsekben és a Duna mellett létesített teszttertületeken került sor. Az Ófaluban évente kétszer ill. Dunaföldváron évente a hálózati pontokon végzett mérések lehetővé teszik a nehézségi erőtér időbeli változásának kimutatását. Ennek mértéke a tapasztalatok szerint általában szignifikánsan nagyobb (20 μGal - 30 μGal féléves változás; 1 $\mu Gal = 10^{-8}$ ms^{-2}), mint a gravimétert jellemző mérési bizonytalanság (±5 μGal - ±10 μGal).

Laboratóriumi körülmények között végzett árapály észlelések feldolgozásával megállapítható, hogy a műszerdrift mértéke –1 μGal/óra érték körüli, és az optikai észlelések pontossága elérheti a ±2 μGal-t. Terepen azonban még kedvező esetben is ezen paraméterek többszöröse tapasztalható (drift: +/- 5 μGal/óra, szórás: ±5 μGal)

Kulcsszavak: nehézségi mérések, gravimetriai hálózat, relatív graviméter, műszerkalibrálás

*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: papp@ggki.hu , benedek@ggki.hu

Bevezetés

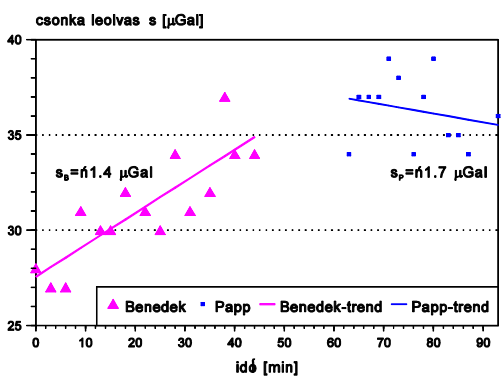
Az MTA GGKI Geodéziai Főosztálya által 2000-től végzett gravimetriai mérések fő célja az Intézetben folyó nehézségi erőtér kutatások, direkt és inverz modellezések adatokkal történő támogatása. Továbbá a mérési adatok felhasználásra kerülnek a geopotenciális érték meghatározásában ill. a magassági rendszerek tanulmányozásához kapcsolódó elméleti és gyakorlati vizsgálatokban. A Mecsekalja-törésvonalnak Ófalu térségében geodéziai eszközökkel történő megfigyelése valamint a dunaföldvári löszfal mozgásvizsgálata kapcsán a gravimetria geodinamikai vonatkozásai mellett az erőtér időbeli változásának megfigyelése is rendszeresen elemzés tárgyát képezi.

Az elvégzett terepi mérések, különösen az évszakonként/évenként ismételtek, sok hasznos információt hordoznak a mérésben használt műszerre vonatkozólag is. Azonban pontos képet a műszer viselkedéséről és tulajdonságairól elsősorban jól ellenőrzött és stabil körülmények között végzett tesztek adnak. Ezért a graviméter mostanáig két kalibráláson vett részt az ún. hálózati méretarány tényező megállapítására. A mérési eredmények helyes értelmezéséhez elengedhetetlen a leolvasási pontosság és a mérést terhelő egyéb szabályos hibák (műszerjárás ill. drift, személyi hiba) ismerete. Ezek a tényezők laboratóriumi vizsgálatok során több alkalommal elemzésre kerültek.

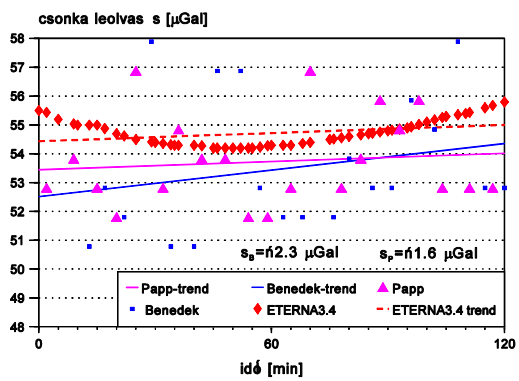
A gravimetriai mérések egyik legfontosabb javítása az időben változó nagyságú árapály hatás kiküszöbölését szolgálja. Ez ma már igen sok periódust tartalmazó gömbi harmonikus modellek segítségével előre jelezhető az észlelés helyére és időpontjára vonatkozóan. Azonban a szoftverekben használt alapmodellek alapvetően globális paraméter rendszereket tartalmaznak, amelyek a fázis és az amplitúdó vonatkozásában nem egészen pontosan tükrözik a helyi viszonyokat. E miatt fontos az alkalmazott modelleknek az adott helyen észlelhető árapály hatással való összevetése is.

L&R G949 műszer pontossága laboratóriumi és terepi körülmények között

A műszer elektronikus libellákkal és optikai-mechanikai leolvasó berendezéssel rendelkezik. A leolvasási pontosság vizsgálata minden esetben az MTA GGKI műszervizsgáló laboratóriumában tömör mérőpilléren történt. A tesztek időpontjában az elméleti árapály változás minimális volt (< 2 μGal/h; 1 Gal = 10^{-2} ms^{-2}), így a leolvasott értékek szórása jól tükrözi a leolvasási pontosságot, átlagértéke pedig a felváltva végzett észlelések esetén az észlelők személyi hibáját. A leolvasások időbeli alakulása információt ad a rövidtávú műszerjárásról is (*1. ábra, 2. ábra.*).



1. ábra. Minimális árapály változással járó időszakban (2003.06.20. 7:00 – 8:33 KEI) 2 észlelő által egymásután végzett leolvasás sorozatok időbeli alakulása és statisztikái



2. ábra. Minimális árapály változással járó időszakban (2004.03.02. 10:00 – 12:00 KEI) 2 észlelő által felváltva végzett leolvasás sorozatok időbeli alakulása és statisztikái

Megállapítható, hogy kedvező körülmények között, folyamatosan dezarretált állapotban tartott lengőkar mellett elérhető akár a ±2 μGal leolvasási pontosság is, mely függetlennek mutatkozott az észlelő személyétől. A személyi hiba a tapasztalatok szerint elsősorban a mikrométer csavarral mozgatott index szálnak az optikai skála ún. leolvasó vonalához való igazításában jelentkezhet.

Terepen a körülmények messze nem olyan ideálisak, mint laboratóriumban. A műszer szállítása, sorozatos arretálása-dezarretálása már eleve sokkal nagyobb mértékű és egyenetlenebb műszerjárást (driftet) eredményez. A leolvasás is bizonytalanabb a talajrezgések, a szél, a zavaró fényviszonyok miatt. A mérések belső pontossága a megfelelően állandósított bázis- ill. hálózati pontok egy epochára vonatkozó ismételt összeméréséből képezett Δg_{AB} különbségek alapján vizsgálható:

$$\Delta g_{AB} = c\,(L_A - L_B) - (\Gamma(t_A,A) - \Gamma(t_B,B)) - D(t_B - t_A) - k, \qquad (1)$$

ahol c a gyári kalibrációs tényező, L_A és L_B a leolvasási értékek az A és a B pontokon, t_B és t_A a leolvasások időpontjai, Γ az árapály hatás okozta gyorsulás az észlelés időpontjában és helyén, D a $t_B - t_A$ időintervallumra vonatkozó műszerjárás értéke és k egyéb (pl. atmoszférikus, magassági) javítás. A belső pontosság a mérési sorozatok szórásával, a mérési körök/hurkok zárási hibáival, illetve a hálózat-kiegyenlítésből származó különböző középhibákkal (az *m* súlyegység középhiba, a Δg_{AB} várható értékének kiegyenlítés utáni μ középhibája) és a *v* javításokkal jellemezhető.

Az ófalui teszterületen (*Papp, Benedek 2005*) az ELGI által létesített három bázispont összeméréséből 8 alkalommal (*I. táblázat*) megtörtént. A mérési eljárásban két bázispont mérése között 4-5 térképezési/szintezési célú pont is meghatározásra került, miközben a kezdő bázisra való visszatérésig 1.5h - 2,5h telt el. Ennek a módszernek az előnye egyrészt az, hogy ellenőrzésképpen a

I. táblázat. Az ófalui három pontból (G1,G2,G3) álló gravimetriai hálózat mérésének és az L_2 norma szerinti kiegyenlítésének statisztikái a különböző mérési kampányokban. N a mérések száma, $\overline{\Delta}$ és *s* a mérések átlaga, illetve szórása, μ az ismeretlenek kiegyenlítés utáni középhibája, *m* a kiegyenlítés utáni súlyegység középhiba (azonos mértékegységű mérésekről lévén szó, mértékegységgel ellátva!), *v* az ismeretlennek tekintett nehézségi értékekhez rendelt javítások sorozata

Bázis különbségek Mérés időpontja	**G1-G2**	**G2-G3**	**G1-G3**	**záróhiba**	**A kiegyenlítés paraméterei**
2000 május	N = 4 $\overline{\Delta}$ = 17.060 mGal s = ±11 μGal μ=±5 μGal	N = 4 $\overline{\Delta}$ = -11.983 mGal s = ±12μGal μ=±5 μGal	N = 1 $\overline{\Delta}$ = 5.079 mGal μ=±6 μGal	-2 μGal	m = ±10 μGal max|v| = 15 μGal
2000 október	N = 4 $\overline{\Delta}$ = 17.080 mGal s = ±4 μGal μ=±2 μGal	N = 3 $\overline{\Delta}$ = -12.008 mGal s = ±7 μGal μ=±2 μGal	N = 5 $\overline{\Delta}$ = 5.076 mGal s = ±4 μGal μ=±2 μGal	-4 μGal	m = ±6 μGal max|v| = 15 μGal
2001 április	N = 12 $\overline{\Delta}$ = 17.057 mGal s = ±3 μGal μ= ±3 μGal	N = 1 $\overline{\Delta}$ = -11.986 mGal μ=±8 μGal	N = 1 $\overline{\Delta}$ = 5.082 mGal μ=±8 μGal	-11 μGal	m = ±11 μGal max|v| = 20 μGal
2001 szeptember	N = 16 $\overline{\Delta}$ = 17.085 mGal s = ±10 μGal μ=±3 μGal	N = 6 $\overline{\Delta}$ = -12.011 mGal s = ±13 μGal μ=±4 μGal	N = 5 $\overline{\Delta}$ = 5.068 mGal s = ±14 μGal μ=±4 μGal	6 μGal	m = ±12 μGal max|v| = 21 μGal
2002 április	N = 6 $\overline{\Delta}$ = 17.083 mGal s = ±9 μGal μ=±5 μGal	N = 6 $\overline{\Delta}$ = -11.988 mGal s = ±19 μGal μ=±5 μGal	N = 5 $\overline{\Delta}$ = 5.091 mGal s = ±12 μGal μ=±5 μGal	4 μGal	m = ±14 μGal max|v| = 22 μGal
2003 október	N = 4 $\overline{\Delta}$ = 17.131 mGal s = ±5 μGal μ=±2 μGal	N = 1 $\overline{\Delta}$ = -12.078 mGal μ=±4 μGal	N = 1 $\overline{\Delta}$ = 5.055 mGal μ=±4 μGal	-2 μGal	m = ±5 μGal max|v| = 5 μGal
2004 május	N = 8 $\overline{\Delta}$ = 17.075mGal s = ±11 μGal μ=±3 μGal	N = 7 $\overline{\Delta}$ = -12.044 mGal s = ±6 μGal μ=±3 μGal	N = 3 $\overline{\Delta}$ = 5.025 mGal s = ±3 μGal μ=±3 μGal	6 μGal	m = ±8 μGal max|v| = 24 μGal
2004 október	N = 4 $\overline{\Delta}$ = 17.072mGal s = ±13 μGal μ=±3 μGal	N = 4 $\overline{\Delta}$ = -12.043 mGal s = ±3 μGal μ=±3 μGal	N = 4 $\overline{\Delta}$ = 5.036 mGal s = ±6 μGal μ=±3 μGal	-7 μGal	m = ±8 μGal max|v| = 17 μGal

részletpontok g értéke más bázisokról is meghatározható, másrészt az állandósított pontokon való mérések számának növelése a műszerjárás nyomon követését is segíti. Ha csak a bázisok összemérése volt a cél, akkor az A-B-A-B-A illetve A-B-C-A-B-C-A sémák kerültek alkalmazásra. A mérés a pontjel fölött a betonon, mindig ugyanazzal a két talpcsavarral vízszintbe állított műszerrel történt.

A 2003. ősze óta a dunaföldvári partfalmozgás-vizsgálati hálózatban végzett mérések (*Papp és mások, 2004*) előfeldolgozásának eredményeit a *II. táblázat* foglalja össze. Az észlelésekkor a legnagyobb problémát a közúti járművek keltette rezgések jelentették, ezért bizonyos kapcsolatokat csak az éjszakai órákban lehetett megmérni.

A műszermagasság a bázispontok kialakítása (kellően vízszintes betonfelület) illetve Dunaföldváron egy speciális műszeralátét használata miatt (*Papp et al. 2004*) mindkét hálózat esetében és minden alkalommal 5 mm-en belül azonos volt, így a magassági javításra nem volt szükség.

II. táblázat. A dunaföldvári gravimetriai hálózat pontjainak összeméréséből számított statisztikák két epochára (2003. szeptember és 2004. szeptember) vonatkoztatva. N a mérések száma, a cellák második sora tartalmazza a mérések átlagértékét. A zárójelben lévő szám az átlagérték szórása

Psz.	epocha	10G	100	200	300
100	**2003**	*N* = 6 -0.313 mGal (±6 μGal)	-	-	-
	2004	*N* = 3 -0.322 mGal (±1 μGal)	-		
200	**2003**	*N* = 4 -2.052 mGal (± 6 μGal)	*N* = 5 -1.736 mGal (±7 μGal)	-	-
	2004	*N* = 3 -2.037 mGal (±3 μGal)	*N* = 2 -1.716 mGal (±2 μGal)		
300	**2003**	*N* = 11 1.836 mGal (±11 μGal)	*N* = 6 2.146 mGal (±8 μGal)	*N* = 6 3.878 mGal (±7 μGal)	-
	2004	*N* = 6 1.836 mGal (±6 μGal)	*N* = 2 2.152 mGal (±1 μGal)	*N* = 2 3.876 mGal (±4 μGal)	
400	**2003**	*N* = 11 2.682 mGal (±8 μGal)	*N* = 3 2.994 mGal (±5 μGal)	*N* = 3 4.732 mGal (±3 μGal)	*N* = 5 0.854 mGal (±8 μGal)
	2004	*N* = 3 2.694 mGal (±5 μGal)	*N* = 2 3.026 mGal (±1 μGal)		*N* = 3 0.860 mGal (±2 μGal)
500	**2003**	*N* = 4 -3.780 mGal (±5 μGal)	-	-	*N* = 2 -5.630 mGal (±4 μGal)
	2004	*N* = 2 -3.764 mGal (±4 μGal)			*N* = 3 -5.610 mGal (±10μGal)
600	**2003**	*N* = 3 -5.145 mGal (±4 μGal)		-	*N* = 2 -6.990 mGal (±2 μGal)
	2004	*N* = 2 -5.132 mGal (±6 μGal)			*N* = 3 -6.978 mGal (±10μGal)

A hálózatok L_2 norma szerinti szigorú kiegyenlítése egy kiválasztott hálózati pont g értékének rögzítésével és a mérések, azaz a hálózati pontok közötti nehézségi gyorsulás különbségek egységnyi súlyozásával történt. A paraméter becslés szempontjából ismeretlennek tekintett mennyiségek a pontok nehézségi gyorsulás értékei voltak. Esetenként, figyelembe véve az észlelések során tapasztalt körülményeket, mint pl. nagy mértékű és változó előjelű drift, egyes méréseket ki kellett hagyni a feldolgozásból. Ez kedvezően módosította a megbízhatósági mérőszámokat, melyek közül a súlyegység középhiba (*m*) általában jó összhangban volt a mért nehézségi különbségek átlagértékének szórásával (v.ö. az *s* és az *m* statisztikai paramétereket az I. táblázatban). A nehézségi különbségek kiegyenlített értékeinek középhibái az elméletnek megfelelően rendre kisebbnek adódtak, mint az átlagértékek szórásai, amely a hálózati mérések megfelelő belső összhangjára és a kiegyenlítés hatékonyságára utal.

A dunaföldvári hálózat kiegyenlítésének statisztikáit a *III. táblázat* foglalja össze.

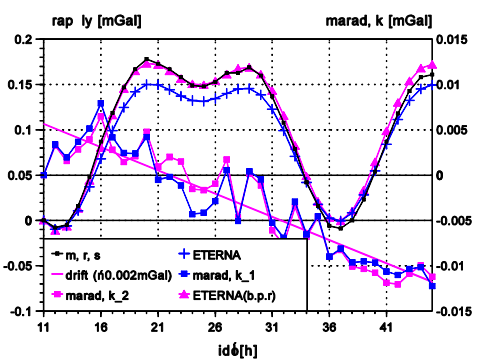
III. táblázat. A dunaföldvári hálózat legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítésének statisztikái. *m* a súlyegység középhibája mértékegységgel kiegészítve, *v* a mérési javítások sorozat és μ az ismeretlenek kiegyenlített értékének középhibája

epocha	*m* [μGal]	max|*v*| [μGal]	μ [μGal]
2003	±8	19	±2 - ±4
2004	±6	14	±2 - ±3

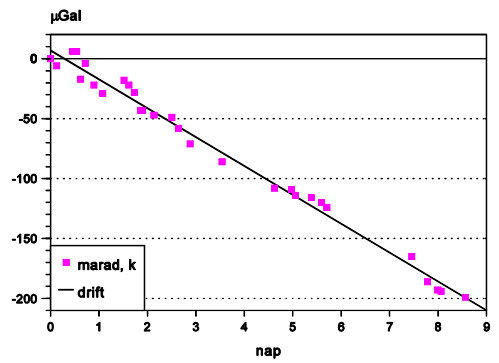
A méréseknél használt árapály és drift modellek

(1)-nek megfelelően az egyik legfontosabb javítás a nehézségi gyorsuláskülönbségek meghatározásában a Γ árapályhatás, amely pl. az ETERNA3.4 programmal (*Wenzel 1996*) kiszámítható a mérés időpontjának, földrajzi koordinátáinak (φ,λ) és ellipszoid feletti magasságának (h) függvényében. Néhány négyzetkilométernyi területet valamint a magyarországi domborzati viszonyokat tekintve a területre vonatkozó átlagos koordináták használata elégséges pontosságot ($\mu_{\Gamma} < \pm 1$ μGal) biztosít. Súlyosabb kérdés az, hogy az észlelési adatok globális illesztésével levezetett (alapértelmezett) modell paraméterek (árapály hullám amplitúdók és fázisok) mennyire tükrözik az adott terület kőzetmechanikai tulajdonságaiból fakadó indirekt hatást. Erre vonatkozóan célszerű 1-2 napos árapály észleléseket végezni a műszerrel. Az előre jelzett és az észlelt árapályhatás összevetésével egy közelítő/átlagos amplitúdó tényező (pl. 2000.06.19-20.-án: 1.1336, 2000.10.02-03.-án: 1.1425) határozható meg a terepi mérések feldolgozása számára. Ennek gyakorlati használhatóságát, mely alapvetően a tényező időbeli stabilitásán múlik, jól mutatja a *3. ábra*. Pontosabb és a helyi fázis viszonyokat is tükröző paraméter rendszer csak hosszú idejű, ún. árapály graviméterekkel végzett mérésekből vezethető le. Ilyen, a szupravezetés elvére épülő berendezés Bécsben is működik és mint azt az eredmények igazolják, a „bécsi árapály modell" megfelelő illeszkedést biztosít a soproni, de feltételezhetően a Dunántúli mérésekhez is az átlagos amplitúdó faktor használata nélkül. A terepi mérések Γ javításainak (1) meghatározása szintén a bécsi paraméter-rendszer használatával történt.

A műszerdrift laboratóriumi vizsgálata több napig tartó, egy helyben (ebben az esetben műszerpilléren) végzett méréssorozattal lehetséges. A *4. ábrán* az árapály hatás (bécsi árapálymodell) eltávolítása utáni maradék adatok hosszabb távú időbeli változása látható. A maradékokra illesztett regressziós egyenes meredeksége, azaz a drift mértéke ~ -24 μGal/nap. Terepen általában jóval nagyobb mértékű és időnként szabálytalan műszerjárás észlelhető (Chapin és mások, 1999), melynek elemzése igen fontos a durva hibával terhelt mérések kiszűrése érdekében (*5. ábra*).



3. ábra. Az L&R G949 sz. graviméterrel 2000.06.19-20.-án Sopronban regisztrált, valamint az ETERNA3.4 programmal az észlelés időszakára, különböző amplitúdó és fázis paraméter-rendszerekkel előre jelzett elméleti árapály görbék. Jelmagyarázat: maradék_1=mérés – ETERNA3.4 *1.1336, maradék_2=mérés - ETERNA3.4(bécsi paraméter-rendszer)



4. ábra. Több napos mérésből (Sopron, 2003.05.27-06.05.) az árapály javítás utáni maradék adatokra illesztett drift modell. A mérés az MTA GGKI műszercsarnokában azon a műszerpilléren történt, ahol az L&R G949 sz. műszernek a mérésre kész állapotban való tárolása folyamatosan biztosított

A tapasztalatok azt mutatják, hogy ha két egymást követő, ugyanarra a bázisra történt bázismérés közötti záróhiba (δ_L = (cL(B1,t_i)-Γ(B1 t_i)) - (cL(B1,t_{i+1})-Γ(B1 t_{i+1})) abszolút értékének és az eltelt

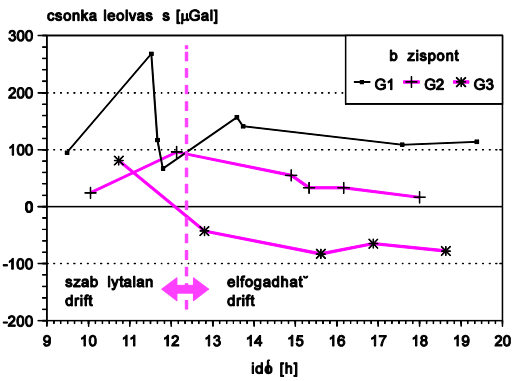
időnek a hányadosa nem nagyobb, mint 5 μGal/óra, akkor a drift mértéke (dD/dt) a vizsgált időintervallumra vonatkozóan az alábbi módon közelíthető:

$$dD/dt \cong \delta_L / (t_{i+1}-t_i) \ , \qquad (2)$$

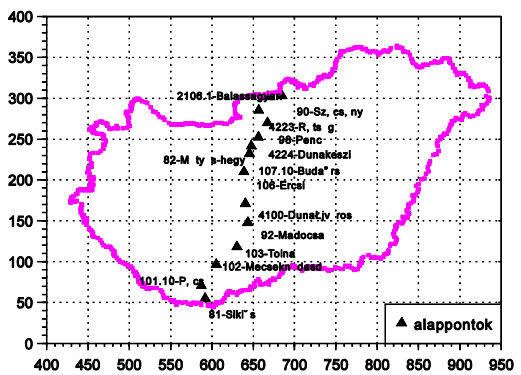
ahol t_i (i=1,N) a B1 bázisra végzett N db mérés időpontjainak sorozat. Egy közbeeső pontra (pl. B2) vonatkozó drift értéke meghatározható (2) értéke és a mérés időpontja t_j (j=1,M; $t_i < t_j < t_{i+1}$) alapján, a lineáris műszerjárás modell szerint:

$$D(B2,t_j) = dD/dt\ (t_j-t_i) \ .$$

A többszörösen ismételt mérések (N>2, M>1) esetében és a fenti feltételek mellett ez az eljárás a nehézségi különbségek átlagértékeinek vonatkozásában statisztikai szempontból egyenértékű megoldást ad az L_2 norma szerinti illesztéssel kapott („napi") lineáris drift modellel végzett számítások eredményeivel, azaz a szigorúan kiegyenlített nehézségi különbségekkel.



5. ábra. Az L&R G949 sz. műszer terepi mérésekből meghatározott driftje. Ófalu, 2002. 04. 25.



6. ábra. Az Országos Gravimetriai Kalibráló Alapvonal

Műszerkalibrálás

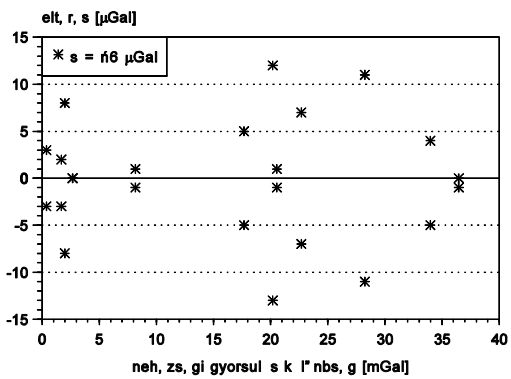
Bár minden L&R relatív graviméter rendelkezik egy ún. gyári kalibrációs táblázattal, mégis célszerű megvizsgálni azt, hogy egy adott gravimetriai alaphálózatban hogyan képes reprodukálni a műszer a hálózatot definiáló referencia értékeket. A G típusú (geodéziai) műszerek bármely földrajzi helyen használhatók, azonban a gyakorlatban a felhasználásuk helyszínének kiterjedése általában korlátozott. Ezért a mérési tartományuknak csak egy kis részét szükséges megvizsgálni a méretarány tényező szempontjából.

Magyarország területén a mérési tartomány terjedelme (L_{max} - L_{min}) ~250 mGal. Ez egyrészt a gravimetriai pontok magasság különbségéből, másrészt a nehézségi gyorsulás szélességfüggéséből adódik. Ennek megfelelően Magyarországon a műszerkalibrálás egy L_{min} kezdőleolvasású ~ 250 mGal mérési tartományt átfogó alapvonal megfelelően állandósított pontjainak mérésével történhet. Ez a tartomány biztosítható egy olyan alapvonallal, amelynek pontjaiban a g értékek kialakulása alapvetően a pontok magassági koordinátáinak változásától függ. (pl. egy hegy oldalában tűzzük ki az alapvonal pontjait), vagy amely az országot É-D irányban szeli át. Ebben az esetben a domináns hatás a pontok szélességi koordinátájának változásából ered. Az előbbi típusra példa a Hochkar-i (Ausztria), 4 pontból álló alapvonal, míg Magyarország az utóbbi típusú, 15 pontból álló alapvonallal (*Csapó 1997*) rendelkezik (*6. ábra*).

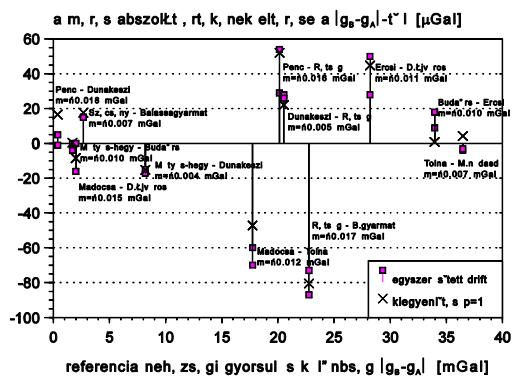
Az L&R G949 sz. műszer első kalibrálása 2000 májusában az osztrák alapvonalon az A-B-C-D-A-B-C-D-A séma szerint történt. A hálózati méretarány tényező értékét (1.00037) Prof. Bruno Meurers, a Bécsi Tudományegyetem munkatársa határozta meg. Az Országos Kalibráló Alapvonalon 2004 májusában 10 napig tartó, A-B-A-B-A séma szerinti mérés során 12 kapcsolatot sikerült megmérni. A magassági javítást a műszer alátétek eltérő magassága miatt figyelembe kellett venni.

A mérések belső pontossága megfelelőnek mutatkozott, hiszen 8 kapcsolat esetében a két („oda-vissza") mérés közötti eltérés nem haladta meg a 10 μGal-t és csak két esetben volt nagyobb, mint 20 μGal. A tapasztalt ellentmondások nem mutattak összefüggést a mért nehézségi különbségek nagyságával (*7. ábra*). Ennek ellenére az eredmények nem voltak kellő összhangban a referencia gyorsulási értékek különbségeivel, mivel a mérések középértékeit átlagosan jellemző pontosságnál (±6 μGal) esetenként jóval nagyobb, de véletlenszerű, azaz a nehézségi gyorsulás különbség nagyságától nem függő eltérések mutatkoztak (*8. ábra*). A napi drift egységsúlyozású, L_2 norma szerinti illesztésével kapott adatok sem tették könnyebbé az értelmezést, bár azt megerősítették, hogy a legnagyobb hibával a Rétság-Penc-Dunakeszi meghatározások (m=±22 μGal) terheltek. Ennek ellenére a két nehézségi különbség (Rétság-Penc, Penc-Dunakeszi) kiegyenlített értékeinek összegezésével kapott nehézségi differencia meglepően kis eltérést mutat (7 μGal) a Rétság-Dunakeszi kapcsolat közvetlen meghatározásából (ellenőrző mérés) származó jóval megbízhatóbb (m=±5 μGal) eredménytől. Ez a záróhiba teljes mértékben megfelel az ófalui hálózatban tapasztalt záróhibáknak (*I. táblázat*).

Stabil referencia értékek és pontos mérések esetében szoros lineáris ($\Delta g_{mért} = (1+\alpha)\ \Delta g_{ref}$) kapcsolatnak kell fennállnia a referencia nehézségi különbségek és a mérési eredményeknek ezen különbségektől való eltérései ($\Delta g_{mért} - \Delta g_{ref}$) között. A regressziós egyenes egyenletében α a hálózati méretarány tényező egységtől való eltérése. Az α értéke a *8. ábra* alapján nem állapítható meg a kellő megbízhatósággal, hiszen a kapott ellentmondások mind előjelüket, mind nagyságukat tekintve inkább véletlenszerű kapcsolatban vannak a referencia értékekkel. Egyértelmű lineáris tendenciát az eltéréseknek É-ról D felé haladó összegezése (*9. ábra*) sem tár fel.



7. ábra. Az Országos Kalibráló Alapvonal pontjai közötti nehézségi gyorsulás különbségek meghatározására végzett ismételt méréseknek a középértéktől való eltérései. 2004. április, L&R G949 sz. műszer

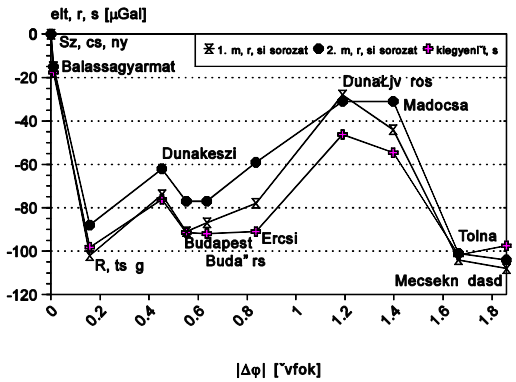


8. ábra. Az Országos Kalibráló Alapvonalon mért nehézségi gyorsulás különbségek eltérései a referencia értékektől a referencia értékek függvényében. 2004. április, L&R G949 sz. műszer

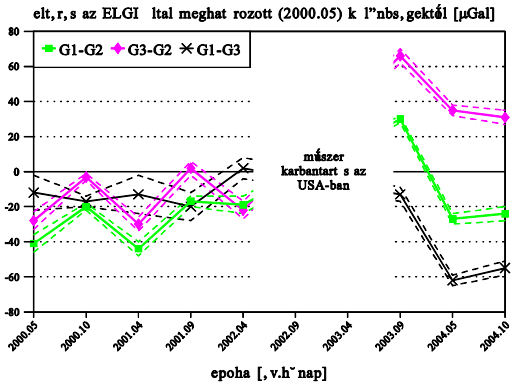
A nehézségi erőtér időbeli változásának megfigyelése

Az ófalui teszterületen megfelelő rendszerességgel (tavasz és ősz) és pontossággal megismételt mérések feldolgozása és elemzése (*I. táblázat*) lehetőséget ad a nehézségi tér nem árapály-jellegű időbeli változásának vizsgálatára. A három pont (G1,G2,G3) között mért nehézségi gyorsulás különbségek kiegyenlítése alapján kapott legvalószínűbb értékek összevetése az ELGI által a kezdő epochára megadott értékekkel, jól tükrözi az észlelt változások időbeli ütemét és nagyságát (*10. ábra*). Ezek alapján megállapítható, hogy fél évre vetítve 20 μGal - 30 μGal (szakaszonként periodikus) változás detektálható a területen. E változások a legtöbb esetben szignifikánsak, hiszen a nehézségi különbségek kiegyenlítés utáni középhibája ±2 μGal - ±10 μGal közötti és a hálózati záróhibák abszolút értéke is általában kisebb mint 10 μGal. Mivel a rendszeresen végzett szabatos szintezések csak néhány milliméternyi, talajtömörödés okozta ingadozásokat mutatnak az 1 m × 1 m × 1 m méretű betontömbökben állandósított pontok magasságkülönbségeiben, ezért feltételezhető,

hogy a tapasztalt fluktuációk nagy részét leginkább a talajvízszint évszakos változásából eredő sűrűség változások okozzák. Valószínűleg a pontok környezetében a talajok (agyag, lösz) igen különböző vízháztartással rendelkeznek, mivel a G1 pont közelében egy szabályozott vízszintű tavacska található, a G3 ponttól 20 m-re egy patak folyik, de a G2 pont dombtetőn van. 1 m talajvízszint változás még tömör, kristályos kőzetek esetén is (2-3) μGal-nyi változást okoz (*Virtanen 2000*).



9. ábra. Összegezett eltérések a referencia g értékektől az Országos Kalibráló Alapvonal pontjaiban



10. ábra. Az ófalui tesztterület bázis pontjai között mért nehézségi gyorsulás különbségek időbeli változása

Összefoglalás

A bemutatott vizsgálatok alapján megállapítható, hogy a kérdéses műszerrel a nehézségi gyorsulás különbségek átlagosan ±(5-7) μGal belső pontossággal megmérhetők, de a hálózatban végzett megfelelő számú fölös mérésekből a kiegyenlített mennyiségek középhibája ennél kisebb értékű is lehet (±3 μGal). Ennek a megbízhatóságnak az eléréséhez azonban kedvező mérési feltételek, pl. kicsi és egyenletes műszerjárás (+/- 5 μGal/h) és gondos észlelői munka szükségeltetnek. Fontos továbbá a mérési területnek megfelelő árapály modell használata, mert pl. az ETERNA program esetében akár 15%-os amplitúdó eltérés is tapasztalható a globális és a lokális árapály paraméterekkel előre jelzett ill. az előre jelzett és a mért árapály-gyorsulás értékek között. Úgy tűnik, hogy a bécsi paraméterrendszer jól tükrözi a Pannon-medence kőzetmechanikai jellemzőit, ezért használata javasolt.

A fentiek ismeretében a nehézségi gyorsulás értékének 10 μGal-os változása már elégséges biztonsággal kimutatható. Ez arra figyelmeztet, hogy a graviméteres mérések feldolgozásában nagy gonddal kell elemezni a környezeti változásokból (pl. talajvízszint változás) eredő hatásokat.

Köszönetnyilvánítás

A kutatásokat a T043413 számú OTKA program támogatta.

Hivatkozások

Chapin DA, Crawford MF, Baumeister M (1999): A side-by-side test of four land gravity meters. *Geophysics*, 64; 3, 765-775.

Csapó G (1997): Hungary's new gravity base network (MGH-2000). *Geophys. Transactions*, 41; 3-4, 119-143.

Papp G, Benedek J, Kalmár J (2004): Gravity investigations on Dunaföldvár test area. In: Mentes Gy and Eperné I (eds.): *Landslide monitoring of loess structures in Dunaföldvár, Hungary*. 37-46.

Papp G és Benedek J (2005): Gravitációs inverzió alkalmazása a geoid vizsgálatában. *Geomatikai Közlemények* VIII. 227-234.

Virtanen H (2000): On the observed hydrological environmental effects on gravity at the Metsähovi station, Finland. *Bulletin D'Informations Marees Terrestres,* 133. 10369-10377.

Wenzel HG (1996): The nanogal software: Earth tide data processing package – ETERNA3.30. *Bulletin D'Informations Marees Terrestres*, 124. 9425-9439.

EÖTVÖS-INGA MÉRÉSI ADATOK FELHASZNÁLÁSA GRAVITÁCIÓS TÉRKÉPEK SZERKESZTÉSÉHEZ

Tóth Gyula[*], *Merényi László*[**]

Torsion balance measurement data for gravity map improvement *- Different methods of densification of Hungarian gravity data are discussed with the aid of torsion balance measurements. Gravity anomalies, on one hand, were predicted by least-squares collocation using horizontal gravity gradients. The required cross-covariance functions were derived from the theoretical model proposed by I. W. Reilly. The Bouguer anomaly map was reproduced by the method within 1 mGal for a selected flat terrritory near Mátészalka in Hungary. Another method to use horizontal gravity gradients of the torsion balance is gravity interpolation by line integration. It can be concluded that torsion balance measurements can really improve on the existing gravity maps, especially where there are data gaps.*

Keywords: gravity, torsion balance, covariance function, prediction

A magyarországi gravitációs adatok helyi sűrítésének néhány lehetséges módszerét tárgyaljuk Eötvös-inga mérések segítségével. A gravitációs adatokat egyrészt a legkisebb négyzetek szerinti kollokációval végzett predikcióval állítottuk elő a horizontális gravitációs gradiensek segítségével. A számításhoz szükséges keresztkovariancia függvényeket a I. W. Reilly által javasolt elméleti kovariancia modellből vezettük le. A kiválasztott Mátészalka környéki közel sík teszt területen az eljárás a Bouguer-féle nehézségi rendellenességek térképét 1 mGal-nál kisebb szórással állította elő. Az Eötvös-inga mérések horizontális gradienseinek egy másik lehetséges felhasználási módja a gravitációs értékek vonal-menti integrálással végzett interpolációja. Megállapítható, hogy az Eötvös-inga mérések adatainak felhasználásával, különösen az adathiányos részeken, a referenciának tekinthető gravitációs térképhez jobban hasonlító anomália térképet kaptunk.

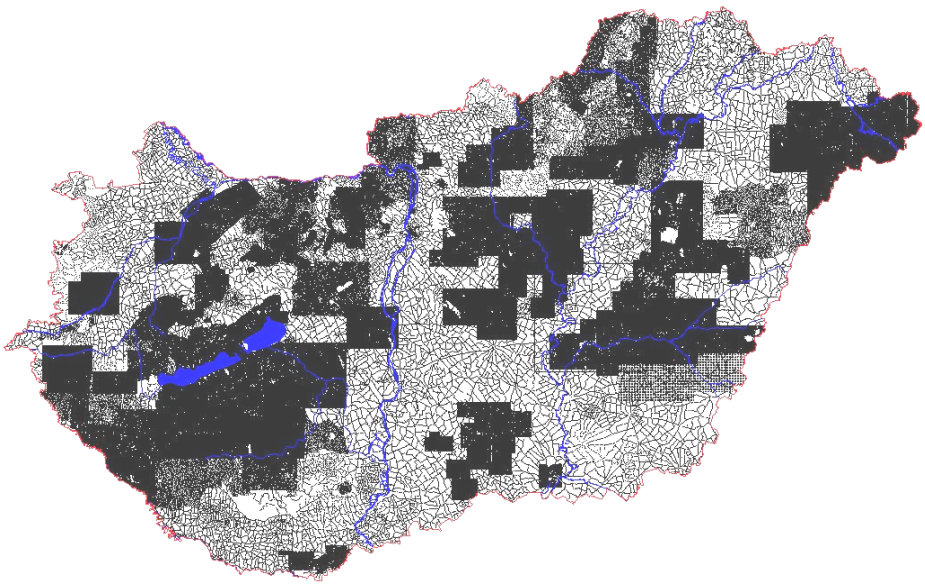
Kulcsszavak: gravitáció, Eötvös-inga, kovariancia függvény, predikció

Bevezetés

A magyarországi gravitációs adatbázis, amely az Eötvös Loránd Geofizikai Intézetben (ELGI) található, 2001-ben 382361 mérési adatot tartalmazott *Kiss (1991)*. Ezeknek a méréseknek az eloszlása viszont nem egyenletes (*1. ábra*). Vannak az országban olyan területek, ahol viszonylag jó a pontel-oszlás, viszont vannak olyan területek is, ahol kis sűrűségű és inhomogén a felmértség. Kívánatos lenne a gravitációs pontok sűrűségét 1 pont/km^2-re növelni. Sajnos a közeljövőben erre az anyagi keretek szűkössége miatt várhatóan nem lesz sok lehetőség.

Hazánk síkvidéki vagy enyhén dombos területein viszont nagyszámú (jelenleg több mint 25000) Eötvös-inga mérés áll rendelkezésre az ELGI és a BMGE Általános- és Felsőgeodézia Tanszék adatbázisában. Az Eötvös-inga által mért értékek között szerepelnek többek között a nehézségi erő helyi vízszintes síkba eső deriváltjai (horizontális gravitációs gradiensek). Bár ezeket az adatokat elsősorban nyersanyagkutatási célra gyűjtötték, e mostani cikkben bemutatott vizsgálatainkkal szeretnénk rámutatni arra, hogy lehetőségünk van a gravitációs adatok sűrítésére, a gravitációs adatbázis bővítésére az Eötvös-inga mérések segítségével. Másrészt ilyen irányú vizsgálatainkat ismertetjük egy konkrét magyarországi teszt területen elvégzett sűrítéssel kapcsolatban.

[*] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport
H-1521 Budapest, E-mail: gtoth@sci.fgt.bme.hu
[**] *Eötvös Loránd Geofizikai Intézet*
H-1145 Budapest Kolumbusz u. 17-23, E-mail: merenyi@elgi.hu



1. ábra. Magyarország gravitációs felmértségi térképe. (*Kiss, 2001*)

Gravitációs adatok sűrítése legkisebb négyzetes kollokációval

A legkisebb négyzetes kollokáció egy statisztikai megfontolásokon alapuló nehézségi erőtér modellezési eljárás. A lényege az, hogy a nehézségi erőtér bármely ismert függvénye (V potenciálfüggvény, annak első- és második deriváltjai, illetve ezekből származtatható mennyiségek) segítségével előállított univerzális kovariancia függvényből a legkisebb négyzetek elve szerinti optimális becslést (predikciót) tudunk végezni bármely ismeretlen erőtér jellemzőre.

Itt ismertetjük röviden a predikció egyenleteit *(Moritz 1980)*. A predikció alapegyenlete a jól ismert

$$s = C_{sl}(C_{ss} + C_{nn})^{-1}\ell \qquad (1)$$

összefüggés, ahol az ℓ a mérési adatok vektora, s a predikció eredménye, az ismert vagy ismeretlen ponton, C_{ss} a jel, C_{nn} a zaj kovariancia mátrixa, C_{sl} pedig a mérések és a predikálandó jel keresztkovariancia mátrixa.

Az (1) egyenletben szereplő kovariancia mátrixok meghatározása a pontpárok távolságának (illetve azimutfüggő mennyiségek, mint például az Eötvös-ingával mért gradiensek esetében a pontpárok azimutjának) függvényében valamilyen elméleti modellből levezetett auto- és keresztkovariancia függvények segítségével kaphatók meg. Jelen esetben a szükséges auto- és keresztkovariancia függvények a t távolság és az α azimut függvényében az alábbiak: $C_{Wxz,Wxz}(t, \alpha)$, $C_{Wyz,Wyz}(t, \alpha)$, $C_{Wxz,Wyz}(t, \alpha)$, $C_{\Delta g,Wxz}(t, \alpha)$ és $C_{\Delta g,Wyz}(t, \alpha)$.

Elméleti kovariancia modellként a W. I. Reilly által javasolt modellt használtuk *(Reilly, 1979)*. Azért ezt választottuk elméleti modellként, mivel az összes nehézségi erőtér jellemző leírható vele és a levezetett kovariancia függvények minden nehézségi erőtér jellemző esetében megtalálhatók *Hein (1981)* munkájában. Ezenkívül Reilly modellje valódi *térbeli* kovariancia függvényt szolgáltat két alapvető paraméter, C_0, d függvényében. A T potenciálzavar függvény esetében Reilly modellje a következő összefüggésekkel állítható elő (J_n az n-edfokú Bessel-függvényt jelöli):

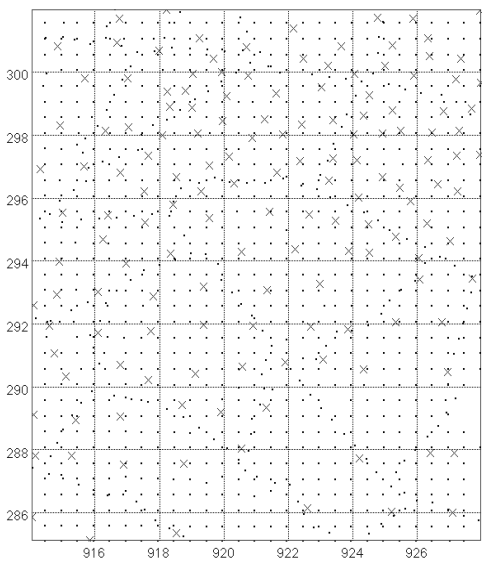
$$C(T,T) = \Phi_T(1,0)$$

$$\Phi_T(q,n) = \frac{1}{2} C_0 d^4 \int_0^\infty t^q e^{-t(z_i+z_j)} e^{-\frac{1}{2}t^2 d^2} J_n(tr)dt \quad . \qquad (2a,b)$$

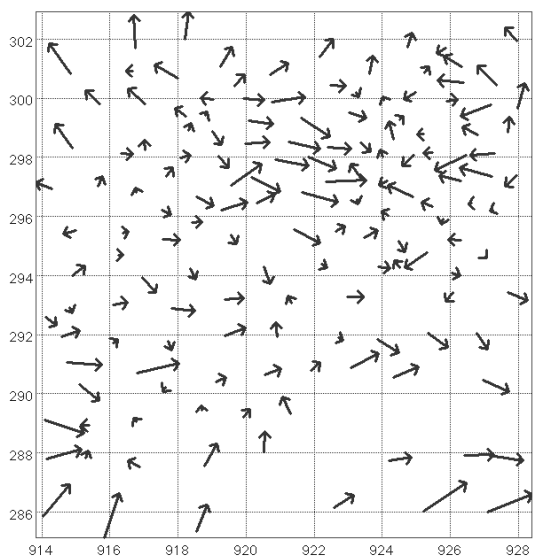
Ebből az alapvető kovariancia függvényből azután minden szükséges auto- és keresztkovariancia függvény előállítható. Az Eötvös-inga horizontális deriváltjai esetében a megfelelő kovariancia függvények megtalálhatók *Hein (1981)* munkájában, illetve a *Tóth et al. (2005)* cikkben .

Vizsgálati terület

A kiválasztott teszt terület egy Mátészalka környéki 14 × 16 km^2-es terület volt. Azért erre a közel sík területre esett a választásunk, mivel itt az ELGI által végzett gravitációs mérések mellett rendelkezésre álltak a MOL Rt. által végzett sűrítő mérések eredményei is, összesen 1423 pontbeli nehézségi mérés (*2/a. ábra*). Ezen kívűl a területre eső 150 Eötvös-inga mérési pontban meg lettek mérve a számunkra érdekes horizontális deriváltak is. A *2/b. ábrán* a topografikus és szélességi hatással redukált Eötvös-inga horizontális gradienseket tüntettük fel.



2/a. ábra



2/b. ábra

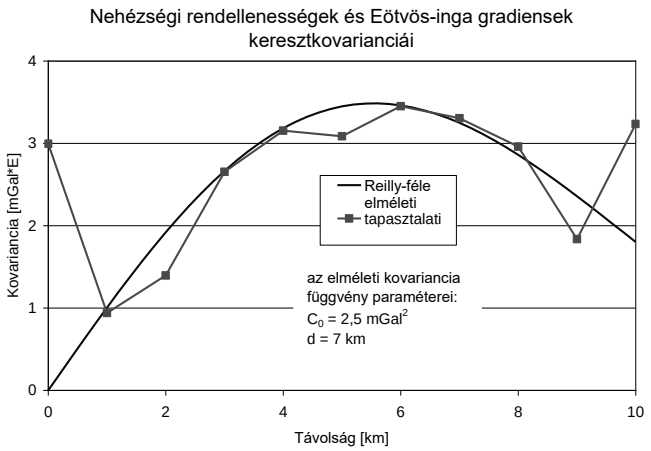
2. ábra. Mátészalka környéki teszt terület (**2/a. ábra**). A területre eső gravitációs pontokat '.', az Eötvös-inga mérési helyeket 'x' jelzi. A topografikus és normál szélességi hatással redukált horizontális Eötvös-inga gradiensek vektorai (**2/b. ábra**). A feltüntetett koordináták km-es EOV értékek.

Számítások

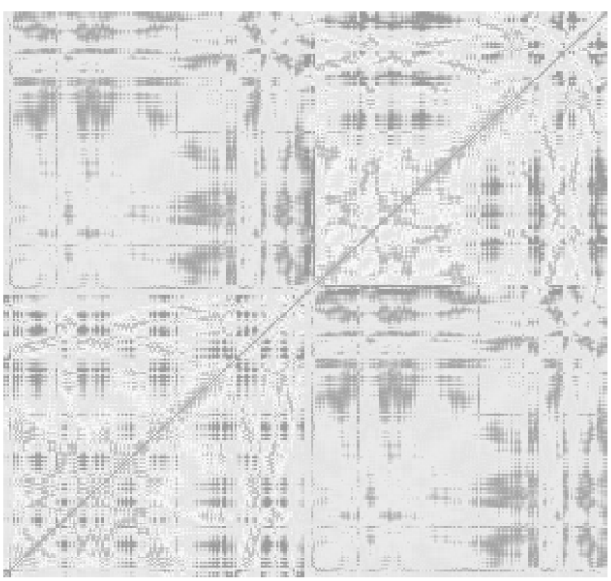
A számításainkhoz felhasznált Eötvös-inga mérési adatok az említett 150 pontbeli horizontális gravitációs gradiensek voltak, amelyeket a topografikus és szélességi hatással redukáltunk. A redukált horizontális gradiensek mérési hibáját a C_{nn} mátrix számításához ± 2 E értékben vettük fel. Ezután meghatároztuk az adatok tapasztalati (empirikus), a pontpárokat összekötő azimuttól független autokovariancia függvényét és a tapasztalati keresztkovariancia függvényt, mind az 1423 pontbeli nehézségi rendellenességet felhasználva a számításban (*3. ábra*). Erre a számításra a horizontális

gradiensek ún. izotróp (irányfüggetlen) $W_{xz}\cos\alpha + W_{yz}\sin\alpha$ kombinációja ad lehetőséget. Az elméleti modell megfelelő paraméterere a tapasztalati keresztkovariancia függvényből a $C_0 = 2{,}5$ mGal^2, $d = 7$ km értékek adódtak (*3. ábra*). A fenti elméleti modellel elő lehetett most már állítani az adatainkat jellemző $C_{\ell\ell}$ kovariancia mátrixot (*4. ábra*)

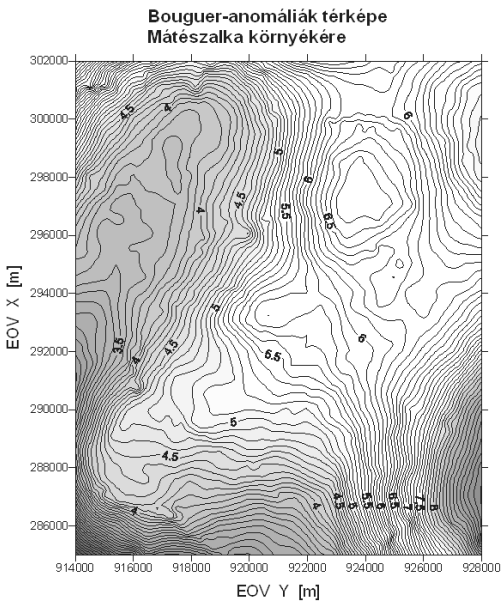
Ezek után elvégeztük a predikciót mind az 1423 gravitációs pontra. Az eredmények az *5/b ábrán* láthatók. Számszerűleg kimutatva a predikcióval csak a horizontális gradiensekből számított Δg értékek és a tényleges Bouguer-anomáliák eltéréseinek szórását, az ±0,82 mGal-nak adódott. A predikcióval meghatározott és tényleges nehézségi rendellenességek eltérései pedig a *6/a ábrán* látszik. Megfigyelhető, hogy az *5/a és 5/b* térképeken a fő formák nagyjából megegyeznek, de nyilvánvaló, hogy a sokkal sűrűbben mért gravitációs adatok részletgazdagabb gravitációs térképet eredményeznek.



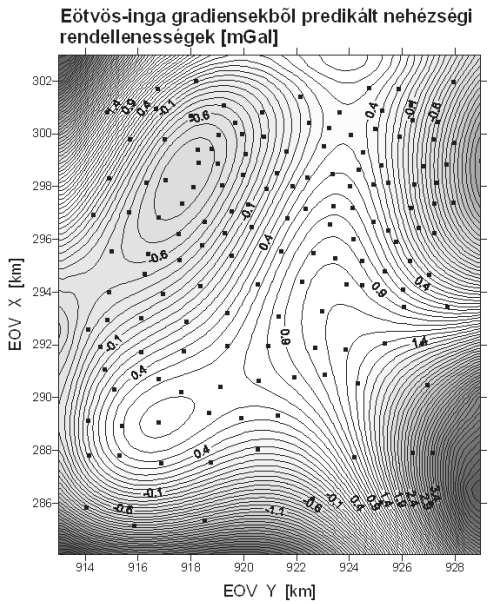
3. ábra. A teszt terület gravitációs és Eötvös-inga adatainak tapasztalati és elméleti keresztkovarianciái a távolság függvényében. Megfigyelhető az elméleti függvény kb. 6 km-es távolságnál levő maximuma



4. ábra. A $C_{\ell\ell}$ kovariancia mátrix szerkezete. A mátrix mérete 300×300 (90000 elem). A szürkeségi fokozat az egyes mátrix elemek nagyságát jelzi

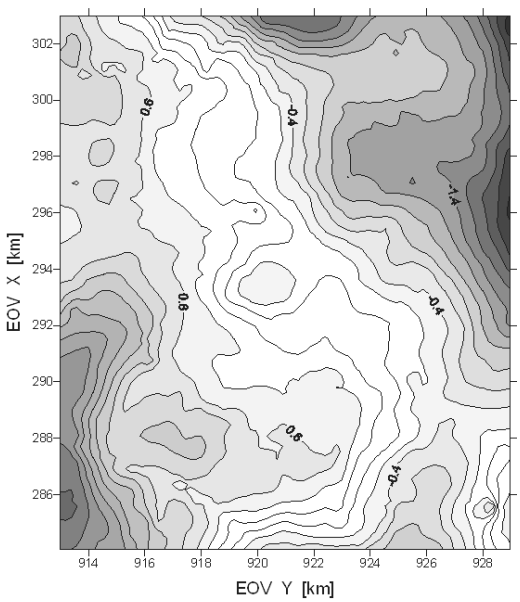


5/a. ábra

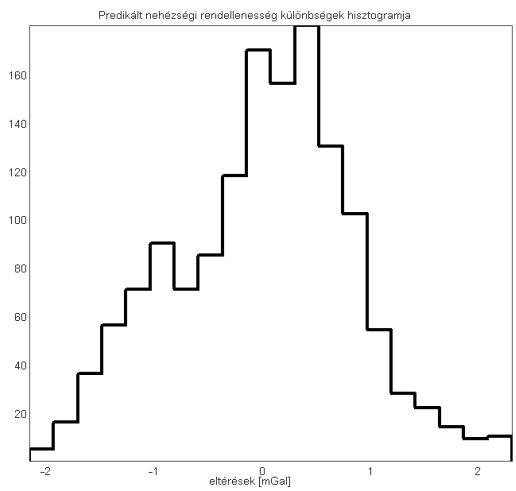


5/b. ábra

5. ábra. A Bouguer-anomáliák térképe Mátészalka környékére (mGal) (**5/a. ábra**). A legkisebb négyzetek szerinti predikcióval meghatározott nehézségi rendellenességek ábrája (az értékek mGal-ban) (**5/b. ábra**)



6/a. ábra

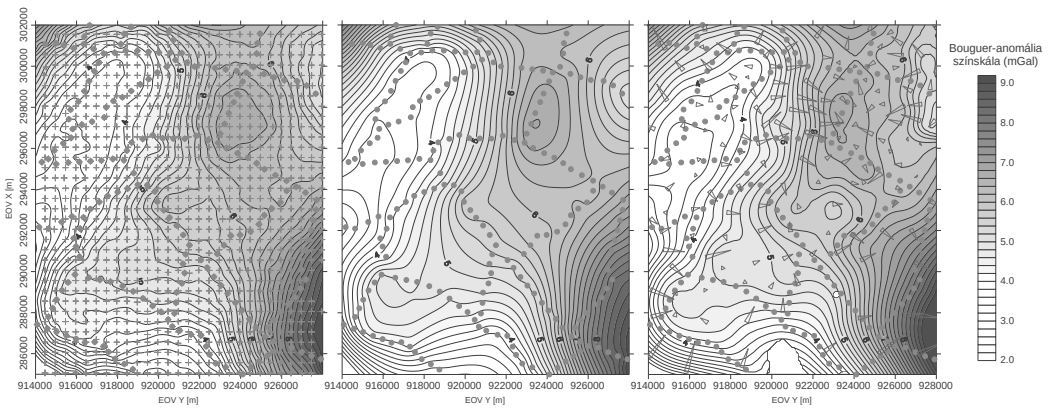


6/b. ábra

6. ábra. A Bouguer-anomáliák (**5/a.** és **5/b.**) eltéréseinek ábrája (mGal) (**6/a. ábra**) és az eltérések hisztogramja (**6/b. ábra**)

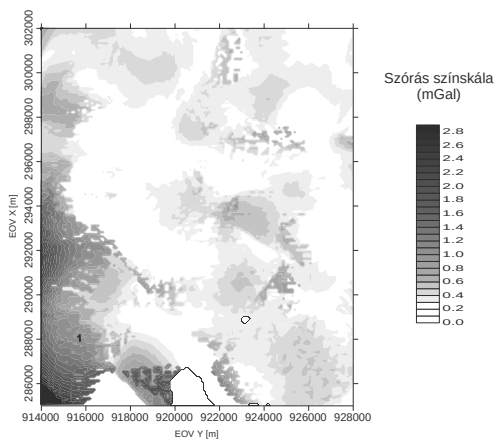
A horizontális gradiensek felhasználása gravitációs értékek interpolációjához

Az Eötvös-inga mérések horizontális gradienseinek egy másik lehetséges felhasználási módja a gravitációs értékek vonal-menti integrálással végzett interpolációja. A graviméteres mérési pontok anomáliáinak más pontra történő interpolációja kritikus lépés lehet a gravitációs térképszerkesztés során, ha a vizsgálati területen a kívánt felbontáshoz képest a mérési pontok száma kevés, vagy azok eloszlású egyenetlen. Olyan helyeken viszont, ahol graviméteres és Eötvös-inga mérési pontok közel azonos arányban állnak rendelkezésre (Magyarország jelentős részén ez a helyzet), a térképek pontosítása céljából a hagyományos interpolációs eljárások kombinálhatók a vonal-menti integrálás interpolációs módszerével.



7/a. ábra **7/b. ábra** **7/c. ábra**

7. ábra. A teszt területre különböző módszerekkel szerkesztett Bouguer-anomália térképek. A pontok az úthálózat mentén haladó, a keresztek pedig a rácsháló-szerűen végzett graviméteres mérések helyét jelölik. A nyilak az Eötvös-inga állomásokon a horizontális gradiensek nagyságát és irányát jelképezik. **7/a. ábra.** A területre eső összes graviméteres pont alapján készített térkép. **7/b. ábra.** Csak az úthálózat mentén haladó graviméteres pontok alapján készített térkép. **7/c. ábra.** Az úthálózat mentén haladó graviméteres pontok és az Eötvös-inga adatok felhasználásával készített térkép.



8. ábra. A vonal-menti integrálással számolt rácspont-adatok szórása

A módszer lehetőségeit szintén a Mátészalka melletti teszt területen vizsgáltuk. Itt két különböző típusú graviméteres felmérés történt: egy rácsháló mentén végzett sűrűbb (935 db pont), és egy úthálózat mentén végzett ritkább (205 db pont). Vizsgálataink során az összes mérési pontból és csak az úthálózat mentén végzett mérési pontokból 100×100 méteres rácshálóra történő krigeléssel egy-egy Bouguer-anomália térképet szerkesztettünk (*7/a. és 7/b. ábra*). Utóbbi térkép a kisebb állomásszám és a mérési pontok útvonalmenti elhelyezkedése miatt kevésbé részletgazdag, az izovo-

nalak sokkal simább lefutásúak, aminek következtében a 7/b. térkép a 7/a. térképnek simítottabb, mintegy regionális változata. Az úthálózat melletti mérésekből készült térképet az Eötvös-inga állomások (150 db pont) gradienseit felhasználva újraszerkesztettük. A 100×100 m-es rácsháló pontjaira most numerikus vonal-menti integrálással határoztuk meg a rendellenesség értékeit. A rácspontoknál a közeli graviméteres mérési pontokból kiindulva, a rácspontig vezető egyeneseket rövid szakaszokra felosztva, diszkrét lépéseken keresztül végeztük az integrálást. Egy-egy lépésben a horizontális gradienseknek az adott szakaszra eső értékeit a környező Eötvös-inga állomások W_{zx} és W_{zy} komponenseinek interpolációjával becsültük meg. Az egyes rácspontok végső interpolált értékeként a környező graviméteres pontokból interpolált rendellenességi értékeknek az integrálási távolsággal fordított arányban súlyozott átlagát vettük. Az eredményt a *7/c. ábra* mutatja. Itt jól látható, hogy az Eötvös-inga mérések adatainak felhasználásával, különösen az adathiányos részeken, a referenciának tekinthető 7/a. térképhez jobban hasonlító anomália térképet kaptunk. A számítás pontosságának egyik jelzőszáma lehet a rácspontokra eső interpolált értékeknek az átlagos érték körüli szórása. A 8. ábra szerint a szórás a legtöbb helyen 1 mGal alatti érték.

Magyarország számos területére csak a 7/b. ábrához hasonló szerkezetű, úthálózat mentén végzett, sokszor nem kielégítő sűrűségű graviméteres mérések állnak rendelkezésre. Ugyanakkor ezen területek egy részén viszonylag nagy sűrűségű Eötvös-ingás felmérés is történt. A bemutatott vizsgálat jól bizonyítja, hogy ilyen területeken a graviméteres és Eötvös-ingás mérési adatok együttes alkalmazásával a gravitációs térképek pontosíthatók.

Következtetések és javaslatok

Tanulmányunkban bemutattunk két lehetséges módszert, amellyel az Eötvös-inga horizontális gradiensek felhasználhatók gravitációs térképek szerkesztéséhez. A kollokáció módszere esetében azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a Δg predikcióhoz egyrészt a keresztkovariancia függvény jellege miatt *nagyobb adatterület* látszik célszerűnek, másrészt mindig célszerű az Eötvös-ingával mért adatokat és a meglevő gravitációs adatokat *együttesen felhasználni* a predikció során. Ezzel kapcsolatban további vizsgálatokat tervezünk. Megállapítható, hogy a kollokáció sajátosságai miatt további *trend eltávolítás* lenne kívánatos a keresztkovarianciák kedvezőbb alakítására (ehhez például valamilyen geopotenciál és litoszféra modellt lenne célszerű felhasználni). Célszerű lenne a tanulmányban alkalmazott elméleti kovariancia modellen túl más kovariancia modelleket is felhasználni és a pontok tengerszint feletti magasságait is figyelembe venni a számítás során.

Terveink között szerepel még az ingamérési adatok és a nehézségi rendellenességek együttes felhasználása egy *új magyarországi geoidmeghatározás* céljára, amelyhez a jelen tanulmányban közölt vizsgálataink némiképpen hozzájárulhatnak. A bemutatott vizsgálat azt is jól bizonyítja, hogy adathiányos területeken a graviméteres és az Eötvös-ingás mérési adatok együttes alkalmazásával a gravitációs térképek pontosíthatók.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásaink a T-046718 sz. OTKA támogatásával folynak.

Hivatkozások

Hein G W (1981): Untersuchungen zur terrestrischen Schweregradiometrie. *Veröffentlichungen der Deutschen Geodätischen Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, München, C 264.

Kiss J (2001): Jelentés a „Gravitációs és mágneses adatbázisok és paramétertérképek" projekt keretében 2001-ben végzett munkákról. *MÁELGI jelentés, http://www.elgi.hu/magyar/terkfo/projects/gravmag/gravterk.htm.*

Moritz H (1980): Advanced Physical Geodesy. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe & Abacus Press, Tunbridge Wells Kent.

Reilly W I (1979): Mapping the local geometry of the Earth's gravity field. Geophysics Division, *Department of Scientific and Industrial Research*, New Zealand. Report No. 143.

Tóth Gy, Völgyesi L (2005): Adatvizsgálat predikcióval magyarországi Eötvös-inga mérések felhasználásával. *Geomatikai Közlemények* VIII, 215-218.

ADATVIZSGÁLAT PREDIKCIÓVAL MAGYARORSZÁGI EÖTVÖS-INGA MÉRÉSEK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Tóth Gyula[*]*, Völgyesi Lajos*[*]

Investigation of Hungarian torsion balance measurements by prediction *- Torsion balance measurements in Hungary were checked by least-squares collocation. The methodology was the so-called "leave-one-out" prediction of horizontal gravity gradients. The method was successfully tested on a selected subset of 700 torsion balance measurements and only three possible outliers has been detected. These results are promising in view of a planned new Hungarian geoid determination.*

Keywords: Eötvös-inga mérések, predikció, nehézségi erőtér

A magyarországi Eötvös-inga mérések megbízhatóságát (?) a legkisebb négyzetes kollokáció módszerével vizsgáltuk. A horizontális gradiensek vizsgálatára alkalmazott módszer a mérési pontok egyenkénti kihagyásával végzett predikció volt. Az eljárást sikeresen teszteltük 700 kiválasztott Eötvös-inga mérési pontban és ezek közül csak három mérési pontban találtunk kivágó értékeket. Ezek az eredmények ígéretesek a közeljövőben tervezett új magyarországi geoidmegoldás fényében.

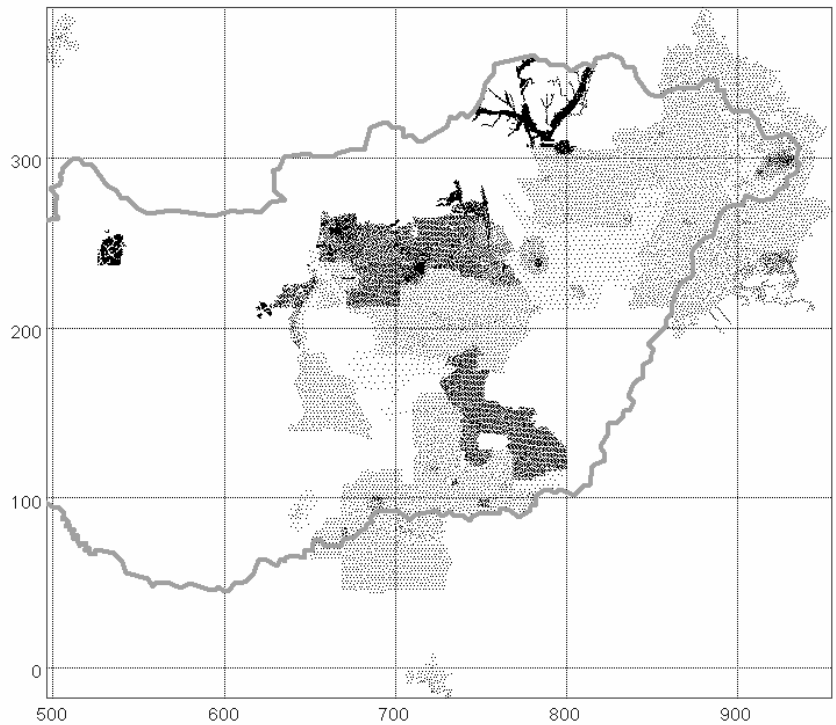
Kulcsszavak: torsion balance measurements, prediction, gravity field

Bevezetés

Magyarországon a XX. században a MAORT, az ELGI és az OKGT összesen mintegy 60000 állomáson végzett torziós-inga méréseket *(Szabó 1999)*. Sajnos a mérési anyag egy része különböző okok miatt mára már elveszett, azonban a fennmaradó része még megmenthető a további felhasználás céljára. Az ELGI munkatársai az elmúlt 10 évben mintegy 24450 mérést rendeztek számítógépes adatbázisba. A korábbi méréseket ugyan döntő részben nyersanyagkutatás céljából végezték, azonban a pontok jelentős részében a W_{zx} , W_{zy} horizontális gradiensek mellett a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi mennyiségeket is meghatározták, sőt a pontok jelentős részében topografikus hatást is számoltak. Az eddig számítógépes adatbázisba rendezett ingamérések pontjainak területi eloszlása az *1. ábrán* látható.

Milyen megbízhatósággal jellemezhetők ezek az adatok? Erre a kérdésre az egyik lehetséges választ maguknak a méréseknek a megismétlése nyújthatná. Mivel erre nincsen lehetőségünk, viszont az adatokat szeretnénk felhasználni a nehézségi erőtér modellezésében és egy újabb magyarországi geoidmegoldás előállításában, ezért egy másik megoldást követhetünk. Ennek az elve az, hogy megpróbáljuk a méréseinket oly módon „reprodukálni", hogy minden mérés környezetébe eső többi mérésből állítjuk azt elő. Erre elvben bármilyen predikciós eljárás használható lenne, viszont a szakirodalomban az ilyen adatvizsgálatok egyik bevett predikciós eljárása, legalábbis a nehézségi erőtér modellezésében, a *Moritz (1980)* által javasolt legkisebb négyzetek szerinti predikció. Ebben a tanulmányunkban a magyarországi Eötvös-inga mérési adatok vizsgálatának ezt a módszerét ismertetjük. Bemutatjuk a módszer elvi alapjait és azokat a teszt számításokat, eredményeket, amelyeket ezzel a módszerrel értünk el.

[*] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék*
Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport
H-1521 Budapest, E-mail: gtoth@sci.fgt.bme.hu



1. ábra. A számítógépes adatbázisban szereplő Eötvös-inga mérések jelenlegi területi eloszlása. Az ábrán a rácsháló-zat EOV koordinátái km-es egységben vannak feltüntetve

Adatok vizsgálata LKN predikcióval

Az Eötvös-inga mérési adatok vizsgálatához a „kihagyok egyet” (Leave One Out) predikció elvét alkalmaztuk. Ez azt jelenti, hogy minden egyes Eötvös-inga mérési pontra a pont általunk választott közeli *környezetéből* (természetesen a vizsgált pont méréseit kihagyva) predikciót végzünk a vizs-gált pontra. Ezután megnézzük a predikált értékek és a ténylegesen ott megmért értékek eltérését és viszonyítjuk azt a predikció hibájához. Ezt az összes vizsgált ponton elvégezve látni fogjuk azt, hogy vannak-e statisztikailag ‘kivágó’ értékek, vagyis olyan pontok, ahol az eltérés a tényleges értéktől a predikció hibáját is figyelembe véve statisztikailag szignifikáns.

A legkisebb négyzetek szerinti kollokációval végzett predikció összefüggéseit például *Moritz (1980)* ismerteti. Az alapegyenlet a jól ismert

$$s = C_{sl}(C_{ss} + C_{nn})^{-1}\ell \qquad (1)$$

összefüggés, ahol az ℓ a mérési adatok vektora, s a predikció eredménye az ismert vagy ismeretlen ponton, C_{ss} a jel-, C_{nn} a zaj-kovariancia mátrix, C_{sl} pedig a mérések és a predikálandó jel kovari-ancia mátrixa.

Az (1) egyenletben szereplő kovariancia mátrixok meghatározása a pontpárok távolságának – illetve azimutfüggő mennyiségek, mint például az Eötvös-ingával mért gradiensek esetében a pontpárok azimutjának – függvényében valamilyen elméleti modellből levezetett auto- és kereszt-kovariancia függvények segítségével történhet .

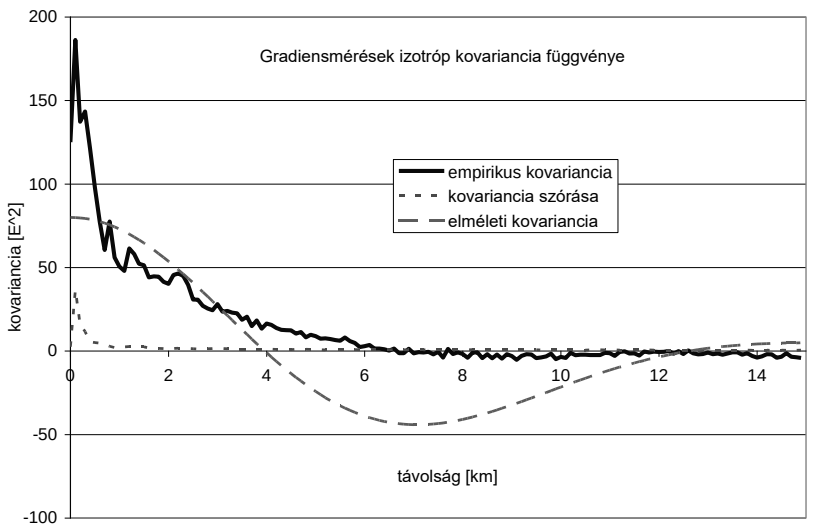
Most a szükséges auto- és keresztkovariancia függvények a t távolság és az α azimut függvé-nyében: $C_{Wxz,Wxz}(t,a)$, $C_{Wyz,Wyz}(t,a)$ és $C_{Wxz,Wyz}(t,a)$.

Elméleti kovariancia modellként a W. I. Reilly által javasolt modellt használtuk *(Reilly, 1979).* A számunkra most szükséges auto- és keresztkovariancia függvények az alábbiak:

$$C(T_{xz},T_{xz}) = \frac{1}{2}\Phi(5,0) + \frac{1}{2}\Phi(5,2)\cos 2\alpha$$
$$C(T_{yz},T_{yz}) = \frac{1}{2}\Phi(5,0) - \frac{1}{2}\Phi(5,2)\cos 2\alpha$$
$$C(T_{xz},T_{yz}) = -\frac{1}{2}\Phi(5,2)\sin 2\alpha \quad .$$

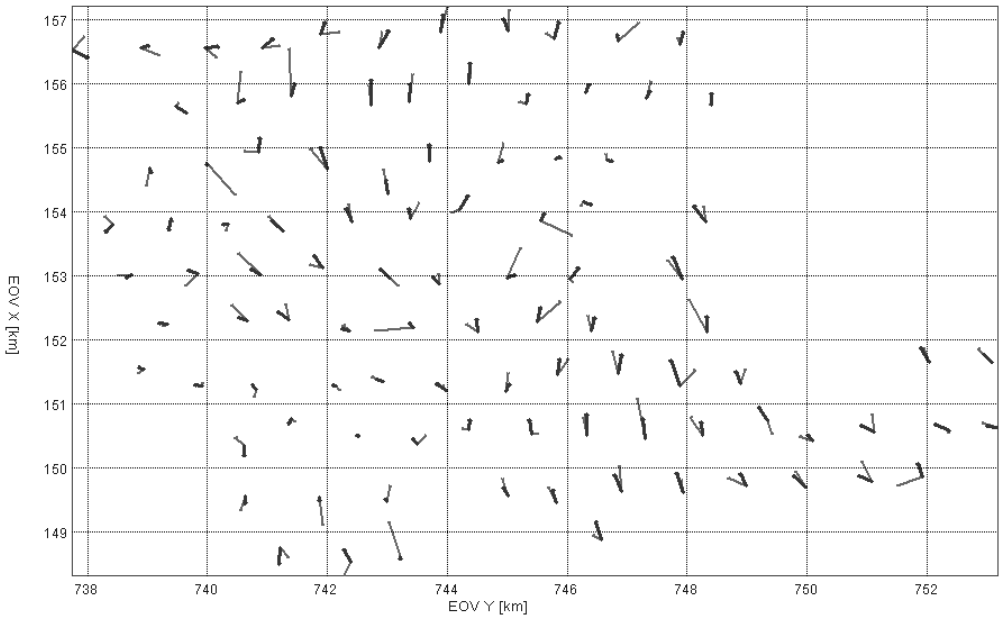
A kovariancia függvények előállításához szükséges $\Phi(p,q)$ függvények számítási összefüggései megtalálhatók *(Reilly 1979)* munkájában, és a Kummer-féle konfluens hipergeometrikus függvények numerikus kiszámítását is igénylik, továbbá két kovariancia függvény paraméter, C_0 és d megadását.

Az elméleti kovariancia függvény fenti paramétereit a gradiensmérések izotróp tapasztalati kovariancia függvényeiből állíthatjuk elő (*Tóth et al. 2005).* Ezt a tapasztalati kovariancia függvényt, a kovariancia tapasztalati szórását, illetve a közelítő elméleti függvényt láthatjuk a *2. ábrán*. Megjegyezzük, hogy ezt az *összes* rendelkezésre álló gradiensmérés alapján határoztuk meg, és a több mint 40000 mérési pont közel 1 milliárd lehetséges kapcsolata miatt – a számítás felgyorsítása érdekében- szükséges volt előrendezni a pontjainkat. Látható az, hogy az elméleti függvény csak kb. 0.8-4 km-es ponttávolságig illeszkedik kielégítően a tapasztalati függvényre, de ez a mostani adatvizsgálati célból megfelelőnek mondható. Másrészt tudjuk azt, hogy a kollokáció eljárása „robusztus", tehát az eredmény nem nagyon érzékeny a kovariancia függvény megválasztására.

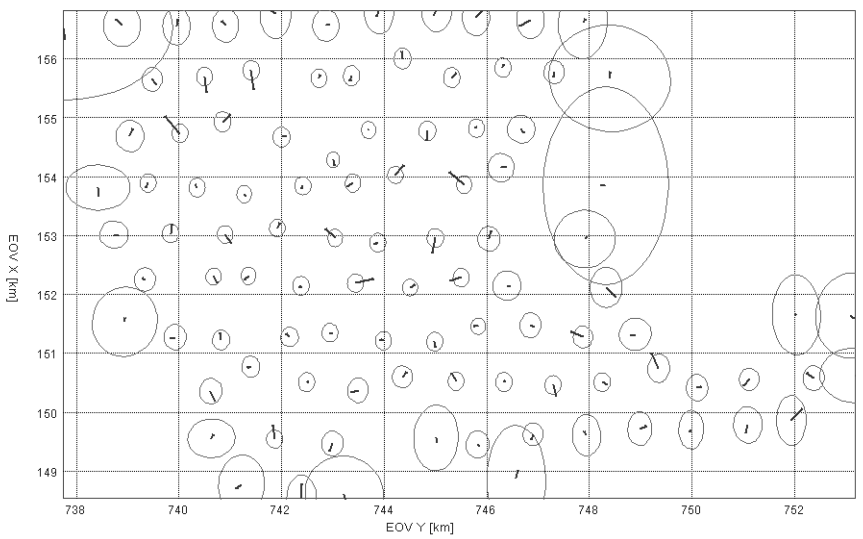


2. ábra. Gradiensmérések izotróp kovariancia függvénye

Az első vizsgálatokat Tiszakécske környékén kiválasztott 100 mérési pontban végeztük el. Az eredmények közül bemutatjuk az eredeti és a predikcióval meghatározott gradiens vektorokat (*3. ábra*), illetve a háromszoros szórással számított konfidencia ellipsziseket és az eltérések vektorait. Ennél a számításnál a gradiensmérésekhez rendelt középhiba (szórás) ± 3 E (Eötvös; 1E = 10^{-9} s^{-2}) volt, továbbá a figyelembe vett maximális ponttávolság (az a környezet, ahonnan a predikcióhoz a pontokat kiválasztottuk) 1,5 km volt. A *4. ábrán* látható az, hogy a pontok közel 18 százalékában az eltérések meghaladták a háromszoros szórást.

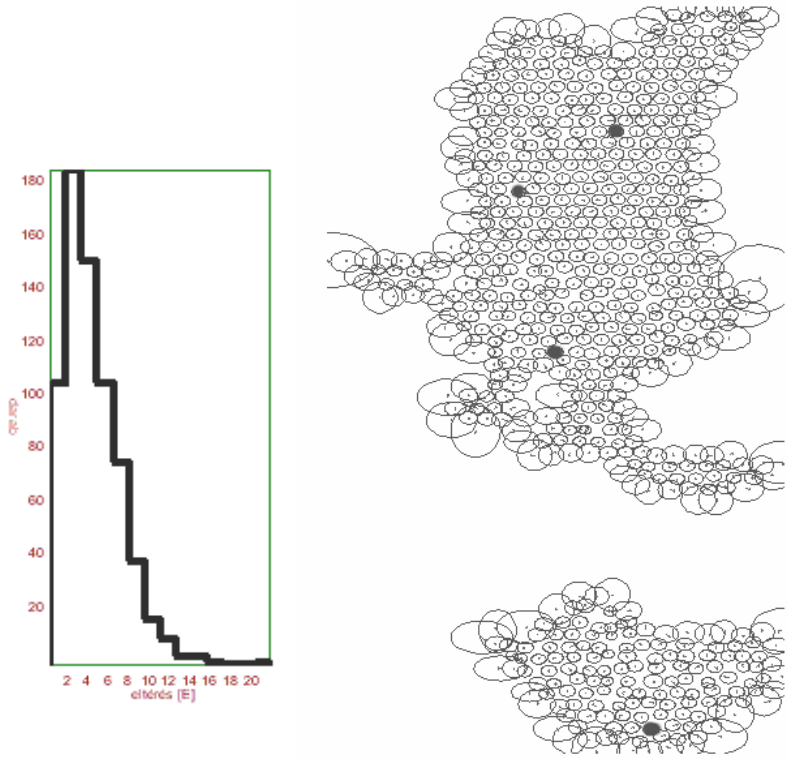


3. ábra. Eredeti és predikcióval számított gradiens vektorok. Vastagabb vonallal jelöltük a predikció eredményét



4. ábra. Predikciós hibák és konfidencia ellipszisek 100 pontra, Tiszakécske környékén

Ezért további vizsgálatokat végeztünk, 700 mérési ponton, annak megállapítására, hogy az Eötvös-inga horizontális gradiensekhez rendelt középhiba megváltoztatása hogyan befolyásolja az adatvizsgálat eredményét. Ahogyan az az *5. ábráról* látszik, a mérési középhibát (szórást) ± 5 E-re növelve a 700 pontból már csak három olyan pontot találtunk, ahol az eltérések nagysága meghaladta a háromszoros predikciós hiba értékét, sőt ezekben a pontokban is csak a W_{zx} összetevő. Ezenkívül a kapott átlagosan ± 4,5 E értékű hiba jó összhangot mutat az apriori felvett ± 5 E számértékkel. Ezeken a kivágó pontokon mindenképpen javasolt ellenőrizni az adatbázisban levő méréseket.



5. ábra. A bal oldali ábrán a predikció és a tényleges mérések eltéréseinek eloszlását láthatjuk (az átlagos hiba: 4,5 E). A jobb oldali ábrán pedig a predikciós hiba vektorokat és konfidencia ellipsziseket 700 kiválasztott Eötvös-inga mérési pontra.. A háromszoros predikciós hibát meghaladó eltéréseket mutató pontokat sötét színnel kiemeltük

Látható tehát az, hogy a fenti módszer „működőképes", tehát hasznos eljárása lehet az Eötvös-inga adatbázis további ellenőrzésének.

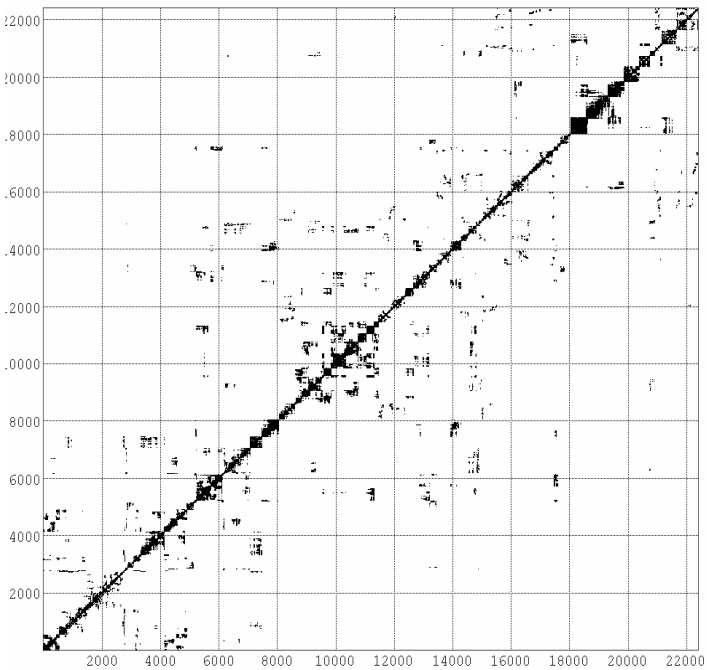
Magyarországi geoidmeghatározás LKN kollokációval

Az Eötvös-inga mérési adatok további vizsgálatát tervezzük, kiterjesztve az ebben a tanulmányban bemutatott eljárást a görbületi értékekre is. Szeretnénk továbbá különböző auto- és keresztkovariancia függvényeket is tesztelni; olyanokat, amelyek még jobban illeszkednek a magyarországi nehézségi erőtér helyi szerkezetéhez.

Ezeket a vizsgálatokat abból a célból kezdtük el, hogy a rendkívül értékes hazai Eötvös-inga méréseket geodéziai célból is hasznosítani tudjuk a közeljövőben egy új magyarországi geoidmeghatározás számára. Remény van arra is, hogy a számításhoz valódi pontonkénti nehézségi rendellenességeket tudunk majd az ELGI adatbankból, a BME és az ELGI közötti együttműködés keretében felhasználni. Ezen kívül a Pannon-medence litoszféra modelljét (*Papp et al. 1996)*, illetve a felszíni kőzetsűrűségértékeket is előnyösen lehetne felhasználni azért, hogy a számításhoz felhasznált adatok kedvezőbb statisztikai jellemzőkkel rendelkezzenek.

A következő számításainkhoz tervezett teszt feladat a Δg nehézségi rendellenességek előállítása lesz kollokációval az Eötvös-inga gradiensekből, minden mérési pontot felhasználva. A mérések nagy száma miatt (jelenleg közel 50 ezer gradiens adat van feldolgozva) a mérési kovariancia mátrix mérete duplapontosan tárolva kb.15 GB lesz. Viszont csak 6 km-nél közelebbi pontkapcsolatokat tekintetbe véve 0,4%-os elemkitöltésű *ritka mátrix* adódik, melynek mérete csak 278 MB. Ezen 2x2-es blokkmátrix egy blokkjának kitöltöttségi képét láthatjuk a *6. ábrán*. Ez már könnyebben kezelhető lesz számítógép kapacitás szempontjából in-core és out-of-core eljárásokkal (például ilyen a TAUCS, 32 bites architektúrára készült ritka mátrix megoldó eljáráskönyvtár). Viszont a

predikció hibabecslése a kezelendő mátrix mérete miatt továbbra is inkább csak szuperszámítógép bevonásával képzelhető el.



6. ábra. Eötvös-inga gradiensek ritkán kitöltött kovariancia mátrixa

Összefoglalás

Vizsgálati eredményeink alapján megállapítható, hogy a legkisebb négyzetes kollokáció eljárása alkalmas lehet a teljes magyarországi Eötvös-inga mérési adatbázis ellenőrzésére (ahol a 4 km-en belüli adattávolság teljesül). Ezeket az adatokat az ellenőrzés után a közeljövőben fel kívánjuk használni egy új, nagyfelbontású és minél pontosabb geoidmegoldás előállítására.

Köszönetnyilvánítás

Kutatásaink a T-037929 és a T-046718 sz. OTKA támogatásával folynak.

Hivatkozások

Papp G, Kalmár J (1996): Toward the physical interpretation of the geoid in the Pannonian basin using 3-D model of the lithosphere. *IGeS Bulletin*, 5, 63-87.

Reilly WI (1979): Mapping the local geometry of the Earth's gravity field. Geophysics Division, *Department of Scientific and Industrial Research*, New Zealand. Report No. 143.

Szabó Z (1999): Az Eötvös-inga históriája. *Magyar Geofizika*, 40; 1, 26-38.

Tóth Gy, Merényi L (2005): Eötvös-inga mérési adatok felhasználása gravitációs térképek szerkesztéséhez. *Geomatikai Közlemények* VIII. 207-212.

Völgyesi L, Tóth Gy (2004): Modelling gravity gradient variation due to water mass fluctuations. *IAG International Symposium, Gravity, Geoid and Space Missions.* Porto, Portugal.

A NEHÉZSÉGI ERŐTÉR POTENCIÁLFÜGGVÉNYÉNEK INVERZIÓS REKONSTRUKCIÓJA EÖTVÖS-INGA ADATOK ALAPJÁN

Dobróka Mihály[1], Völgyesi Lajos[2,3]

Inversion reconstruction of gravity potential based on torsion balance measurements *- Suggestion can be found here for the inversion reconstruction of gravity potential. The suggested method gives a possibility to determine deflections of the vertical based on torsion balance measurements. Accuracy of this method is better than the accuracy of the former interpolation methods, and it is possible to avoid some types of earlier interpolation problems.*

Keywords: inversion, deflection of the vertical, torsion balance measurements

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára teszünk javaslatot. A javasolt módszerrel lehetőség nyílik Eötvös-inga mérési adatok felhasználásával függővonal-elhajlás meghatározására, az eddig alkalmazott interpolációs módszerek pontosságát felülmúló számítások elvégzésére és a korábban alkalmazott eljárások során felmerülő bizonyos problémák áthidalására.

Kulcsszavak: inverzió, függővonal-elhajlás, Eötvös-inga mérések

Bevezetés

Magyarországon az elmúlt 100 évben mintegy 60000 Eötvös-inga mérést végeztek. Mivel a mérések nyersanyag kutatás céljából történtek, ezért csak a W_{zx} és a W_{zy} horizontális gradienseket dolgozták fel. A geodéziában fontos W_{Δ} és W_{xy} görbületi adatok eddig feldolgozatlanok maradtak, pedig ezek jó lehetőséget teremtenek a függővonal-elhajlás meghatározására *(Völgyesi 1993, 1995)*.

Az alábbiakban a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójára teszünk javaslatot. Úgy véljük a javasolt módszerrel lehetőség nyílik az eddig alkalmazott interpolációs módszerek pontosságát felülmúló számítások elvégzésére és a korábban alkalmazott eljárások során felmerülő bizonyos problémák áthidalására. Az inverziós algoritmus ellenőrzésére szintetikus adatokon végeztünk vizsgálatot.

Az inverziós algoritmus

Vegyük fel a nehézségi erőtér $W(x,y)$ potenciálját valamely $\Psi_0 ... \Psi_P$ (ismert) bázisfüggvény rendszer szerinti sorfejtés alakjában:

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i(y) \Psi_l(x) \ ,$$

ahol

$j = \frac{n(n-1)}{2} + i$, $l = n - i - 1$ és B_j (ismeretlen) sorfejtési együtthatók. Az ismeretlenek száma: $M = \frac{P(P+1)}{2} + P + 1$. (Általánosságban a bázisfüggvények sokfélék lehetnek, a jelen dolgozatban azonban bázisfüggvényekként hatványfüggvényeket vagy Chebishev, Legendre, stb. polinomokat tételezünk fel.)

A direkt feladat megoldását (W_{Δ} és W_{xy} görbületi adatok elméleti értékeit) ezzel előállíthatjuk a

[1] *Miskolci Egyetem, Geofizikai Tanszék, H-3515 Miskolc-Egyetemváros, E-mail: dobroka@gold.uni-miskolc.hu*
[2] *Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános és Felsőgeodézia Tanszék H-1521 Budapest*
[3] *Magyar Tudományos Akadémia Felsőgeodéziai és Geodinamikai Kutatócsoport, E-mail: volgyesi@eik.bme.hu*

$$W_{xy}^{számított} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i^{'}(y) \Psi^{'}{}_l(x)$$

$$W_{\Delta}^{számított} = W_{yy} - W_{xx} = \sum_{n=1}^{P+1} \sum_{i=0}^{n-1} B_j \left\{ \Psi_i^{''}(y) \Psi_l(x) - \Psi_i(y) \Psi^{''}{}_l(x) \right\}$$

alakban. A *k*-ik mérési pontban (x_k, y_k) az

$$S_{kj} = \Psi_i^{'}(y_k) \Psi^{'}{}_l(x_k) \quad \text{és} \quad Q_{kj} = \Psi_i^{''}(y_k) \Psi_l(x_k) - \Psi_i(y_k) \Psi^{''}{}_l(x_k)$$

jelöléssel a számított Eötvös-inga adatok:

$$W_{xy}^{(k)} = \sum_{j=1}^{M} B_j S_{kj} \quad \text{és} \quad W_{\Delta}^{(k)} = \sum_{j=1}^{M} B_j Q_{kj} \ ,$$

ahol

S_{kj}, Q_{kj} ismert mátrix elemek (a *j* indexet *i* és *l* értéke egyértelműen meghatározza).

A mért és a számított adatok eltérésvektorának elemei ezzel

$$e_k = W_{xy_{mért}}^{(k)} - \sum_{j=1}^{M} B_j S_{kj} \quad \text{és} \quad f_k = W_{\Delta_{mért}}^{(k)} - \sum_{j=1}^{M} B_j Q_{kj} \quad .$$

A minimalizálandó függvény legyen pl. az eltérésvektor L_2 normája:

$$E = \sum_{k=1}^{N_1} e_k^2 + \sum_{k=1}^{N_2} f_k^2 \quad ,$$

ahol

N_1 a W_{xy} ill. N_2 a W_{Δ} mérési adatok száma. Vektor írásmódot alkalmazva vezessük be a

$$\vec{d}^{(mért)} = \left\{ W_{xy}^{(1)}, ..., W_{xy}^{(N_1)}, W_{\Delta}^{(1)}, ..., W_{\Delta}^{(N_2)} \right\}, \quad G_{kj} = \begin{cases} S_{kj} & k \le N_1 \\ Q_{kj} & N_1 < k \le N_1 + N_2 \end{cases}$$

és az

$$\vec{e} = \vec{d}^{(mért)} - \underline{\underline{G}} \vec{B} \quad ,$$

$$E = (\vec{e}, \vec{e}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

jelöléseket, ahol

$$N = N_1 + N_2 \quad .$$

Az így definiált inverz feladat megoldását a $\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0$, $(l = 1, ..., M)$ feltételrendszer alapján felállított

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \vec{B} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}^{(mért)}$$

egyenletrendszerből kapjuk:

$$\vec{B} = \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}} \right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d} \quad .$$

Az inverz probléma tehát lineáris, megoldásával a sorfejtési együtthatók $\vec{B}$ vektora meghatározható. Mivel Eötvös-inga adataink a potenciálfüggvény második deriváltjaival modellezhetők, a B_0, B_1, B_2 együtthatókra (konstans tag, x-ben ill. y-ban lineáris tagok együtthatói) a fentiekben nincs egyenlet!

A B_0 konstans a továbbiak szempontjából nem lényeges (a potenciál csak egy additív konstans erejéig meghatározott), B_1, B_2 előállítása azonban további információ bevonásával, pl. függővonal elhajlás adatok felhasználásával lehetséges az alábbi megfontolás alapján:

A függővonal elhajlás két horizontális összetevője:

$$\xi = \Phi - \varphi, \qquad \eta = (\Lambda - \lambda)\cos\varphi \ ,$$

ahol

Φ, Λ a szintfelületi, φ, λ az ellipszoidi földrajzi koordináták, amelyekre

$$g\xi = -W_x + U_x \quad \text{és} \quad g\eta = -W_y + U_y \ .$$

Itt U az ellipszoidi normáltér ismert potenciálfüggvénye, g az átlagos nehézségi gyorsulás.

Az első deriváltak a függővonal elhajlásból:

$$W_x = -g\xi + U_x \quad \text{és} \quad W_y = -g\eta + U_y \ .$$

A potenciál sorfejtéses előállításából

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i'(x)\Psi_l(y) = B_1 + F(x,y)$$

$$W_y = \frac{\partial W}{\partial y} = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j \Psi_i(x)\Psi_l'(y) = B_2 + G(x,y) \ ,$$

ahol

$F(x,y),\ G(x,y)$ ismert (a benne szereplő $B_j\ (j \geq 3)$ együtthatók a fentiek szerint adottak).

Ha pl. $(x = x_1,\ y = y_1)$ -ben ismert a (ξ_1, η_1) függővonal elhajlás értéke, akkor

$$B_1 = -F(x_1, y_1) + U_x(x_1, y_1) - g\xi_1 \quad \text{és} \quad B_2 = -G(x_1, y_1) + U_y(x_1, y_1) - g\eta_1 \ .$$

Az így előállított sorfejtési együtthatókkal (additív konstanstól eltekintve) a potenciál függvény az ismert bázisfüggvények felhasználásával a vizsgált (mérésekkel lefedett terület) bármely pontjában meghatározható.

Sajnos azonban ez az algoritmus ilyen formában nem mindig használható. Ha ugyanis (mint a fentiekben jeleztük) bázisfüggvényekként hatványfüggvényeket vagy polinomokat (Chebishev, Legendre, stb.) használunk a sorfejtési együtthatók függetlensége nem biztosított. A potenciálfüggvény

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j y^i x^{n-i-1}$$

szerinti előállítása esetén az indexek szerkezete pl. P=4 -re (M=15):

n	i	$j=\frac{n(n-1)}{2}+i$	x és y hatványai	W_{xy} -ban szerepel	W_{Δ} -ban szerepel	*Bármelyikben szerepel*
1	0	0	*konstans*	-	-	-
2	0	1	x	-	-	-
	1	2	y	-	-	-
3	0	3	x^2	-	+	+
	1	4	xy	+	-	+
	2	5	y^2	-	+	+
4	0	6	x^3	-	+	+
	1	7	x^2y	+	+	+
	2	8	xy^2	+	+	+
	3	9	y^3	-	+	+
5	0	10	x^4	-	+	+
	1	11	x^3y	+	+	+
	2	12	x^2y^2	+	+	+
	3	13	xy^3	+	+	+
	4	14	y^4	-	+	+

A $\underline{\underline{G}}$ Jacobi mátrix első három oszlopában minden mérési ponthoz tartozóan konstansok szerepelnek a

n	i	l	$j=\frac{n(n-1)}{2}+i$	x és y hatványai	*Jakobi mátrix* W_{xy} *-ból*	*Jakobi mátrix* W_{Δ} *-ból*
3	0	2	3	x^2	*0*	*-2*
	1	1	4	xy	*1*	*0*
	2	0	5	Y^2	*0*	*+2*

táblázat tanúsága szerint. E három oszlop tehát nem lineárisan független, így a normálegyenlet $\underline{\underline{G}}^T\underline{\underline{G}}$ mátrixa szinguláris lesz, az inverz feladat nem megoldható! A probléma megoldása az Eötvös inga adatok és függővonal elhajlás adatok együttes inverziójával lehetséges.

Az első derivált adatok a függővonal elhajlásból származtathatók:

$$W_x^{mért}=-g\xi^{mért}+U_x \quad \text{és} \quad W_y^{mért}=-g\eta^{mért}+U_y \quad .$$

A potenciál sorfejtéses előállításával ezek számított értéke

$$W_x^{számított}=\frac{\partial W}{\partial x}=\sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1}B_j\Psi_i^{'}(x)\Psi_{\ l}(y)=\sum_{j=1}^{M}B_jR_{kj}$$

$$W_y^{számított}=\frac{\partial W}{\partial y}=\sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1}B_j\Psi_i\ (x)\Psi^{'}{}_l(y)=\sum_{j=1}^{M}B_jZ_{kj}$$

ahol

$$R_{kj}=\Psi_i^{'}(x_k)\Psi_{\ l}(y_k)\,,\quad Z_{kj}=\Psi_i\ (x_k)\Psi^{'}{}_l(y_k)\,,\quad (j=\frac{n(n-1)}{2}+i)$$

A mért adatok vektorát az első deriváltak (mért függővonal elhajlási adatokból származtatott értékeivel) kiegészítve:

$$\vec{d}^{(mért)} = \left\{ W_{xy}^{(1)},...,W_{xy}^{(N_1)},W_{\Delta}^{(1)},...,W_{\Delta}^{(N_2)},W_{x}^{(1)},...,W_{x}^{(N_3)},W_{y}^{(1)},...,W_{y}^{(N_4)} \right\}$$

Hasonló szerkezetben állíthatjuk elő a számított adatok vektorát, amihez szükséges a Jacobi mátrix szerkezetét is kiterjesztenünk az alábbiak szerint:

$$G_{kj} = \begin{cases} S_{kj} & k \le N_1 \\ Q_{kj} & N_1 < k \le N_1 + N_2 \\ R_{kj} & N_1 + N_2 < k \le N_1 + N_2 + N_3 \\ Z_{kj} & N_1 + N_2 + N_3 < k \le N_1 + N_2 + N_3 + N_4 \end{cases} .$$

A számított adatok ezzel:

$$d_k^{számított} = \sum_{j=1}^{M} B_j G_{kj} \text{ ill. } \vec{d}^{(számított)} = \underline{\underline{G}}\vec{B} ,$$

ahol

$$\vec{e} = \vec{d}^{(mért)} - \underline{\underline{G}}\vec{B} ,$$

$$E = (\vec{e},\vec{e}) = \sum_{k=1}^{N} e_k^2$$

és $N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4$.

Az így definiált inverz feladat megoldását ismét a $\frac{\partial E}{\partial B_l} = 0$, $(l = 1,...,M)$ alapján kapjuk:

$$\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}\vec{B} = \underline{\underline{G}}^T \vec{d}^{(mért)}$$

ahonnan

$$\vec{B} = \left(\underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{G}}\right)^{-1} \underline{\underline{G}}^T \vec{d}$$

Ez az algoritmus numerikusan stabil, amit az alábbi tesztekkel igazolunk.

Tesztelés szintetikus adatokkal

A teszt területet az *x,y* koordináták -1, +1 intervallumán definiáltuk és felvettük a

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{P+1}\sum_{i=0}^{n-1} B_j y^i x^{n-i-1} \quad (P = 4,\ M = 15)$$

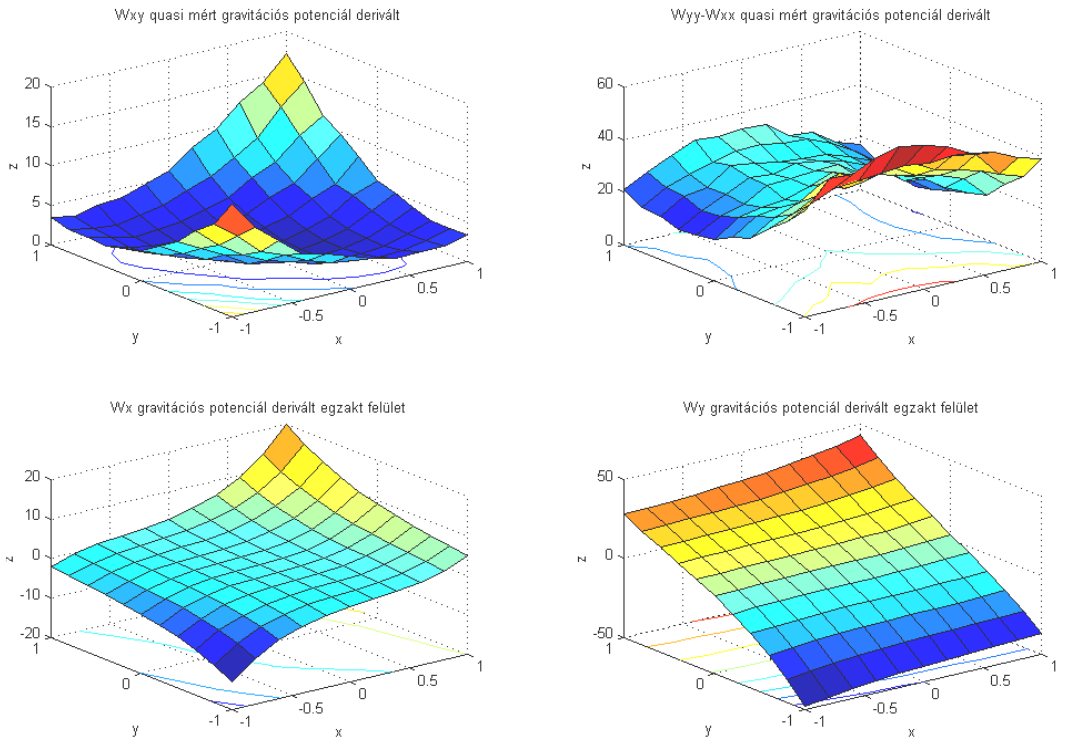
potenciálfelületet a

$$\vec{B} = \{0.1,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 15.0,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5,\ -1.5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1.5,\ 1.5\}$$

sorfejtési együtthatókkal! A szintetikus adatrendszert a következőképpen állítjuk elő:

1.) $N_1 = 121$ „mérési” pontban ($\Delta x = \Delta y = 0.2$) számítjuk W_{Δ} és W_{xy} értékeit és 5% véletlen zajjal (Gauss eloszlás) terheljük.
2.) $N_2 = 9$ „mérési” pontban ($\Delta x = \Delta y = 1.0$) számítjuk W_x és W_y értékeit és 5% véletlen zajjal (Gauss eloszlás) terheljük.

Az így kapott $N = 2*(N_1 + N_2) = 260$ adatot felhasználva együttes inverziót végzünk a Gauss-féle legkisebb négyzetek (LSQ) módszerével a példában szereplő mindössze 15 ismeretlen meghatározására (a feladat tehát jelentősen túlhatározott). A bemenő adatrendszert az *1. ábra* mutatja.



1. ábra. A W_{xy} és W_{Δ} bemenő adatrendszer (5% zajjal terhelve) és az egzakt W_x , W_y felülete

Az inverziós eredmény minősítésére használt mennyiségek *(Dobróka et al. 1991)*:

adattérbeli (relatív) távolság:

$$D_d = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{d_k^{mért} - d_k^{számított}}{d_k^{számított}}\right)^2}$$

paramétertérbeli távolság:

$$D_m = \sqrt{\frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\left(\frac{m_k^{becsült} - m_k^{felvett}}{m_k^{felvett}}\right)^2}$$

paraméter kovariancia mátrix (főátlóban a paraméter becslési hibák):

$$\underline{\underline{COV}}(\vec{m}) = \sigma^2\left(\underline{\underline{G}}^T\underline{\underline{G}}\right)^{-1}$$

paraméter korrelációs mátrix:

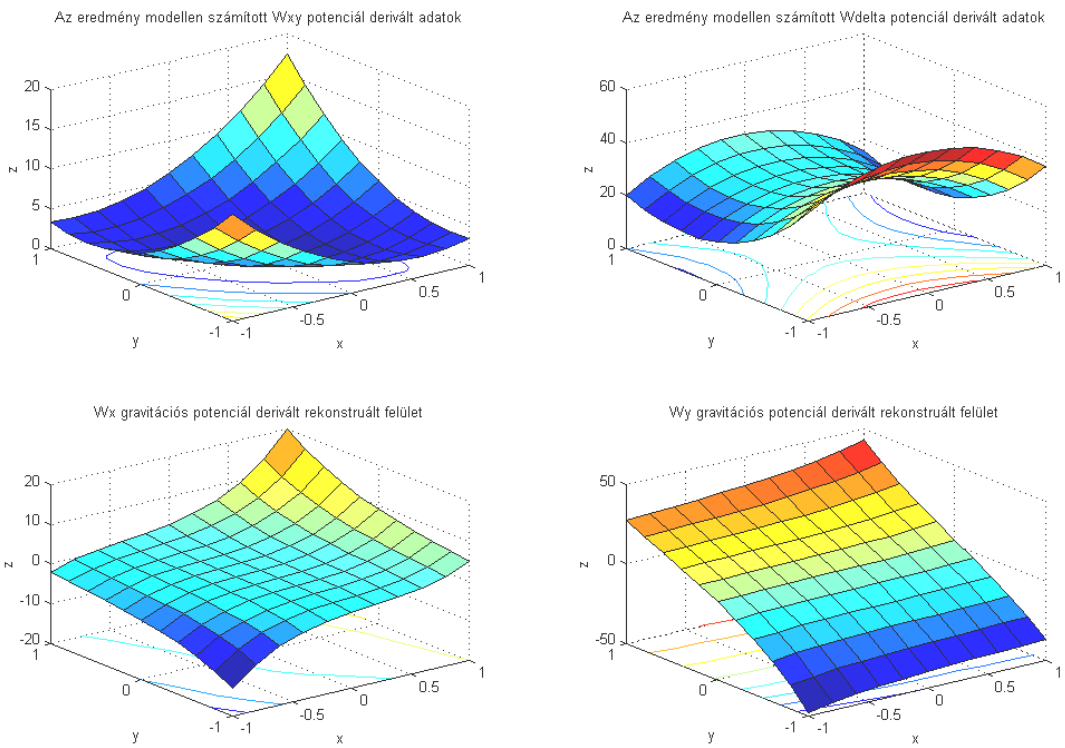
$$corr_{ij} = \frac{\mathrm{cov}_{ij}}{\sqrt{\mathrm{cov}_{ii}\,\mathrm{cov}_{jj}}}$$

A paramétervektor elemeinek induló értékeit (start modell) minden esetben zérusnak vettük. Az inverzió eredményeként kapott (becsült) sorfejtési együtthatókat az *I. táblázatban* mutatjuk be. A táblázat első sorában összehasonlításul bemutatjuk a teszt céljára felvett együtthatókat, a harmadik sor pedig a %-osan kifejezett paraméterbecslési hibát mutatja.

I. táblázat. A paraméter vektor elemei

felvett	0.5	0.5	0.5	0.5	15.0	0.5	0.5	0.5	-1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
becsült	0.497	0.499	0.524	0.497	14.996	0.494	0.502	0.499	-1.492	1.492	1.478	1.502	1.505	1.479	1.442
hiba %	0.440	0.445	1.408	0.185	1.954	0.418	0.241	0.241	0.753	0.753	0.483	0.273	0.306	0.273	0.612

A táblázat tanúsága szerint a (viszonylag) nagyszámú Eötvös inga adat és néhány függővonal elhajlási adat együttes inverziójára kidolgozott eljárás meglehetősen pontos paraméterbecslést eredményezett. Ezt a *2. ábra* is igazolja, különösen az *1. ábrával* való összehasonlítás után.



2. ábra. Az inverzió után az eredmény modellen számított W_{xy} és W_{Δ} adatrendszer valamint a rekonstruált W_x és W_y felület (ebből számítható a függővonal elhajlás bármely *x*,*y* pontban)

Az algoritmus stabilitását jól jellemzi a *II. táblázatban* bemutatott korrelációs mátrix. A főátlón kívüli elemek viszonylag kis korrelációt mutatnak az egyes ismeretlenek között.

II. táblázat. A korrelációs mátrix elemei (korrelációs átlag: 0.180)

1	0.0034	0.062	0.0103	0.0449	-0.1038	-0.0365	-0.092	-0.0073	0.0122	-0.0146	0.0182	0.0379	0.002
0.0034	1	0.0058	0.0125	0.0017	-0.0202	-0.0787	-0.0451	-0.0097	0.0007	0.052	0.0201	-0.0264	0.0037
0.062	0.0058	1	-0.0232	0.0942	0.3517	-0.0255	0.0135	-0.0501	-0.7302	0.0412	-0.0946	-0.024	0.0464
0.0103	0.0125	-0.0232	1	-0.0159	0.0359	0.1904	0.2023	0.0196	-0.0114	-0.3487	-0.1151	-0.352	-0.0092
0.0449	0.0017	0.0942	-0.0159	1	0.2313	-0.0221	0.0112	0.0017	0.3586	0.013	-0.0704	-0.0055	-0.5278
-0.1038	-0.0202	0.3517	0.0359	0.2313	1	0.1179	0.1659	0.0271	-0.1136	-0.079	0.038	0.1209	-0.0116
-0.0365	-0.0787	-0.0255	0.1904	-0.0221	0.1179	1	0.5696	0.1105	0.0206	0.2455	0.2451	0.0799	0.0225
-0.092	-0.0451	0.0135	0.2023	0.0112	0.1659	0.5696	1	0.0536	0.0318	0.0719	0.2467	0.2393	0.0199
-0.0073	-0.0097	-0.0501	0.0196	0.0017	0.0271	0.1105	0.0536	1	0.0855	0.0578	0.0258	-0.0232	-0.3429
0.0122	0.0007	-0.7302	-0.0114	0.3586	-0.1136	0.0206	0.0318	0.0855	1	0.046	0.1054	0.0673	-0.0769
-0.0146	0.052	0.0412	-0.3487	0.013	-0.079	0.2455	0.0719	0.0578	0.046	1	0.5395	0.0774	0.0528
0.0182	0.0201	-0.0946	-0.1151	-0.0704	0.038	0.2451	0.2467	0.0258	0.1054	0.5395	1	0.5419	0.0834
0.0379	-0.0264	-0.024	-0.352	-0.0055	0.1209	0.0799	0.2393	-0.0232	0.0673	0.0774	0.5419	1	0.0373
0.002	0.0037	0.0464	-0.0092	-0.5278	-0.0116	0.0225	0.0199	-0.3429	-0.0769	0.0528	0.0834	0.0373	1

Az I. táblázat adatai alapján az átlagos becslési hiba 0.58%, a II. táblázat főátlón kívüli elemeinek átlaga (a korrelációs norma) 0.180 – tehát az inverziós algoritmus igen stabil.

Összefoglalás

A bemutatott módszer a potenciálfüggvény nagyszámú Eötvös-inga adat és néhány (pl. csillagászati) függővonal elhajlás adat együttes inverziójának felhasználásával történő meghatározására nyújt lehetőséget. Az így rekonstruált potenciálfüggvényből számos gyakorlati fontosságú „teret", (pl. függővonal elhajlást) a vizsgálati terület bármely pontján leszármaztathatunk. Az eljárás előnye, hogy mindezt egy jelentősen túlhatározott inverz probléma megoldásával tehetjük.

Köszönetnyilvánítás

A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciójával kapcsolatos kutatások a T-037929 sz. OTKA anyagi támogatásával folynak.

Hivatkozások

Dobróka M, Gyulai Á, Ormos T, Csókás J, Dresen L (1991) Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an under-ground coal mine. *Geophysical Prospecting* 39, 643-665.

Völgyesi L (1993) Interpolation of deflection of the vertical based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ. Eng*., 37; 2, 137-166.

Völgyesi L (1995) Test Interpolation of deflection of the vertical in Hungary based on gravity gradients. *Periodica Polytechnica Civ. Eng.*, 39; 1, 37-75.

GRAVITÁCIÓS INVERZIÓ ALKALMAZÁSA A GEOID VIZSGÁLATÁBAN

*Papp Gábor és Benedek Judit**

Application of gravity inversion for the investigation of the geoid - *Different types of observables and processing methods are used to determine the geoid surface. These methods, however, do not result in consistent solutions due to either the different numerical methods or the theoretical approaches and definitions applied. In this paper a synthetic method based on inverse gravity and forward geoid modelling is given to investigate the inconsistencies between the Listing and the Stokes-Helmert geoid definitions numerically. The modelling is based on the closed analytical formulae providing the gravitational potential and its derivatives for the right rectangular parallelepiped with constant volume density. The case study from the Mecsek Mountains, South-West Hungary demonstrates that along a 5 km long profile containing 149 gravity values and precise height data a non-constant, 2 cm peak to peak systematic deviation between the Listing and the Stokes-Helmert geoid models is indicated. Theoretically it is the so called indirect effect of the condensed layer on the geoid correlating with the topographic height. The analysis of the discrepancies, however, gives ambiguous results making the application of simple models of the height dependency of the indirect effect questionable if cm accuracy is required.*

Keywords: Listing's geoid definition, Stokes-Helmert geoid model, gravity inversion, synthetic geoid modeling, indirect effect

A geoid felületének vagy valamely felületdarabjának a különböző elméleti definíciók szerinti meghatározására sokféle mérési és adatfeldolgozási módszer használatos, melyek általában kisebb-nagyobb mértékben eltérő eredményekre vezetnek. Jelen tanulmány célja az, hogy gravitációs inverzió alkalmazásával megvizsgálja a Listing- ill. a Stokes-Helmert-féle geoid definíciókat és egy konkrét példán keresztül számszerűsítse a közöttük mutatkozó különbségeket. A módszer lehetővé teszi egy derékszögű hasábokon alapuló sűrűség eloszlás modell optimális illesztését a mérési adatokhoz az L_2 norma szerint. Habár az algoritmus háromdimenziós, alkalmazása egy kb. 5 km hosszú, részletesen felmért, 149 db. nehézségi mérési pontot tartalmazó szelvény mentén történt. Az inverzióval előállított modellekből számított szintetikus eredmények alapján megállapítható, hogy adott esetben már igen rövid, 2 km-es szakaszon is jelentős, 2 cm nagyságú szisztematikus eltérés mutatkozhat a geoid megoldások között. Az elmélet szerint a különbség az ún. indirekt hatásból adódik, melynek határozott korrelációt kell mutatnia a topográfiai magassággal. Az eredmények azonban arra utalnak, hogy az indirekt hatás egyszerű statisztikai modellek alapján történő meghatározása nem teszi lehetővé a cm pontosságú Stokes-Helmert geoidundulációk kiszámítását

Kulcsszavak: Listing-féle geoid, Stokes-Helmert geoid, gravitációs inverzió, szintetikus geoid modellezés, indirekt hatás

Bevezetés

A gravimetriai geoid meghatározások alapjául szinte kizárólag a Stokes-Helmert-féle geoid definíció szolgál. E miatt a számszerűsített geoid megoldások egy olyan absztrakt helyzetet tükröznek, melyben nem léteznek tömegek a geoid felett, azaz nincsen topográfia. A tényleges és a munkahipotézis szerinti sűrűség eloszlások tömegvonzási potenciálja közötti eltérés az ún. indirekt hatás meghatározásával elvileg kiküszöbölhető.

A gravimetriai geoidok független értékelésére széles körben használják a szintezéssel kombinált GPS (ellipszoid feletti) magasság meghatározást. Azonban mind a szintezés, mind a GPS mérés olyan erőtérben történik, mely a valós helyzet szerinti. Így a mérések magukban hordozzák a nehézségi tér valódi, feltételezésektől és absztrakcióktól mentes geometriáját.

*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: papp@ggki.hu

Ebből adódóan az összehasonlítások során mutatkozó ellentmondások tartalmazzák az elvi különbségeket is, amelyek torzításmentes tanulmányozását a tisztán numerikus módszerek nem teszik lehetővé a kényszerű egyszerűsítések (pl. a Stokes-féle integrál csonkítása) miatt. Azonban, ha sikerül olyan sűrűség eloszlás modelleket létrehozni, melyek egyrészt a valós (mérhető) tömegvonzási teret elhanyagolható hibával képesek előállítani, másrészt a geometriájuk által leírt tömegeloszlás megfelel a geoid definícióknak, akkor az eltérések a Newton-féle tömegvonzási integrál analitikus megoldásán alapuló szintetikus erőtér szimulációkkal már számszerűsíthetők.

A Listing-féle (természetes) geoid definíció

Mivel a W nehézségi potenciál és annak **grad**W gradiens vektora a teljes R^3-ban, azaz mind forrásmentes ($\rho = 0$ kg/m^3) mind forrással bíró ($\rho \neq 0$ kg/m^3) pontban létezik és folytonos, bizonyosan találhatók olyan pontok a topográfiai tömegek belsejében is, melyekben a potenciál értéke megegyezik valamely középtengerszint magasságában adott W_0 potenciál értékével. Ezen pontok ún. szintfelületet alkotnak, melyet a többi, végtelen számú szintfelülettől megkülönböztetendő, geoidnak hívunk. Ez a felület bár folytonos, de a Poisson egyenlet értelmében nem harmonikus, mivel görbülete sűrűség változást tartalmazó pontban (különböző sűrűségű kőzetblokkok határán) ugrásszerűen megváltozik *(Heiskane, Moritz 1967)*.

A megfelelően diszkretizált inhomogén sűrűségeloszlást a rendellenes nehézségi tér forrásának tekintve a $T_{P'}$ potenciálzavar ill. funkcionáljai a Newton-féle tömegvonzási integrál megoldásával bárhol, pl. a H=0 m magasságban, azaz a topográfiai tömegeken belül is analitikus úton meghatározhatók *(Papp, Kalmár 1996; Papp 1996)*. A potenciálzavar a γ normál nehézségi gyorsulás segítségével az egyszerűsített Bruns képleten *(Heiskanen, Moritz 1967)* keresztül átszámítható geoidundulá-cióvá:

$$N=T_{P'}/\gamma_{P''} . \qquad (1)$$

A Stokes-Helmert-féle (absztrakt) geoid definíció

Mivel hosszú ideig a topográfiai tömegek sűrűségeloszlását ismeretlennek és a szükséges pontosság szempontjából meghatározhatatlannak tekintették, ezért a geoid, mint fizikai peremfelület meghatározásában csak a Laplace egyenlet megoldásán (pl. a Stokes-féle integrál) alapuló módszereket (*Heiskanen, Moritz 1967*) alkalmaztak. Ennek alapfeltétele (harmonicitás) olyan peremértékek használatát kívánja meg, amelyek topográfia nélküli földmodell erőterének felelnek meg. A topográfia ill. tömegvonzási hatásának egyszerű „eltávolítása" azonban már az előzőek szerint ismeretlennek feltételezett sűrűségeloszlás valamint az eltávolítással, azaz a Föld tömegének csökkentésével járó jelentős helyi és globális potenciál változás miatt sem lehetséges. Ezért Helmert kidolgozta elméleti kondenzációs modelljeit, melyek fizikailag magyarázzák a peremérték feladatok megoldásai által megkövetelt tömegátrendeződéseket *(Heck 2003)*. Azonban ezek indirekt hatása a W valódi potenciál értékére csak a topográfiai tömegek sűrűségeloszlásának pontos ismeretében számítható ki.

A Listing-féle geoid definíció modellezésének alapelvei

A geoid meghatározásának szempontjából legfontosabb szerkezeti elem, a felszíni topográfia modellezése ma már egyáltalán nem kivitelezhetetlen elképzelés, hiszen rendelkezésre állnak nagyfelbontású (10 m – 50 m) digitális domborzat modellek (DDM), valamint megfelelően részletes geológiai térképek. Ezen adatok alapján a *tengerszint feletti* tömegek által keltett tömegvonzási potenciál, amelyet potenciál zavarként értelmezünk és funkcionáljai analitikus formulákkal kiszámíthatók *(Nagy et al. 2000)* és a mért erőtér paraméterekből (pl. nehézségi gyorsulás) levonhatók. Az eljárás gyakorlatilag az ún. teljes Bouguer-féle javításnak felel meg, melynek segítségével a nehézségi gyorsulás értékekből teljes Bouguer-féle rendellenességet képezünk a geoid felületén. Ez a peremérték jól tükrözi a tengerszint alatti, azaz a földkéregbeli tömeg rendellenességek vonzási hatását.

A $T_{P'}$ analitikus meghatározásához azonban szükség van a *tengerszint alatti* tömegeloszlás modellezésére is, hiszen a potenciálzavar ill. a geoid, e két hatás összegeként áll elő *(Hipkin 1988)*. A szükséges modell, mely az alkalmazott norma (pl. L_2) értelmében optimális illeszkedést biztosít a mérési adatokhoz a teljes Bouguer-féle rendellenességek inverziójával hozható létre.

A teljes modell (tengerszint feletti + tengerszint alatti) figyelembe vételével, tehát a topográfia természetbeni helyzetének és állapotának megfelelően a tengerszinten számított $T_{P'}$-ből (1) alapján meghatározható a P ponthoz tartozó N_L geoidunduláció értéke.

A Stokes-Helmert-féle geoid definíció modellezésének alapelvei

A definíciónak megfelelően a topográfiai tömegeket a geoid felületén egy végtelenül vékony rétegbe kell tömöríteni ahhoz, hogy a Föld tömege ne változzék és a tér, ahol a méréseinket értelmezzük forrásmentes ($\rho = 0$ kg/m^3) legyen. Ennek a vékonyrétegnek a hatása helyettesíti a valódi topográfia tömegvonzási hatását, azzal a közelítő feltételezéssel, hogy a „kondenzált" topográfia és a kéregbeli tömeg rendellenességek együttesen hozzák létre a szabadlevegő nehézségi rendellenességeket, melyek peremértékül szolgálnak a geodéziai peremérték feladat Stokes-féle megoldásához *(Hipkin 1988)*.

A definíció analitikus formulákon alapuló számszerű vizsgálatához tehát szükséges egy vékonyréteg modell, mely azonban nem feltétlenül végtelenül vékony. Ugyanis a nehézségi rendellenességeknek a Föld felszínére vonatkozó energia integrálja véges értékű, melyet csak véges értéktartományú sűrűség értékekkel lehet előállítani. Szükségképpen a végtelenül vékony réteg *felületi sűrűségeloszlása* határértéket képez az ugyanazon energiával rendelkező véges vastagságú vékonyrétegek *térfogatsűrűség-eloszlás* sorozata számára, miközben a vastagság folyamatosan csökken.

Gyakorlati szempontból elégséges, ha csak a kondenzált topográfia tömegeloszlását határozzuk meg és vizsgáljuk hozzájárulását a potenciál zavar teljes értékéhez. Ehhez azonban el kell távolítani a kéregbeli tömeg rendellenességek hatását a szabadlevegő nehézségi rendellenességekből:

$$\Delta g_{topo} = \Delta g_{FA} - \Delta g_{TB}\,, \qquad (2)$$

ahol Δg_{topo} a felszíni topográfia tömegei által keltett nehézségi rendellenesség, Δg_{FA} a szabadlevegő nehézségi rendellenesség és Δg_{TB} a teljes Bouguer-féle rendellenesség. Az új peremértékek (Δg_{topo}) inverziójával előállítható a vékonyréteg modell sűrűségeloszlása, melyből analitikusan kiszámítható a „kondenzált" topográfia keltette potenciálzavar ill. N_{SH} geoidunduláció.

A geoid definíciók szintetikus-numerikus vizsgálata az ófalui teszterületen

A vázolt sémák alkalmazására az ófalui geodinamikai teszterületen nyílott lehetőség, ahol viszonylag nagy számú és pontosságú nehézségi gyorsulás adat, magassági érték és részletes DDM áll rendelkezésre (*1 ábra*).

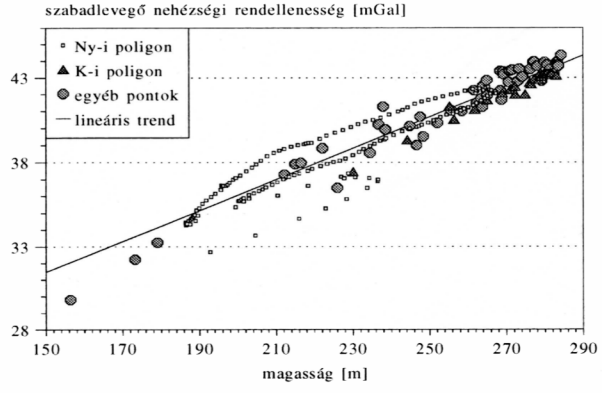
Gravimetriai adatok

A nehézségi gyorsulás értékek meghatározása a területen található és az ELGI által létesített három bázispontra támaszkodva, relatív mérésekkel történt az MTA GGKI LCR G949 sz. műszerével. Az alkalmazott mérési módszer *(Papp, Benedek 2004)* szerint két bázismérés között kb. 4-5 részletpont, összesen 226 db került bemérésre, négy mérési kampány során. A bázismérések között eltelt idő átlagosan 1.5 óra volt. Ez az eljárás a bázismérések záróhibáinak összehasonlítása, a bázisértékek relatív stabilitásának vizsgálata *(Benedek, Papp 2005)* ill. az ellenőrző mérések alapján ±15 μGal pontosságot biztosít egy-egy mérési időszakon belül (1 Gal = 10^{-2} m/s^2).

Vízszintes és magassági koordináták

A fa cövekekkel megjelölt relatív nehézségi mérési pontok koordinátái három különböző eljárásból származnak. Mivel az Ny jelű szelvényben a pontok zöme megegyezett a szabatos szintezés pontjaival, ezért ezeknek a pontoknak a magassága a szintezési adatokból következett. Pontosságuk né-

ahol G az univerzális tömegvonzási állandó, $\overline{\Delta g}_{TB}$ a teljes Bouguer rendellenesség területi átlaga, H a topográfiai magasság a vizsgált pontban, δg_{TB} a zérus várható értékű teljes Bouguer rendellenesség (a kiegyenlítés szempontjából a javítás), ρ_{topo} a meghatározandó felszíni topográfiai átlagsűrűség és TC a domborzati javítás értéke, mely rögzített felszíni geometria mellett csak ρ_{topo}-tól függ.



2. ábra. A szabadlevegő nehézségi rendellenességek magasság függése az ófalui teszterületen

Ezért (3) a

$$TC(\rho_{topo}) = (TC_{\rho=1})\ \rho_{topo} \tag{4}$$

azonosság mellett felírható az alábbi formában is:

$$\Delta g_{FA} = \overline{\Delta g}_{TB} + (2\pi GH + TC_{\rho=1})\ \rho_{topo} + \delta g_{TB}\ , \tag{5}$$

ahol $TC_{\rho=1}$ az egységnyi térfogat sűrűségre meghatározott domborzati javítás értéke a vizsgált pontban. A kiegyenlített topográfiai átlagsűrűségek az I. táblázatban láthatók. A további számításokban a javítási tag (4) figyelembe vételével kalkulált eredmény (2115 kg/m^3) került alkalmazásra.

Az inverzió végrehajtásához szükséges peremértékek meghatározása

A Listing-féle modell szerinti kéregbeli inhomogenitások meghatározásához a teljes Bouguer-féle rendellenességek (5) felhasználásával számíthatók:

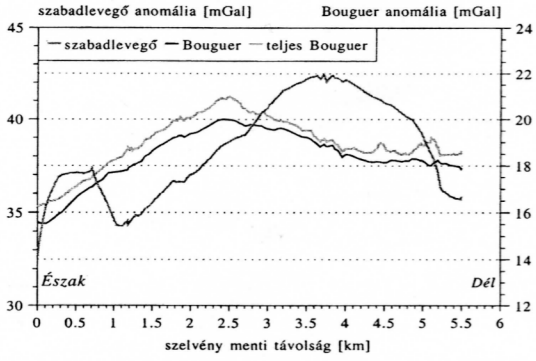
$$\Delta g_{TB} = \Delta g_{FA} - (2\pi GH + TC_{\rho=1})\ \rho_{topo} = \overline{\Delta g}_{TB} + \delta g_{TB}\ . \tag{6}$$

Az Ny jelű szelvény mentén a rendellenességeket és a magasságokat a *3.* ill. *4. ábrák* mutatják.

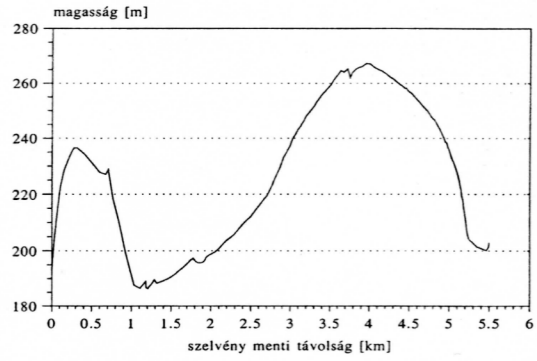
I. táblázat. A topográfiai sűrűség meghatározásának módszerei és a kiegyenlítés eredményei

módszer	átlag Bouguer rendellenesség [mGal]	a súlyegység kiegyenlítés utáni középhibája	a ρ_{topo} kiegyenlített értéke [kg/m^3]	a ρ_{topo} kiegyenlítés utáni megbízhatósága [kg/m^3]
Nettleton	17.70	±0.93	2192	±48
finomított Nettleton	19.06	±0.93	2115	±46

A Stokes-Helmert-féle geoid definíció vizsgálatához szükséges peremértékek a (2) és (6) egyenletek felhasználásával az összes pontra (226 db) vonatkozóan meghatározásra kerültek.



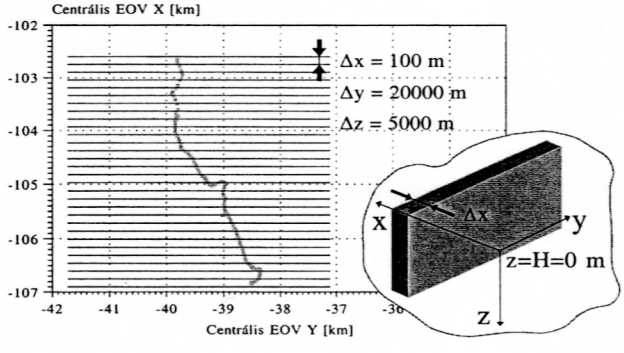
3. ábra. Nehézségi rendellenességek az NY jelű szelvény mentén



4. ábra. A topográfiai magasságok az NY jelű szelvény mentén

Az előzetes és a kiegyenlítetett inverziós modellek

Mivel a geoid definíciók numerikus összehasonlítása az Ny jelű, nagyjából É-D-i csapású szelvény mentén történt, a kéregbeli, tehát *tengerszint alatti* sűrűségeloszlás meghatározásához egy olyan előzetes, derékszögű hasábokon alapuló modell szolgált, mely geometriájánál fogva (*II. táblázat*) csak az É-D-i irányú (X_{EOV}) sűrűség változást engedte meg (*5. ábra*). Ez a korlátozás azonban nem befolyásolta az összehasonlítás korrektségét, hiszen az inverzió eredménye mindkét geoid definíció modellezésében azonos módon és mértékben alkalmazásra került.



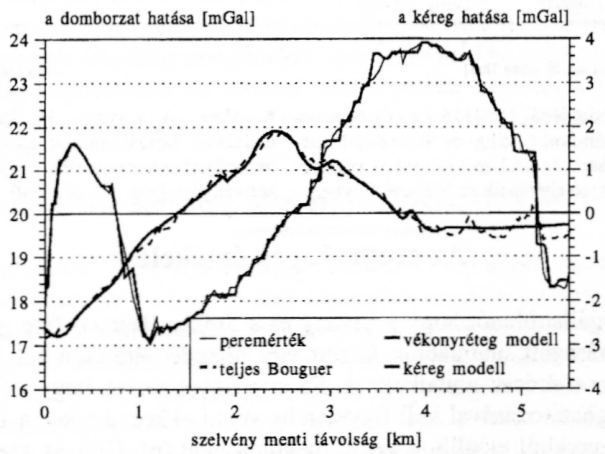
5. ábra. Az alkalmazott térfogat elem modellek szerkezetének vázlata

A felszíni topográfiát a Helmert-féle kondenzációs modellben helyettesítő vékonyréteg, bár az alapgeometriát illetően megegyezik az előző modellel (II. táblázat), némi módosítással megengedi a K-Ny-i irányú sűrűség változást is a vékonyrétegen belül. A Listing-féle geoid definíció modellezésében ezt a feltételt a topográfia modellje automatikusan teljesíti. A vékonyréteg modell viszont az inverzió során kerül meghatározásra, tehát az alapblokkok K-Ny-i irányú felosztásával (II. táblázat) biztosítani kell a területi illeszthetőségét. A felosztás a nehézségi adatok területi eloszlásának figyelembe vételével történt.

A modellekből a kiegyenlítés után számított hatások (nehézségi rendellenességek) és a megfelelő peremértékek (mérési eredmények) az Ny jelű szelvény mentén az *6. ábrán* láthatók. Az adatok illeszkedése a szelvény mentén az 1 m vastagságú vékonyréteg esetében ±0.24 mGal, a kéreg modell esetében ±0.16 mGal szórással jellemezhető.

II. táblázat. Az inverziós modellek térfogat elemeinek geometriai adatai és az inverzió paraméterei

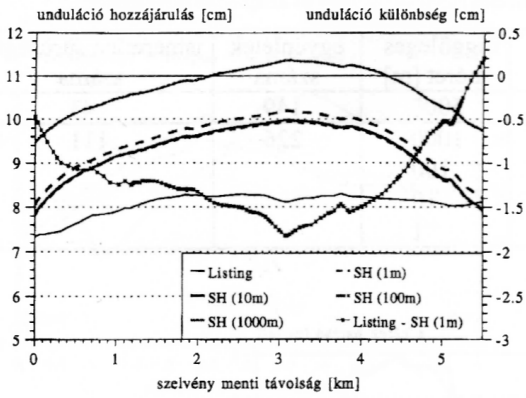
modell	KNY-i méret [m]	ÉD-i méret [m]	függőleges méret [m]	egyenletek száma	ismeretlen sűrűségek száma
kéreg (1D)	20000	100	5000	149	43
Helmert-féle kondenzációs/vékonyréteg (2D)	*változó* min. 258 max. 20000	100	1000 100 10 1	226	111



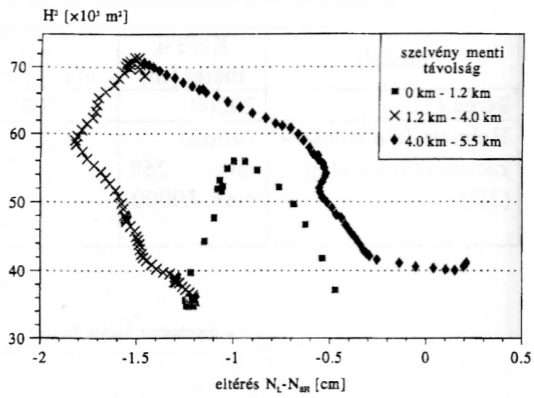
6. ábra. A sűrűség modellekből számított adatok illeszkedése az inverziókban használt peremértékekhez az NY szelvényben. A domborzatot helyettesítő vékonyréteg vastagsága 1 m, a szükséges peremérték pedig (2) alapján került meghatározásra

A tényleges domborzat térfogatelem modelljéből és az előállított modellekből (vékonyréteg és kéreg) a megfelelő, zárt képletek felhasználásával *(Nagy et al. 2000)* meghatározható az egyes modellek által keltett potenciálzavar ill. geoidunduláció hozzájárulás az Ny szelvényben (*7. ábra*). A különböző vastagságú vékonyrétegek hatásainak eltérései elsősorban állandó értékekkel jellemezhetők és az egyes megoldások a vastagság csökkentésével párhuzamosan konvergenciát mutatnak. A vizsgált sorozatban (1000 m, 100 m, 10 m, 1 m) az eltérések véletlen jellegű összetevői a ±1.4 mm - ±0.3 mm szórás tartományban változnak.

A Listing-féle és a Stokes-Helmert-féle geoid definíciók összehasonlítása alapján, eltekintve a két adatrendszer közötti átlagos eltéréstől, az ellentmondások szórása az 1 m vastagságú modell esetén ±5.0 mm-nek adódott. Habár ez az érték kicsi, mégis fel kell hívni a figyelmet arra, hogy a szelvény mentén az eltérések nem véletlenszerűek, hanem annak déli végén egy kb. 2 km-es szakaszon –1.8 cm és +0.2 cm között, szisztematikusan változnak (*8. ábra*). Mivel az unduláció különbségek (N_L- N_{SH}) és a vékonyréteg modell illeszkedését jellemző eltérések ($\Delta g_{mért}$ - Δg_{modell}) jelentéktelen korrelációt mutatnak (r=-0.09), kizárható, hogy ez az eredmény a vékonyréteg modell hiányosságaiból fakad. Következőleg az ún. indirekt hatás elhanyagolása már mérsékelt változékonyságú domborzat esetén is cm fölötti ellentmondásokat okoz a vizsgált definícióknak megfelelően számított geoidundulációkban. Azonban az indirekt hatás nagysága és a topográfiai magasság között csak egy statisztikailag gyenge (r=-0.31) lineáris regressziós összefüggés állapítható meg (*8. ábra*) amelynek alkalmazása nem csökkentheti a kellő hatékonysággal az ellentmondásokat. Az indirekt hatás nagyságát a helyi kőzetsűrűség és felszíni változékonyság is befolyásolja, ezért feltételezhető, hogy ±1 cm körüli pontosság eléréséhez már felszíni geológiai információk felhasználása *(Völgyesi et al. 2005)* és a Newton-féle integrálnak egy nagy térbeli felbontású (10 m × 10 m) és megbízhatóságú ($\sigma_H \leq \pm 0.5$ m) DDM alapján történő közelítésmentes kiszámítása szükséges. Ennek a megállapításnak nem mond ellent a vizsgált korreláció jól követhető helyfüggése (*8. ábra*).



7. ábra. A topográfia modelljéből (ρ=2115 kg/m^3) és a vékonyréteg modellekből számított Listing- és Stokes-Helmert-féle undulació hozzájárulások és az 1 m vastagságú vékonyrétegre - SH(1m) – vonatkozó eltéréseik az NY szelvényben



8. ábra. A Listing- és Stokes-Helmert-féle (SH(1m)) undulació hozzájárulások különbségeinek (indirekt hatás) összefüggése a topográfiai magasság négyzetével az NY jelű szelvényben (v.ö. a *4. ábrával*)

Az eredmények értékelése

A vizsgálatokból megállapítható, hogy a Listing és a Stokes-Helmert-féle geoid definíciók alapján szintetikusan meghatározott undulációk között egy állandó eltérésen túl is jelentős, centimétert meghaladó rendszeres eltérések mutatkoznak. Ez arra figyelmeztet, hogy az elméleti különbségeket az indirekt hatás meghatározásával kell figyelembe venni akkor, amikor a különböző feltételeknek megfelelő adatrendszerekből előállított geoid megoldásokat (pl. GPS és gravimetriai geoid) összehasonlítjuk és nem várható, hogy ezek a megoldások pusztán az adatok számának (nehézségi mérések ill. GPS-szintezési pontok) növelése által fognak közelíteni egymáshoz. Valószínű, hogy az indirekt hatás cm alatti pontosságú kiszámításához helyi kőzetsűrűség adatokra is szükség van, mert e nélkül a geoidundulációk relatív megbízhatósága sem fogja a célul kitűzött ±1 cm értéket elérni.

A tesztterületen modellezéssel kimutatott ellentmondások nagy pontosságú GPS és szabatos szintezési mérések segítségével esetleg már igazolhatók, hiszen a bemutatott szelvény mentén néhány, a vizsgálatok segítségével lokalizált jellemző pontban meghatározható a geoidunduláció, amely így összevethető a szintetikus számítások eredményeivel.

Köszönetnyilvánítás

A bemutatott kutatásokat a T043413 és T028744 számú OTKA programok támogatták. Külön köszönet illeti Tóth Gyula bírálót hasznos tanácsaiért és segítőkész kritikájáért.

Hivatkozások

Benedek J, Papp G (2004): Gravimetriai mérések kiértékelése műszervizsgálat céljából. *Geomatikai Közlemények* VIII. 199-206.

Heck B (2003): On Helmert's methods of condensation. *Journal of Geodesy, 77*, 155-170.

Heiskanen WA, Moritz H (1967): Physical Geodesy. *W.H. Freeman*, San Francisco.

Hipkin RG (1988): Bouguer anomalies and the geoid: a reassessment of Stokes' method. *Geophys. Journal, 92,* 53-66.

Nagy D, Papp G, Benedek J (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy, 74,* 552-560.

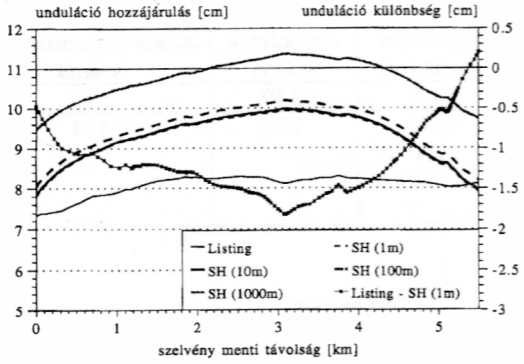
Papp G, Kalmár J (1996): Toward the physical interpretation of the geoid. *IGeS Bulletin, 5,* 63-85.

Papp G (1996): A Pannon-medence nehézségi erőterének modellezése. *Kandidátusi értekezés,* MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, Sopron. 107.

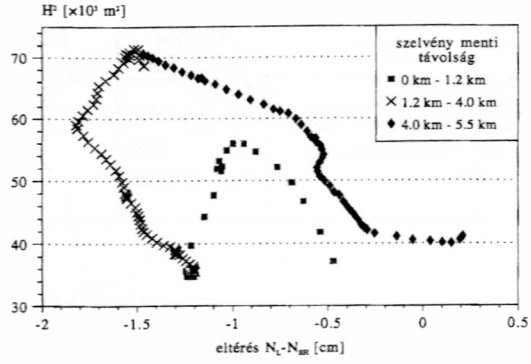
Papp G, Benedek J (2004): Gravity investigations on Dunaföldvár test area. *In: Mentes Gy. and Eperné I. (eds.): Landslide monitoring of loess structures in Dunaföldvár, Hungary.* 37-46.

Smith WHF, Wessel P (1990): Gridding with continous curvature splines in tension. *Geophysics, 55; 3,* 293-305.

Völgyesi L, Kenyeres A, Papp G, Tóth Gy (2005): A geoidmeghatározás jelenlegi helyzete Magyarországon. *Geod. Kart.* 57; 1, 4-11.



7. **ábra.** A topográfia modelljéből (ρ=2115 kg/m^3) és a vékonyréteg modellekből számított Listing- és Stokes-Helmert-féle unduláció hozzájárulások és az 1 m vastagságú vékonyrétegre - SH(1m) – vonatkozó eltéréseik az NY szelvényben



8. **ábra.** A Listing- és Stokes-Helmert-féle (SH(1m)) unduláció hozzájárulások különbségeinek (indirekt hatás) összefüggése a topográfiai magasság négyzetével az NY jelű szelvényben (v.ö. a *4. ábrával*)

Az eredmények értékelése

A vizsgálatokból megállapítható, hogy a Listing és a Stokes-Helmert-féle geoid definíciók alapján szintetikusan meghatározott undulációk között egy állandó eltérésen túl is jelentős, centimétert meghaladó rendszeres eltérések mutatkoznak. Ez arra figyelmeztet, hogy az elméleti különbségeket az indirekt hatás meghatározásával kell figyelembe venni akkor, amikor a különböző feltételeknek megfelelő adatrendszerekből előállított geoid megoldásokat (pl. GPS és gravimetriai geoid) összehasonlítjuk és nem várható, hogy ezek a megoldások pusztán az adatok számának (nehézségi mérések ill. GPS-szintezési pontok) növelése által fognak közelíteni egymáshoz. Valószínű, hogy az indirekt hatás cm alatti pontosságú kiszámításához helyi kőzetsűrűség adatokra is szükség van, mert e nélkül a geoidundulációk relatív megbízhatósága sem fogja a célul kitűzött ±1 cm értéket elérni.

A teszterületen modellezéssel kimutatott ellentmondások nagy pontosságú GPS és szabatos szintezési mérések segítségével esetleg már igazolhatók, hiszen a bemutatott szelvény mentén néhány, a vizsgálatok segítségével lokalizált jellemző pontban meghatározható a geoidunduláció, amely így összevethető a szintetikus számítások eredményeivel.

Köszönetnyilvánítás

A bemutatott kutatásokat a T043413 és T028744 számú OTKA programok támogatták. Külön köszönet illeti Tóth Gyula bírálót hasznos tanácsaiért és segítőkész kritikájáért.

Hivatkozások

Benedek J, Papp G (2004): Gravimetriai mérések kiértékelése műszervizsgálat céljából. *Geomatikai Közlemények* VIII. 199-206.

Heck B (2003): On Helmert's methods of condensation. *Journal of Geodesy, 77*, 155-170.

Heiskanen WA, Moritz H (1967): Physical Geodesy. *W.H. Freeman*, San Francisco.

Hipkin RG (1988): Bouguer anomalies and the geoid: a reassessment of Stokes' method. *Geophys. Journal, 92*, 53-66.

Nagy D, Papp G, Benedek J (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy, 74*, 552-560.

Papp G, Kalmár J (1996): Toward the physical interpretation of the geoid. *IGeS Bulletin, 5*, 63-85.

Papp G (1996): A Pannon-medence nehézségi erőterének modellezése. *Kandidátusi értekezés*, MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet, Sopron. 107.

Papp G, Benedek J (2004): Gravity investigations on Dunaföldvár test area. *In: Mentes Gy. and Eperné I. (eds.): Landslide monitoring of loess structures in Dunaföldvár, Hungary.* 37-46.

Smith WHF, Wessel P (1990): Gridding with continous curvature splines in tension. *Geophysics, 55; 3*, 293-305.

Völgyesi L, Kenyeres A, Papp G, Tóth Gy (2005): A geoidmeghatározás jelenlegi helyzete Magyarországon. *Geod. Kart.* 57; 1, 4-11.

GEODÉZIAI REFERENCIAADATOK SZOLGÁLTATÁSA LÉGI LÉZERSZKENNER FELVÉTELEK FELDOLGOZÁSÁHOZ

Bácsatyai László, Kovács Gyula* és Bányai László***

Supplying of geodetic reference data for airborne laser scanning *- First time in Hungary airborne laser-scanning was carried out at the Biotope Reconstruction area of Mekszikópuszta of the Fertő-Hanság National Park. In this paper the methods and the practical experiences are summarised, that were used during the capture of geodetic reference data. These were carried out using GPS technique, geometric levelling and geodetic total station. The reference data are the horizontal and vertical matching surfaces and the vertical control points, together with the GPS reference data measured during the scanning flight. These experiences can be useful during the planning and implementations in the future.*

Keywords: airborne leaser-scanning, matching surfaces, GPS, levelling, total station

Magyarországon elsőként a Fertő-Hanság Nemzeti Parkban található „Mekszikópusztai élőhelyrekonstrukció" területén végeztek légi lézerszkenner felméréseket. Ebben a dolgozatban a geodéziai referenciaadatok szolgáltatása során felhasznált módszereket és az alkalmazás tapasztalatait foglaltuk össze. Az adatszolgáltatás a GPS technika, a szintezés és a geodéziai mérőállomás együttes alkalmazásával történt, amely vízszintes és magassági illesztő helyek mérését, magassági ellenőrző pontok meghatározását, továbbá a repülés során a GPS referencia mérések biztosítását foglalta magába. A bemutatott tapasztalatok a későbbi mérések tervezésénél és végrehajtásánál nyújthatnak segítséget.

Kulcsszavak: légi lézerszkenner, illesztő felületek, GPS, szintezés, geodéziai mérőállomás

Bevezetés

A Fertő-Hanság Nemzeti Parkban található „Mekszikópusztai élőhelyrekonstrukció" digitális domborzatmodellje előállításához a külföldi együttműködő partnerrel egyeztetve (Bécsi Műszaki Egyetem, Fotogrammetriai és Távérzékelési Intézet, témafelelős: Prof. Karl Kraus) Phare pályázatot nyújtott be és nyert el a Nyugat-Magyarországi Egyetem Földmérési és Távérzékelési Tanszéke (témafelelős: Dr. Márkus István). Az Interreg IIIA Program támogatását az osztrák partnerünk ebben a pályázati ciklusban nem nyerte el, ezért a projekt közös feldolgozásának az előnyei nem érvényesülhettek. Amíg az osztrák partnerünk már korábban is dolgozott lézer-szkenner adatokkal, ezzel az új technikával kapcsolatban hazai tapasztalatok még egyáltalán nem álltak a rendelkezésünkre. Ennek a hátránya különösen a geodéziai referenciaadatok előállításában jelentkezett, mivel az osztrák partnerünk korábban ezeknek az adatoknak a szolgáltatását is külső geodéziai vállalkozókra bízta, és a feladat járulékos költségeit is betervezte.

A feladat megoldásához ezért részletesen tanulmányoznunk kellett a technológia alapkövetelményeit, amelyet részben a felmérést végző TopoSys GmbH által szolgáltatott irodalom és internetes konzultáció tett lehetővé *(Kattzenbeisser, Biberach 2004)*. Az alapkövetelmények és a munkaterület részletes megismerése során szembesültünk azzal a ténnyel, hogy az ideális megoldáshoz olyan jelépítésre és mérési munkákra is szükség lenne, amit a pályázat előkészítése során még nem ismertünk. A projektet Magyarországon koordináló VÁTI TFI a rendelkezésünkre álló pénzügyi keret módosítását nem engedélyezte, ezért a feladatot kisebb kompromisszumok árán saját erőből és külső segítséggel (Fertő-Hanság Nemzeti Park) kellett megoldanunk.

**NYME Földmérési és Távérzékelési Tanszék*
E-mail: bacsaty@emk.nyme.hu
E-mail: gykovacs@emk.nyme.hu
***MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: banyai@ggki.hu

Az adatszolgáltatás összetevői és előzetes tervezése

A légi lézerszkenner felvételeket végző német TopoSys GmbH a végrehajtási szerződésben adta meg azokat a geodéziai követelményeket és referenciaadatokat, amelyeket a továbbiakban a megrendelőnek kellett biztosítani. A feladat tanulmányozása és tervezése során a következő feladatokat kellett optimálisan megoldanunk:

1. Bázisállomások létesítése és GPS ellenőrző mérések végzése
2. Transzformációs paraméterek meghatározása
3. Vízszintes és magassági ellenőrzés
4. Illesztő felületek mérése és transzformációja
5. GPS referencia mérések szolgáltatása

A feladat optimális megoldásához a GPS technika és a geodéziai mérőállomások együttes alkalmazása mellett döntöttünk a hosszadalmas és költséges szintezési munkák minimális szintre történő csökkentésével. Ehhez, célszerűen a munkaterület közepén, terveztünk egy kettős referencia pontot, amely a fenti feladatok optimális megoldását is lehetővé teszi.

Az adatszolgáltatás alaprendszereként a TopoSys GmbH. bármely vetületi rendszerben történő feldolgozást elvállalt volna. Alapértelmezésként a Magyarországon hivatalosan használt EOV vetületi rendszer és a Balti magasság lett volna a gyakorlatilag legegyszerűbb megoldás. Mivel a referenciamérések alapvetően a GPS technikára épülnek, és az EOV kettős vetítése a külföldiek számára nagyon bonyolult rendszernek tűnhet, ezért a kölcsönös adatcserét a GPS technika integráns részét képező WGS84 vonatkoztatási rendszerben határoztuk meg, amely gyakorlatilag azonos az Európai Unióban használt ETRS89 rendszerrel. Síkvetületként a WGS84 rendszerhez kapcsolódó nemzetközileg használt UTM vetület választottuk. A szükséges UTM-EOV átszámítások a tanszéken fejlesztett programokkal szabatosan elvégezhetők *(Bácsatyai 1999)*.

Mivel a projekt alapvetően digitális felületmodell előállítását célozta meg, a magassági adatok szolgáltatása a program egyik legkritikusabb komponense volt. A GPS bázisállomás létesítéséhez valamint a WGS84 és a hagyományos (EOV, Balti) koordináták közötti átszámításhoz ezért optimális transzformációs paramétereket kellett levezetni. Pontos geoidundulációk hiányában a munkaterület közelében található OGPSH alappontok segítségével lokális transzformációs paraméterek levezetését terveztük. A munkaterületen ismert magassági és vízszintes alappontokon terveztünk ismételt GPS méréseket, azért, hogy meghatározzuk a GPS mérésekből transzformációval levezetett és a szintezett magasságok közötti eltéréseket, amelyeket szabályos hibaként kezelve felhasználhatunk a magassági adatok pontosságának a növelésére, megfelelő interpolációs módszer alkalmazásával.

A felvétel (szkennelés) GPS referenciaadataiként négy óra terjedelemben 1s adatsűrűséggel kellett jó minőségű, kétfrekvenciás, RINEX formátumú adatokat szolgáltatnunk. Adatbiztonsági okokból két bázisállomást terveztünk, mivel csak két berendezés állt a rendelkezésünkre (Az osztrák partner által megbízott cég korábban 3 bázisállomást üzemeltetett). Ezek a mérések valamint a repülőgépen üzemelő GPS és inerciális mérőrendszer teszi lehetővé a szkenner folyamatos helyzetének pontos térbeli meghatározását.

A vízszintes illesztőpontok szerepét épületek, vagy egyéb olyan objektumok tölthetik be, amelyek a szkennelt ponthalmazból egyértelműen kiemelkednek, és az azonosításukat fák, bokrok vagy egyéb tényezők nem zavarják. Az alapszerződésben 4-6, majd később 10-15 illesztő objektum bemérését kérték, amelyek egyenletesen oszlanak el a felmérendő területen és az objektumok hossza a 8 m-t, területe a 20 m^2-t meghaladja.

A magassági illesztéshez olyan 20-25 m^2–es síkfelületeket kellett keresni, vagy mesterségesen kialakítani, amelyeket nem takar növényzet. A pontok száma és eloszlása itt is azonos volt a vízszintes illesztés követelményeivel. Ezeket a területeket már a mérés előtt optimálisan ki kell választani, és elő kell készíteni, mivel – ellentétben a vízszintes illesztéssel – ilyen területek a szkennelés után már nem biztos, hogy könnyen azonosíthatók.

A magassági ellenőrző pontok akár utólag is megmérhetők, mivel egyetlen céljuk a végeredmény, azaz a magasságmeghatározás ellenőrzése. Itt csak egyetlen szempontot kell betartani. A

pontok vízszintes helye is egyértelműen azonosítható legyen a felvételen. Magassági ellenőrző pontokat ezért útkereszteződésekben célszerű meghatározni.

Az adatszolgáltatási mérések végrehajtása és eredményei

A GPS bázisállomás létesítéséhez valamint a WGS84 és a hagyományos (EOV, Balti) koordináták közötti átszámításhoz optimális transzformációs paramétereket kell levezetni.

A bázisállomások koordinátáinak és a transzformációs paramétereknek a meghatározásához a rendelkezésünkre álló Trimble 4000SST GPS vevőpárt használtuk. Az egyik vevőberendezést a munkaterülethez legközelebb eső ismert koordinátájú 72-3015 OGPSH ponton helyeztük el, amely a mérések szempontjából optimálisnak tekinthető (*1. ábra*). A másik vevővel két független mérést végeztünk a 404270 és 046005/1 felsőrendű magassági alappontok közelében kiválasztott külpontokon, a ZSKE és ZSNY (zsilip kelet és zsilip nyugat) újonnan tervezett bázisállomásokon és a 72-3012 és 72-3310 országos vízszintes alappontokon. A ZSKE és ZSNY pontok mellett is található egy korábban a tanszék által meghatározott szintezési gomb (Déli gomb), tehát a magassági ellenőrzés során ezek az új pontok is külpontnak tekinthetők. A külpontok magasságát szintezéssel határoztuk meg. A rozsdamentes csappal állandósított bázispontokon 2x20 a többi ponton 2x15 percig mértünk. A pontok kiválasztásánál a gépkocsival történő szabad (engedély nélküli) felkeresés volt a fő szempont.

A transzformációs paraméterek meghatározásánál, a környező OGPSH pontok számának csökkentésével, egyre jobban illeszkedő adatokat kaptunk. Ahogyan az várható is volt, a területhez legközelebb eső 72-3015, 62-1109, 62-118 és 61-2228 OGPSH pontok adták a legjobb illeszkedést (1. ábra). A GPS mérésekből levezetett és a hagyományos koordináták eltéréseit az *I. táblázatban*, a transzformációs paramétereket a *II. táblázatban* adtuk meg.

I. táblázat. A nyilvántartásban szereplő és a GPS mérésekből levezetett koordináták eltérései

A pont száma	y - irányú eltérés [mm]	x – irányú eltérés [mm]	h – magassági eltérés [mm]
404270	-	-	30
046005/1	-	-	-21
Déli gomb	-	-	3
16 VO	-	-	16
72-3012	0	-20	27
72-3310	-9	- 6	18

II. táblázat. A lokális koordináta transzformáció paraméterei

Paraméterek	EOV ⇒ GPS		GPS ⇒ EOV	
X – eltolás [m]	120.126703	±7.66	-120.124485	±7.66
Y – eltolás [m]	-152.923654	±9.65	152.923898	±9.65
Z – eltolás [m]	-62.792885	±8.29	62.795218	±8.29
méretarány [ppm]	3.282849	±0.94	-3.283090	±0.94
α - elfordulás [ivmp]	1.899194	±0.28	-1.899186	±0.28
β - elfordulás [ivmp]	2.735826	±0.30	-2.735813	±0.30
γ - elfordulás [ivmp]	-1.821521	±0.23	1.821514	±0.23

Az a szerencsés körülmény, hogy a Déli gomb (ZSKE) magassági eltérése gyakorlatilag nullaértékű (3 mm), csak a véletlennek köszönhető. (A táblázatban szereplő 16 VO pont GPS magasságát a következő mérési fázisban határoztuk meg.) Az 1. táblázat alapján megállapítható, hogy a munkaterületen a vízszintes eltérések 2 cm a magassági eltérések 3 cm alatti értékeknek adódtak.

1. ábra. Az első fázisban végzett GPS mérések helyei

A következő munkafázist a vízszintes és magassági illesztéshez, illetve a magassági ellenőrzéshez szükséges mérések jelentették (*2. ábra*). Az első fázisban a személygépkocsival és szabadon felkereshető objektumokat mértük meg. A másik fázisban a Fertő-Hanság Nemzeti Park munkatársainak segítségével, terepjáróval kerestük fel az alkalmas helyeket, és a magassági illesztéshez szükséges földmunkákat is ekkor végeztük el.

A korábban említett problémák miatt az ideálisnál kisebb építményeket is vízszintes illesztőpontként határoztunk meg azért, hogy a pontok területi eloszlása kedvezőbb legyen. Arra törekedtünk, hogy a vízszintes és magassági illesztő helyek közel legyenek egymáshoz, azért, hogy elegendő legyen egyetlen GPS felmérési alappontot létesíteni, mivel a távoli, és jól irányozható 71-4014 alappont (a soproni Károly kilátó) ideális tájékozó irányt biztosított az esetek döntő többségében (*3. ábra*). Egy kivételes esetben két GPS alappontot határoztunk meg, amelyek egymás tájékozó irányainak a szerepét is betöltötték (*4. ábra*). A második kivételes esetnél a két GPS felmérési alappont közé a mérőállomással egy további beillesztett sokszögpontot is meg kellett határoznunk, ekkor ez töltötte be a tájékozó irány szerepét (*5. ábra*).

A GPS bázisállomás szerepét most a terület középpontjában található ZSKE alappont töltötte be, az objektumok bemérését a GPS felmérési alappontokról Sokkia PowerSet mérőállomással és mérőszalaggal hajtottuk végre.

Az épületek felmérésével kapcsolatban a TopoSys nem definiálta egyértelműen a megmérendő pontokat, ezért a falsíkokat és az ereszvonalakat is meghatároztuk. Az épületeket az AutoCad program segítségével szerkesztettük meg, a fal- és ereszvonalakat is különböző fedvényben helyeztük el. Az épületek közvetlenül mért három sarokpontjának a földfelszíni magasságát is meghatároztuk, a szalaggal mért sarokpontok és az ereszsíkok magasságát csak megbecsültük. A magassági illesztő helyeket általában négy sarokponttal mértük meg, és a középpontjuk magasságát is meghatároztuk. Mivel a földmunkát nem lehetett tökéletesen elkészíteni, az illesztő helyeket átlagos magassággal adtuk meg.

A vízszintes szerkesztéseket értelemszerűen az EOV rendszerben hajtottuk végre. A felmérés során meghatározott magasságok a GPS mérésből származó Balti magasságoknak feleltek meg. Az így előkésztett adatokat a korábbam meghatározott paraméterekkel a WGS84 ellipszoidi rendszerbe transzformáltuk. Az objektumok koordinátáit egy egyszerű ASCII adatfájlban és GIS formátumban is elküldtük a szkennelést végző cégnek.

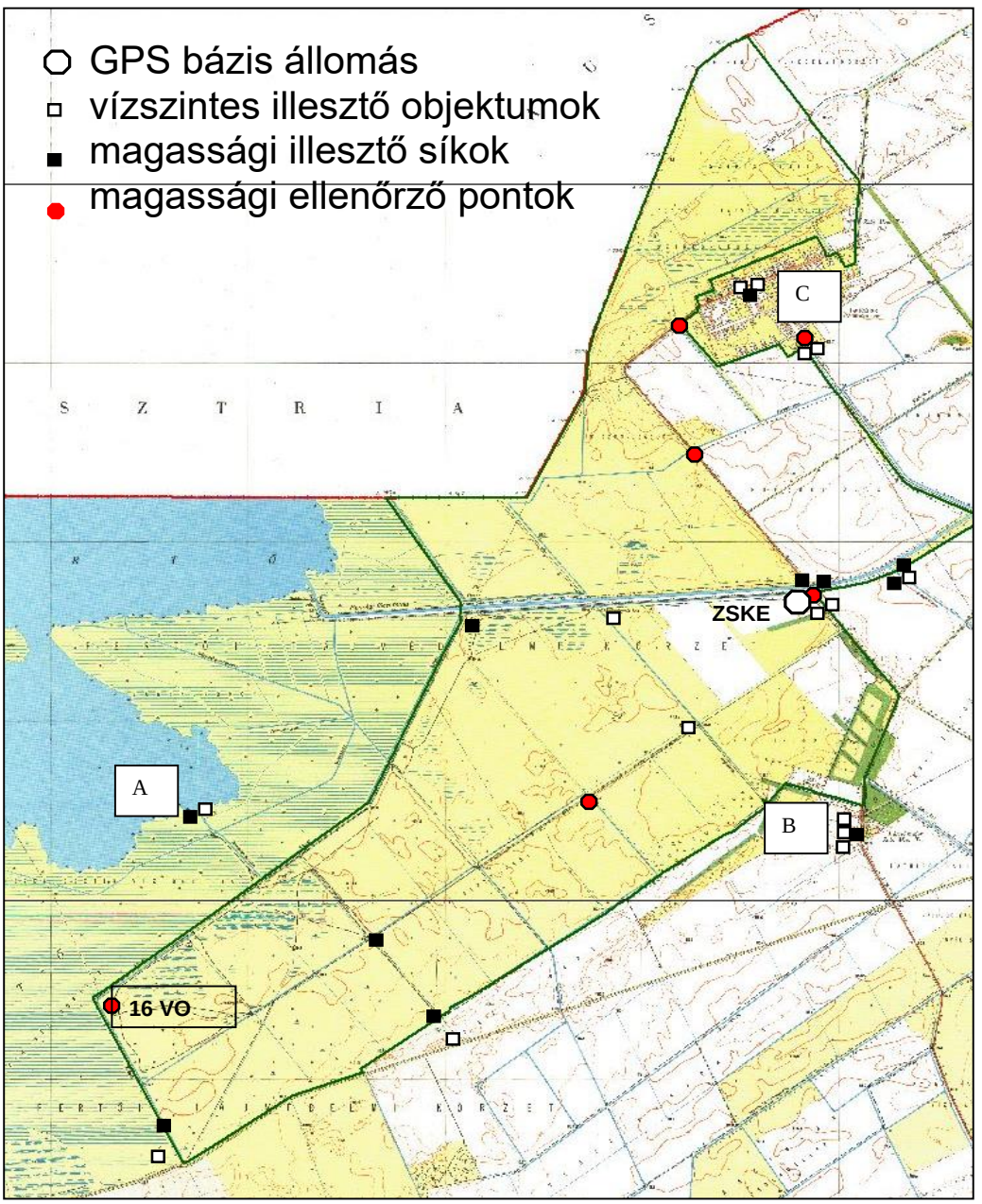
A megmért illesztő- és ellenőrző pontok területi eloszlását a 2. ábrán mutatjuk be. Az ábrán szereplő 16 VO pont, amely a felmért terület déli részén helyezkedik el, nem szerves része a felmérésnek, csak a magasságmeghatározás ellenőrzésére szolgált, mivel korábban a pont magasságát szintezéssel is meghatározták. Mivel a pont szintezett és a GPS mérésből levezetett Balti magassági eltérése csak 16 mm, amely jóval kisebb, mint a szkennelés 5 cm pontossága, a terület északi részén meghatározott GPS felmérési alappontok szintezéssel történő ellenőrző bemérésétől az előkészítő lépésben eltekintettünk. Ezt az ellenőrzést a szkennelés feldolgozása után sem kellett végrehajtani, mivel a magassági ellenőrző pontok is jól illeszkedtek.

A felvételek készítése során 1s adatsűrűségű és négy óra terjedelmű GPS méréseket kellett biztosítanunk. Ellenőrzésképpen közel egy órányi mérést küldtünk el a TopoSys részére, hogy megvizsgálhassák az adatok minőségét. Az adatminőség ugyan nem, de a négyórányi mérés rögzítése komoly gondként jelentkezett, ugyanis ilyen nagy memóriával rendelkező vevő tudomásunk szerint nincs is Magyarországon.

A probléma megoldásában a FÖMI KGO munkatársai segítettek, akik a rendelkezésünkre bocsátottak egy régebbi DOS programot, amellyel a vevőink közvetlenül számítógépre (Laptopra) küldhették az adatokat.

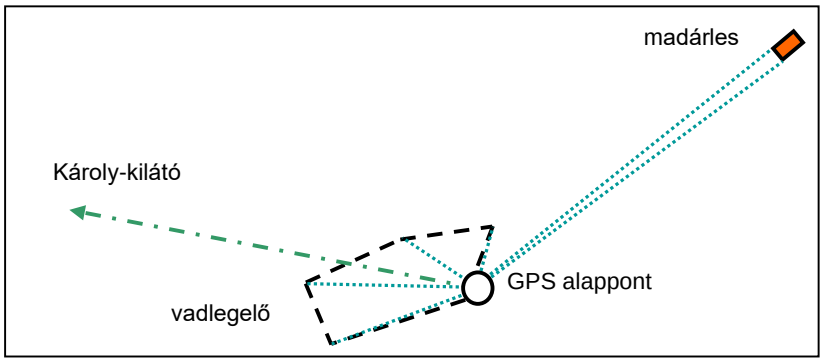
A baj azonban nem jár egyedül. A következő tesztmérés során azt tapasztaltuk, hogy a rendelkezésünkre álló két Laptop számítógép ugyan rögzíti az adatokat, de a négyórányi üzemeltetésük külső, feltöltött gépkocsi akkumulátorok segítségével sem garantálható, azokat célszerű puffer

üzemmódban folyamatosan tölteni. Ennyi probléma után végre a szerencse is mellénk állt, ugyanis a munkaterület közepén a csatorna zsilipházának környezete alkalmasnak bizonyult bázisállomások létesítésére, ahol ráadásul 220 V hálózati csatlakozás is elérhető. A közvetlen problémák tehát kezelhetővé váltak.

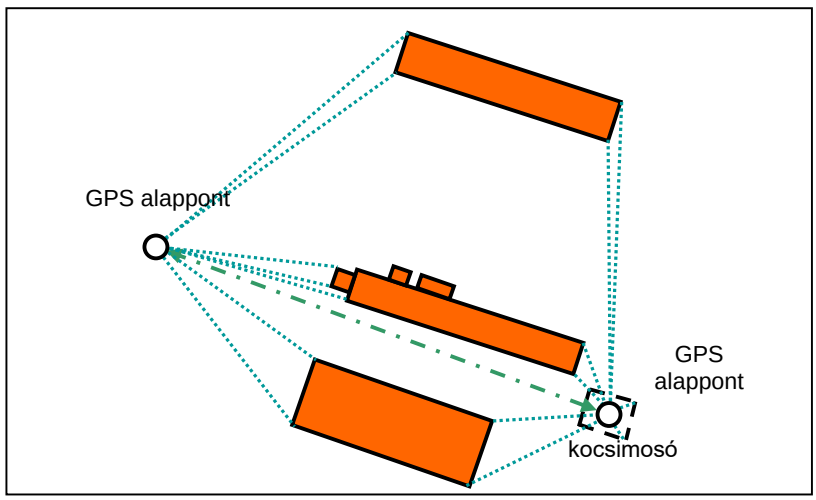


2. ábra. A második fázisban mért pontok

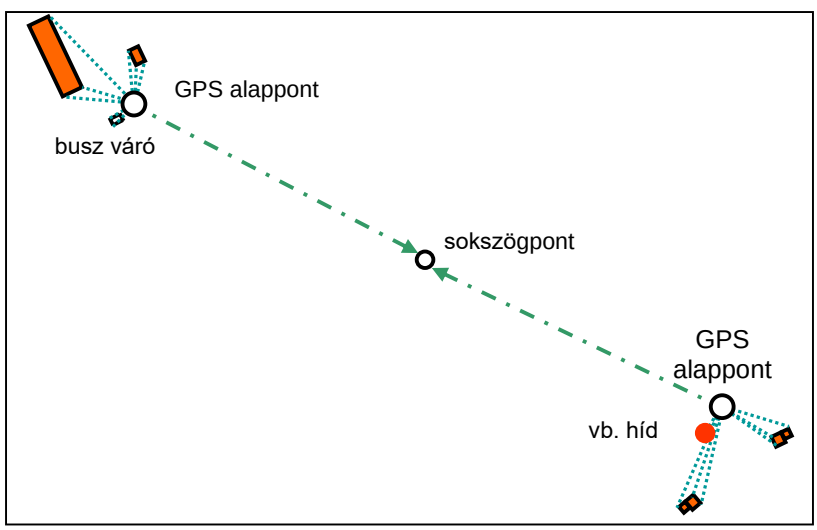
(Az A,B és C mérési helyeket a 3-5 ábrákon részletesebben is bemutatjuk.)



3. ábra. Az „A” jelű illesztő hely mérési vázlata



4. ábra. A „B” jelű illesztő hely mérési vázlata



5. ábra. A „C” jelű illesztő hely mérési vázlata

A GPS referenciaméréseket a ZSKE és ZSNY pontokon végeztük el. A műszereket, a laptopokat, az akkumulátorokat és az akkutöltőket két gépkocsiban helyeztük el azért, hogy kedvezőtlen időjárás esetén azok védve legyenek. A gépkocsikat az antenna csatlakozó kábel által lehetővé tett maximális távolságban állítottuk le. A mérések során csak a következő hibaforrásoktól tarthattunk: meghibásodhat a vevő, meghibásodhat a Laptop, lefagyhat a DOS program, zárlatos lehet az akku, kontakthibásak lehetnek a csatlakozások, meghibásodhat az akkutöltő és áramszünet miatt nem tudjuk pufferelni az akkukat.

Szerencsére a mérés napján nem érvényesültek a „Murphy-törvények", minkét berendezés hibátlanul működött és kiváló adatokat szolgáltatott.

Összefoglalás

A bevezetőben említett problémák ellenére a feladatot sikerült megfelelően megoldani, részben a Fertő-Hanság Nemzeti Park segítségével (terepjáró biztosítása és a földmunkák elkészítése), másrész a külső körülmények szerencsés alakulása miatt.

A munkaterületen található OGPSH alappontok kedvező lokális transzformációs paramétereket biztosítottak, ezért a magassági illesztéshez nem kellett nagy mennyiségű járulékos szintezési munkát elvégezni. A munkaterület déli részén a kisebb, de ideálisnak nem nevezhető építmények is biztosították a vízszintes illesztéshez szükséges pontosságot (az optimális vízszintes illesztéshez a terület középső és déli részén is célszerű lett volna illesztő jeleket építeni).

Az adatszolgáltatás egyik fő tanulsága az volt, hogy a pénzügyi tervezés során a geodéziai referenciaadatok biztosításának a járulékos költségeit is pontosan meg kell tervezni.

Reményeink szerint ezzel a dolgozattal sikerül hozzájárulnunk ahhoz, hogy a közeli jövőben megvalósuló hazai lézerszkenneres felmérések tervezésénél az általunk szerzett ismeretek és gyakorlati tapasztalatok is felhasználásra kerüljenek.

A tulajdonképpeni légi lézerszkenner felmérések végeredményéről ugyanebben a kötetben *Király és Márkus (2005)* tanulmánya számol be részletesen.

Köszönetnyilvánítás

A dolgozatban bemutatott vizsgálatokat a „Magyarország-Ausztria Phare CBC Program Kisprojekt Alap 2001" keretében hajtottuk végre.

Hivatkozások

Bácsatyai L (1999): Átszámítások vonatkozási rendszerek között. *Geomatikai Közlemények* I, 163-178.

Katzenbeisser R, Biberach SK (2004): Airborne Laser-Scanning, ein Vergleich mit terrestrischer Vermessung und Photogrammetrie. *Photogrammetrie Fernerkundung Geoinformation*, 179-187.

Király G, Márkus I (2005): Digitális domborzatmodell előállítása légi lézerszkenner felvételekből tájökológiai és természetvédelmi kutatások céljára. *Geomatikai közlemények* VIII, 243-252.

DIGITÁLIS DOMBORZATMODELL ELŐÁLLÍTÁSA LÉGI LÉZERSZKENNER FELVÉTELEKBŐL TÁJÖKOLÓGIAI ÉS TERMÉSZETVÉDELMI KUTATÁSOK CÉLJÁRA

*Márkus István, Király Géza**

Production of High-Resolution Digital Elevation Model (DEM) by Means of Aerial Laser-scanning for Research on Landscape-Ecology and Nature Conservation *- This paper reviews the first results of the project called 'Production of High Resolution Digital Elevation Model by Means of Laser Scanning' funded by PHARE CBC Small Project Funds Hungary-Austria (Ref.: HU010803-12). The aerial laser-scanning realised in the frame of this project is the first Hungarian data-acquisition of this kind. The high resolution and high accuracy Digital Elevation Model (DEM) retrieved from the laser-scanning data is especially suitable for the modelling of the microtopography and supporting certain nature conservation and water management tasks.*

Keywords: DEM, laser-scanning, nature-conservation

A dolgozat a Magyarország-Ausztria Phare CBC Program Kisprojekt Alap 2001 által támogatott „Digitális geoadatállomány előállítása lézerszkenner-adatokból" című projekt (támogatási szerződés száma: HU010803-12) első eredményeit ismerteti. A projekt keretében megvalósult légi lézeres letapogatás (aerial laser-scanning) az első magyarországi, ilyen technológiájú adatfelvételezés. A lézer-adatokból kifejlesztett nagypontosságú és nagyfelbontású digitális domborzatmodell különösen alkalmas - főképpen sík terepen - a mikrodomborzat modellezésére és egyes természetvédelmi, vízügyi, stb. feladatok megoldásának megkönnyítésére.

Kulcsszavak: DDM, lézerszkenner, természetvédelem

Bevezetés

A cikkben szereplő kutatás egy „Magyarország-Ausztria Phare CBC Program Kisprojekt Alap 2001" által támogatott projekt – Digitális geoadatállomány előállítása lézerszkenner-adatokból, támogatási szerződés száma: HU010803-12. – eredményeit ismerteti. A projekt keretében megvalósult légi lézeres letapogatás (*aerial laser-scanning*) az első magyarországi, ilyen technológiájú adatfelvételezés.

A projekt célkitűzése egy nagypontosságú digitális domborzatmodell (DDM) kifejlesztése az országhatáron átnyúló — ökológiai szempontból egységesnek tekintendő — Magyar-Osztrák Fertő-Hanság Nemzeti Park / Neusiedler See-Seewinkel National Park egy-egy érintkező kisebb magyar és osztrák területére. A DDM integrálása egy nemzeti park információs rendszerbe. A DDM és más kiegészítő adatok (ortofotó, kataszteri térkép, földhasználati térkép, vegetációtérkép, archív topográfiai térképek) együttes GIS-elemzése.

Ausztriában a Seewinkelben a XIX. század végén még több mint száz szikes tócsa volt, amelyek többsége mára eltűnt a vízelvezetés és a mezőgazdaság terjeszkedése következtében. Magyarországon a Mekszikói-körgát megépítésével 1911-ben 7 km^2 területet zártak ki a Fertőből, amely elszikesedett, és mezőgazdasági hasznosításra alkalmatlannak bizonyult. Hatalmas területek találhatók a Hanságban, ahol a vízrendezés, lecsapolás következtében a régi mocsárvilág helyét ma értéktelen kultúrerdők, alig-alig hasznosítható mezőgazdasági területek foglalják el. A táj természeti értékekben elszegényedett. A Nemzeti Park egyik legfontosabb hosszú távú feladata, hogy ezeket a területeket renaturalizálja, és emellett a különféle területhasználatok igényéből származó konfliktusokat kezelje.

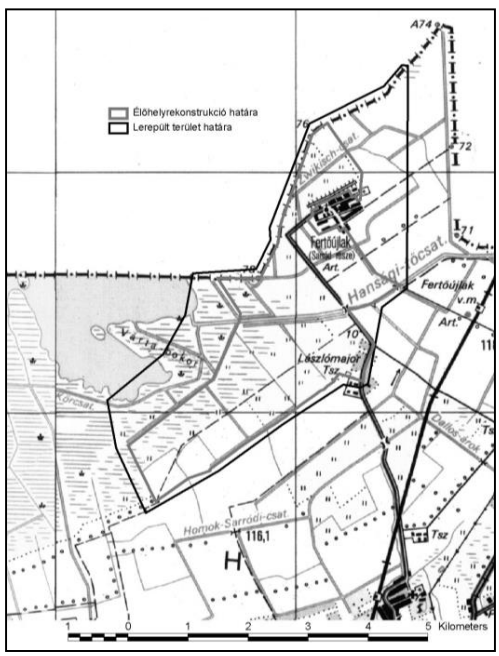
A földhasználatban hosszabb időszak alatt bekövetkezett változások vizsgálatába sokféle adatforrás vonható be Ezek közé tartoznak az aktuális digitális kataszteri térképek, ortofotók és a

*NyME, Földmérési és Távérzékelési Tanszék, 9400 Sopron, Bajcsy-Zs. u.4.
E-mail: imarkus, kiraly.geza@emk.nyme.hu

történeti térképek. Ezek azonban nem szolgáltatnak kielégítő információt a terep magassági viszonyairól, holott ezen a sík terepen nagy jelentőségű a mikrodomborzat a növényzet és az állatvilág szempontjából.

A projekt súlypontját képezi ezért egy lézerszkenneres adatgyűjtés (LIDAR) nagymértékben javított adataiból kifejlesztett digitális domborzatmodell (DDM) előállítása. A DDM-ből szintvonalak, metszetek, perspektív nézetek állíthatók elő, egy tetszőlegesen megválasztott, szimulált vízszinthez viszonyított vízmélység, víztérfogat és felület számítható. A DDM magassági szintek szerint színkódolt megjelenítésével felkutathatók a természetes mélyedések, a régi vizes élőhelyek, amelyek renaturálása a természetvédelem célja. A renaturalizáció tervezéséhez ideális alap a projektben kifejlesztett nemzeti park információs rendszer (GIS). A vízmélység, a metszetek, víztérfogat és felület számítása fontos adatokat szolgáltat a természetvédelmi kezelés, tervezés számára.

A projekt területe a Fertő-Hanság Nemzeti Park területén található, Mekszikópusztai élőhelyrekonstrukció (*1. ábra*).



1. ábra. A Mekszikópusztai élőhelyrekonstrukció átnézeti térképe

Anyag és módszer

A repülőgépes lézeres adatgyűjtés elve a *2. ábrán* látható. A repülőn található érzékelő helyzetét utófeldolgozásos differenciális GPS méréssel (*DGPS Post Processing*) határozzák meg, amihez szükséges egy referencia bázisállomás a felmérés területén. Az érzékelő irányultságát inerciarendszerrel mérik (INS). A kettő együttes kiértékeléséből az érzékelő pályája jól modellezhető. Az érzékelő egy vagy több lézer-impulzus segítségével pásztázza az adott területet, és rögzíti a visszaverődések – a mai korszerű érzékelők minimum két visszaverődést tudnak rögzíteni – idejét, vagyis a távolságokat. Ezekből az adatokból a terület felületmodelljei előállíthatók.

Alkalmazott technika

Esetünkben a repülőgépen található LIDAR (*LIght Detection And Ranging*) érzékelő a német TopoSys cég Falcon II. eszköze volt. Az eszköz fontosabb paraméterei a következők (*TopoSys 2004*):

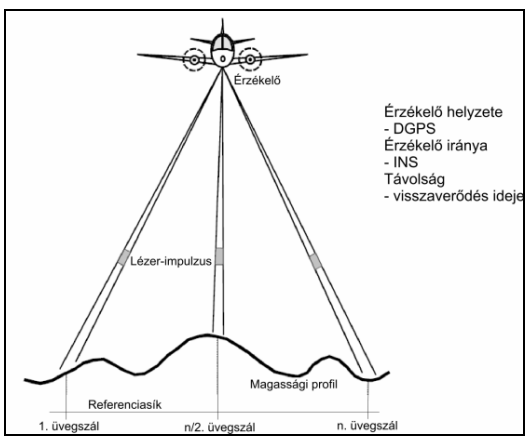
Hatótáv	1600 m
Távolságmérés felbontása	1.95 cm

pásztaszélesség	14.3°
Letapogatás frekvenciája	653 Hz
Lézer frekvenciája	83 000 Hz
Effektív mérési sebesség	83 000 /s
Lézer hullámhossza	1560 nm
Biztonsági távolság	0.5 m
Adatrögzítés	First Echo Last Echo Intensity

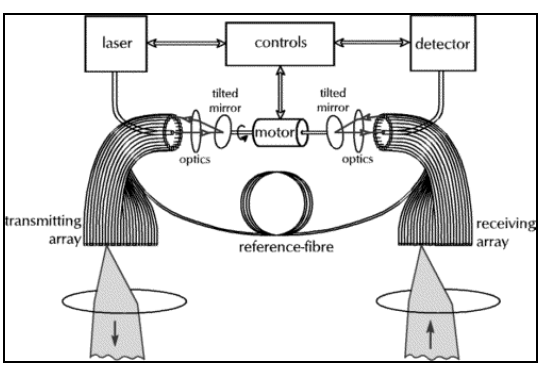
Ez az érzékelő jól meghatározott belső geometriával rendelkezik, amely biztosítja a nagyobb mérési pontosságot (*3. ábra*).

A kapott adatok

A légi adatgyűjtést és a domborzatmodell számítását a német TopoSys GmbH végezte. Hogy a domborzatmodell pontosságát javítsuk, a légi adatgyűjtéssel szinkron GPS referenciamérést kellett végezni egy földi bázis állomáson. Vízszintes és magassági illesztő poligonokat is mértünk a DDM pontosabb illesztése, és magassági ellenőrző pontokat a DDM pontosságvizsgálata céljából.



2. ábra. A repülőgépes lézeres adatgyűjtés elve



3. ábra. A TopoSys FALCON II érzékelő felépítése

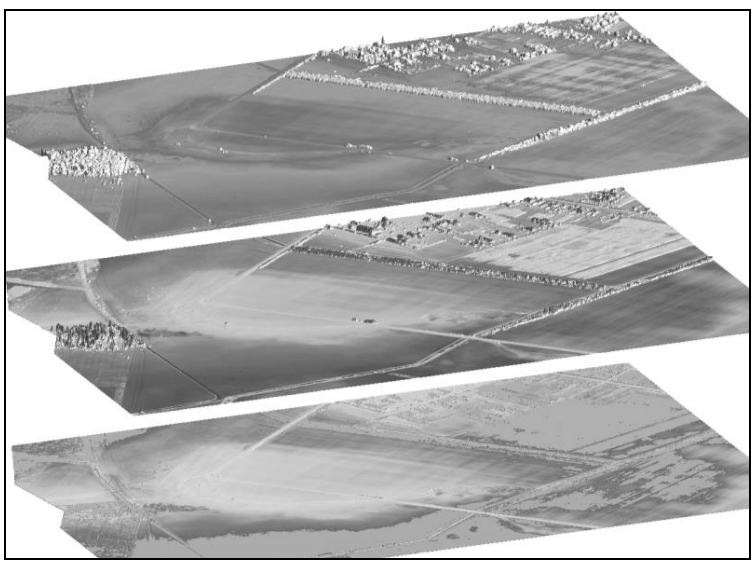
A TopoSys *(http://www.toposys.com.)* az alábbi adatokat tudja szolgáltatni, amelyekből mi – a rendelkezésre álló költségkeret szabta korlátok miatt - a vastagon szedetteket rendeltük és kaptuk meg:

- *Feldolgozatlan RAW adatok*

- *Első visszaverődés (first echo)*
- *Utolsó visszaverődés (last echo)*
- Intenzitás
- *Borított felszínmodell (DSM)*
- *Első visszaverődés (first echo)*
- *Utolsó visszaverődés (last echo)*
- *Domborzatmodell (DTM)*
- Foltozott DTM (*filled DTM*)
- Képi adatok
- RGB
- NIR

Ezeket az adatokat DVD-n, a cég konvertáló programjával együtt kaptuk meg. Az adatok WGS-84 ellipszoid alapú UTM 33. zóna vetületi rendszerben kaptuk meg, ahol a magasságok ellipszoid feletti magasságok voltak egész számábrázolással, cm-es egységben. A konvertáló program rugalmasan paraméterezhető konverziót biztosít számos formátumba.

A három különböző felület 3 D-s megjelenítése látható a *4. ábrán*. Legfelül az első visszaverődésből számított borított felszínmodell (*first pulse DSM*), középen az utolsó visszaverődésből számított felszínmodell (*last pulse DSM*), míg legalul a terepmodell látható egy szimulált vízszinttel (*DTM*).



4 ábra. A felületmodellek 3D-s ábrázolása

Transzformáció

A tendert úgy írtuk ki, hogy az adatok Egységes Országos Vetületbe (EOV) történő transzformálását mi magunk végezzük el. Úgy gondoltuk, hogy sokkal jobb, ha kicsit több munkával, de számunkra átlátható módon történik meg a transzformálás, mintha egy olyan cég végzi el, aki esetleg az Egységes Országos Vetületről (EOV) még csak nem is hallott. Végül ez többszörös munkát jelentett számunkra, mert a nyertes pályázat a referencia-adatok mérését sem tartalmazta. Ezt a terepi mérést tanszéki kollégák végezték el *(Bácsatyai et al. 2005)*. Ezeket a referenciaadatokat EOV-ból transzformáltuk át WGS-84 koordinátarendszerbe. A transzformáció során a WGS-84 és az IUGG 67 ellipszoid között a legközelebbi 4 GPS alappont alapján számított lokális paraméterkészletet használtunk. A transzformációt többféleképpen is elvégeztük. Először 2D-s síkkoordinátákat transzformáltunk, és az egész területre egy egységes geoidundulációval számoltunk. Elvégeztük úgy is a

transzformációt, hogy a 3D-s koordinátákat transzformáltunk oly módon, hogy a paraméterek tartalmazták a geoidunduláció értékét, vagyis a transzformáció során tértünk át az ellipszoid-feletti magasságokból a tengerszint feletti magasságokra, és próbálkoztunk olyan módon is, hogy a geoidundulációval korrigált értékekre határoztuk meg a transzformációs paramétereket. Bár elméletileg az utóbbi megoldás a legmegfelelőbb, de a bizonytalan geoidunduláció, valamint a szűkös időkeret miatt végül is a középső megoldás mellett döntöttünk *(Bányai 2005)*, de ezen a területen még szeretnénk további vizsgálatokat is folytatni.

A magassági adatok szolgáltatása a program egyik legkritikusabb komponense volt. A munkaterületen ismert magassági és vízszintes alappontokon végeztünk ismételt GPS méréseket azért, hogy meghatározzuk a GPS mérésekből transzformációval levezetett, és a szintezett magasságok közötti eltéréseket, amelyeket szabályos hibaként kezelve felhasználhatjuk a magassági adatok pontosságának a növelésére, megfelelő interpolációs módszer alkalmazásával. A vízszintes eltérések 2 cm a magassági eltérések 3 cm alatti értékeknek adódtak. A lokális koordináta-transzformáció paramétereit a jelen kötet *Bácsatyai et al. (2005)* tanulmányában adtuk meg.

Megjelenítések

A felületmodelleket többféle módon jeleníthetjük meg. Bár az egyes megjelenítések nem tartoznak szorosan a modellek elemzéséhez, de segítségükkel olyan tartalmi információk emelhetők ki, amelyek az egyes szakemberek munkáját segíthetik. Itt a 2D és a 3D megjelenítési lehetőségeket soroljuk fel:

- 2D
  - Folyamatos színátmenet
  - Magassági kategóriák
  - Szintvonalak
  - Megvilágítás
- 3D

Bár ezek mindegyikére érdemes lenne egy-egy példát felhozni, de a korlátozott terjedelem miatt inkább csak a tapasztalatainkat foglalnánk röviden össze.

A folyamatos színátmenettel ábrázolt DDM nagyon tetszetős képet ad, ugyanakkor két közel azonos magasságú pont esetében nehéz eldönteni, hogy melyik is a magasabb. A megfelelően megválasztott magassági kategóriák segítenek ezen a nehézségen, és a DDM mennyiségi értelmezését nagyban megkönnyítik. A szintvonalakkal történő ábrázolás nem igazán hatékony módja az ilyen részletes domborzatmodellnek. Amíg az 1 * 1 m-es DDM a teljes területre ~300 MB, addig a 20 cm-es szintvonalközzel a szintvonalrajz ~1200 MB. A megvilágítással a domborzatmodell nagyon plasztikussá tehető, és nagy előnye, hogy az előbb említett megjelenítési módokkal kombinálható. A vizuális értelmezéshez nagyon jól alkalmazható a folyamatos színátmenet és a megvilágítás együttes alkalmazása (*shaded relief*) (*5. ábra*).

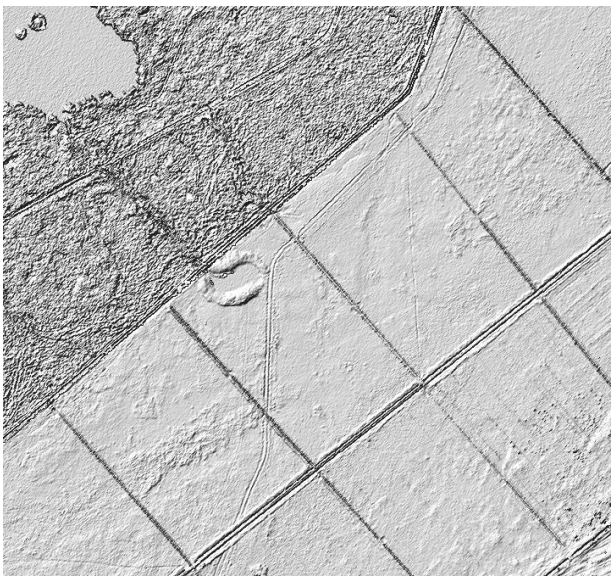
A 3D-s megjelenítéseket elsősorban a látvány fokozása érdekében alkalmazzuk, de bizonyos esetekben az adatok értelmezését is nagyban segíti (*4. ábra*)

Digitális térbeli kiegészítő adatállományok beszerzése

A következő kiegészítő adatállományok beszerzésére, illetve előállítására került sor:

- 2001. évi digitális kataszteri térkép,
- 1999. évi (1999.08.01.) infra színes légifényképek és ortofotó,
- Landsat TM űrfelvételek (1987., 1991., 2000., 2001. évi),
- Az Osztrák-Magyar Monarchia I-II-III katonai felméréséből származó 1785., 1845., 1883., 1920. évi archív katonai topográfiai térképek,
- 1982. évi EOV topográfiai térképek,
- Földhasználati térképek idősora (1785., 1845., 1883., 1920., 2001., 2004. évi).

Ezek a történelmi térképek, űrfelvételek, légifényképek és ortofotók nagy értékűek, mert lehetővé teszik a korábbi állapot és földhasználat, és különösen a nedves területek és tócsák állapotának topokronológiai vizsgálatát.



5 ábra. A DDM domborzatárnyalásos megjelenítése (részlet)

Összehasonlító vizsgálat

A nemzetközi szakirodalomban számos publikáció található a lézerszkenneres adatgyűjtés pontosságáról, mégis, amikor megkaptuk az adatállományt, akkor az merült fel bennünk elsőként, hogy milyen pontosak a kapott modellek. Az összehasonlításhoz a következő referencia-adatokat használtuk fel:

- Terepi mérések
- 1:10 000-es EOTR térképek
- Légifényképek

A kollégák által végzett terepi méréseket felhasználtuk az ellenőrzéshez is *(Bácsatyai et al. 2005).* Sajnos – hiába mértek több csoportban referencia-adatokat – az összes mért adatot átadtuk a felmérést végző cégnek, így igazából ez az összehasonlítás nem biztos, hogy a külső pontosságra utal.

Az 1:10 000-es EOTR térképekkel való összehasonlításnál vizsgáltuk a DDM vízszintes és magassági pontosságát. Az előbbi esetben a borított felszínmodellen megjelenő és a térképen is ábrázolt síkrajzi objektumokat vizsgáltunk *(6. ábra)*, míg az utóbbi esetben a magassági ábrázolást – szintvonalak *(7. ábra)*, magassági pontok, rézsű- és szakadásvonalak – és a DDM-et hasonlítottuk össze. Az összehasonlítás során az EOTR térképek magassági ábrázolásából előállítottunk egy domborzatmodellt, és a két modellt hasonlítottuk össze. Két DDM összehasonlításánál a következő lehetőségek adódnak:

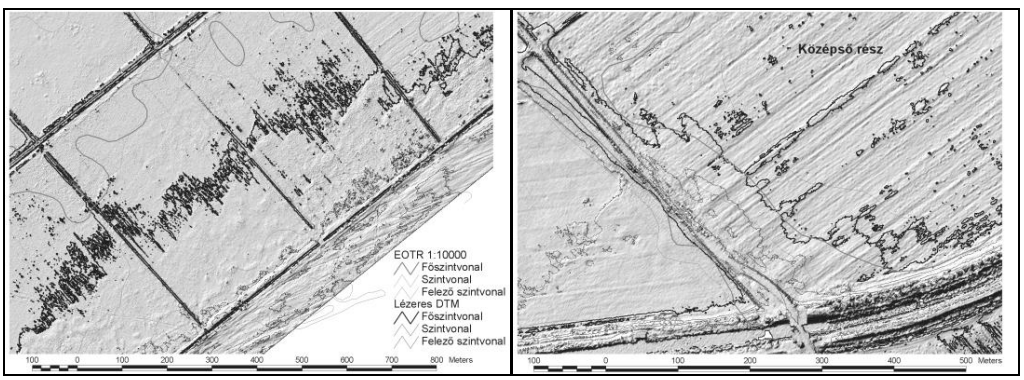
- 0 D pontok összehasonlítása
- 1 D szintvonalak és metszetek összehasonlítása
- 2 D A két felület különbségének elemzése
- 3 D Térfogat-statisztikák

Bár a korszerű térinformatikai eszközök lehetővé teszik a magas szintű összehasonlításokat is, de az alacsonyabb szintű összehasonlítások könnyebben értelmezhetők, és jól rámutatnak az egyes modellek különbségeire. Jelen cikkünkben a két modellből előállított szintvonalak és metszetek összehasonlítását ismertetjük.

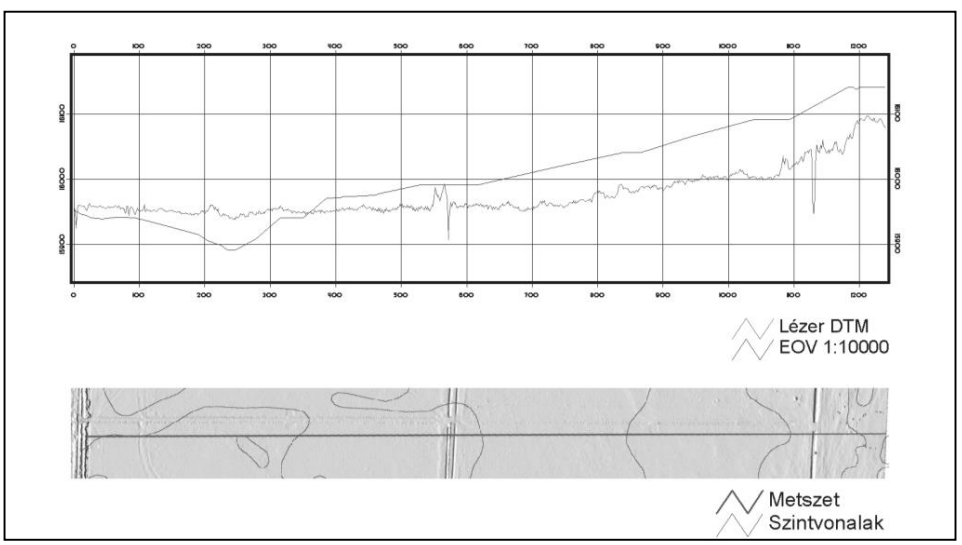
A D-i mintaterületen egy szintvonalköznyi, azaz ~ 0.5 m eltérés van a magasságok között, a terület középső részén a két szintvonalrajz tendenciájában megegyezik.

Másik lehetőség a két modellből származó metszetek összehasonlítása. A *8. ábrán* a terület D-i részén, viszonylag nagy szintkülönbségű, jellegzetes metszetek összehasonlítása látható.

6 ábra. A DDM vízszintes pontossága



7 ábra. A DDM-ből származó és az EOTR szintvonalak összehasonlítása a terület D-i és középső részén



8 ábra. A hosszmetszetek összehasonlítása

Elemzések

Munkánk során nagyon nagy hangsúlyt fektettünk az elemzésekre. A számos elvégzett elemzés közül párat cikkünkben is ismertetnénk. Ezek a következők:

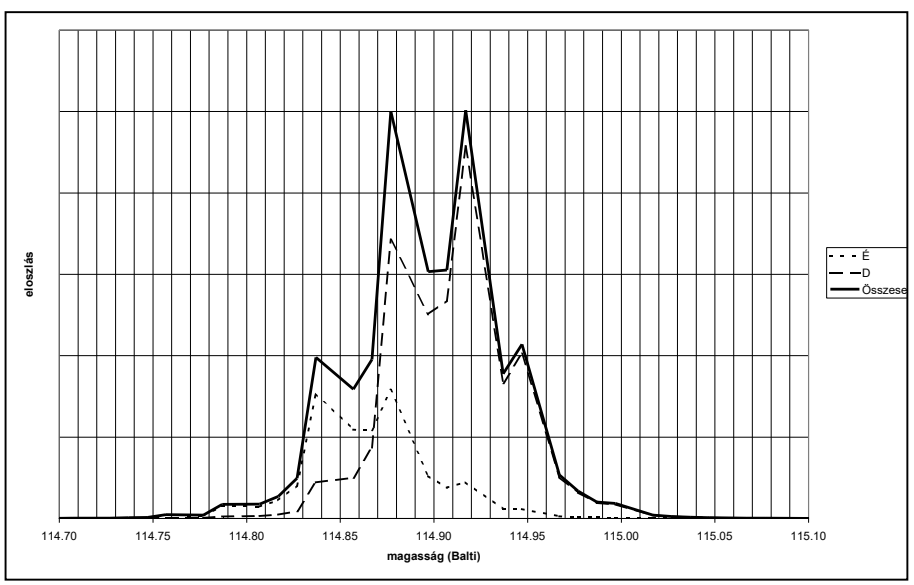
- Vízszinttel kapcsolatos elemzések
- Földhasználat elemzése

Ezen a közel sík topográfiával rendelkező területen a domborzatmodell előállításának is az elsődleges célja az volt, hogy a vízzel kapcsolatos elemzéseket, szimulációkat és modellezéseket elvégezhessük.

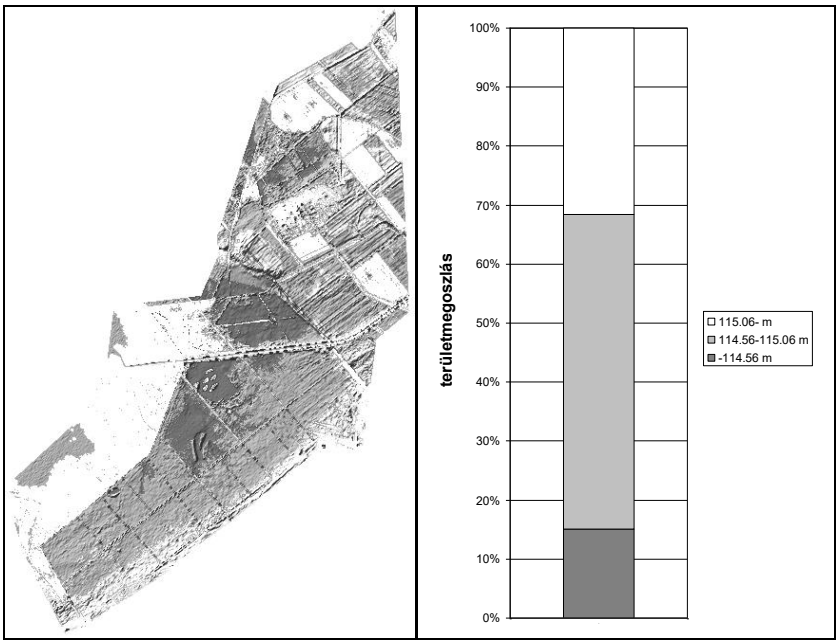
A vízzel kapcsolatban, első megközelítésben az érdekelt bennünket, hogy a domborzatmodell által meghatározott Fertő-szint és a repülés időpontjában leolvasott vízmérce között milyen összefüggés található. Ehhez kiválasztottuk a DDM-en a nyílt vízfelszíneket, és megnéztük, hogy a magasságok milyen eloszlást mutatnak. Elsőre szembetűnt, hogy az eloszlás többcsúcsú, ezért megvizsgáltuk a két elkülönülő nyílt vízfelszínt, és ezeknek az eloszlásait külön-külön vizsgáltuk meg *(9. ábra)*. Az egyes részek eloszlása kétcsúcsú mintázatot mutat, amelyet az élénk szélnek köszönhető hullámzásnak tulajdonítunk. A repülés időpontjában (2004.08.27. 17:01) a vízmérce a következőt mutatta:

h=246 cm	vízmérce leolvasás
H_0=112,97 m	vízmérce „0” pontja, osztrák Adria felett
$H_{oAf}=H_0+h$=115,43 m	vízállás osztrák Adria felett
$H_{mAf}=H_{oAf}$+0,09=115,52 m	vízállás magyar Adria felett
$H_{Bf}= H_{mAf}$-0,675=114,85 m	vízállás Balti felett

A következő – vízgazdálkodási szempontból fontos – vizsgálat az volt, hogy a különböző vízszintek esetében mekkora területet önt el a víz, valamint a különböző vízszintekhez mennyi vízre van szükség. Az utóbbi a zsilipek áteresztőképességének ismeretében alkalmas arra, hogy meghatározzuk az elárasztáshoz és a leengedéshez szükséges időt. Két ilyen vízszintre végeztük el a számításokat, az egyik egy nagyon alacsony vízállás, amely az élőhelyrekonstrukció területén a legmélyebb területeket mutatja, a másik pedig egy átlagos Fertő-vízszint. A *10. ábrán* jól látható, hogy az élőhelyrekonstrukció területének jelentős része (68%-a) az átlagos Fertő-tó vízszintje alatt helyezkedik el. A két szimulált vízszinthez tartozó terület és térfogat-adatokat az *I. táblázatban* foglaltuk össze**.**



9. ábra. A Fertő-tó vízszintje



10. ábra. Szimulált vízszintek és kiterjedésük

I. táblázat. Szimulált vízszintek terület- és térfogat-adatai

magassági kategóriák (m)	Terület		Térfogat
	m^2	%	m^3
112.46 – 114.56	1 909 189	15.2	289 567
114.56 – 115.06	6 706 671	53.2	2 958 902
115.06 – 118.78	3 985 131	31.6	-

A táblázat térfogat adataiból és a zsilipek áteresztőképességéből könnyen kiszámolhatjuk (pl.) a lecsapolás időszükségletét.

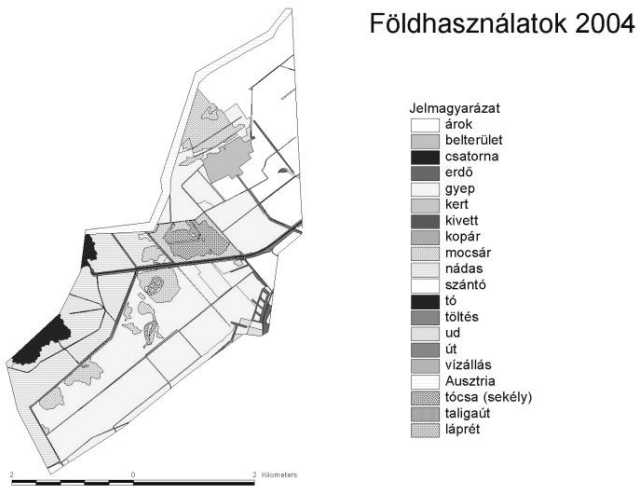
A földhasználat és a DDM összehasonlító vizsgálata lehetőséget nyújt arra, hogy megvizsgáljuk az egyes földhasználatok térszint szerinti elhelyezkedését, valamint meghatározzuk azokat a területeket, amelyek nem megfelelő térszinten helyezkednek el, és szükséges lehet a módosításuk. Másrészt az ilyen elemzések segítségével könnyebben megérthetjük a tengerszintfeletti magasság és a vegetáció összefüggéseit, segítségével meghatározhatjuk azokat a területeket, amelyek pl. botanikai szempontból értékesek.

A terület 2004 évi földhasználatait mutatja be a *11. ábra*. Az egyes földhasználati kategóriák magasság szerinti területi eloszlását a *12. ábrán* láthatjuk. A grafikonból látható, hogy a nem „vizes” földhasználatok után a „gyep” területek jelentős része a Fertő-tó vízszintje alatt helyezkedik el. Ezek a mély fekvésű gyep, illetve egyes szántó területek lehetnek azok, amelyeken az értékes vegetáció újból tért nyerhet.

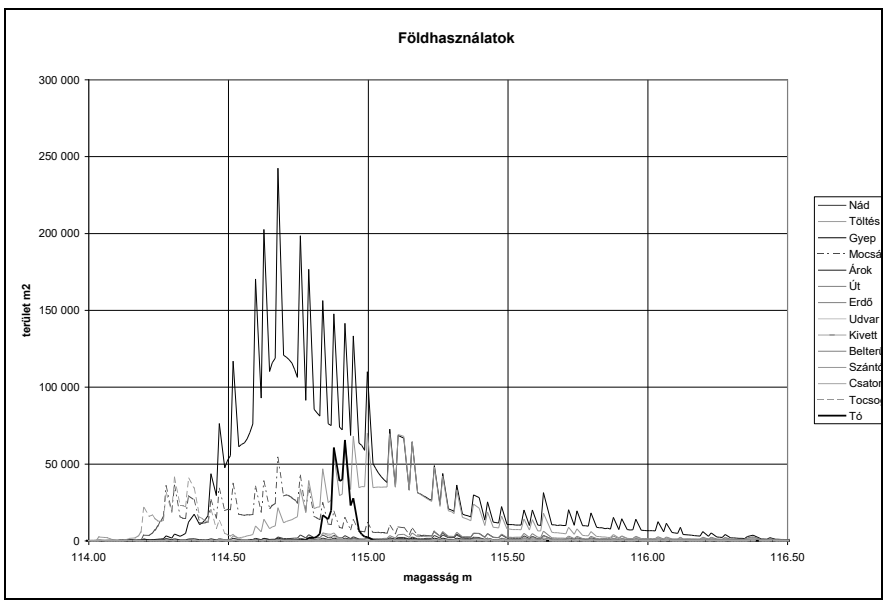
Összefoglalás

Az első magyarországi repülőgépes lézeres letapogatás projekt végrehajtása során szerzett tapasztalatainkat és az elért eredményeket ismertettük. Ezek jól mutatják, hogy a létrehozott adatbázis kiválóan alkalmazható a védett területek kezelésének megsegítésére. Az adatok lehetőséget nyújtanak olyan kutatások megalapozására, amelyekre eddig – a hatalmas adatigényük miatt – nem volt lehetőség. A – legalábbis számunkra – újszerű technológia még számos kiaknázatlan lehetőséget tarto-

gat a természetvédelmen túl számos egyéb területen is. A létrehozott alapadatbázis és a kifejlesztett módszerek csak az első, de legfontosabb építőkövei egy működőképes nemzeti park-információs rendszernek. Fontos, hogy a rendszer nyitott a további információk befogadására, és így egy multi-diszciplináris elemző- és kezelőrendszert képez.



11. ábra. A terület 2004 évi földhasználat-térképe



12. ábra. A földhasználatok terület-eloszlása tengerszintfeletti magasság szerint

Hivatkozások

Bácsatyai L, Kovács Gy, Bányai L (2005): Geodéziai referenciaadatok szolgáltatása légi lézerszkenner felvételek feldolgozásához. *Geomatikai Közlemények* VIII, 235-242.

Bányai L (2005): Koordináta transzformáció geoid undulációk becslésével. *Geomatikai Közlemények* VIII, 69-76.

TopoSys GmbH (2004): FALCON, LIDAR Sensor System. Biberach.

SZARVASOK GPS TELEMETRIÁS MÉRÉSE ÉS AZ ADATOK TÉRINFORMATIKAI FELDOLGOZÁSA AZ ÉLŐHELY-HASZNÁLAT VIZSGÁLATÁHOZ

Király Géza, Náhlik András***

GPS Telemetry of Red Deer and GIS Analysis of the Data for Home Ranges *- The wildlife application of GPS telemetry is a new method in Hungary. It produces much more and much more accurate data correlating to conventional telemetry. The analysis of the data requires new methods, but also provides facilities. This paper contains GPS telemetry of 3 red deer (Cervus elaphus) and the analysis of the data. The collars were put on the animals in the area of Zalaerdő PLC. Many conclusions are obtained from the almost one-year dataset.*

Keywords: GPS, telemetry, red deer, biotope, GIS

Az állatok GPS telemetriás mérése hazánkban új módszernek mondható. A hagyományos telemetriás mérésekhez viszonyítva jelentősen több, és pontosabb adatot kapunk, amelynek a feldolgozása újabb módszereket igényel, ugyanakkor számos újabb lehetőséget is kínál. A cikkben 3 gímszarvas (Cervus elaphus) GPS telemetriás méréséről és az adatok feldolgozásáról esik szó. A nyakörveket a Zalaerdő Rt. területén tettük fel az állatokra. A közel egy éves adatsorokból már számos következtetés levonható.

Kulcsszavak: GPS, telemetria, szarvas, élőhely, térinformatika, GIS

Bevezetés

A hazai nagyvad gazdálkodás legfontosabb faja a gímszarvas. Az erdei vadkár meghatározó részét a gímszarvas okozza, megnehezítve, költségessé téve a sikeres erdőfelújításokat és az általa okozott mezőgazdasági vadkár is jelentős. A vadgazdálkodók költségei között meghatározó nagyságrendűek a vadkárok miatti kifizetések. Néhol az összes kiadás 30%-át is elérik. Éppen ezért a cikkben szereplő kutatás elsődleges célja az, hogy a gímszarvas élőhely-használatának és táplálkozási szokásainak jobb megismerésével a vadkár mértékét csökkenteni tudjuk. Azt vizsgáljuk többek között, hogy mennyire jelentősek az élőhely-használatot tekintve az erdőfelújítások, hol, milyen jellegű táplálékot részesít előnyben a szarvas. Másrészt vizsgáljuk a gímszarvas mozgáskörzetének nagyságát. Első eredményeink alapján a téli mozgáskörzet jelentősen megnő a nyárihoz képest. A cél tehát, hogy télen, amikor a vadkárveszély megnő, jobban helyhez kössük a szarvast, kevésbé vadkáros területeken. Az alkalmazott kutatásokon túlmenően a témának ökológiai alapkutatás jellege is van (adalékok a fajon belüli és fajok közötti versengés mértékéhez, táplálkozás ökológiához, élőhelyek niche-átfedéseihez).

Az adatgyűjtés problémája

A vadállomány élőhely-használatának vizsgálatához számos adatra van szükségünk. Ezen adatok közül az egyik legfontosabb a helyre vonatkozó információ. Ezt a következő módokon határozhatjuk meg:

- Hagyományos megfigyelések
- Rádiótelemetriás mérések
- GPS telemetriás mérések

A GPS telemetriás mérések segítségével az állat pozícióját nagyobb pontossággal tudjuk meghatározni, valamint a méréseket szinte tetszőleges időközönként elvégezhetjük.

*NyME, *Földmérési és Távérzékelési Tanszék, **Vadgazdálkodási Intézet, 9400 Sopron, Bajcsy-Zs. u.4.*
E-mail: kiraly.geza, nahlik@emk.nyme.hu

GPS telemetria

Kutatásunk során mi a svéd Televilt cég rendszerét alkalmaztuk. Ez a rendszer a következő összetevőkből áll:

- Nyakörv
- Vevő / adatgyűjtő egység
- Távvezérelhető leoldóegység

Az általunk használt nyakörvek (*1. ábra*) – GPS-Simplex™ – a következő egységeket tartalmazzák:

- GPS vevő
- Rádió-adó
- Leoldó-egység (opcionális)

1. ábra. A Televilt cég GPS-Simplex™ nyakörve

A nyakörv felső részén található a GPS antenna, bal oldalán a leoldó egység (Drop Off), alul az elektronika a GPS-hez és a VHF rádióhoz, és a legalján az elem. Ezek a nyakörvek a következő funkciókat tudják: rádiójelek adása az állat felkereséséhez, GPS pozíció mérése és tárolása, GPS pozíciók továbbítása. A nyakörvre szerelt, de különálló leoldóegység lehetővé teszi a nyakörv ledobatását az állatról vagy távvezérlés segítségével, vagy egy előre meghatározott időpontban. A nyakörv funkcióit előre be kell programozni, egyedül az adatletöltést lehet a terepen aktiválni. A nyakörveket úgy programoztuk be, hogy 3 óránként mérje a pozíciót, valamint minden hónap első hetében adjon VHF jelet a keresésre, és ekkor előre programozottan az adatokat is továbbítsa. Sajnos egy általunk elkövetett, de a Televilt által is „jóváhagyott" programozási hiba folytán a VHF jelet csak 1 óráig adták a nyakörvek, és utána egész nap a mért GPS pozíciókat továbbították. A nyakörvek adatai a következő táblázatban láthatók (*I. táblázat*).

I. táblázat. A nyakörvek adatai

Száma	Frekvencia	GPS ID	DropOff ID	Megjegyzés	Felrakás	Levétel	Program	Idő
1	151.206	10113	RDO-00127	Tehén	2004.03.06	2005.01.09	3oras	GMT+1
2	151.406	10114	RDO-00126	Bikaborjú	2004.05.14		3oras2	GMT+2
3	151.504	10211		Bikaborjú	2004.02.08	2005.01.06	3oras	GMT+1
4	151.305	10210		Tehén	2004.02.15		3oras	GMT+1
5	151.707	10115	RDO-00125				3oras3	GMT+1

Ennek köszönhetően a nyakörvek felderítése elég szűk időkeretek között történhetett. Az adott héten minden reggel 53 perc tiszta VHF jel volt, utána pedig óránként 5 perc adatletöltés előtti hangoló-jel, valamint maguk a továbbított adatok. Az 5 nyakörvből végül 4-et sikerült feltenni (1, 2, 3, 4), amelyből 2-ről tudtunk minden alkalommal adatokat letölteni (2, 3). A másik 2 nyakörvről (1, 4) egyszerűen semmilyen jelet nem sikerült fogni. Végül már repülőgépről is próbálkoztunk, de a két „csöndben lévő" nyakörvről onnan sem sikerült jelet fogni. A 3-as számú nyakörvvel kapcsolatban 2005. január elején egy újabb probléma merült fel, mégpedig az, hogy az 5 perces hangoló-jel után nem adta az adatokat. Hasonló volt a helyzet akkor is, amikor az adatletöltést aktiváltuk, ilyenkor is csak az 5 percnyi hangoló-jelet adta a nyakörv. Így végül úgy döntöttünk, hogy – bár ez a nyakörv még nem volt fent egy teljes esztendőig, csak 11 hónapig – ezt a nyakörvet távirányítással ledobatjuk. Ezt ekkor, január 6-án sikerült is megtennünk, másnap a nyakörvet megtaláltuk. A 2-es nyakörv januári letöltése érdekes volt, mert az állat bekerült egy hajtásba, és két erdőtömbön keresztül üldöztük, mire végül megfelelő közelre tudtunk menni hozzá, hogy az adatokat letöltsük. Még érdekesebb dolog történt az 1-es számú nyakörvvel, ez ugyanis teljesen „csöndben volt", nem adott VHF jelet. Egy január 9-ei vadászaton egy elhibázott lövés megsebesített egy másik – nem a célzott – állatot, amelyet végül kutyával sikerült megtalálni, és rajta volt az egyik elveszettnek hitt nyakörvünk. Még nagyobb volt az örömünk, amikor kiderült, hogy a nyakörv rendesen mérte a GPS pozíciókat, csupán a VHF jelet és az adatokat nem adta. Így végül 3 állatról sikerült adatokat gyűjtenünk.

Az adatfeldolgozás

A távoli adatletöltés egy RX-900 nevű eszközzel történik (*2. ábra*). Ez az eszköz alkalmas a VHF jelek vételére, az állat keresésére, valamint a továbbított adatok tárolására. Az adatletöltéshez legalább 1500 m-re kell megközelíteni az állatot. Sajnos az adatátviteli sebesség elég lassú, egy pozíció letöltése körülbelül 3 másodperc, így akár 30 percen keresztül is fogni kell az adatokat, és amennyiben az állat gyorsan mozog közben, akkor utána kell hangolni az RX-900-at, mert különben elveszítünk pozíciókat. Természetesen ezeket a pozíciókat a nyakörv tárolja, tehát a nyakörv begyűjtése után minden adat megtalálható abban. A következő táblázat egy minta a letöltött adatokból (*II. táblázat*)

2. ábra. Adatletöltés az RX-900-al

II. táblázat. A letöltött adatok. Minta

Nyakörv	Dátum	Idő	Fi	Lambda	DOP	Q
2	2004.05.14	15:17:28	46.54898	16.73266	3	2D
2	2004.05.14	18:15:56	46.54969	16.72754	8	2D
2	2004.05.14	21:16:00	46.55211	16.72654	2	3D
2	2004.05.15	0:15:36	46.55147	16.72455	9	2D
2	2004.05.15	3:15:56	46.55090	16.72441	3	2D
2	2004.05.15	6:15:56	46.55132	16.72356	5	2D
2	2004.05.15	9:15:56	46.55132	16.72299	1	2D
2	2004.05.15	12:16:00	46.55858	16.71865	4	3D
2	2004.05.15	15:16:40	46.54841	16.71204	2	3D
2	2004.05.15	21:16:12	46.54613	16.72711	4	3D
2	2004.05.16	0:15:56	46.55061	16.73216	2	2D
2	2004.05.16	3:15:56	46.55147	16.73266	2	2D
2	2004.05.16	21:15:40	46.56370	16.73337	5	3D

A táblázat adatait megvizsgálva több érdekes dolog is feltűnhet: egyrészt vannak olyan időpontok, amikor nincsen pozíció (pl. 05.16. 6 – 18 óra), másrészt elég változatos időre volt szüksége a nyakörvnek a pozíció meghatározásához (36 mp – 148 mp), és elég különböző DOP értékek láthatók. A három nyakörv sikeressége látható a következő táblázatban (*III. táblázat*)

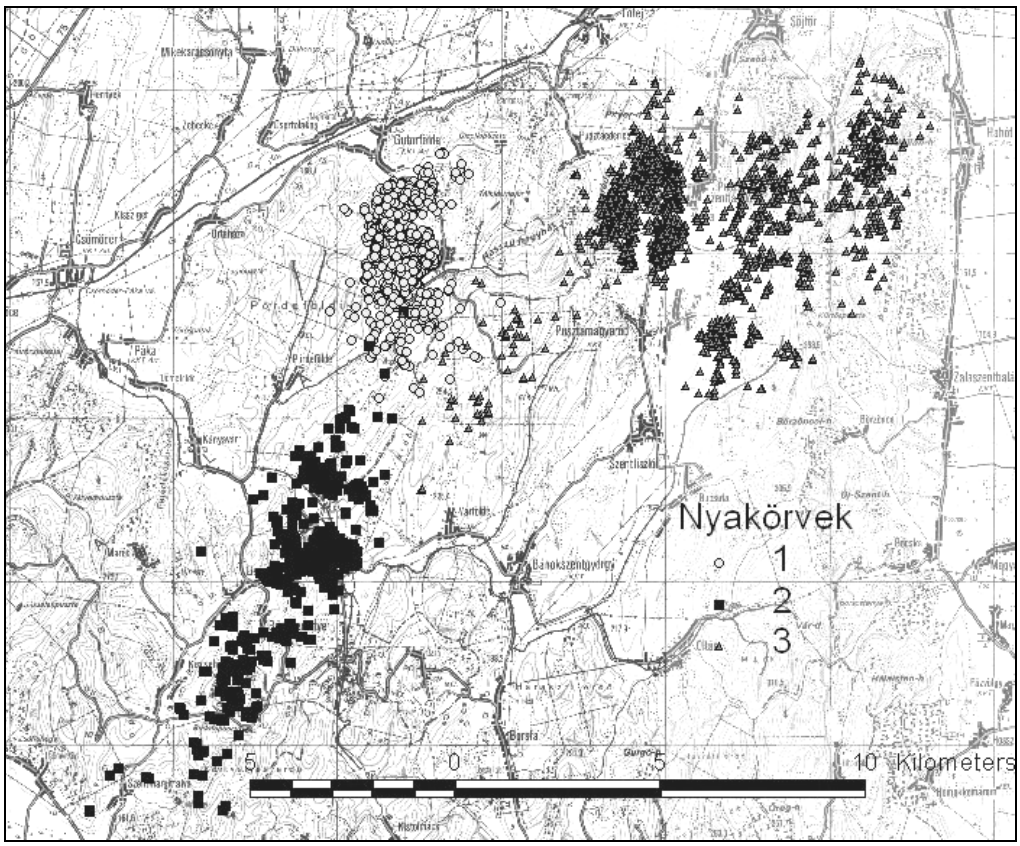
III. táblázat. A nyakörvek sikeressége.

Nyakörv	Napok száma	Elméleti pozíciószám	Mért pozíciók száma	Sikeresség %	Távolság km	Sebesség km/h
1	309	2472	1420	57	682	0.092
2	248	1984	1031	52	451	0.076
3	344	2752	2420	88	919	0.115

A „2-es nyakörv” alacsony sikerességéhez az is hozzátartozik, hogy ez a nyakörv még fent van a szarvason, és csak távolról töltöttük le a mért pozíciókat, amelynél az adatátviteli hibák miatt – főként a fent említett letöltési nehézségek következtében – nem mindig kapjuk meg a teljes adatsort. Az „1-es nyakörv” alacsony sikerességének az okát nem tudjuk, a nyakörvet a gyártó cég technikusai vizsgálják. A nyers adatsorok arra is lehetőséget adnak, hogy megnézzük mekkora távolságot, és milyen sebességgel tettek meg az állatok (*III. táblázat*). Természetesen ezek az értékek csak a 3 óránkénti pozícióból származnak, tehát ennél biztosan többet mozogtak. A „2-es nyakörv” alacsony sebességi értékének egyik oka szintén a hiányos pozíciók.

A három állat mért GPS pozícióit Egységes Országos Vetületi rendszerbe (EOV) transzformáltuk. A ponthalmazok a következő ábrán láthatók (*3. ábra*). A ponthalmazokból jól látható, hogy a nyakörvvel jelölt szarvasok viszonylag szűk területeken mozogtak. A mozgáskörzet nagyságára, ún. otthonterületére vonatkozó adatokat a következő módszerekkel számítottuk ki:

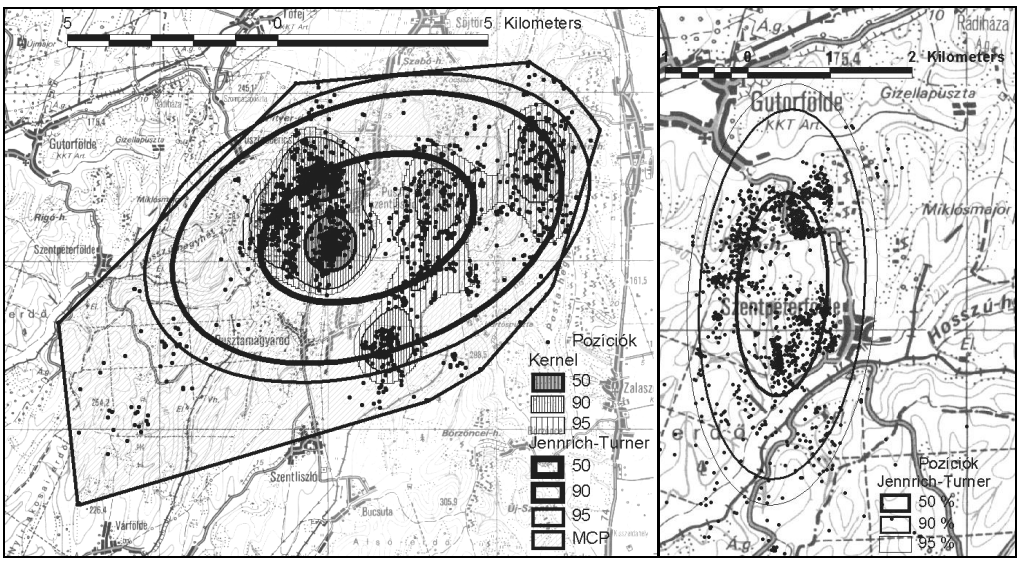
1. Legkisebb konvex terület (minimum convex polygon – MCP)
   Ennél a módszernél a pontokat – esetleg a pontok bizonyos százalékának – befoglaló legkisebb konvex területet értjük. A szélső pontok kihagyásához a harmonikus átlag módszert alkalmazhatjuk.
2. Kernel módszer
   Az egyik legáltalánosabban alkalmazott sűrűség becslési módszer. Mi a Silvermann-féle (*Silvermann 1986*) módszert a következő paraméterekkel használtuk: 50 m-es cellaméret, és 500 m-es keresési sugár.
3. Jennrich-Turner módszer
   Ez a módszer a Jennrich-Turner féle bivariáns normál élőhelyet adja meg *(Jennrich, Turner 1969).*



3. ábra. A 3 nyakörv mért pozíciói. Állami alapadatok felhasználásával készült

A „3-as nyakörv"-et viselő szarvas otthonterületére vonatkozó térkép látható a következő ábrán (*4. ábra*). A szarvasok otthonterület-kiterjedésének terület-kimutatása pedig az alábbi táblázatban (*IV. táblázat*). Az ábrából és a táblázatból is jól látható, hogy a legkisebb konvex terület módszere (MCP) adja a legnagyobb területet. A Jennrich-Turner féle módszer a „3-as nyakörv" esetében nem túl jó, ugyanakkor ezen a zalai területen van jelentősége, mivel itt a domborzat miatt – É-D irányú völgyek – az állatok mozgása bivariáns (*4. ábra*). Amennyiben a ponthalmazokat időben különválasztjuk, akkor a másik két állat mozgásánál is megfigyelhető ez a bivariancia.

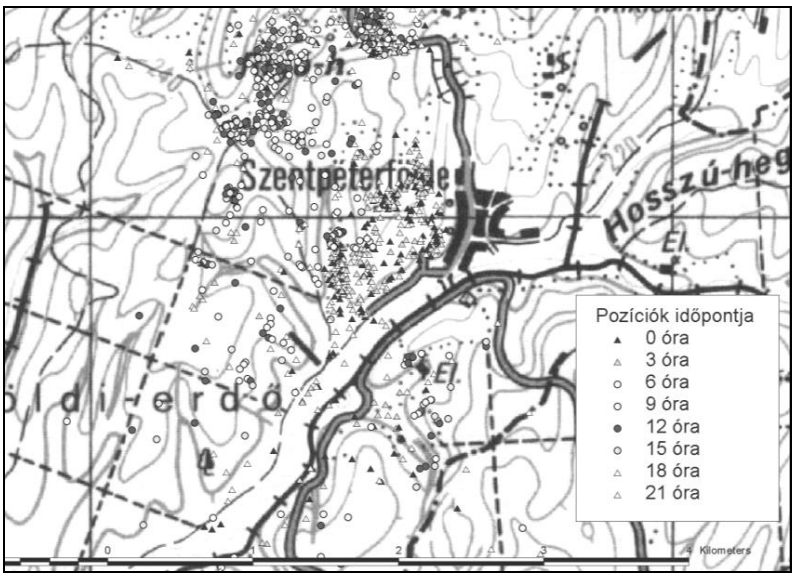
Nagyon érdekes megvizsgálni azt is, hogy időben hogyan változik az állatok tartózkodási helye. Az időbeni változásnak két ritmusát könnyen el lehet különíteni; a napi ritmust és az éves ritmust. Ezen időbeni változások figyelhetők meg a *5. ábrá*-n. Az ábrából egyértelműen kiderül a nappali pihenőhely, valamint az éjszakai tartózkodási hely elkülönülése. Míg nappal szívesebben tartózkodik erdős területen a szarvas, addig éjszaka kimerészkedik a mezőkre és szántóföldekre is. A hónapok szerinti megoszlás jól mutatja, hogy a nyári hónapokban jóval kevesebbet mozog, és főként beregi területeken tartózkodik, addig az őszi-téli hónapokban szívesebben van az erdőben, és jelentősen többet mozog. Ennek oka lehet a kisebb táplálékkínálat, vagyis a megfelelő mennyiségű táplálék megszerzésének szükségessége. Ugyanakkor az ilyenkor gyakoribb, és nagyobb zavarással járó ún. terelővadászatok is nagyobb mozgásra késztethetik az állatokat.



4. ábra. A „3-as nyakörv" és az „1-es nyakörv" élőhelye. Állami alapadatok felhasználásával készült

IV. táblázat. Terület-kimutatások

Módszer	Valószínűség	Nyakörv	Terület		
	%		m^2	ha	km^2
MCP	100	1	17662420	1766.2	17.66
Kernel	95	1	9959882	996.0	9.96
Kernel	90	1	7554801	755.5	7.55
Kernel	50	1	2332434	233.2	2.33
Jennrich-Turner	95	1	9247303	924.7	9.25
Jennrich-Turner	90	1	7107674	710.8	7.11
Jennrich-Turner	50	1	2139620	214.0	2.14
MCP	100	2	36856874	3685.7	36.86
Kernel	95	2	9409375	940.9	9.41
Kernel	90	2	4385158	438.5	4.39
Kernel	50	2	1134132	113.4	1.13
Jennrich-Turner	95	2	16774050	1677.4	16.77
Jennrich-Turner	90	2	12892892	1289.3	12.89
Jennrich-Turner	50	2	3881141	388.1	3.88
MCP	100	3	84044991	8404.5	84.04
Kernel	95	3	23219891	2322.0	23.22
Kernel	90	3	12992344	1299.2	12.99
Kernel	50	3	1815813	181.6	1.82
Jennrich-Turner	95	3	57967420	5796.7	57.97
Jennrich-Turner	90	3	44554993	4455.5	44.55
Jennrich-Turner	50	3	13412369	1341.2	13.41



5. ábra. Az „1-es nyakörv" pozíciói óránkénti bontásban. Állami alapadatok felhasználásával készült

Összefoglalás

A GPS telemetriás mérések jelentősen több és pontosabb adatokat szolgáltatnak, mint a hagyományos telemetriai vizsgálatok. Az adatok elemzése sok érdekes eredményt hozott.

További terveink között szerepelnek a szarvasok mozgásterületének terepi bejárásai, az erdő- és mezőgazdasági adatok összegyűjtése és az elemzésbe való bevonása, valamint a mintaszám – a nyakörvek számának – növelése. Már sikerült beszerezni két olyan nyakörvet is, amely a mért pozíciókat műholdas kommunikáció segítségével email-en keresztül küldi el, valamint lehetőség van a nyakörv időközbeni átprogramozására is.

Az eddigi adatsorok is számos további lehetőséget kínálnak egyéb adatokkal – pl. a vadászatokkal – való összevetésre.

Hivatkozások

Jennrich RI és Turner FB (1969): Measurement of non-circular home range. *J. Theor. Bio*. 2, 227-237.
Hooge PN (): Animal Movement Analysis Arcview Extension. USGS - BRD, *Alaska Biological Science Center*
Silverman BW (1986): Density Estimation for Statistics and Data Analysis. *Chapman and Hall*, New York.

GPS MÉRÉSEK OPTIMÁLIS IDŐTARTAMA ERDŐVEL FEDETT TERÜLETEKEN

*Gyimóthy Attila**

Optimal duration of GPS measurements under forest canopy *- Contradictory information can be found in the literature about the precision of GPS measurements under forest canopy. According to our experiences the precision is strongly influenced by the density of the forest cover, the seasonal variation and quality of the leafage, the rough topography in the forest as well as the duration of the measurements. The effects of the forest cover and the seasonal variation of the leafage can be proved unambiguously in the cases of deciduous and coniferous forests, too. The precision can be improved by longer duration of the measurements as well, but in that case the economic aspects have to be taken into account. The measurement duration, longer than 30-60 minutes, does not improve the precision significantly. The errors of the position determination on our test field varied between 0.01-25.00 m depending on the circumstances and the fixing of phase ambiguities. Our main research aim is to develop a method for estimation of expectable precision under different forest covers and for different time points by means of evaluating zenith pictures made by fisheye lens.*

Keywords: GPS, forrest

Az erdei lombozat alatt végzett GPS mérések pontosságáról a szakirodalomban többnyire ellentmondásos információkat találhatunk. Vizsgálataink szerint a pontosságot az erdőfedettség sűrűsége, a lombtakaró szezonális változása és minőségi jellemzői, a szabdaltabb erdei topográfia, valamint a mérések időtartama is jelentősen befolyásolja. Az erdőfedettség- és a lombtakaró változásának hatása a lombos és a tűlevelű állományokban is egyértelműen kimutatható. A pontosság a mérési időtartam hosszával is növelhető, de ekkor a gazdaságossági szempontokat is figyelembe kell venni. A mérés időtartamának növelése 30-60 perc után már nem hoz számottevő javulást. A tesztterületen végzett pontmeghatározások hibája a külső körülmények és a fázis-többértelműség feloldásának függvényében a 0.01-25.00 m tartományban változott. A kutatásaink fő célja a halszemobjektíves zenit felvételek kiértékelésével a különböző fedettségekre és időpontokra vonatkozó várható pontosság becslésének kidolgozása.

Kulcsszavak: GPS, erdő

Bevezetés

A GPS erdészeti alkalmazásainál az egyes feladatok pontossági igénye, az erdőfedettség sűrűsége, a lombtakaró szezonális változása és minőségi jellemzői, valamint a szabdaltabb topográfia miatt eddig a navigációs alkalmazások kerültek előtérbe (*Ádám et al. 2004*). Erdőterületeken a fák kitakarják a műholdakat, ami jelentősen megnöveli a mérési időt, szélső esetben a mérést is lehetetlenné teszi. A vevő és a műholdak közötti kapcsolat szakadozottsága miatt a fázis-többértelműség meghatározása nem egyértelmű, ami nagymértékben csökkentheti a helymeghatározás pontosságát. A helymeghatározás bizonytalansága a faanyag és lomb mennyiségéhez és eloszlásához köthető. Az utóbbi években az erdőműveléssel és a természeti erőforrások megőrzésével kapcsolatos erdőfeltárási és fotogrammetriai tevékenység a fedettebb területeken is igényli a geodéziai pontosság biztosítását, ezért kutatási programunkban széleskörűen vizsgáljuk a záródás, a fa méret és általános biológiai jellemzőinek hatását a különböző típusú GPS vevők és feldolgozási módszerek által elérhető pontosságra, a Magyarországon jellemző fedettségi viszonyok mellett.

A „GPS technika nagypontosságú alkalmazásának vizsgálata erdővel fedett területeken” címmel a Nyugat-Magyarországi Egyetem Földmérési és Távérzékelési Tanszéke 2001-ben pályázatot nyújtott be az Országos Tudományos Kutatási Alaphoz. A kedvező elbírálásra talált pályázat

*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: gyimothy@ggki.hu

keretében 2002 május 1-től elindulhatott a kutatás. Jelen tanulmány az eltelt időszak eredményeit és a további célokat mutatja be. Az eredményes kutatáshoz szükséges teszterületeket, illetve a mintapontokat - a soproni Tanulmányi Állami Erdőgazdaság hozzájárulásával és támogatásával – az Erdőgazdaság területén jelöltük ki (*Bácsatyai, Gyimóthy 2002*).

A kutatási feladatról

A kutatási teszterület a Soproni-hegyvidéken helyezkedik el. Itt 10 állandósított mintapontot jelöltünk ki. A kijelölt mintapontok hazánk erdeire jellemző helyeken, részben lombos, illetve örökzöld, részben fiatal-, közép- és időskorú erdőállományban, erdei úton, illetve útkereszteződésben helyezkednek el. A mintapontok állandósítása helyszínen csömöszölt betonnal (d = 10 cm, h =50 cm), a pontjelölés acélcsappal történt.

A mintapontok koordinátáit sokszögeléssel és trigonometriai szintezéssel, Sokkia PowerSet mérőállomással határoztuk meg. A WGS84 és a HD-72 vonatkozási rendszerek közötti 7 paraméteres koordináta-transzformációt Sopron környékén található OGPSH pontok felhasználásával határoztuk meg. A transzformációs paramétereket és a transzformációt a Nyugat-Magyarországi Egyetem Földmérési és Távérzékelési Tanszéken készült szoftver legutóbbi verziójával végeztük el.

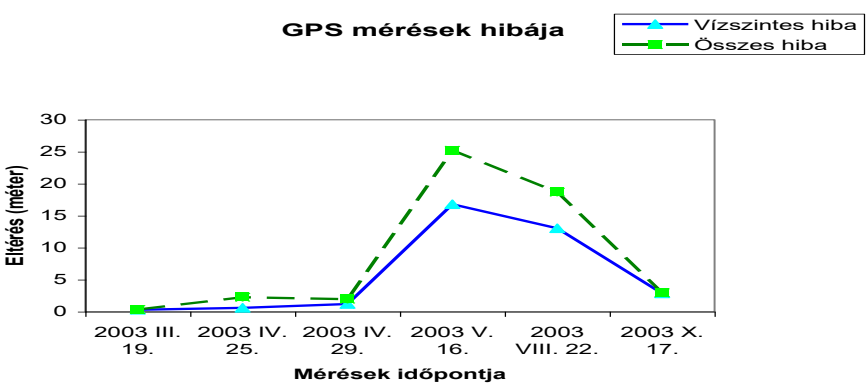
A lombkorona változásának és a pozíciós hibák összefüggéseinek meghatározását a különböző vegetációs ciklusokban végzett GPS mérések eredményei szolgálják. 2003-ban és 2004-ben több, mint 12 alkalommal végeztünk mind a 10 mintaponton 1 órás méréseket Trimble 4000 SST típusú vevőkkel, mindig azonos vevőket, beállításokat és antennamagasságokat alkalmazva. A kitakarás egzakt meghatározására a mérések előtt – az antenna fáziscentrumának helyéről - 180°-nál nagyobb nyílásszögű, s így a teljes égboltot lefedő halszemoptikával felvételeket készítettünk (*Király et al. 2003*). A felvételt a mérés előtt és után is elkészítettük, kiküszöbölendő a nap megjelenését a felvételen.

A mérések feldolgozása (GPSurvey 2.35) során ionoszférikus korrekciót is alkalmaztunk, tapasztalataink szerint pontosabb eredményeket kaptunk vele. A kapott koordinátákat átszámítás után összehasonlítottuk a hagyományos módszerrel meghatározott koordinátákkal.

A kutatás során kipróbáltunk több gyártó navigációs célú berendezéseit és RTK műszereit is egy GPS bemutató keretében. Ezen mérések eredményeit jelen tanulmányban nem használtuk fel.

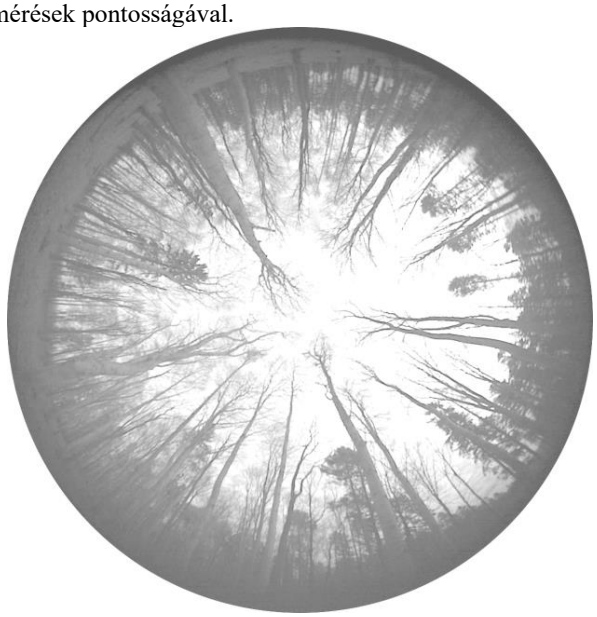
A mérések pontossága

Az eredmények igazolták várakozásainkat, miszerint a mérések pontosságának változása követi a vegetációs ciklus változásait. Ez jó látható az *1. számú ábrán*, ahol a vízszintes koordináta-eltérések mellett a teljes (vízszintes és függőleges) eltérések változását is bemutatjuk az idő függvényében (a pont egy középkorú bükkösben helyezkedik el):



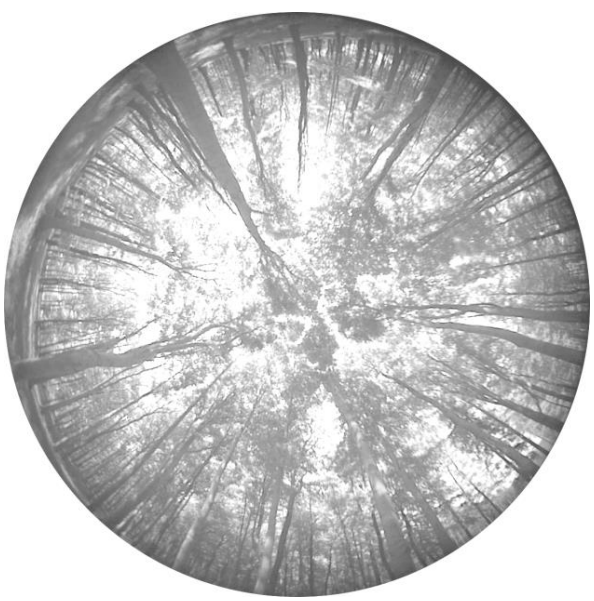
1. ábra. A 8. számú mintaponton végzett GPS mérések „hibái”

A téli időszakban még nincsen lomb, csak a faanyag okoz kitakarást (*2. számú ábra*). A tavaszi időszakban az eltérések enyhe növekedése figyelhető meg, ez kapcsolatban áll a lombfakadással. Ebben az időszakban a mérések pontossága 30 cm körül alakul, ez megegyezik a vegetációs időn kívüli (téli időszak) mérések pontosságával.



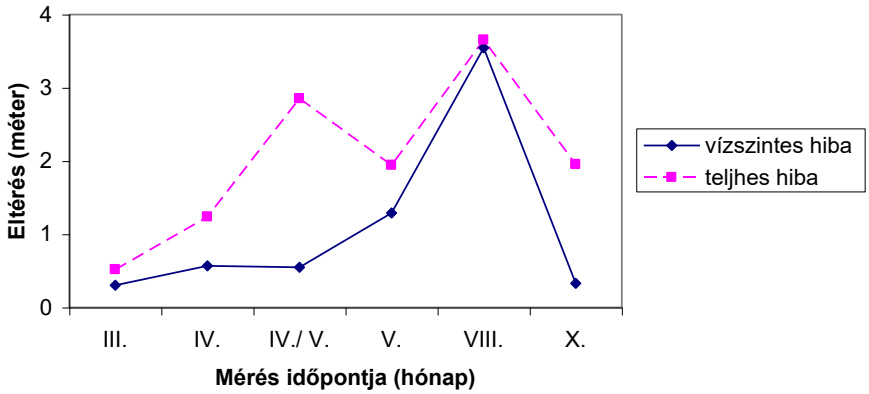
2. ábra. A 8. számú mintaponton téli időszakban készült felvétel

A nyári időszakban a kitakarás nagy részét a lombozat adja (*3. számú ábra*). Ilyenkor a mérések megbízhatatlanok, akár 25 méteres hiba is előfordulhat. Az őszi időszakban, a lomb száradásával, sárgulásával, lehullásával párhuzamosan nő a mérések pontossága egészen a téli maximumig.



3. ábra. A 8. számú mintaponton nyári időszakban készült felvétel

Érdekes módon ez a trend figyelhető meg az örökzöldek esetén is a *4. ábrán*. Itt a sűrűn álló fák miatt a szórás nem 1 centimétertől 25 méterig változik, hanem 0.5 és 4 méter között van. A 3. számú mintapont egy középkorú lucfenyvesben helyezkedik el:



4. ábra. A 3. számú mintaponton végzett GPS mérések „hibái"

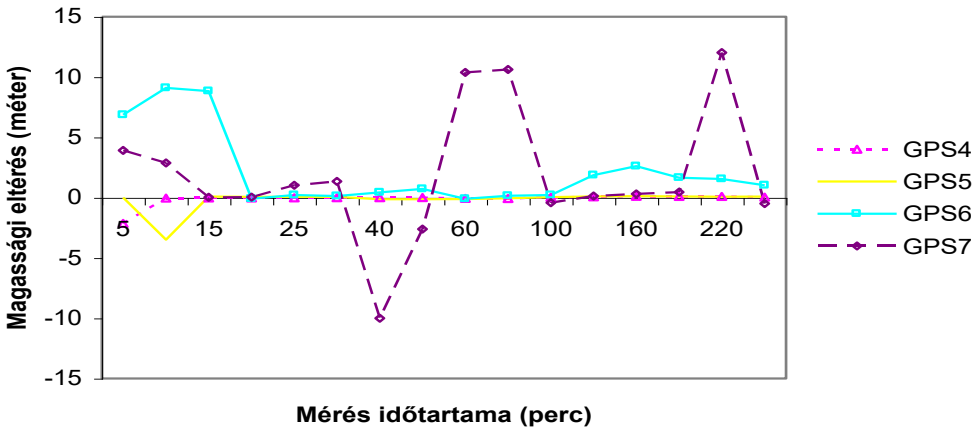
A mérések maximális pontosságát elsősorban az erdőterület fatömege befolyásolja. Minél sűrűbben vannak a fák, minél vastagabb a törzsük, annál nagyobb darabot takarnak ki az égboltból és teszik bizonytalanabbá a távolságmérést. Azokon a mintaterületeken, ahol az égbolt legalább 25%-a szabad, ott a tavaszi időszakban is biztosított volt a cm-es pontosság – az eddigi vizsgálataink alapján.

A mérések optimális időtartama

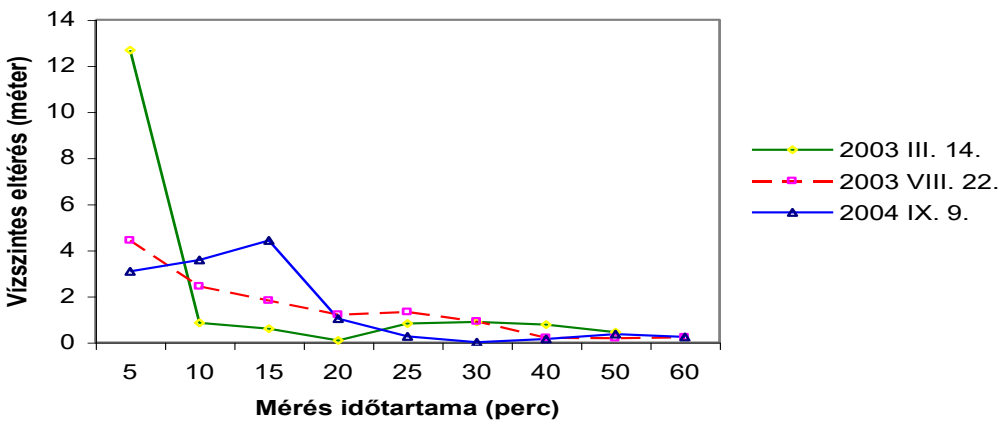
Általánosan elmondható, hogy minél hosszabb egy GPS mérés időtartama, annál pontosabb eredmény várható. Az érdekeink azonban azt kívánják, hogy igyekezzünk a legrövidebb idő alatt elvégezni a feladatainkat. Az erdő alatti GPS mérések optimális hosszának meghatározásához - a terveknek megfelelően - hosszabb idejű (több órás) méréseket is végeztünk a mérések optimális időtartamának meghatározásához. Az adatok feldolgozása során a mérés időtartamát kisebb szakaszokra bontottuk. Ezek a szakaszok 5, 10, 15, …, 55, 60, 70, 80, …, 220, 230, 240 perc hosszúságúk voltak.

Amint várható volt, az első 30 percben fokozatosan javult a pontosság (*5. ábra*), de utána – főleg a nagyobb fasűrűségű mintapontokon – ismét nagy szórást mutattak a koordináták. (A 4., 5., 6. számú mintapontok egyre csökkenő mennyiségű szabad égbolttal rendelkező mintapontok.) Ezek alapján a mérés időtartamának növelése 30-60 perc után nem hoz számottevő javulást a pontosságban, sőt, bizonytalanná teszi eredményünket.

Azonos mintaponton, különböző időpontokban végzett méréseket is feldolgoztam különböző hosszúságú szakaszokra bontva. A *6. számú ábrán* látható, hogy a kitakarás változásától (vegetációs ciklus változásától) függetlenül fokozatosan javul a mérés pontossága az 1 óra időtartamú mérés alatt. Azonban ez a pontosság geodéziai célokra nem mindig megfelelő.



5. ábra. 4 mintaponton végzett GPS mérések magassági eltérései



6. ábra. 6. számú mintaponton végzett GPS mérések vízszintes eltérései

Problémák, további feladatok

A mérésekkel párhuzamosan készített zenitfelvételek kiértékelésénél problémát jelentett, hogy az általunk használt azonos típusú fényképezőgépekkel (2 db) készített felvételek eltérő belső tájékozási adatokkal rendelkeznek.

Itt derült ki az is, hogy a felvételek északi irányba történő tájékozása nem pontos, több foknyi elfordulás tapasztalható a különböző időpontokban, azonos helyszínen készített felvételek között. Az eltérés nem a mágneses észak változásából adódik, és mivel a helyszíni tájékozás a fényképezőgép leszerelése mellett történt, valószínűleg a használt tájoló nem felel meg a pontossági követelményeinknek. A felvételek felhasználásához további korrekciók szükségesek: egyrészt az észlelt elfordulás kijavításához tájékozópontokat kell keresnünk a felvételeken, ezeket a területen bemérni, illetve referenciafelvételeket kell készítenünk, és ehhez tájékozni az elkészült képeinket; másrészt a mágneses észak változásaival is korrigálni kell a tájékozást.

2005 során tervezzük a zenitfelvételek kiértékelését. A zenitkamera kalibrációjával a felvételminden pixeléhez irány- és magassági szög rendelhető, a GPS mérési fájlokból pedig kinyerhető

egy adott időponthoz tartozó műholdpozíció. Így megállapítható, hogy az adott időpontban történő mérést faanyag vagy lomb befolyásolta. Az ehhez kapcsolódó összefüggés meghatározására félautomatikus, illetve automatikus képfeldolgozási eljárások kidolgozását tervezzük. Távlati elképzelésünk, hogy adott mérési helyen a zenitfelvétel birtokában meg tudjuk tervezni a mérést, illetve adott biztonsággal meg tudjuk mondani azt is, hogy milyen időpontban milyen pontossággal lehet a mérést elvégezni.

A mérési munkálatok folytatásaként különböző típusú vevőkkel is végzünk próbaméréseket a tesztterületünkön, illetve más szoftverekkel is feldolgozzuk adatainkat.

A kutatás várható eredménye egy olyan műszaki dokumentáció, amely tartalmazza a GPS hazai erdőállomány alatti alkalmazásának kritériumait: optimális pontkiválasztás, mérések szezonális megválasztása, mérési idő javasolt hossza, mérési periódusok javasolt hossza, a feldolgozás módszere, várható megbízhatóság.

Összefoglalás

A cikkben beszámoltunk a kutatásunk elvégzett feladatairól és eredményeiről. A vizsgálatok során a mintapontok kiválasztása megfelelőnek bizonyult, a várható összefüggés megjelent a mérések pontossága és a kitakarás között. Bebizonyosodott, hogy lehetséges erdővel fedett területeken geodéziai pontosságú GPS méréseket végezni, bár ehhez több feltétel is szükséges.

Bemutattuk, hogyan változik a mérések pontossága különböző hosszúságú mérési időtartamok alatt. A cikk végén jeleztük a felmerülő problémákat, és terveinket is.

Köszönetnyilvánítás

Ezúton is köszönetet mondunk az Országos Tudományos Kutatási Alapnak, amelynek támogatása lehetővé tette, hogy T 037384 számmal jegyzett kutatásunk elinduljon.

Hivatkozások

Bácsatyai L, Gyimóthy A (2003): GPS technika erdővel fedett területeken. *Geomatikai Közlemények* V, 303-308.

Király G, Kovács Gy, Jobbágy Zs (2003): Halszemoptikával készült amatőr zenitfelvételek erdészeti alkalmazása. *Geomatikai Közlemények* V, 335-343.

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás. *Műegyetemi Kiadó.*

OPTIMALIZÁLÁS ÉS GIS

Sárközy Ferenc[*]

Optimization and GIS *- There is a growing demand in connecting the optimization techniques to other tools of spatial planning and design. The paper gives a review of the most important types of spatial optimization applications. It sketches out the available optimization techniques and makes an attempt to stake out the limits of possible extensions of GIS functionalities resulting in more organic link between GIS analysis and planning methods and optimization techniques.*

Keywords: spatial planning, optimization, GIS functions

Az optimalizálási feladatok összekapcsolása a térbeli tervezés munkaeszközeivel a térinformatika egyik legfontosabb megoldandó feladatcsoportja. A tanulmány megvizsgálja a legfontosabb alkalmazás-típusokat, felvázolja a rendelkezésre álló optimalizálási technikákat és megpróbálja kijelölni a GIS funkcionális kereteinek szükséges bővítését ahhoz, hogy az optimalizálási feladatok a GIS elemző-tervező eszközeinek szerves részévé váljanak.

Kulcsszavak: térbeli tervezés, optimalizálás, GIS függvények

Bevezetés

A műszaki, gazdasági, szervezési feladatok általában többféle terv alapján oldhatók meg. Előfordulnak azonban olyan esetek, amikor az elvégzendő feladat a kor műszaki (vagy gazdasági) teljesítményének maximumát igényli ahhoz, hogy egyáltalán megoldható legyen. Ez volt a helyzet – műszaki vonatkozásban – a kozmosz meghódításának hajnalán, vagy gazdasági téren, az amerikai piacgazdaság átállításakor központi irányítású tervgazdasággá a II. Világháború eredményes megvívása érdekében.

Lényegében ez utóbbi eseményhez kapcsolhatjuk a különböző optimális tervezési feladatok gyakorlati alkalmazott tudománnyá válását operációkutatás névvel. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy a gyakorlati feladatok jelentős számításigénye miatt az operációkutatási módszerek széleskörű elterjedését a számítástechnika gyors fejlődése tette lehetővé.

A GIS megjelenésének egyik kifejezett célja a térbeli elemzés volt, ami tulajdonképpen nem más, mint a térbeli tervezést előkészítő és alkotó lépések összefoglaló elnevezése. Ha tehát a GIS egyik legfontosabb feladata a térbeli tervezés elősegítése, úgy kézenfekvő, hogy ez alatt a folyamat alatt optimális tervezést kell értenünk, azaz a térbeli tervezési folyamatban az optimális tervezés eszközeivel is rendelkeznünk kell.

Nem szabad ugyanakkor elfelejtenünk, hogy a térbeli tervezési feladatok gyakran igényelnek különböző modellező algoritmusokat, melyek bár bemenő adataikat a GIS állományaiból nyerik, maguk különböző lazasággal kapcsolódhatnak a GIS szoftverhez, szoros kapcsolat hiányában pedig az optimalizálás tulajdonképpen a tervező modul és nem a GIS szoftver tulajdonsága.

Ha azonban az utóbbi tíz év szoftverfejlődési tendenciáiból indulunk ki, úgy joggal várhatjuk, hogy a GIS szoftverek olyan nyílt rendszerekké válnak, melyek szabadon bővíthetők különböző tervező modulokkal, ugyanakkor az optimalizáló eszközök egyre inkább az alap szoftver részeivé váljanak.

A GIS és az optimalizálás kapcsolat típusai

Amint a bevezetőben már láttuk a mindenki számára kézenfekvő kapcsolat a GIS és az optimalizálás között a térbeli tervezésben nyilvánul meg. A térbeli tervezés során, felhasználva a GIS rétegekhez (objektumokhoz) rendelt attribútumokat a tervező modul meghatározza a tervezett létesítmény viszonyát a kérdéses rétegekhez (objektumokhoz), majd a GIS eszközei segítségével megjeleníti az eredményt egy réteg (objektum) formájában. Jól illusztrálja ezt a legáltalánosabb kapcsolatot példá-

[*]*BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: sarkozy@agt.bme.hu

ul az IDRISI szoftver PATHWAY modulja, mely adott kezdő pont, súrlódási felület és cél esetén meghatározza és rétegként megjeleníti a „legrövidebb" utat.

Talán kevésbé közismert, de a széles felhasználói körök által eredményében igen gyakran használt optimalizálás az automatikus térkép-generalizálás algoritmusaiban valósul meg. Az automatikus generalizálás alkalmazása elkerülhetetlen az igény alapú térképezést realizáló Internetes alkalmazásokban.

Eredeti kapcsolat kialakítására tesznek javaslatot az optimalizálás és GIS között *Rolland et al. (1996)* (*letölthető a http://hsb.baylor.edu/ramsower/ais.ac.96/papers/rolland.htm címről)*. Elképzelésük szerint, a GIS szoftverek alkalmasak arra, hogy segítségükkel a kombinatorikus optimalizálás bizonyos paramétereit a felhasználó interaktívan határozza meg a GIS segítségével. A hivatkozott tanulmány bemutatja, hogy a szerzők által létrehozott grafikus interfész segítségével miként vezérelheti a felhasználó a *p*-medián hozzárendelési feladat „tabu keresés" szerinti megoldását. Az elképzelés jelentősége, véleményem szerint, abban van, hogy rámutat arra, hogy a térbeli feladatok kezelése valóban eredményesen csak a GIS-en *belül* valósítható meg.

Néhány gyakori feladattípus

Ha eltekintünk a térkép generalizálás érdekében végrehajtott optimalizálási feladatoktól, úgy a térbeli optimalizálás színtere vagy egy hálózat vagy a pixelekkel modellezett kvázi folyamatos síkbeli tartomány lehet.

Maga a hálózatos megközelítés is vagy generikus, vagy csak a számítási módszereket támogató fogalmi modellként jelentkezhet.

Bizonyos, elsősorban közlekedési feladatok esetében a hálózatos megközelítés természetes követelmény, hiszen a modellek a feladatok lényegét hálózatos környezetre vetítve képesek megfogalmazni. A legegyszerűbb példaként erre az esetre két pont (postai cím) közötti optimális útvonal megtervezését említhetjük, ahol az optimalizálásnak azt kell meghatároznia, hogy a jármű a *csomópontokban* milyen *útszakaszokat* válasszon annak érdekében, hogy a szakaszok összege valamilyen tulajdonságra (például a megtételéhez szükséges időre nézve) optimumot biztosítson. Ebben az esetben tehát a csomópontokból nem lehet tetszőleges irányba fordulni, hanem csak azoknak az utcáknak valamelyikébe, melyek a kérdéses csomópontból indulnak ki, és melyeket a hálózati modellben *ívek* (vagy gráfelméleti terminológiával *élek*) reprezentálnak.

Más a helyzet akkor, ha optimális útvonalat szeretnénk tervezni a terepen. Bár ebben az esetben is alkalmazhatunk a tervezéshez hálózati modellt ez a modell képzetes hálózat lesz, mivel csak azért alkalmazzuk, hogy a számításhoz a hálózati útkereső algoritmusok felhasználhatók legyenek. A valóságban ugyanis a tervezett út bármely pontjában tetszőleges irányba fordulhat el, csak a számítási modellünk korlátozza az elfordulási pontokat a raszter cellák középpontjaira, illetve az e pontokból elvégezhető elfordulásokat a 8 főirányra.

Folyamatos raszter terekkel általában a földhasználati optimalizálások dolgoznak. Ezekben a módszerekben a különböző célokat úgynevezett hasznossági térképek reprezentálják, melyek cella értékei arányosak a kérdéses cella jóságával az adott célra. A problémát az okozza, ha olyan területtel is találkozunk, mely több kitűzött célra is alkalmas. További problémát jelenthet az is, ha az egy célhoz rendelt területre alaki, folytonossági, méretbeli megkötéseket is igyekszünk érvényre juttatni.

A földhasználati optimalizálás speciális típusa az optimális mezőgazdasági művelési mód hozzárendelése a táblákhoz *(Matthews et al. 1999)*. Ebben az esetben a mezőgazdasági nagyüzemek táblái olyan rögzített vektoros objektumok, melyek különböző tulajdonságokkal jellemzett részobjektumokból épülnek fel. Az optimalizálás feladata annak az eldöntése, hogy az üzem egyes tábláin az adott agroklimatikus viszonyok között észszerűen alkalmazható művelési fajták közül mit alkalmazzanak. A modell kutatásaink szerint tovább fejleszthető földrendezési feladatok optimalizálására is, mely témával részletesen külön publikációkban foglalkozott *Gáspár (2002),(2003) (Letölthető a http://www.agt.bme.hu/public_h/gaspar/birtok.htm címről) (http://www.agt.bme.hu/public_h/gaspar/nagyfalu.pdf címről)*.

A továbbiakban ismerkedjünk meg a hálózatokra, raszteres terekre és tábla-objektumokra alkalmazható legfontosabb optimalizálási feladatokkal.

A p-medián modell lényege és legfontosabb alkalmazási területei

A vizsgált hálózatban P darab ellátó központ szerepel, mely feladata, hogy N darab felhasználó igényeit kielégítse. A feladat úgy elhelyezni a hálózati csomópontokon a P darab ellátó központot, és úgy hozzákapcsolni a központokhoz a felhasználókat, hogy a felhasználók igényei kielégítésre kerüljenek, s emellett az igények súlyozott összege minimális legyen. Súlyként az ellátó központ elérhetőségét tekintjük, mely legegyszerűbb esetben a felhasználó és a számára kijelölt központ euklideszi távolsága. A feladat egyik variánsában (kapacitásos p-medián probléma) adottnak tekintik az ellátó központok kapacitásait is.

A feladat alkalmazásra kerül gyárak, raktárak elhelyezésénél, amikor a feladat a piaci igények optimális kielégítése, de alkalmazásra kerülhet a modell a közösségi ellátás területén is iskolák, kórházak, postahivatalok helykijelölésekor, vagy az utak jégtelenítéséhez használt só-depóniák elhelyezésének megtervezésekor *(Church et al. 1994)*.

A kapacitásos p-medián probléma az alábbi kifejezésekkel írható fel *(Rolland et al. 1996)*:

$$Min \sum_i \sum_j a_i d_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

$$\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \tag{2}$$

$$x_{ij} \le y_j \quad \forall ij \tag{3}$$

$$\sum_j y_j = P \tag{4}$$

$$\sum_i a_i x_{ij} \le c_j \ \forall j \tag{5}$$

$$x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \ \forall ij, \tag{6}$$

ahol

a_i – az i csomóponton fellépő igény, c_j – a j csomóponton lévő ellátó központ kapacitása, d_{ij} – az i csomóponttól a j csomópontig tartó távolság, P – az ellátó központok előre megadott száma, x_{ij} értéke 1, ha az i csomópont hozzá van rendelve a j ellátó központhoz, különben 0, y_j értéke 1, ha a j ellátó központ nyitva van, egyébként 0.

Az (1) célfüggvény minimalizálja az igények és a kielégítésükre létrehozott kapcsolattávolságok szorzat összegét. Természetesen a távolság helyett egyéb, az elérést megnehezítő tényezőt is használhatunk a súlyozásra. A (2)-ben röviden leírt i számú korlátozás biztosítja, hogy minden igény-csomópont csak egy darab ellátó központhoz legyen kapcsolva. A (3) korlátozás segítségével azt érjük el, hogy az igények csak nyitott ellátó központhoz legyenek kapcsolhatók. A (4) korlátozás biztosítja, hogy pontosan a megadott P számú ellátó központ legyen nyitva. Az (5)-el jelölt korlátozások veszik figyelembe, hogy minden ellátó központ csak előre meghatározott kapacitással rendelkezik. Ha az ellátó központok kapacitása nincs korlátozva, az (5) elhagyandó. A (6) korlátozások gondoskodnak arról, hogy a döntési változók egészértékűek legyenek.

Ha a feladatot megoldjuk, úgy eredményképpen meg fogjuk kapni, hogy mely csomópontokon van ellátó központ (amilyen j értékekre $y_j = 1$) és hogy melyik igényt jelentő csomópont melyik ellátó központhoz lesz kapcsolva (az összekapcsolásokat azoknak az x_{ij} –knek az indexei mutatják, melyek egyenlők 1-el).

Lineáris súlyok esetén, a feladat megoldására legalkalmasabbnak tekintett szigorú optimalizálási módszerrel, a Lagrange-féle relaxációval, mintegy 800-900 csomópontig lehetséges a megoldás *(Church et al. 1994)*. A nagyobb feladatok megoldása – legalább is egyelőre – különféle heurisztikus eljárással végezhető el.

A heurisztikus eljárások az emberi gondolkodás módszereit hasznosítva olyan ötletek algoritmikus megvalósítását jelentik, melyek jó esetben gyors és hatékony megoldást szolgáltatnak, de nem garantálják a globális optimumot, azaz a legjobb megoldást. Az utóbbi másfél évtizedben a térbeli elhelyezési feladatok megoldására több heurisztikus eljárás számtalan variációját dolgozták ki a kutatók. Ezek közül is a p-medián feladatot talán legeredményesebben a tabu keresés módszer-

ének különféle variációival oldották meg. A feladat megoldására használják még a genetikus algoritmust és a szimulált hőkezelés (simulated annealing) módszerét is. Az előbbivel egy későbbi fejezetben, a földhasználatok táblákhoz rendelésével kapcsolatban fogunk megismerkedni.

A tabu keresés

A tabu keresés *(Hertz et al. 1995)*, mint minden iteratív módszer egy kezdeti megengedett megoldásból indul ki. Megfelelő paraméterezés esetén elvileg a kezdeti megoldás nem befolyásolhatja a végeredményt. A gyakorlat azonban azt mutatja, hogy érdemes a feladat konkrét modellezésével külön heurisztikus eljárást kialakítani a kezdeti megoldás megválasztására, mivel a jó kiinduló megoldás nagymértékben meggyorsíthatja az optimumkeresési folyamatot. A kapacitásos p-medián feladat esetében például a kezdeti megoldást úgy határozhatjuk meg, hogy az N igény csomópontot P klaszterba soroljuk oly módon, hogy a klaszterenkénti összigény ne haladja meg az egyes ellátó központok kapacitását. Ezután az egyes ellátó központokat elhelyezzük a kapacitásuknak összigény szerint megfelelő klaszterek súlypontjához legközelebb eső csomóponton.

A következő lépésben kiválasztjuk a kezdeti helyzethez tartozó szomszédságot a megengedett megoldások halmazából. Ez a halmaz úgy jön létre, hogy meghatározzuk az ellátó központok elmozdulási lehetőségeit jelenlegi helyzetükből a hálózat valamely szomszédos csomópontjára, illetve a kapacitás korlátokon belül megváltoztatjuk az igény pontok hozzárendelési attribútumait az ellátó központokhoz.

Ezután megkezdjük a létrehozott tartományban a mozgásokat, minden egyes mozgáshoz kiértékeljük a célfüggvényt, és minden mozgást rögzítünk a tabu listában.

A tabu lista elsődlegesen azt a funkciót látja el, hogy azokat a mozgásokat ne ismételjük meg, amelyekre a kiértékelést már elvégeztük. Ez az egyszerű megfogalmazás is utal rá, hogy a tabu keresés legfőbb gondolata az, hogy az algoritmus tanuljon az elvégzett keresések eredményeiből.

Ha a kiértékelés eredménye jobb az eddigi legjobb eredménynél, úgy új szomszédságot számítunk és a folyamat így folytatódik, amíg valamely megállási kritériumot el nem érünk.

A módszer számtalan változatában a már említett rövid távú memória mellett különböző erősséggel jelentkeznek a stratégia egyes komponensei.

Valamennyi megoldásban döntő szerepe van a tabu lista tartalmának és hosszának. A lista tartalma az aktuális változást (mozgást) jellemző attribútumok valamilyen formában történő rögzítése, például ha két csomópontot kicseréltünk úgy szerepelhet mindkét pont, de szerepelhet egy tagként a két pont uniója is. A másik paraméter, a tabu lista hossza, általában 7 – 20 elem közt változhat.

A tabu keresés fejlettebb variánsai gondoskodnak a hosszú távú memóriáról is, mely elsősorban az intenzifikálás és diverzifikálás céljait szolgálja. Az intenzifikálás valamely jónak talált megoldáshoz hasonló még jobb megoldások keresését szolgálja, míg a diverzifikálás az eddig megtalált legjobb megoldáshoz nem hasonló új megoldási terek keresését.

Esetenként alkalmaznak olyan stratégiákat is, amikor két jó megoldás közt végzik lépésenként a mozgást a legrövidebb úton, átlépve az út közben talált meg nem engedett megoldásokon az úgy nevezett „alagutazás" segítségével. Ha a kiválasztott két jó megoldás hasonló volt, úgy ez a módszer intenzifikáláshoz vezet, ellenkező esetben diverzifikálást eredményez.

A helyi keresésre valamilyen ismert heurisztikus módszert használ a tabu lista módszer, ezért is nevezik meta-heurisztikus eljárásnak.

Általában a tabu keresést a kérdéses feladat gondos elemzése, modellezése alapján egyedileg szokták megtervezni, bár a legújabb időkben az OptQuest tabu keresésen alapuló megoldó program (solver) mint a kereskedelmi Crystal Ball döntés támogató Exceles szoftver modulja általános optimalizálási feladatokra is használható.

A váltakozó elhelyezés-hozzárendelés (alternate location-allocation = ALA) eljárás

Amint az előzőekben már utaltunk rá, a tabu keresés egy olyan stratégia, mely a helyi keresésre valamely heurisztikus módszert használ és az ezáltal megtalált lokális optimumokra támaszkodva jut el a globális optimumhoz, illetve annak közelébe.

A hosszú évek tapasztalatai azt bizonyítják, hogy az 1963-ban L. Cooper által kidolgozott *(Cooper 1963)* ALA eljárás az elhelyezés-hozzárendelési probléma legeredményesebb *helyi* keresési eljárása. Az eljárás alapgondolata igen egyszerű. Az első lépésben felvesszük a *P* számú ellátó központot (az angol nyelvű irodalomban ezeket rendszerint *NF*-el jelölik a New Facility rövidítéseként). Ezután hozzárendelik az *NF*-ekhez a meglévő *m* számú fogyasztót (rövidítésük *EF*=Existing Facility). A következő lépésben a *létrehozott hozzárendeléshez* optimálisan elhelyezzük az *NF*-eket, azaz az ellátó központokat mozgatjuk míg a hozzárendeléseket változatlanul hagyjuk. Ezután az új ellátó központi elhelyezkedéshez elvégezzük az *EF*-ek hozzárendelését. A vázolt folyamatokat mindaddig ismételjük, amíg az utolsó lépés már nem okoz változást a hozzárendelésben. Ez a helyzet egy általában lokális optimumot jelent. Ezután valamely metaheurisztikus stratégiát alkalmazva, például a véletlen keresést, új helyeket jelölünk ki az ellátó központoknak és elvégezzük a helyi ALA keresést. Amikor már több lokális minimum hely áll rendelkezésünkre alkalmazhatjuk ezek között a tabu keresés korábban már felvázolt módszerét. Ilyenkor a legproblémásabb az új csomópontok mozgási szabályainak kialakítása. A mozgásokat a két legjobb megoldást eredményező helyzet között végezhetjük egy vagy több (egyidejűleg rendszerint maximum két) ellátó központ helyzetének megváltoztatásával.

Mindaz, amit eddig elmondtunk, arra az esetre vonatkozott, amikor az új pontoknak tetszőleges helyet választhattunk, az új pontok (ellátó központok) és meglévő pontok (ellátást igénylő helyek) távolságát pedig légvonalban számoltuk. Megjegyezzük, hogy bizonyos modellek a légvonalban vett euklideszi távolság helyett a koordináta különbségek összegéből megkapható úgynevezett Manhattan távolságot használják, ez azonban további gondolatmenetünket nem befolyásolja.

A gyakorlati térbeli esetekben az ellátó központok kapcsolata az igénylőkkel a közlekedési hálózat segítségével megy végbe. Ebből viszont három dolog következik. Az első az, hogy az igény pontokat az igényt jelentő attribútum értékkel együtt hozzá kell kapcsolnunk a hálózat adatmodellel leképezett közlekedési rendszerhez. Ebben a rendszerben attribútumokkal csak a csomópontok és összeköttetések rendelkezhetnek, azaz az igény pontot vagy valamelyik csomóponttal azonosítjuk, vagy új csomópontot létesítünk az összeköttetésen.

Másodszor, az új pontok sem lehetnek akárhol, hanem csak a hálózat közvetlenül címezhető helyein, azaz a csomópontokon. Ritka úthálózat esetén az új pontok helyének ilyetén korlátozása jelentősen csökkentheti a pontosságot, ezért ilyen esetekben a hálózati modell további finomítása válhat szükségessé.

Harmadszor a hálózati elrendezés esetén a hálózati csomópontok közötti legrövidebb utat az elhelyezési-hozzárendelési folyamat megkezdése előtt *valamennyi csomópont párra* meg kell határozni.

Míg az első és második feladat azt igényli, hogy a hálózati réteget más rétegek felhasználásával a feladatra alkalmas formájúvá szerkesszük, addig a harmadik feladat elvégzéséhez meg kell határoznunk a csomópontok közötti legrövidebb utakat leíró mátrixot. Ez a mátrix esetünkben általában nem lesz szimmetrikus, mivel a `legrövidebb út' meghatározás valójában a legkisebb impedanciájú út fogalmát takarja, az impedancia pedig két csomópont között oda illetve vissza irányban általában különböző lehet.

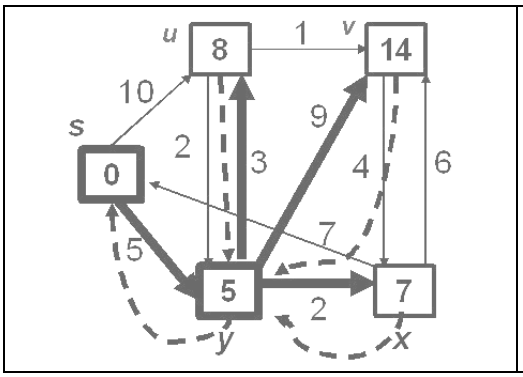
A következő részben megismerkedünk a legrövidebb út meghatározására szolgáló Dijkstra algoritmussal.

A Dijkstra algoritmus

A *Dijkstra* algoritmus *(Dijkstra 1959)* a gráf valamely kiválasztott csomópontjától valamennyi csomóponthoz meghatározza a legrövidebb utat. Ahhoz, tehát, hogy valamennyi, (P+m) csomópont között meghatározhassuk a `legrövidebb utat' az algoritmust (P+m – 1) különböző kezdőponttal ismételten le kell futtatni.

A **G** = **(C,E)** gráf esetére (**C –** a csúcspontokat, **E** – az éleket jelöli) az algoritmus a csúcspontokat két halmazba csoportosítja: **R**-el jelöli azokat a csúcsokat, melyekhez már ismert a kiindulópontból a „legrövidebb út"a többi csúcspont a **C – R** halmazba kerül.

Szüksége van a továbbiakban az algoritmusnak a **d** és **pi** tömbökre, melyek közül az első az egyes csomópontokra vonatkozó legjobb útbecsléseket tartalmazza, míg a második az ehhez az értékhez vezető úton a kérdéses csomópontot megelőző csomópontra mutató indexet.



Csúcspont	Megelőző pi
s	s*
u	x
v	x
x	s
y	x

1. ábra. A megelőző indexek magyarázata

A *1. ábra* példájában a szaggatott nyilak illusztrálják az indexeket. Ha valamelyik csomópontnak nincs megelőzője úgy az index saját magára mutat, ahogy ezt az *s* kiinduló csomópont esetében látjuk.

Az algoritmus fővonala a következő lépésekből épül fel:

1. **d** és **pi** inicializálása;
2. **R** beállítása üres halmazzá;
3. Mindaddig amíg **C** – **R** nem válik üres halmazzá:
    1. rendezi a (**C** – **R**)-ben található csúcspontokat aszerint, hogy melyik aktuális távolság becslése kisebb (előre a legkisebb utána a második legkisebb, stb.),
    2. a (**C** – **R**)-ben található legkisebb távolságú csúcspont, **u** átvitele az **R** halmazba,
    3. az **u**-hoz csatlakozó, valamennyi még (**C** – **R**)-ben található csúcspont *fellazítása*.

A *fellazítás* során valamennyi **u**-hoz csatlakozó olyan **v** csomópont becsült távolságértékét megváltoztatja, mely csökkenni fog, ha az **u**-ból határozzuk meg, azaz ha bekapcsoljuk a **v** útjába az (**u**,**v**) szakaszt.

A legrövidebb útkeresésre számtalan egyéb algoritmust is kidolgoztak a gyakorlati alkalmazások azonban a leggyakrabban az ismertetett *Dijkstra* algoritmuson alapulnak. Ez feltehetőleg a módszer hatékonyságán és egyszerű implementációján alapul. Az elmondottakat jól illusztrálja, hogy a későbbiekben bemutatásra kerülő optimális városi útvonal kijelölő rendszer is ezt az algoritmust használja.

A forgalmi viszonyok vizsgálata közlekedési hálózatokban

Az előző pontban megismerkedtünk a legrövidebb út algoritmusával egy olyan hálózatban, melynek szakaszaihoz (éleihez) kapcsolt tulajdonságai (például a szakaszok hossza) állandó. A gyakorlati útvonal optimalizálás során azonban rendszerint nem a megteendő út hosszát, hanem az utazási időt, esetleg az utazási költségeket kívánjuk minimalizálni. Ezek a jellemzők azonban nemcsak az út hosszától, hanem annak állapotától és a forgalmi áramlatoktól is függnek. Ahhoz tehát hogy reálisan optimális útiterveket tudjunk meghatározni, ismernünk kell az utazás időpontjára érvényes utazási időket a hálózat figyelembe veendő szakaszaira.

Mielőtt megvizsgálnánk a lehetőségeket az utazási idők meghatározására, érdemes egy pillantást vetni arra is, hogy az időpont-függő szakasz időket milyen körülmények között használhatjuk fel.

Az ezredfordulót megelőzően a hálózati modellező programot illetve jobb esetben a vele valamilyen szinten integrált GIS szoftvert csak off-line előzetes útvonal tervezésre használhatták mind a magán felhasználók, mind pedig a professzionális szállítási vállalkozások. Az ezredforduló azonban gyökeres változást hozott a felhasználási lehetőségekben. Az USA-ban, Japánban és az EU

néhány országában (elsősorban Franciaországban) megkezdődőt az ITS (Intelligens Közlekedési Rendszer) koncepció átültetése a gyakorlatba, ezzel párhuzamosan világszerte, igaz különböző szolgáltatási szinten, megjelent az LBS (Hely Alapú Szolgáltatások) rendszere, mely megfelelő ITS infrastruktúra esetén biztosítja, hogy az útvonalválasztás (illetve a korábban már megválasztott útvonal megváltoztatása) menet közben is megtörténhessen. Bár túlnő a témánkon, de megjegyezzük, hogy a GIS-szel összekapcsolt feldolgozó szoftver ezekben az esetekben a városi központban működik, és ez adja a válaszokat a mobil állomások megkereséseire (*2. ábra*).

Ahhoz, hogy a közlekedési hálózat áramlási képét valamilyen módszerrel modellezzük, ismernünk kell a hálózattal szemben támasztott átlagos vagy aktuális forgalmi igényeket. Forgalmi igények alatt egy olyan mátrixot értünk, mely megmutatja, hogy a hálózat melyik pontjából (kezdőpont) melyik pontjába (rendeltetési pont) átlagosan vagy adott időpillanatokban hány jármű kezdi meg az útját. Ezt a mátrixot az angol nyelvű szakirodalom OD (Origin-Destination) mátrixnak nevezi, és a rövidítés kedvéért mi is ehhez az elnevezéshez tartjuk magunkat.

Ennek a mátrixnak az előállítása a hálózatelemzés különböző szintjein többféle módszerrel hajtható végre. Előzetes, kisfelbontású vizsgálatok esetén GIS felhasználásával a térbeli kölcsönhatás-modell futtatásával lehet megvizsgálni, hogy a különböző földhasználati zónák (ipari övezet, kereskedelmi övezet, családi házas lakó övezet, stb.) milyen kölcsönös forgalmi igényeket támasztanak. Ebben a megközelítésben a legfőbb probléma a zónák aggregációs szintjének megválasztása, illetve a tömbnél nagyobb aggregációs szint választása esetén azoknak a pontoknak a kijelölése, ahol a forgalmi igények belépnek a hálózatra. Amint már említettük, ez a módszer alapvetően előzetes tervezésre szolgál, de nem csak a közlekedési hálózat tervezésére használják, hanem meglévő hálózat működésének a tökéletesítésére is olymódon, hogy a földhasználati zónák átalakításával igyekeznek a hálózat terhelését egyenletessé tenni.

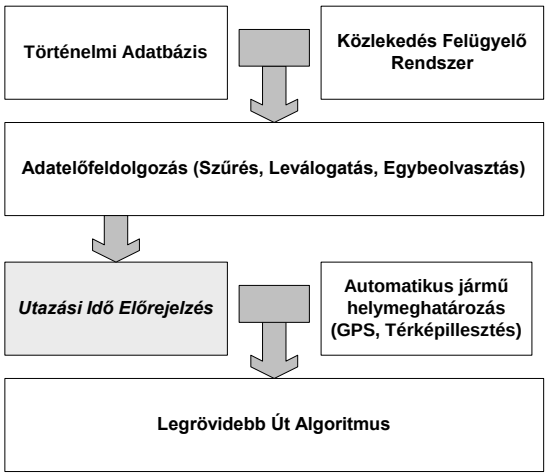
Lényegesen megbízhatóbb eredményeket szolgáltatnak a forgalomszámlálási eredmények, melyeket gyakran a legkülönbözőbb automatikus forgalomfigyelő elemek eredményeivel pontosítanak. Bár tagadhatatlan, hogy a forgalom modellezése szempontjából döntő jelentőségű az OD mátrix pontos és lehetőleg időfüggő kialakítása, a létrehozási módszerek részletezése túlnő a jelen tanulmány témáján.

A szakaszokhoz tartozó aktuális utazási idő becslésére a gyakorlat az alábbi módszereket alkalmazza:

- statisztikai módszerek a korábbi, történelmi adatok fölhasználásával;
- idősorok elemzése (szintén statisztikai módszerek, melyek azonban igyekeznek az adatokról leválasztani a mérési hibákat);
- a paraméter nélküli regressziós analízis olyan korábbi helyzeteket keres, melyek hasonlítanak az aktuális állapotra és a korábbi hasonló helyzetek eredményeiből becsüli az aktuális utazási időt;
- forgalomszimulációs modellek, melyek számítógépen utánozzák a való világ tulajdonságait;
- dinamikus forgalom hozzárendelési modellek, melyek a matematikai programozás (optimalizálás) eszközeivel számítják ki a keresett szakasz utazási időket.

Témánkból kiindulva ez utóbbi módszercsoport két megközelítését próbáljuk bemutatni a továbbiakban.

Az analitikus hálózatelemző módszerek a hálózat állapotát valamely egyensúlyi feltétel érvényre juttatásával határozzák meg. Ha a hálózatot központilag tudnánk irányítani, akkor a *rendszer optimális egyensúly* annak a feltételnek az érvényre juttatását jelenti, hogy a *valamennyi útvonal* megtételéhez szükséges fajlagos költségek (idők) összege minimális. Megjegyezzük, hogy ennek a modellnek az alkalmazása annál inkább indokolt, minél nagyobb a központi, területi vagy városi forgalomirányító központok szerepe. Ennek az a feltétele, hogy legyen ilyen rendszer és a közlekedők igénybe is vegyék a rendszer utasításait. Mivel a fejlődés egyértelműen ebbe az irányba mutat érdemes röviden megismerkedni ezzel a modellel.



2. ábra. Városi közlekedési információs rendszer tömbvázlata

Matematikailag a *rendszer optimális egyensúly* a következőképpen írható fel *(Nagurney 2003) (letölthető a http://supernet.som.umass.edu/articles/handbooktgss.pdf címről).*

$$\sum_{a \in L} \hat{c}_a(f_a) \to \min \tag{7}$$

$$\sum_{p \in P_\omega} x_p = d_\omega, \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{8}$$

$$f_a = \sum_{p \in P} x_p, \quad \forall a \in L, \tag{9}$$

$$x_p \geq 0, \quad \forall p \in P, \tag{10}$$

ahol

$\hat{c}_a(f_a)$ az a szakasz teljes költsége (mely függ az a szakaszon haladó áramlattól f_a -tól), L az irányított élek (szakaszok) halmaza, *P* jelenti az összes hálózati útvonal halmazát, *p* egy útvonalat, Ω az összes OD párt, míg ω egy OD párt, x_p az útvonalon haladó áramlat jelölése, d_ω pedig az ω OD páron fellépő igény (azaz a közlekedni akaró gépkocsik száma).

Mivel növekvő felhasználói költségfüggvényeket feltételezünk a (7) célfüggvény konvex, a lineáris korlátozásokkal megadott megengedett megoldások halmaza szintén konvex, ezért az optimum feltételek a következők: minden ω párra és minden *p* útvonalra a (8)-(10) feltételeket kielégítő *x* áramlatnak ki kell elégítenie az alábbi feltételeket:

$$\hat{C}_p' \begin{cases} = \mu_\omega & \text{ha} \quad x_p > 0 \\ \geq \mu_\omega & \text{ha} \quad x_p = 0, \end{cases} \tag{11}$$

ahol $\hat{C}_p'$ a *p* útvonalon felmerülő teljes összeg növekménye az alábbiak szerint:

$$\hat{C}_p' = \sum_{a \in L} \frac{\partial \hat{c}_a(f_a)}{\partial f_a} \delta_{ap}, \tag{12}$$

itt δ_{ap} értéke 1 vagy 0 attól függően, hogy az a szakasz részt vesz-e a *p* útban vagy sem, μ_ω pedig a (8) korlátozáshoz tartozó Lagrange szorzó.

A gyakorlati feladatok megoldásához ismernünk kell az OD pontok között fellépő közlekedési igények formáját, valamint a rendszerint időben mért költségek függését a szakaszon áthaladó áramlat nagyságától. E mellett azt is figyelembe kell venni, hogy az egyes szakaszoknak mi a kapacitása, milyen mértékű áramlás idéz elő torlódást, illetve a létrejövő torlódások miként változtatják meg a szakaszok megtételéhez szükséges időszükségletet.

A ma már klasszikusnak tekinthető statikus modellek esetén a forgalmi igények függetlenek az időtől, erre az esetre kidolgozott megoldások jellemzik a hetvenes, nyolcvanas éveket. Amikor

azonban az Intelligens Közlekedési Rendszerek koncepciója kezdett határozottabb körvonalakat felvenni, világossá vált, hogy a statikus modellek nem elégítik ki a forgalomirányító és tájékoztató rendszerekkel szemben támasztható követelményeket a gyakorlati feladatok megoldása során. Ennek tudható be, hogy a 80-as évek végétől kezdődően a kutatók figyelme a dinamikus, időben változó igényeket feltételező modellek felé fordult.

Rendszeroptimális útvonalválasztási modell dinamikus forgalmi igények figyelembevétele esetén

Míg a statikus modell azt feltételezi, hogy a szakaszokra jellemző haladási idő állandó és csak attól függ, hogy hány gépkocsi iktatja be a kérdéses szakaszt a tervezett útvonalába, addig dinamikus esetben a kérdéses szakaszon található gépkocsik száma, következésképpen a szakaszokra jellemző haladási idő is az időpont függvénye.

A modellt *Kaufman* és szerzőtársai *(1997)* elektronikus publikációja alapján vázoljuk fel (*http://www-personal.engin.umich.edu/~rlsmith/milp97%20typeset.pdf)*.

Az időbeli változás szemléletes modellezési módszere a hálózatot leíró $G = (N, A)$ gráf időbeli kiterjesztése. A kiterjesztett $G(h) = (\mathbf{N}, \mathbf{A})$ térbeli és időbeli gráfban az eredeti N csomópont halmazhoz tartozó minden x csomópontnak $x(\tau)$-vel jelölt, $h+1$ számú csomópont felel meg az új $\mathbf{N}$ csomópont halmazban, ahol a $\tau = 0,...,h$ megadja, hogy az alapnak választott Δt időszakasz hányszorosa adja meg a kérdéses időpontot. Az időbeli kiterjesztés eredményeképpen az eredeti A halmazba tartozó (x, y) élnek $(x(\tau), y(\tau + s))$ élek felelnek meg $\mathbf{A}$-ban, ahol $\tau = 0,...,h - 1$, $s = 1,...,h$.

Azokat a d csomópontba mint végpontba tartó járműveket, melyek a τ időpontban lépnek be az (x, y) élbe és $\tau + s$ időpontban hagyják azt el, a folytonos és nem negatív $f_d(x(\tau), y(\tau + s))$ áramlatváltozók írják le. Valamennyi végpontba irányuló áramlat vizsgálata esetén az élbe a τ időpontban belépő és azt $\tau + s$ időpontban elhagyó áramlat jelölése a következő: $f(x(\tau), y(\tau + s)) = \sum_{d \in N} f_d(x(\tau), y(\tau + s))$.

A továbbiakban arra lesz szükségünk, hogy meghatározzuk azt, hogy a τ-ik periódus folyamán hány gépkocsi lesz az (x, y) élen. Ha bevezetjük a következő általános jelölést a g vektorokra és Z halmazokra: $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{Z}) \equiv \sum_{z \in Z} g(z)$, valamint meghatározzuk a következő halmazokat: $S = \{1, 2, 3, ...\}$ és $\bar{S} = S \cup \{0\}$, akkor a keresett, a τ-ik periódusban az élen található gépkocsik mennyisége röviden és részletesen is kifejtve: $f(x(\tau - \bar{S}), y(\tau + S)) \equiv \sum_{u=0}^{\tau} \sum_{s=1}^{h-\tau} f(x(\tau - u), y(\tau + s))$.

A feladat matematikai programozással történő megoldásának célfüggvénye:

$$\sum_{\tau=0}^{h-1} \sum_{(x,y) \in \boldsymbol{A}} f(x(\tau - \bar{S}), y(\tau + S)) + \sum_{d \in \boldsymbol{N}} \sum_{(x,y) \in \boldsymbol{A}} \beta(y, d) f_d(x(h - S), y(h)) \rightarrow \min \qquad (12)$$

A célfüggvény első fele összegzi az egész vizsgálati időszakban valamennyi élen található gépkocsik számát, aminek a minimalizálása egyenértékű az összesített útidő minimalizálással, hiszen az él impedanciák, illetve az élre jellemző utazási idők annál nagyobbak, minél több gépkocsi halad az élen. A kifejezés második fele arra keres megoldást, hogy a h időponthoz közel a hálózatba lépett gépkocsik, melyek már képtelenek a vizsgálat végéig elérni a d rendeltetési pontot, ne rekedjenek meg valamely közbenső élen, hanem helyezkedjenek el egy $y(h)$ csomóponton. Ezt úgy lehet elérni, hogy valamennyi $(x(\tau), y(h))$ alakú élhez zérus kapacitást rendelünk. Emellett valamennyi gépkocsit, melynek nem sikerült eljutnia a rendeltetési helyére egy $\beta(y,d)$ büntetéssel sújtunk, mely értéke megfelel a becsült időnek, mely alatt elérhetné rendeltetési pontját.

A figyelembe veendő korlátozások a következők:

1. Azok a gépkocsik, melyek azonos τ periódusban lépnek be egy élre azonos idő alatt kell, hogy végighaladjanak az élen. A feltétel megvalósításához a modell hozzárendel minden egyes időben kiterjesztett $(x(\tau), y(\tau + s))$ élhez egy $\delta(x(\tau), y(\tau + s))$ nevű, 0-1 értékű egész válto-

zót. Az élre belépő gépkocsi-csomag csak akkor rendelkezik *s* utazási idővel, ha ennek az egész változónak az értéke 1. A feltételt a következő egyenlőtlenség fejezi ki:

$$f(x(\tau),y(\tau+s)) \le M\delta(x(\tau),y(\tau+s)), \qquad (x(\tau),y(\tau+s)) \in \mathbf{A} \qquad (13)$$

ahol *M* egy tetszőlegesen nagy konstans. Feltételezi a modell továbbá, hogy a gépkocsi-csomagok egyben maradnak az élről történő kilépéskor, amit azzal ér el, hogy lehetővé teszi, hogy a τ időpontban az (*x*,*y*) élre lépő gépkocsik legfeljebb egy idő értéket válasszanak az *S*-ből. Ha nem lép be gépkocsi a τ periódusban az élre, úgy megengedett, hogy egy kiterjesztett élet se válasszanak: ekkor $\delta(x(\tau),y(\tau+S))=0$. Maga a feltétel pedig a következő alakban írható fel

$$\delta(x(\tau),y(\tau+S)) \le 1 \qquad (x,y) \in \boldsymbol{A},\ 0 \le \tau \le h. \qquad (14)$$

2. A hálózat modellezésben általánosan használt FIFO (first in first out) elvet, azaz, hogy a gépkocsi csomagok az élen nem előzhetik egymást, a következő korlátozással kényszeríti ki a modell:

$$\tau + \sum_{s=1}^{h-\tau} s\delta(x(\tau),y(\tau+s)) \le \omega + \sum_{s=1}^{h-\omega} s\delta(x(\omega),y(\omega+s)) \qquad (15)$$

minden $(x,y) \in \boldsymbol{A}$, $0 \le \tau < \omega < h$ esetén, ha $\delta(x(\omega),y(\omega+s))=1$. Bár a feltétel formálisan nem lineáris, igen egyszerűen lineárissá tehető, ennek a részleteire azonban nem térünk ki.

3. A következő korlátozás a hálózati áramlás konzerválását hivatott biztosítani. Ha az $x(\tau)$ csomópontba *d* rendeltetéssel $v_d(x(\tau))$ gépkocsi lép be, akkor

$$f_d(x(\tau),N(\tau+S)) - f_d(N(\tau-S),x(\tau)) = v_d(x(\tau)) \qquad x,d \in \boldsymbol{N}, x \ne d, 0 \le \tau \le h. \qquad (16)$$

4. Az utolsó korlátozás a forgalom okozta torlódásokat veszi figyelembe. A modell abból indul ki, hogy az (*x*,*y*) élen a τ időpontban feltételezhető utazási idő csak az ebben az időben az élen lévő forgalom volumenétől függ (beleértve az éppen belépő jármű-csomagot is). Továbbá, az élen belüli utazási időket a statikus modelleknek megfelelően vizsgálja. Ilyen feltételek mellett a modellt a kapacitás korlátozásokkal lehet felírni az alábbiak szerint:

$$f(x(\tau),y(\tau+S)) + f(x(\tau-S),y(\tau+S)) \le \sum_{s=1}^{h-\tau} \delta(x(\tau),y(\tau+s))c(x(\tau),y(\tau+s)) \qquad (17)$$

minden $(x,y) \in \boldsymbol{A}$, $0 \le \tau \le h$ esetén ha $\delta(x(\tau),y(\tau+S))=1$.

A (17)-ben c(*x*,*y*) az (*x*,*y*) él kapacitás függvénye. A (15)-hez hasonlóan a (17) kifejezést is egyszerűen át lehet alakítani lineáris formára.

A vegyes, egészértékű lineáris programozási feladat megoldásához bemenő adatként jelentkeznek az időfüggő utazási igények, melyek jelölésére a korábbiakban a $v_d(x(\tau))$ kifejezést használtuk. Ezt a függvényt, amint már említettük, korábbi forgalomszámlálási eredményekre támaszkodva a forgalom automatizált érzékelőkkel történő monitorozásával határozzák meg.

A másik bemenő adat az élek kapacitás függvénye - $c(x(\tau),y(\tau+s))$, mely a modell alkotói szerint $c(x(\tau),y(\tau+s)) = sC_{xy}\left[\frac{1}{0.15}\left(\frac{s}{T_{xy}^0}-1\right)\right]^{0.25}$, ahol C_{xy} a kérdéses útszakasz gyakorlati kapacitása, T_{xy}^0 pedig a szakasz megtételéhez szükséges idő, szabad gépjármű áramlás esetén.

A hivatkozott publikációban a szerzők az IBM szubrutin könyvtárban található, elágazáson és korlátozáson alapuló MILP algoritmussal egy kisméretű, 4 csomópontból és 4 élből álló hálózatot vizsgáltak 5, egyenként 1.5 perces periódusra. A kis hálózat és kevés periódus ellenére azt tapasztalták, hogy a feladat mérete még így is erősen leterhelte a használt IBM RS/6000 munkaállomás memóriáját, bár a megoldáshoz szükséges idő csak 6 perc volt. A kapott eredmények csak kismértékben javították a kiindulásként felvett szabad áramláson alapuló optimális megoldást, amit a kevés időperiódussal magyaráztak. Nagyobb hálózat és több időperiódus alkalmazása azonban új, hatékonyabb algoritmus kidolgozását igényelné.

Az említett számítási igények csökkentését szolgálják azok a törekvések, melyek a forgalommodellezést olyan algoritmusokkal végzik, melyek egyidejűleg több processzoron futnak. A parallel algoritmusok vizsgálata azonban túlnő jelen tanulmány témáján.

A felhasználó-optimális modell

A rendszer optimális forgalmi modellek realizálása csak a nem túl távoli jövőben várható, így logikus volt, hogy a forgalmi egyensúly létrejöttét a rendszer résztvevőinek optimalitása szempontjából is megvizsgálják. A felhasználó optimális modell, mely megfogalmazását *Wardrop (1952)* tanulmányának tulajdonítják, olyan egyensúlyi helyzetet tételez fel, melyben *minden közlekedő számára az éppen választott útvonal az optimális, ennek tetszőleges megváltoztatása növeli az utazási ráfordításokat*. Mielőtt felvázoljuk a rendszer matematikai leírását érdemes elgondolkoznunk a modell realitásán.

Ha a modellt az aktuális forgalmi viszonyok megismerésére kívánjuk felhasználni, úgy reális képet csak akkor képes nyújtani, ha a forgalom valamennyi résztvevője alapos ismerettel rendelkezik arra vonatkozóan, hogy adott OD pár és konkrét indulási időpont esetén melyik útvonal lesz a legkedvezőbb. A valóságban azonban megfelelő forgalmi információs rendszer hiányában a forgalom résztvevői nem feltétlenül rendelkeznek megfelelő ismeretekkel a legjobb útvonal kiválasztására. Ezt a tényt a kutatók valószínűségi modellek megalkotásával próbálják figyelembe venni. A valószínűségi modell kiterjedhet a felhasználók útválasztásán kívül az útszakaszok megtételéhez szükséges időkre is. Ilyen, mind a hálózatot, mind az útvonalválasztást valószínűségi alapon kezelő dinamikus forgalom hozzárendelési modellt mutat be Liu és szerzőtársai tanulmánya *(Liu et al.2002). (letölthető a http://www.its.berkeley.edu/conferences/trb/00049.pdf címről)*

Bár a valószínűségi modellek használata egyelőre több mint indokolt, a jelen idejű forgalominformációs rendszerek fejlődésével várható a determinisztikus modellek valóságtartalmának fokozatos kiteljesülése, ami részben indokolja, hogy matematikai tárgyalásunkat ez utóbbiakra korlátozzuk. Másik indokunk pedig az, hogy a későbbiekben ismertetendő közelítő, előzetes útvonaltervező modell is ezeken az elvi alapokon nyugszik.

A felhasználó optimális modellben azokat az x^* útvonal-, illetve f^* szakasz-áramlatokat keressük, melyek kielégítik a (8), (9) és (10) feltételeket, és amelyekre érvényes a felhasználói optimalitás Wardrop féle megfogalmazása, melyet matematikailag a következőképpen írhatunk fel:
minden $\omega \in \boldsymbol{\Omega}$ OD párra és minden ezeket összekötő $p \in \boldsymbol{P}_\omega$ útvonalra igaz, hogy

$$C_p \begin{cases} = \lambda_\omega, & \text{ha} \quad x_p^* > 0 \\ \geq \lambda_\omega, & \text{ha} \quad x_p^* = 0, \end{cases} \tag{18}$$

ahol

λ_ω a kérdéses kezdő és végpontot összekötő útvonal minimális költsége.

A felhasználó optimális egyensúlyt abban az esetben, ha *a szakaszon fellépő költség csak a szakasz áramlatának függvénye* a következő optimalizálási feladat megoldása szolgáltatja:

$$\sum_{a \in L} \int_0^{f_a} c_a(y)dy \Rightarrow \min \tag{19}$$

a (8), (9) és (10) feltételek figyelembe vételével.

Ha a költségfüggvényre nem érvényesek a fenti feltételek, azaz a szakaszon fellépő költség nem csak a saját, hanem a többi szakasz áramlatától is függ és ez a függés nem szimmetrikus – másképpen befolyásolja az *i* szakasz áramlata a *j* szakasz költségét, mint a *j* szakasz áramlata az *i* szakasz költségét, úgy nincs lehetőség az egyensúlyi feltételek optimalizálási formára hozására és valamely szabványos optimalizálási technikával történő megoldására.

Az általános költségfüggvény esetében a *variációs egyenlőtlenség* módszerét alkalmazzák. A variációs egyenlőtlenség matematikai keretet biztosít több különböző, elsősorban egyensúlyi helyzethez kapcsolódó, optimalizálási probléma megoldására a legkülönbözőbb szakterületeken. Ezekhez tartozik a forgalmi egyensúly is, de ezt a keretet használják különböző pénzügyi egyensúly problémák vizsgálatára, vagy hogy egy teljesen más területre is utaljunk, rugalmas anyagok akadály hatására felvett alakjának meghatározására.

A variációs egyenlőtlenségek problémája (angol nevének szókezdő betűivel rövidítve VIP) szabványos formában a következő kifejezéssel írható le:

$$\left\langle F(\boldsymbol{X}^*), \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^* \right\rangle \geq 0, \qquad \forall \boldsymbol{X} \in \mathbf{K}, \tag{20}$$

ahol

$\mathbf{K}$ egy adott, zárt, konvex halmaz, F adott, folytonos függvény $\mathbf{K}$-ból $\mathbf{P^N}$-be, $\langle .,. \rangle$ pedig a belső szorzatot jelöli $\mathbf{P^N}$-ben.

Konkrét feladat megfogalmazás esetén meg kell választani az F függvényt, a megengedett megoldások halmazát $\mathbf{K}$-t és a változók vektorát X-et. A függvény az X^* megoldási pontban merőleges a megengedet megoldások halmazára.

A statikus, rögzített forgalmi igényű, felhasználó optimális, útvonal áramlatokkal kifejezett hálózati egyensúly VIP megfogalmazása a következő:

Az $\boldsymbol{x}^* \in \boldsymbol{K}$ vektor csak akkor nyújtja a hálózat felhasználó optimális, útvonal áramlási képét, ha kielégíti az alábbi variációs egyenlőtlenségi problémát:

$$\sum_{\omega \in \boldsymbol{\Omega}} \sum_{p \in \boldsymbol{P}} \boldsymbol{C}_p(\boldsymbol{x}^*) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \geq 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K}, \tag{21}$$

ahol

C az útvonalakra eső felhasználói költségek n_P dimenziós oszlop vektora, K pedig azon nem negatív útvonal áramlatok halmaza, melyekre érvényes a (8) egyenlet.

A (21) természetesen a (20) analógiájára *vektorosan* is felírható. A feladat, tehát a statikus, rögzített forgalmi igényű, felhasználó optimális hálózati egyensúly felírható *szakasz* forgalmi terhelésekkel is, illetve készíthető olyan VIP leírás is, mely a hálózati igényeket *rugalmasan* kezeli, azaz a gépkocsik annak a függvényében kezdeményezik az OD pontok közötti utazást, hogy milyen mértékű az utazást kedvezőtlenül befolyásoló hálózati terhelés. A bekezdésben felsorolt problémák és még sok egyéb modell bemutatását is megtalálja az érdeklődő *Nagurney (2003)* tanulmányában.

A VIP megoldására használt algoritmusok rendszerint optimalizálások sorozatára bontják le a feladatot, melyek aztán iterációval közelítik az egyensúlyi helyzetet. Ezek az algoritmusok igen számításigényesek, ezért a közlekedési hálózatok modellezésekor, különösen a felhasználói tanácsadást szolgáló dinamikus modellekben igyekeznek olyan heurisztikus módszereket is alkalmazni, melyek meggyorsíthatják a számítást. A dinamikus modellekben ugyanis a megoldás számítás igénye a vizsgálathoz alkalmazott időintervallumok számának függvényében jelentősen megnőhet. Tulajdonképpen arról van szó, hogy minden új időszakaszban új forgalmi áramlat vizsgálatot kell végrehajtani a kérdéses intervallumhoz tartozó OD adatokkal, figyelembe véve a korábbi szakaszokhoz tartozó OD adatokból már kialakult forgalmi áramlatokat a hálózatban. A dinamikus esetekben ezért a valós idejű előrejelzés megoldása érdekében, azaz hogy a számítás időigénye rövidebb legyen, mint a vizsgálati (vagy valós) idő, a heurisztikus algoritmusokat párhuzamos processzorokra implementálják. A *(Chabini et al. 2003 (letölthető a http://dijkstra.mit.edu/papers/paperspdf/ParallelDTA.pdf címről).*tanulmány szerzői például arra az eredményre jutottak, hogy ha a hálózat topológiája alapján bontják fel az algoritmust a párhuzamos működésű processzorok között, úgy 10 processzor alkalmazása esetén a feldolgozás sebessége ötszörösére növekszik, míg az idő szerinti felbontás ugyancsak 10 processzor esetében 6.5-szörös sebességnövekedést eredményez.

A továbbiakban röviden bemutatunk két felhasználó optimális dinamikus hozzárendelési modellt, hasonlóan ahhoz, ahogy ezt a rendszer optimális esettel kapcsolatban korábban már megtettük. Míg az első modell a valósidejű forgalomszervezést illetve forgalmi tanácsadást szolgálja, addig a második előzetes szállítástervezéshez készült, és külön érdekessége viszonylag szoros kapcsolata az ArcInfo GIS szoftverrel.

A felhasználó optimális, dinamikus forgalom hozzárendelési modell

Az ismertetendő modellt 1997-ben eredetileg diplomatervként dolgozta ki Yiyi He *Yiyi (1997)*, de mivel ez a modell képezi az alapját a párhuzamos processzorokkal történő első, 2003-as algoritmus-

nak is *(Chabini et al. 2003)* valószínűsíthető, hogy a jövőben egyre több gyakorlati alkalmazás fogja használni.

Az alapfeladatot, miszerint időfüggő, kiinduló pont – rendeltetési pont (azaz OD) adatok, hálózati topológia és terhelés nélküli szakasz teljesítmény adatok birtokában meg kell határozni, hogy mennyi lesz a konkrét időpontban induló jármű utazási ideje választott útvonalán, a modell három részmodellből építi fel. Megjegyzem, hogy a modell összefoglalása során meghagytam az eredeti jelöléseket azok dolgát megkönnyítendő, akik az eredeti munkát mélyebben is tanulmányozni szeretnék. Ez sajnos helyenként inkonzisztens mind a korábban bevezetett jelölésekkel, mind, legalább is formailag, helyenként önmagával is. A félreértések elkerülése érdekében minden matematikai megfogalmazáshoz külön-külön adom meg a jelölések magyarázatát.

Az első részmodell – *a felhasználó viselkedési modell* tulajdonképpen módosítja az eredeti Wardrop koncepciót, ugyanis háromféle felhasználói viselkedéssel számol:

- az első felhasználói csoport (a képletekben 1 index-szel hivatkozunk rá) mindig ugyanazon az útvonalon halad a kiindulási pontból a rendeltetési pontba;
- a második csoport (képlet hivatkozása 2) olyan útvonalat választ a kezdőpont és végpont között, melyről feltételezi, hogy az optimális;
- a harmadik csoport (hivatkozás 3) a valóban minimális utazási időhöz tartozó útvonalat választja.

Matematikailag a részmodell a következő variációs egyenlőtlenséggel írható fel:

$$\int_0^{T_d} \sum_{rs} \sum_{p \in \boldsymbol{K}_{rs}} \{F_{2p}^{rs^*}(t)[f_{2p}^{rs}(t) - f_{2p}^{rs^*}(t)] + c_p^{rs^*}(t)[f_{3p}^{rs}(t) - f_{3p}^{rs^*}(t)]\} dt \geq 0, \qquad (22)$$

ahol

$$F_{2p}^{rs^*}(t) = [f_{2p}^{rs^*}(t) - f_2^{rs}(t) P_p^{rs}(t)] \frac{\partial c_p^{rs}(t)}{\partial f_{2p}^{rs}(t)},$$ f – az áramlatot jelöli, a felső indexek (r,s) a kezdő és végpontra utalnak, míg az alsó indexben a szám a felhasználó típust, *p* pedig az útvonalat mutatja, *c* a *t* idő pontban a felső indexben szereplő *r* kezdő pontból az *s* végpontba induló jármű tényleges utazási ideje az alsó indexben szereplő *p* útvonalon, *K* az alsó indexben szereplő *r* és *s* pontokat összekötő valamennyi útvonal, 0-T_d a vizsgálat időtartama, *P* az az arány, amely a *t* időpontban az *r* kezdőpontból az *s* végpontba induló áramlatot a 2 típusú felhasználók révén a *p* útvonalhoz rendeli.

A második részmodell írja le *a szakaszok teljesítményét*. A részmodell segítségével határozhatók meg a szakaszokra érvényes utazási idők folyamatos haladás esetén a szakasz statikus paraméterei illetve az áramlat sűrűsége függvényében, torlódások esetében pedig az utazási idők sorba állítási modell felhasználásával fejezhetők ki. A szakasz utazási idő függvények biztosítják, annak a feltételnek a teljesülését is, hogy az elsőként belépő jármű elsőnek hagyja is el a szakaszt.

A *t* időpontban a szakaszra belépő jármű szakasz utazási ideje $\tau_a(t)$ a következő kifejezéssel írható fel:

$$\tau_a(t) = \begin{cases} \dfrac{L_a}{w_a(t)} & \text{ha } X_a(t) - \dfrac{L_a}{w_a(t)} Q_a \leq 0 \\ \dfrac{X_a(t)}{Q_a} & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad (23)$$

A (23)-ban szereplő jelölések a következők: $w_a(t)$ – a mozgó járművek sebessége a szakaszon, mely az alábbi kifejezéssel adható meg: $w_a(t) = w_a^{\min} + (w_a^{\max} - w_a^{\min})[1 - (\frac{k_a^m(t)}{k_{aj}})^{\alpha}]^{\beta}$, ahol $w_a^{\min}$ és $w_a^{\max}$ a szakaszra jellemző legkisebb és legnagyobb sebesség, $k_a^m(t)$ - a járművek sűrűsége a szakasz torlódás mentes részén *t* időpontban, k_{aj} - a járművek sűrűsége a torlódó szakaszon (azaz a járművek száma osztva a torlódó szakasz hosszával), α és β - az adott szakaszra jellemző tapasztalati

állandók (a *Yiyi (1997)*-ben közölt teszt futtatások során α=1.4 és β=3.2 értéket használtak). L_a - a szakasz hossza mérföldben, $X_a(t)$ - a szakaszon található járművek száma, Q_a - a szakasz végpontján a járművek kilépési sebessége (darab/másodperc).

Amint már említettük, ennek a részmodellnek kell biztosítania, hogy a szakaszra való belépés és az onnan való kilépés sorrendje ne változzon. Ezt az angolul FIFA-nak rövidített feltételt a szakasz utazási idő deriváltjával a következőképpen írhatjuk fel:

$$\frac{d\tau_a(t)}{dt} > -1. \tag{24}$$

A harmadik részmodell a *hálózati feltöltési modell*, mely bemenő adatok és az előző részmodellek felhasználásával meghatározza a hálózat leterheltségét egy adott időpillanatban. A részmodellt négy típusú egyenletek rendszere alkotja.

Az első egyenlet típus a *szakasz dinamikáját* fejezi ki:

$$\frac{dX_{ap}^{rs}}{dt} = u_{ap}^{rs}(t) - v_{ap}^{rs}(t), \qquad \forall (r,s), \forall p \in \boldsymbol{K}_{rs}, \forall a, \tag{25}$$

ahol

$u_{ap}^{rs}(t)$ - a t időpontban az r pontból az s pontba a p útvonalon haladó áramlat belépési sebessége az a szakaszra, $v_{ap}^{rs}(t)$ - a t időpontban az r pontból az s pontba a p útvonalon haladó áramlat kilépési sebessége az a szakaszról, $X_{ap}^{rs}(t)$ - a t időpontban az r pontból az s pontba a p útvonalon haladó összesített áramlat az a szakaszon, $\boldsymbol{K}_{rs}$ - az r pontot az s ponttal összekapcsoló összes lehetséges útvonal halmaza.

A második egyenlet típus *az áramlás konzerválását szolgálja*:

$$u_{ap}^{rs}(t) = \begin{cases} f_p^{rs}(t) & \text{ha } a \text{ az első szakasz a } p \in \boldsymbol{K}_{rs} \text{ útvonalon} \\ v_{a'p}^{rs}(t) & \text{ha } a\ a' \text{ után következik,} \end{cases} \tag{26}$$

ahol

$f_p^{rs}(t)$ - a t időpontban az r pontból az s pontba a p útvonalon elinduló áramlat indulási sebessége.

A harmadik egyenlet típus *az áramlat terjedését írja le*. Mivel az a szakasz összesített kimenő áramlata a t időpontban $V_{ap}^{rs}(t)$ kell, hogy tartalmazz az összes kimenő áramlatot a korábbi ω időpontokból ezért

$$V_{ap}^{rs}(t) = \int_{\omega \in W} u_{ap}^{rs}(\omega) d\omega, \qquad \forall a, \forall (r,s), \forall p \in \boldsymbol{K}_{rs}, \tag{27}$$

ahol

$W = \{\omega : s_a(\omega) \le t\}$, $s_a(\omega)$ pedig az az időpont, amikor a t időpontban az a szakaszra belépő áramlat elhagyja az a szakaszt.

A negyedik egyenlet típust *a határfeltételek* alkotják:

$$U_{ap}^{rs}(0) = 0, \qquad V_{ap}^{rs}(0) = 0, \qquad X_{ap}^{rs}(0) = 0, \qquad \forall (r,s), \forall p \in \boldsymbol{K}_{rs}, \tag{28}$$

ahol

$U_{ap}^{rs}(0)$ - a 0 időponthoz tartozó összesített belépő áramlat az r és s pontokat összekötő p útvonal a szakaszára.

A (25)-(28) egyenlet rendszerben ismertek az $f_p^{rs}(t)$ induló áramlatsebességek, illetve a teljesítmény modellből kiszámolhatók a $\tau_a(t)$ szakasz utazási idők, az

$$u_{ap}^{rs}(t), v_{ap}^{rs}(t), U_{ap}^{rs}(t), V_{ap}^{rs}(t) \text{ és } X_{ap}^{rs}(t) \tag{29}$$

változók pedig az ismeretlenek. Az ismeretlenek meghatározása után az $X_a(t)$ szakasz terhelések a következő kifejezésből számíthatók: $X_a(t) = \sum_{rs} \sum_{p \in K_{rs}} X_{ap}^{rs}(t)$.

Mivel a kiinduló feladat az volt hogy meghatározzuk a dinamikusan változó környezetben, amikor tehát a hálózati helyzet nem csak az indulási időtől függ, a felhasználó által megtett útvonal utazási idejét $c_p^{rs}(t)$-t, ezt csak úgy tehetjük, ha figyelembe vesszük mindazokat az időpontokat amikor a felhasználó belép egy-egy új szakaszra az útvonalon. Jelöljük ezeket az időpontokat $t_{a_i}(t)$-vel, (a_i - a kérdéses szakasz neve, *t* pedig az az időpont, amikor a felhasználó belépett a hálózatra) és álljon a vizsgált útvonal *n* szakaszból akkor a keresett utazási idő:

$$c_p^{rs}(t) = \sum_{i=1}^{n} \tau_{a_i}(t_{a_i}(t)).$$

A dinamikus hálózati hozzárendelés feladata úgy oldható meg, hogy az ismeretleneknek egyidejűleg ki kell elégítenie a felhasználók útvonal választási szokásait figyelembe vevő variációs egyenlőtlenséget (22) és a (25)-(28) hálózat feltöltési egyenletrendszert.

A feladat gyakorlati megoldása több lépésben történik.
Mindenek előtt a folyamatos időt diszkrét időintervallumokkal kell helyettesíteni, melyek hossza rövidebb kell, hogy legyen mint a legrövidebb szakasz utazási idő a hálózatban. Mivel a megoldás számításigénye az időintervallumok számával arányosan növekedik, ezért a felosztás finomításának a rendelkezésre álló számítási kapacitás szab határt. A diszkretizálás gyakorlatilag azt jelenti, hogy a folyamatos idő argumentumot (*t*) az intervallum idő *k* szorosaival helyettesítjük, ahol a *k* egész szám az intervallum sorszáma.

Az első algoritmus a hálózat feltöltését végzi, azaz minden egyes időintervallumra kiszámolja a (29) ismeretleneket a diszkretizált (25)-(28) egyenletrendszerből.

A második algoritmus az útvonal választást valósítja meg a különböző felhasználói típusok között. Először a feltöltési algoritmus által szolgáltatott szakasz utazási időkből kiszámítja az útvonal utazási időket, majd annak a valószínűségét, hogy a 2. típusú felhasználó bizonyos útvonalat választ az ismert „logit" modell alapján határozza meg. A 3. típusú felhasználókhoz a legrövidebb utakat rendeli. A felhasználók megoszlását a típusok között, illetve az 1. típusú felhasználók kedvenc útvonalát bemenő adatként kell megadni.

A hálózat feltöltése és a felhasználók útválasztásai a DTA nevű iterációs algoritmus segítségével kerülnek összhangba. Első lépésben az algoritmus kiszámolja a szabad áramlás esetére a *k* idő intervallumokra érvényes útvonal áramlatokat, a $\{f_{mp}^{rs^{(0)}}(k)\}$ értékeket. Ezután az eljárás magja végrehajtja a hálózati leterhelést majd elvégzi az útvonal választást, melynek eredményeképpen megkapja a 2 és 3 típusú felhasználók által választott útvonalakra vonatkozó áramlatok $g_{mp}^{rs}(k)$ értékeit, melyekkel megjavítja az előző iterációban kapott útvonal áramlatokat olymódon, hogy a korábbi útvonal áramlatokhoz hozzáadja az utolsó útválasztási algoritmus eredményének és a korábbi útvonal áramlat különbségének egy az iteráció fokától függő csökkentő tényezővel történő szorzatát, azaz $f_{mp}^{rs^{(n+1)}}(k) = f_{mp}^{rs^{(n)}}(k) + \alpha^{(n)}[g_{mp}^{rs}(k) - f_{mp}^{rs^{(n)}}]$, ahol $\alpha^{(n)} = \frac{1}{n+1}$, $m = 2,3$, n – az iteráció mérőszáma.

A modell első számítógépes implementálása során C++ objektum orientált nyelven készítették el a programot, melyhez az adatokat két osztályban a szakasz osztályban és az OD osztályban tárolták. Ez a tárolási struktúra azért lehet érdekes a számunkra, mivel mind a két osztály, kiegészítve a koordináta adatokkal része lehet bármely objektum orientált GIS adatbázisának.

A 2003-as implementáció során, amint erre a módszer bevezetése során már utaltunk a szekvenciális algoritmusokat párhuzamosították a célból, hogy a modell egyszerre több processzoron fusson. A feladat kétféle felbontását algoritmizálták. Az első esetben a hálózatot részekre bontották az egyes OD pontokat összekötő útvonalak szerint, a második esetben a vizsgálati időt elosztják a processzorok számával és az iterációs hálózat feltöltési algoritmus, mely minden egyes idő intervallumra külön iterációt hajt végre, processzoronként csak a szétosztott időintervallumokra számolja ki

a megoldást. A reális hálózaton végzett kísérleti futtatások azt az érdekes eredményt szolgáltatták, hogy a számítás felgyorsítása függ a vizsgálati idő hosszától is, különösen az idő szerinti felbontás esetén. A hivatkozott tanulmány szerzői ezért azt javasolják, hogy a vizsgálati időszak 2000 másodperc legyen. Erre az időintervallumra jobb eredményt az időszerinti felbontás biztosít, a processzorok számával közel megegyező gyorsítással.

Az előzőekben ismertetett modell célkitűzése, hogy azokat a tanácsadó – adattovábbító rendszereket lássa el friss, élő információval, melyek a forgalom résztvevőit jelen időben támogatják optimális útvonaluk megválasztásában. A következő részben ismertetendő rendszert a szállítási időpontok *előzetes* meghatározására dolgozták ki.

Szabatos szállítási időpontok meghatározása városi környezetben

Az iparban és a szolgáltatásokban egyre nagyobb szerepe van az úgynevezett Időre Érzékeny Szervezésnek (angolul Time-Critical Logistics = TCL), ami például azt jelenti, hogy a gyártó egység nem alkalmaz raktárkészletet, hanem akkora rendeli az alkatrészeket, amikorra beépítésüket a technológiai folyamat előírja. Talán egyszerűbb, de az egyén számára fontosabb példa, ha azt akarjuk megbecsülni, hogy a 8 órakor induló repülőgéphez mikor kell elindulnunk és milyen úton, ahhoz hogy pontosan érjünk a repülőtérre.

Az ilyen jellegű szervezési feladatok megtervezésére dolgozták ki azt a döntéstámogatási rendszert, mely a dinamikus, felhasználó optimális hálózat hozzárendelési modell *közelítő* megoldásával képes megadott kezdő és végpontok között adott időintervallumokban meghatározni az optimális útvonalakat és a hozzátartozó útidőket. E mellett a rendszer az Arc/Info 7. szoftver felhasználásával meg is tudja jeleníteni a meghatározott útvonalakat, illetve ábrázolni tudja a torlódási viszonyokat *(Miller et al. 1999), (letölthető a http://www.geog.utah.edu/~hmiller/papers/hicss_web.pdf címről)*. *(Wu et al. 2001). (letölthető* a http://www.geog.utah.edu/~hmiller/papers/Wu-Miller-Hung_JGS.pdf címről).

A rendszer forgalommodellező modulja a (19) kifejezés időbeli kiterjesztésén alapul, azaz azért tudja visszavezetni a felhasználó optimális modellt szabványos optimalizálási feladatra, mivel feltételezi, hogy az egyes szakaszok költsége (utazási ideje) csak ugyanezen szakaszok áramlataitól függ és a többi szakasz telítettsége – közvetlenül nem befolyásolja a vizsgált szakaszon elérhető sebességet.

Mielőtt a célfüggvényt, a feltételeket és a jelöléseket ismertetném meg kell jegyeznem, hogy megpróbáltam átírni a hivatkozott cikkek jelöléseit az általunk korábban már használt értékekre.

A célfüggvény a következő alakot nyeri:

$$\sum_{a\in \mathrm{L}} \sum_{t\in T} \int_0^{f_a^t} c_a^t(y)dy \Rightarrow \min, \qquad (30)$$

ahol t - az időintervallumokat., T - pedig a vizsgálat teljes idejét jelöli. A többi jelölés megegyezik a (19) egyenlettel kapcsolatban már ismertetettel, azzal a különbséggel, hogy a t felső index egy időintervallumra vonatkoztatja a kérdéses mennyiséget.

A célfüggvény minimalizálása az alábbi feltételek érvényesülése mellett valósítandó meg:

$$f_a^t = \sum_{p\in P} \sum_{i\in T} x_p^i \alpha_{pa}^{it}, \qquad \forall a \in \mathrm{L},\ \forall t \in T \qquad (31)$$

$$d_\omega^i = \sum_{p\in P_\omega} x_p^i, \qquad \forall \omega \in \Omega,\ \forall i \in T \qquad (32)$$

$$x_p^i \geq 0, \qquad \forall p \in P,\quad \forall i \in T \qquad (33)$$

$$\alpha_{pa}^{it} \in \{0,1\}, \qquad \forall p \in P,\ \forall a \in \mathrm{L}_p, \forall i \in T, \forall t \in T \qquad (34)$$

$$\sum_{t\in T} \alpha_{pa}^{it} = 1, \qquad \forall p \in P,\ \forall a \in \mathrm{L}_p, \forall i \in T, \forall t \in T \qquad (35)$$

$$c_{pn}^i = \sum_{t\in T} \sum_{a\in \mathrm{L}_{pn}} c_a^t(f_a^t), \qquad \forall p \in P,\ \forall n \in N,\ \forall i \in T, \forall t \in T \qquad (36)$$

$$[c_{pn}^i - t\Delta t]\alpha_{pa}^{it} \leq 0, \qquad \forall p \in P,\ \forall n \in N,\ \forall a \in \mathrm{L}_n, \forall i \in T, \forall t \in T \qquad (37)$$

$$[c_{pn}^i - (t-1)\Delta t]\alpha_{pa}^{it} \geq 0, \qquad \forall p \in P,\ \forall n \in N,\ \forall a \in \mathrm{L}_n, \forall i \in T, \forall t \in T. \qquad (38)$$

A figyelmes olvasó észreveheti, hogy a (31), (32) és (33) kifejezések a korábbi (9), (8) és (10) feltételek dinamikus (időfüggő) változatai. Az új jelölések közül *i* az indulási időintervallumot jelenti, az α_{pa}^{it} pedig olyan 0 vagy 1 értékű változó, mely azt mutatja, hogy a *p* útvonalhoz rendelt, *i* időintervallumban induló járművek használják-e az *a* szakaszt a *t* időintervallumban. Az *n* index valamely csomópontot jelöl, tehát például a c_{pn}^{i} - az az idő, ami alatt az *i* időpontban a *p* útvonalon haladó jármű eléri az *n* csomópontot. Az összes *a* szakasz halmazát, mint korában, Λ jelöli. Az L_p - a *p* útvonal összes szakaszának halmaza, az L_{pn} - a *p* útvonalon az *n* csomópontot megelőző szakaszok halmaza, míg L_n - az *n* csomópontból kiinduló összes élet jelöli.

Az ismertetett rendszer azonban nem használ szabványos optimalizálási eljárást a feladat megoldására, mivel annak a számítási igénye mintegy négyszerese lenne az alkalmazott heurisztikus eljárásnak, és nem tenné lehetővé, hogy a programot egyszerű számítógépeken futtathassák a kisebb szállítási vállalatok is.

A heurisztikus algoritmus megkezdése előtt meg kell határozni a figyelembe veendő időintervallumok nagyságát. A tapasztalat azt mutatja, hogy ennek értékét a hálózatra jellemző, átlagos szakasz utazási idő 4-5 szeresére kell megválasztani.

Az első lépésben fel kell venni egy kiinduló hálózati terhelési állapotot, ebből ki kell számítani a szakasz utazási időket és a Dijkstra algoritmus felhasználásával minden kezdőpontról minden végpontra ki kell számítani az optimális útvonalakat. A kapott útvonalakra rá kell terhelni a kezdeti időintervallumban induló járműveket.

A következő lépésekben, minden időintervallumra meg kell határozni az új terheléseket az előzetesen tervezett és az újonnan belépő forgalom súlyozott átlagaként és a kérdéses intervallumban újonnan belépők számára meg kell határozni a leggyorsabb útvonalakat. Lényeges eleme a módszernek, hogy a korábbi intervallumokban belépett járművek várható terhelését meg kell határozni a későbbi szakaszokra is, melyek a következő ciklusokban folyamatosan javításra kerülnek.

A korábbi, *t*-1 intervallumban nyert f_a^{t-1} végleges terhelésből és a jelen intervallumra számított f_a^t előzetes terhelésből az *a* szakasz tervezett terhelései y_a^{t+n} a következőképpen számíthatók:

$$y_a^{t+n} = \theta^t \omega_{t-1}^{t+1} f_a^{t-1} + (1-\theta^t)_t^{t+n} f_a^t, \qquad \forall a \in \mathsf{L}, \forall (t+n) \in T,\ n \geq 0 \tag{39}$$

ahol

Q^t - a *t* időpontban a hálózatba belépő összes jármű száma, θ^t - arány, mely megmondja, hogy Q^t hanyadrésze nincs még hozzárendelve a hálózathoz a *t* intervallumban, $\omega_{t-1}^{t+1} = \dfrac{Q^{t+n}}{Q^{t-1}}$.

A szakasz utazási idő kapcsolatát a hálózati terheléssel a következő szabványos kifejezés felhasználásával számítja a rendszer:

$$T = T_0[1 + \alpha_1 (\frac{Q}{C_s})^{\alpha_2}], \tag{40}$$

ahol

T az utazási idő percben, T_0 az utazási idő percben szabad áramlás esetén, *Q* az idő intervallumra eső járművek száma, C_s a szakasz stabil állapotú kapacitása (gépkocsi szám / időintervallum)-ban kifejezve, α_1, α_2 kísérleti paraméterek, melyeket városonként lehet meghatározni a szakaszra megengedett utazási sebesség függvényében.

A rendszer a DOS promptról indítható program, mely azonban kiolvassa illetve feltölti az Arc/Info GIS szoftver INFO fájljait. Ez lehetővé teszi, hogy a bemenő adatok, azaz a hálózat és az OD mátrix mint Arc/Info fedvények kerüljenek kialakításra. Hasonlóképpen az is lehetséges, hogy a lekérdezési eredményeket is az Arc/Info jelenítse meg.

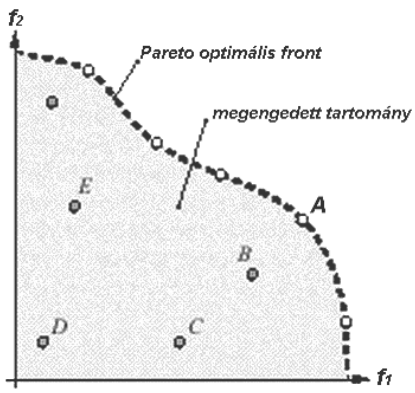
Mezőgazdasági művelési típus optimális tervezése több kritérium figyelembevételével

A többcélú optimalizálásról

Az egy célú optimalizálás során az a feladatunk, hogy megtaláljuk azokat az x döntési változókat, melyek az $y(x)$ célfüggvényt maximalizálják vagy minimalizálják az $x \in \mathrm{K}$ feltétel teljesülése mellett, azaz a feltétel az, hogy a megoldás a lehetséges megoldások tartományán belül keletkezzen. A célfüggvény dimenziója rendszerint pénzben kerül kifejezésre.

Gyakran előfordul azonban a gazdasági, műszaki, társadalmi feladatokban, hogy az elvégzendő feladat több célt kell, hogy optimálisan kielégítsen, e mellett a célokban optimalizálandó célfüggvények dimenziói nem azonosak, azaz nem mindegyik cél eredményessége fejezhető ki pénzben. Gondoljunk arra az egyszerű, az észak amerikai település szerkezetre jól illeszkedő példára, amikor a tűzoltó állomás elhelyezésekor azzal a dilemmával állunk szemben, hogy a nagy értékű belvárosi épületek biztonságáról gondoskodjunk-e inkább (azaz helyezzük el az állomást közel a belvároshoz), vagy tekintsük elsődlegesnek az olcsó elővárosi ingatlanok biztosítását, ahol az emberek laknak és helyezzük az állomást az előváros közelébe.

Az összemérhetetlen és esetenként ellentétes célokra irányuló optimalizálás fogalmát *Vilfredo Pareto* (1848-1923) olasz szociológus és közgazdász, a Lusanne-i egyetem politikai gazdaságtan tanára 1896-97-ben kiadott Politikai Gazdaságtan Tankönyvében fogalmazta meg. Meghatározása szerint *létezik a megengedett megoldás vektoroknak egy olyan felülete (két dimenziós esetben - görbéje) melyen haladva az egyik cél eredményessége csak úgy javítható, ha a többi célok eredményessége csökken*. Ez a felület a *Pareto felület* illetve kétdimenziós esetben a *Pareto görbe*. Ha a döntési vektorok helyett az eredményességet (tehát a célfüggvények értékét) ábrázoljuk akkor a *Pareto frontról* beszélünk (*3. ábra*).



3. ábra. Pareto front két cél esetén

Amint az ábrából látható, a Pareto fronton mozogva az f_1 tengelytől az f_2 tengely felé az első cél értékei csökkennek a második cél értékei pedig növekednek. Az, hogy a front melyik pontjához tartozó döntési vektor értékét válasszuk végső megoldásként általában a politikusok elhatározásától függ. Ahhoz azonban, hogy a politikusok dönteni tudjanak, meg kell határoznunk a teljes Pareto frontot.

A Pareto front előállítására használt hagyományos módszerek közül a legelterjedtebb a súlyozásos módszer volt. A módszer lényegét (a szemléletesség kedvéért) két cél esetében a következőképpen képzelhetjük el. Az első lépésben számítsuk ki az első majd a második cél maximális értékét olymódon, hogy az első súlynak 1-et választunk a másodiknak 0-t, illetve fordítva. A megkapott maximális értékekkel normáljuk a megfelelő célfüggvényeket (azaz az elsőt elosztjuk az első cél maximumával a másodikat pedig a második cél maximumával) és végezzük el ezután a célfüggvények súlyozott összegének optimalizálását különböző súlyokra azoknak a feltételeknek a figye-

lembe vételével, hogy a súlyok összege legyen 1, illetve, hogy a döntési vektorok ne lépjenek ki a megengedett megoldások tartományából.

Célunk az, hogy a frontot közelítő pontok lehetőleg egyenletesen oszoljanak meg, ehhez több cél esetén több súly-iterációra is szükség lehet.

Bár a felvázolt alapelvek igen egyszerűek egyes feladatok gyakorlati megoldása a hagyományos algoritmusokkal nem mindég problémamentes. A tapasztalatok azt mutatják, hogy az egyenletes front generálás és az egyéb problémák is megoldhatók szakszerűen megtervezett genetikus algoritmus felhasználásával.

A genetikus algoritmus

Az élővilág fejlődésének Darwin-i elvét modellezi a számítógépes feladat megoldásban a genetikus algoritmus.

A módszer megvalósításához mindenek előtt arra van szükség, hogy a döntési változók lehetséges értékeit valamilyen formában kódoljuk. Ez a kódolás többféle lehet, az általunk vizsgált esetben az érték szerinti kódolást alkalmazták, azaz minden döntési változó felvehet egy olyan kódértéket, mely a figyelembe vett művelési típusokat jelöli. A döntési változók kódolt értékeit géneknek nevezik. A döntési változók számának megfelelő gén összekapcsolásával kromoszómát kapunk. A kromoszóma tehát nem más, mint egy megengedett döntési vektor kódja.

A feladat indításához létre kell hozni a megengedett tartományból egy a feladat jellegétől függő, kísérletileg becsülhető számú kromoszómából álló halmazt, amit populációnak nevezünk. A populáció minden egyes kromoszómájának megfelelő döntési vektort behelyettesítve a célfüggvényekbe megkapjuk a kromoszómák jóságát. A jóságok alapján a populáció egy kis részét átvesszük az új populációba, ezt a lépést nevezzük *elitizmusnak*. Szintén a jóságok felhasználásával kiválasztunk egy tapasztalatilag megválasztott számú kromoszómát, melyeket *keresztezünk* és utódaikat beillesztjük az új populációba. A régi populáció egy, általában kis százalékát *mutáció* után visszük át az új populációba. Mivel a populáció mérete egy vizsgálat során kötött, a régi populáció azon elemeit, melyek egyik művelethez (elitizmus, keresztezés, mutáció) sem lettek kiválasztva elhagyjuk az új populációból.

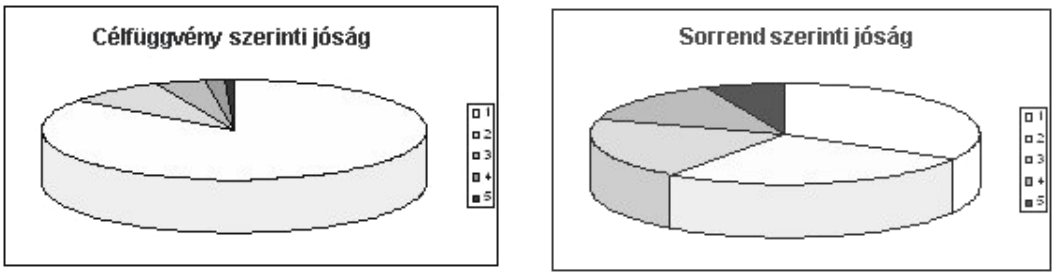
A populációk vizsgálatát és cseréjét mindaddig folytatjuk, amíg a célfüggvény (többcélú optimalizálás esetén a dominancia) értéke néhány populációban már nem javul.

A jósági sorrend felállítására egycélú optimalizálás esetén két lehetőségünk van: vagy magát a célfüggvény értéket tekintjük jóságnak vagy a sorrendet tekintjük a jóság alapjának (*4. ábra*). A két módszer közötti különbség érzékeltetésére képzeljük el, hogy 5 kromoszómánk van, melyek jósági értékeit az *I. táblázatban* tüntettük fel.

I. táblázat. Jósági értékek szemléltetése

Sorszám	Célfüggvény szerinti jóság	Egységre redukált jóság	Sorrend szerinti jóság	Egységre redukált jóság
1	100	0.8474	5	0.3333
2	10	0.0847	4	0.2666
3	5	0.0424	3	0.2000
4	2	0.0169	2	0.1333
5	1	0.0085	1	0.0667
összesen	118	1.0000	15	1.0000

Mivel a kiválasztás úgy történik, hogy egy véletlen szám generátor 0-1 közötti számokat generál, kézenfekvő, hogy abban az esetben, ha a jóságok között nagy az eltérés a célfüggvény szerinti jóság alapján történő kiválasztásnál nagyon kicsi az esélye annak, hogy az első két kromoszómán kívül más is kiválasztásra kerüljön, míg a sorrend szerinti jóság figyelembe vétele esetén nincs jelentősége a célfüggvény eltérés mértékének. A továbbiakban a sorrend szerinti jóság alapján végzett kiválasztást fogjuk kiterjeszteni a több kritérium alapján történő optimalizálás esetére is.



4. ábra. Érték és sorrend szerinti jóság ábrázolása

A több kritériumú optimalizálásnál minden egyes célnak külön célfüggvénye van. Ha ebben az esetben behelyettesítünk két döntési vektort a különböző kritériumokat reprezentáló célfüggvényekbe akkor két eset lehetséges:

- az első vektor behelyettesítése eredményeképpen valamennyi célfüggvény értéke nagyobb (ha maximalizálásra törekszünk), mint a második vektor behelyettesítésekor, ebben az esetben az első vektor *dominálja* a másodikat;
- a döntési vektorok behelyettesítése után egyes célfüggvényeket az első, másokat a második vektor maximalizál, ebben az esetben a két vektor *indiferens*.

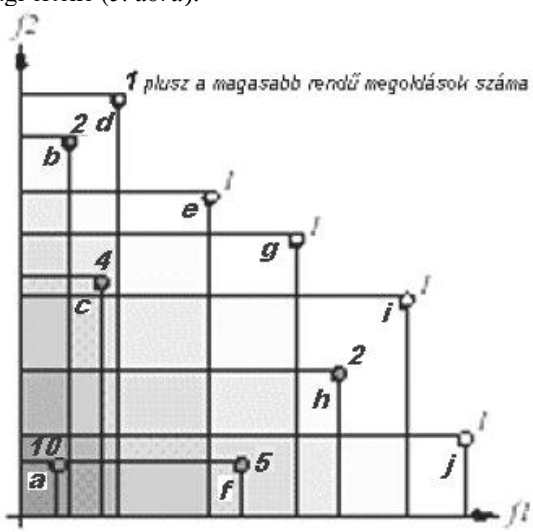
A dominancia bevezetésével úgy is megfogalmazhatjuk a Pareto optimális frontot, hogy azt a nem dominált megoldások eredményei alkotják, azaz olyan megoldások eredményei, melyekhez képest nem található domináns megoldási eredmény a lehetséges megoldások tartományában.
A többcélú optimalizálás során a *rangsor szerinti jóságot* előzetesen a dominanciából vezetik le, majd egy megadott "fülke" sugár (σ_{share}) nevű paraméter felhasználásával a közelítő jóságokat csökkentve véglegesítik.

Az első lépésben tehát előzetes jósági értéket rendelnek az x_i kromoszómához mely értéke

$$\text{jóság}(x_i, t) = 1 + p_i^t, \tag{41}$$

ahol

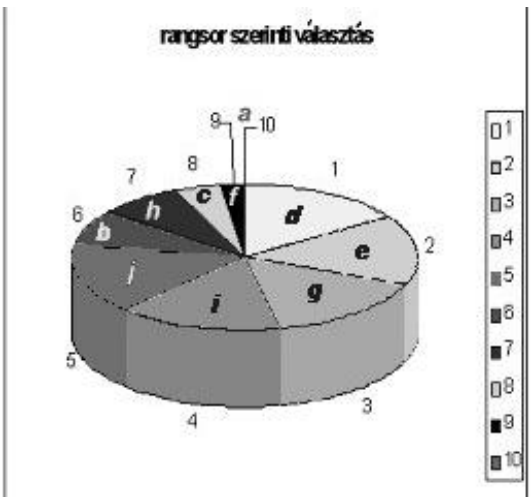
p_i^t azon kromoszómák száma, melyek az x_i kromoszómát dominálják a t populációban. A nem dominált kromoszómák előzetes jósági értéke tehát 1, minél „rosszabb” a kromoszóma, annál nagyobb az előzetes jósági értéke (*5. ábra*).



5. ábra. A dominancia fogalom szemléltetése

II. táblázat. Példánk jósági érték számítási eredményei

SP=2	név	eredeti jóság	rangsor	új jóság	átlag jóság	valószínűség	görgetett valószínűség
	d	1	1	2.0000000	1.5555556	0.1555556	0.1555556
	e	1	2	1.7777778	1.5555556	0.1555556	0.3111112
	g	1	3	1.5555556	1.5555556	0.1555556	0.4666668
	i	1	4	1.3333333	1.5555556	0.1555556	0.6222224
	j	1	5	1.1111111	1.5555556	0.1555556	0.7777780
	b	2	6	0.8888889	0.7777778	0.0777777	0.8555557
	h	2	7	0.6666667	0.7777778	0.0777777	0.9333334
	c	4	8	0.4444444	0.4444444	0.0444444	0.9777778
	f	5	9	0.2222222	0.2222222	0.0222222	1
	a	10	10	0	0	0	1
			Összegek:	10.00	10.00	1.00	



6. ábra. A példa rangsor szerinti jóság diagramja

Ezután sorba állítjuk valamennyi kromoszómát olymódon, hogy az első helyen szerepeljenek a legjobb (tehát 1 előzetes jósági értékű) a végén pedig a legrosszabb ($n^* \leq N$) előzetes jósági értékű kromoszómák.

Elvégezzük a

$$\text{Jóság}(Ssz) = 2 - SP + 2\cdot(SP - 1)\cdot(N - Ssz) / (N - 1) \qquad (41)$$

kifejezés szerinti másodlagos jósági érték interpolálást, ahol *Ssz* – a sorszám *SP* – a *szelektív hangsúly (**SP** = selective pressure)* nevű súlyozási paraméter, majd az azonos előzetes jósági értékű kromoszómák másodlagos jósági értékeit átlagoljuk (gondoljunk arra, hogy több olyan kromoszóma is van amelyek előzetes jósági értéke azonos, pld. 1 mégis a sorba állítás után a képletből különböző másodlagos jósági értéket kapnak, ami nem indokolt, ezért kell másodlagos jósági értékeiket átlagolni, nem változtatva meg ezzel az össz-jósági érték mennyiséget).

Hogy az elmondottak világosabbak legyenek a 5. ábra egyszerű példájára elvégeztük a hivatkozott számításokat, melyeket a *II. táblázatban* és a belőle készült torta-diagramot tartalmazó *6. ábrán* mutatunk be.

A végső jósági értékek kialakításához még szükség van *az azonos rangú* egyedek jósági értékeinek csökkentésére bizonyos távolsági paraméter alapján. Arról van tehát szó, hogy ha egymáshoz túl közel helyezkednek el azonos rangú egyedek, úgy jósági értéküket egyedileg csökkentik, de e mellett gondoskodnak arról, hogy a ranghoz tartozó össz-jósági érték ne változzon. A távolság meghatározható a kód térben, döntési térben vagy a cél térben. Mivel a módszer azt kívánja elérni,

hogy a Pareto front egyenletesen, de ne túl sűrűn legyen meghatározva, ezért célszerű a távolság fogalmat a cél térben értelmezni.

A σ_{share} küszöb távolság meghatározása bonyolult feladat, a bemutatandó LADSS döntéstámogató rendszer *Fonseca* és *Fleming* javaslatát *(Fonseca et al. 1993)* alkalmazza, mely a célfüggvények maximális és minimális értékeiből illetve a Pareto frontot alkotó optimális pontok számából vezeti le σ_{share} értékét.

Ha a küszöbérték megvan, akkor az $i \in P$ egyed végleges $F(i)$ jósági értékét a $F'(i)$ előzetes jósági értékből a következő kifejezésből nyerjük:

$$F(i) = F'(i) / \sum_{j \in P} s(d(i,j)) \; . \qquad (42)$$

A *fülke szám* azaz a kifejezés nevezője tehát nem más, mint a kérdéses egyed illetve a populáció egyéb egyedei között fellépő s csökkentő függvények összege.

Gyakran használt csökkentő függvény:

$$\begin{aligned} &s(d(i,j)) = 1 - (d(i,j) / \sigma_{share})^{\alpha}, && \text{ha } d(i,j) < \sigma_{share}, \\ &s(d(i,j)) = 0 && \text{egyébként.} \end{aligned} \qquad (43)$$

A kitevőben szereplő α értéke rendszerint 1, a távolságok pedig a célfüggvény értékek négyzet összegéből vont négyzetgyökkel számíthatók, bár természetesen más normák is használhatók.

Ne felejtsük el, hogy a *(Fonseca et al. 1993)*-ban lévő eredeti javaslat szerint a fülkeszámmal csökkentett egyedi jóságok rangonkénti összege meg kell, hogy egyezzen a kérdéses rang szerinti jóság csökkentés előtti összegével, azaz, ha az r rangú csökkentés előtti jóság összeget S'(r)-el, a csökkentés utáni összeget pedig S(r)-el jelöljük, úgy az r rangú i egyed végleges $F_r^{veg}(i)$ jóságát a következő képletből nyerjük:

$$F_r^{veg}(i) = F_r(i) \cdot (S'(r) / S(r)). \qquad (44)$$

A LADSS (Land Allocation Decision Support System = Föld Hozzárendelési Döntés Támogató Rendszer) rendszer

A tanulmányunk tárgyát jelentő tőrinformatikai optimalizálásra talán a legeklatánsabb példa a Skócia-i Macaulay Földhasználati Kutató Intézet LAADS projektje *(Matthews et al. 1999)*. A projekt keretében olyan döntéstámogató rendszert fejlesztettek ki mely alkalmas mezőgazdasági üzem szintjén az egyes táblákra tervezett mezőgazdasági kultúrák meghatározására. A tervezés több kritérium alapján történhet. A rendszer prototípusának elkészítésekor a két tervezési célként a pénzügyi hatékonyság és a Shannon-Wiener féle környezet változatossági index szerepelt.

A döntéstámogató rendszer a General Electric Smallworld nevű objektum orientált GIS szoftveréből és a Gensym G2 nevű fejlesztő környezetében programozott tudásalapú modulokból áll. A két blokkot a szintén G2-ben programozott Bridge nevű modul kapcsolja össze.

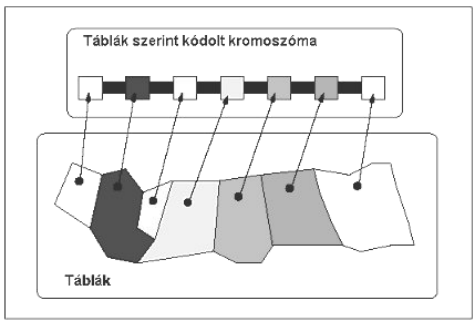
A földhasználati döntésekhez szükséges *térbeli adatstruktúra* négy hierarchikusan egymásba ágyazott, különböző feldolgozási méretaránynak megfelelő objektum osztályt definiál:

- *az üzem* szintű osztály az alapja az egész gazdaság auditálásának az üzemelési feltételek elemzése alapján. Ez a méretarány teszi lehetővé a művelési egységek költségvetési táblázatainak vizsgálatát, a szükséges munkaerő felhasználás elemzését valamint a művelési ágak hatásának figyelembe vételét az egész gazdaság talajkonzervációs értékére;
- *a táblák* az azonos művelésű terület egységek, melyekhez a földhasználatot a tervezési eszközök hozzárendelik;
- *a tábla részlet* a táblának biológiai, fizikai, talajtani szempontból még homogénnek tekinthető része;
- *a tábla részlet poligon* a tábla részlet geometriai leírása.

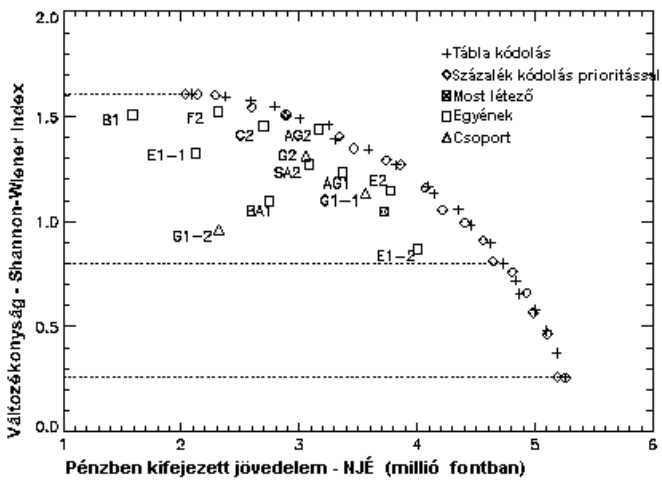
Az eredeti térbeli adatok (topográfia, talajjellemzők, stb.) mint rács pontok kerülnek rögzítésre a GIS rendszerben. A tervezési feladatok végrehajtásakor a tervezési modulok megkerestetik a GIS-szel a tábla részletekbe eső adatpontokat és a tábla részlet attribútumait a beeső pontok attribútumainak átlagolásával határozzák meg. A módszer előnye, hogy ily módon az adatok frissítése, vagy új

adatforrások (pld. gyakorlati szakemberek tapasztalatai) bevonása csak új pontok bevitelét vagy a régi pontok módosítását igényli, de nincs szükség az objektum attribútumok átírására, mivel azt a kiértékelés során maga a program végzi.

A térbeli tulajdonságokon kívül egyéb pénzügyi, szabályozási, stb. információ, felhasználói prioritás is bevihető a rendszerbe. A prototípus kialakításakor a művelési modult 9 földhasználatra (tavaszi árpára, réten tartott felföldi birkára és tejtermelő tehénre, öt lombos és két tűlevelű fa fajtára) dolgozták ki.



7. ábra. A táblák szerinti kódolás illusztrációja.



8. ábra. A LADSS kísérleti gazdaságának Pareto frontja

A figyelembe vett kódolási sémák közül a táblák szerinti kódolás (*7. ábra*) bizonyult a legegyszerűbbnek, s egyben a legsikeresebbnek is. Az ábrán a különböző árnyalatok a különböző földhasználati típusokat reprezentálják.

A többcélú optimalizálást genetikus algoritmussal, rangsor szerinti kiválasztást alkalmazva hajtották végre. Az eredmény Pareto frontját a *8. ábra* vázolja fel. Az ábrából kitűnik, hogy menynyivel jobb, objektív eredményt szolgáltat az optimalizálás, mint egyes szakemberek, különösen pedig a szakember csoportok javaslatai. Azt is leolvashatjuk az ábráról, hogy az egyszerűbb, táblák szerint kódolás eredményei valamivel jobbak mint a másik megvizsgált kódolás által nyújtottak.

Optimális földrendezési feladat

A kutatási téma megkezdésekor ezt a feladatot tekintettük a legfontosabbnak a megvizsgálandó kérdések közül *Gáspár (2002),* és úgy döntöttünk, hogy ezt a kérdést a kutatás keretében implementációs mélységig kidolgozzuk. Ez meg is történt és az implementációról és a teszt eredményekről a *Gáspár (2003)*-ban számoltunk be.

Jelen összefoglaló tanulmányunkban ugyanakkor érdemes néhány szóval utalni e feladat elhelyezkedésére az általános térbeli optimalizálási problémában.

A kutatás során – elsősorban az Internet segítségével – nemzetközi méretben igyekeztem feltárni azokat az alkalmazásokat, melyek valamilyen szinten összekapcsolják a GIS és az optimalizálás eszköztárát. Érdekes módon a megtalált alkalmazások között nyomokban sem lehetett azonosítani semmi hasonlót az általunk legaktuálisabbnak ítélt feladathoz. Ez, véleményem szerint a következő okokkal magyarázható:

- a GIS tudomány és gyakorlat fővonalát megszabó észak amerikai kutatóhelyek számára ez a feladat nem aktuális;
- ugyanez mondható el azokról az országokról, melyek fejlett GIS kultúrával rendelkeznek, angolul publikálnak és publikációikat gyakran helyezik el az Interneten (pld. Ausztrália, Nagy Britannia);
- olyan fejlett információ technológiával rendelkező országok, mint Kína és Japán kutatói többnyire saját nyelvükön és saját írásjeleikkel publikálnak az Interneten, ezekre a cikkekre az angol nyelvű keresők kétes eredményeket szolgáltatnak, de ha sikerül is valamit megtalálni azt sem tudjuk elolvasni.

Joggal vethető fel a kérdés, hogy igazunk volt e kutatásunk kezdetén, amikor a földrendezési feladatnak legalább is hazai viszonylatban különösen nagy jelentőséget tulajdonítottunk. Meggyőződésem, hogy álláspontunk helyes volt. A 70-es és 80-as évek tényei bizonyítják, hogy a hazai agroklimatikus viszonyok mellett megfelelő termelési szerkezet esetén a magyar mezőgazdaság nemzetközi szinten is kimagasló minőségi és mennyiségi teljesítményre képes. A nagyüzemi mezőgazdaság politikai okokkal indokolt, de a külföldi konkurencia által sugallt tönkretétele után jogosan reméltük, hogy előbb vagy utóbb akad olyan kormány, mely megpróbálja, ha új tulajdoni alapokon is, korrigálni a művelhetetlen, széttagolt nadrágszíj parcellákból álló birtok szerkezetet. Sajnos, egyelőre úgy tűnik, hogy a konkurencia romboló hatása erősebb, mint a magyar mezőgazdaság felemelésének igénye, de remélhetőleg egyszer ez a helyzet is megváltozik, s akkor kidolgozott eljárásunk gyakorlati hasznosítására is sor kerülhet.

Rendszertechnikailag a *Gáspár (2003)*-ban részletezett eljáráshoz csak három megjegyzést szeretnék fűzni:

- a feladat megoldásához a rendelkezésre álló szabványosított földnyilvántartási adatbázist új attribútumokkal is ki kell egészíteni, azaz a földrendezést minden esetben részletes, minden tulajdonosra kiterjedő adatgyűjtés kell, hogy megelőzze;
- vitatható, hogy az aranykorona érték legyen-e az egyetlen értékmérő a csere földrészletek kijelölésénél, a módszer arra is biztosít lehetőséget, hogy egyéb értékmérők (pld. a telephelytől mért távolság) is figyelembe vehetők legyenek a rendezés végrehajtása során;
- mivel a korszerű GIS szoftverek mind a geometriai, mind a leíró adatokat szabványos adatbázis kezelő rendszerben tárolják, az optimalizáló eljárás azzal, hogy szabványos adatbázis táblázatokba tölti az eredményeket minden olyan GIS szoftverrel használható, mely kapcsolattal rendelkezik a kérdéses adatbázis kezelő rendszerhez.

Következtetések

Az alkalmazások kapcsán láttuk, hogy az optimális térbeli tervezés egyre fontosabb szerepet játszik a különböző szakterületi feladatok megoldásában.

A térbeli adatmodell oldaláról a feladatok jelentős része a mátrix adatokkal bővített hálózati modell alkalmazását igényli, másik része területi objektumokkal operál. Külön figyelmet érdemel a térbeli kölcsönhatási feladat adatmodellje, mely területi objektumokat transzformál hálózati csomópontokba.

A felmerülő feladatok részben tervezés orientáltak – ezeket nevezzük statikusoknak, részben üzemelés orientáltak, ezek általában igénylik a dinamikus megközelítést.
A GIS és az optimalizáló algoritmus kapcsolatának szorosságát több tényező befolyásolja, ezek közül néhányat az alábbiakban foglalunk össze:

- A feladat általános megfogalmazhatósága,
- A feladatban szereplő térbeli és leíró adatok szabványos jellege,
- A feladat statikus vagy dinamikus jellege,
- Az optimalizáló algoritmus hatékonysága és szabványos implementációja,
- A GIS szoftver fejlesztés trendje.

A felvázolt elhelyezési-hozzárendelési feladatok, legrövidebb útkeresési feladatok valamint más itt nem tárgyalt szabványos szervezési feladatok (pld. az utazó ügynök feladat) számtalan konkrét alkalmazásban fordulhat elő ezért indokolt, hogy hatékony megoldó algoritmus birtokában a GIS szoftver rendelkezzen a feladat végrehajtását automatizáló modullal. Nem indokolt ugyanakkor, hogy az utolsó példaként bemutatott földrendezési feladatot GIS modulként implementáljuk részben, mivel nagyméretű rendszerekben igen hosszú futás időt igényel, részben pedig azért, mivel ez a feladat lokális előfordulású.

Az optimalizálási eljárások rutinszerű alkalmazásának egyik legfontosabb feltétele olyan szabványos hálózati adatobjektumok kidolgozása, melyek rendelkeznek a feladatok megoldásához szükséges attribútumokkal. Témánk szempontjából leggyakoribbak a közlekedéshez kapcsolódó attribútumok, melyek szabványosításakor, egyebek közt, fél-statikus vagy dinamikus jellegüket is figyelembe kell venni.
A GIS szoftverek statikus adatok tárolásával, elemzésével és megjelenítésével foglalkoznak. Elvileg elképzelhető, hogy a rendszer a statikus adatbázis egy másolatában az Internetről automatikusan letöltődő dinamikus adatok segítségével folyamatosan frissítse az adatbázis másolat megfelelő attribútumait és az időfüggő optimalizálást ezek felhasználásával hajtsa végre. Gyakorlatilag azonban ilyen rendszer addig semmiképpen sem valósítható meg, amíg nem dolgoznak ki olyan dinamikus algoritmusokat, melyek szabványos platformokon is hatékonyan implementálhatók. A különleges hardveren implementált dinamikus optimalizáló programok adatbázison keresztül kommunikálhatnak a GIS szoftverekkel, felhasználva az utóbbiakat az eredmények megjelenítésére.

A GIS szoftverek – egyelőre – hálózati szervereken vagy önálló PC-ken működnek. Ebben a környezetben csak olyan modulok beépítése indokolt a szoftverbe, melyek a kérdéses platformon viszonylag rövid, legfeljebb néhány tízperces futás után eredményt szolgáltatnak. Ha a kérdéses feladat megoldása hosszabb futás időt igényel, úgy érdemesebb külön programként implementálni. Azonban ebben az esetben is indokolt, a GIS és az alkalmazás összekapcsolása az adatbázison keresztül.

Az új objektum orientált GIS szoftverek szinte kivétel nélkül objektum relációs adatbázisban tárolják geometriai és leíró adataikat. Ez a körülmény leegyszerűsíti a csatlakozást a külső alkalmazásokhoz a szabványosított adatbázis kezelő rendszereken keresztül. A közeljövő fejlődése összhangban az OPEN GIS CONSORTIUM célkitűzéseivel *az osztott feldolgozási szolgáltatások irányába mutat*. Ebben a megközelítésben oka fogyottá válik a GIS szoftverbe történő integrálásra való törekvés, mivel GIS desktop átalakul egy olyan klienssé, mely gyakorlatilag korlátlan számú hálózati gépen szétszórt modul összedolgozásával állítja elő az elemzés, tervezés vagy optimalizálás eredményét. Ebben rendszerben minden alkalmazás úgy van implementálva, hogy a leghatékonyabban szolgáltathassa az eredményeket, a kliens feladata pedig az, hogy lekérje az adatokat, kezdeményezze az eljárásokat, továbbítsa a részeredményeket az újabb feldolgozó moduloknak, majd elhelyezze a végeredményt a saját adatbázisába, illetve jelenítse azt meg a képernyőn.

Ezek a várható lehetőségek még inkább indokolják, hogy tovább vizsgálódjunk olyan optimális megoldások irányában is, melyek egyelőre még túl számításigényesek a szabványos hardveren.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány az OTKA T 031 719 számú kutatási témája keretében készült.

Hivatkozások

Chabini I, Jiang H, Macneille P, Miller R (2003): Parallel Implementation of Dynamic Traffic Assignment Models. *IEEE International Conference on Systems, Man & Cybernetics*, Washington DC, October.

Church R, Sorensen P (1994): Integrating Normative Location Models into GIS: Problems and Prospects with the p-median Model. *NCGIA Technical Report 94-5*, June.

Cooper L (1963): Location-Allocation Problems. *Operationsns Research.* 11, 331–343.

Dijkstra E (1959): A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik*, 1:269-271.

Fonseca M, Fleming P (1993): Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization**,** In Stephanie Forrest, editor, *Proceedings of the Fifth International Conference on Genetic Algorithms*, 416-423, San Mateo, California, University of Illinois at Urbana-Champaign, Morgan Kauffman Publishers.

Gáspár P (2002): Birtokrendezési feladatok megoldása matematikai programozással**.** *Elektronikus publikáció.*

Gáspár P (2003): Birtokrendezési feladatok modellezése. *Elektronikus publikáció*.

Hertz A, Taillard E, de Werra D (1995): A TUTORIAL ON TABU SEARCH**.** Proc. *of Giornate di Lavoro AIRO'95 (Enterprise Systems: Management of Technological and Organizational Changes).*

Kaufman D, Nonis J, Smith R (1997): A Mixed Integer Linear Programming Model for Dynamic Route Guidance**.**

Liu H, Ban X, Ran B, Pitu B (2002): Analytical Dynamic Traffic Assignment Model with Probabilistic Travel Times and Perceptions. *Annual meeting of the Transportation Research Board (TRB)*, held in January 2002 in Washington, D.C.

Matthews K, Sibbald A, Craw S (1999): Implementation of a spatial decision support system for rural land use planning: integrating GIS an environmental models with search and optimisation algorithms. *Computers and Electronics in Agriculture*, 23; 9-26.

Miller H, Wu Y, Hung M (1999): GIS-based dynamic traffic congestion modeling to support time-critical logistics. *Proceedings of the 32nd Hawaii International Conference on System Sciences*,

Nagurney A (2003): Spatial Equilibrium in Transport Networks. Submitted to the *Handbook on Transport Geography and Spatial Systems.*

Rolland E, Gupta R (1996): New Linkages Between GIS and Combinatorial Optimization.

Wardrop J (1952): Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Part II, 325-378.

Wu Y, Miller H, Hung M (2001): A GIS-based decision support system for analysis of route choice in congested urban road networks. *Journal of Geographical Systems*, 3, 3-24.

Yiyi H (1997): A flow-based approach to the dynamic traffic assiggnement problem: Formulations, algorithms and computer implementations. *Master's thesis*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts, June.

DIGITÁLIS VIDEOKAMERA KALIBRÁCIÓJA

*Tóth Zoltán, Mélykúti Gábor, Barsi Árpád**

Digital video camera calibration *- This paper presents a procedure and experiences on a non-metric digital video camera calibration. To determine the interior orientation parameters and the function of the radial distortion, we suggest a two-step procedure. At first we calculate the function of the radial distortion by the help of a flat chessboard pattern, then in the next step we use a spatial test field to calculate the interior orientation parameters by the respect of the determined radial distortion. We give a sort review about the results and the accuracy of the method. Our research was made by a CAD application and the BINGO bundle block adjustment software.*

Keywords: digital camera, calibration, close-range

Jelen cikkünkben egy nem metrikus digitális kamerapár kalibrációját mutatjuk be. Ismertetjük az alkalmazott kamerák felépítését, jellemzőit. A belső tájékozás meghatározására, valamint az optikai elrajzolás függvényeinek meghatározására két lépcsős megoldást javasolunk a cikkben. Első lépésként az optikai elrajzolást határozzuk meg egy sík tesztmező segítségével, majd az optikai elrajzolás figyelembevételével egy térbeli tesztmező segítségével a belső tájékozás ismeretleneit számítjuk. Ismertetjük az alkalmazott eljárás eredményét, valamint pontossági mérőszámait. Vizsgálatainkat általános célú CAD rendszerben, valamint a BINGO sugárnyaláb-kiegyenlítő szoftverrel végeztük.

Kulcsszavak: digitális videokamera, kalibráció, közelfotogrammetria

Bevezetés

A Budapesti Műszaki Egyetem Fotogrammetria és Térinformatika Tanszékén egy folyamatban levő mobil térképező rendszer fejlesztése során merült fel digitális videokamera-pár kalibrációjának igénye. A fejlesztés során egy vetített pontsor térbeli helyzetét kívánjuk térbeli előmetszéssel meghatározni, mely művelethez a külső tájékozási elemek ismertén kívül - melyet GPS vevőpár, illetve inerciális navigációs rendszer szolgáltat - szükséges a belső tájékozás ismeretleneinek, valamint az optikai elrajzolásnak az előzetes meghatározása.

Az alkalmazott kameratípusról

Vizsgálatainkat a német ImagingSource cég DFK-41F02 típusú kamerájával (*1. ábra*) végeztük. A kamera néhány fontosabb tulajdonságát az *I. táblázatban* foglaltuk össze.

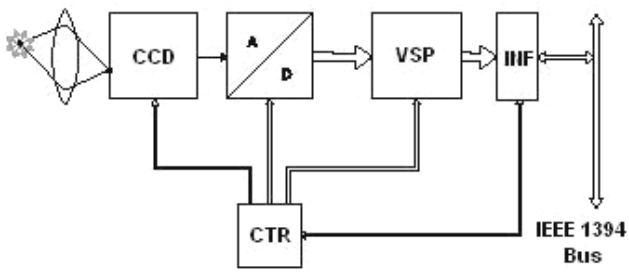
1. ábra. ImagingSource DFK-4102 digitális videokamera

**BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: toth.zoltan@fmt.bme.hu

I. táblázat. Az ImagingSource DFK-41F02 videokamera néhány jellemző adata

CCD Méret	½”
Maximális felbontás	1280*960 pixel
Pixelméret	4.8 μm
Sebesség	7.5 kép/sec

A kamerához a későbbi feladat geometriai igényeinek megfelelő Pentax Cosmicar nagylátószögű objektívet alkalmaztunk. A kamera felépítését a *2. ábra* szemlélteti. A CCD-ből érkező jelek egy analóg-digitális jelátalakítóból egy jelfeldolgozó (VSP) egység segítségével alakulnak át, az általunk is értelmezhető formátumba.



2. ábra. ImagingSource DFK-41F02 digitális videokamera felépítése

A kamera tápellátása és az adatcsere egyaránt Firewire (IEEE 1394) interfészen keresztül történik. Az egyes részek közötti adatcsere vezérlésére, valamint a kamera felhasználó általi paraméterezésére vezérlő egység (CTR) biztosít lehetőséget. Nagy előnye az alkalmazott kameratípusnak, hogy nemcsak saját C++ függvénytárral rendelkezik, hanem támogatja az ún. ActiveX technológiát, meglehetősen széles tehát azon programozási nyelvek sora, melyen keresztül vezérelhető.

Nem metrikus felvétek jellemzői

Ez a kamera fotogrammetriai szempontból természetesen nem metrikus kamerának minősül, azaz nem ismert a belső tájékozása *(Kraus 1998)*. A kamerában nincsenek olyan mechanikusan is kialakított referencia jelek (keretjelek), melyek a képkoordináta rendszer visszaállítását lehetővé tennék. Nem ismert az objektív képfelőli vetítési centrumának és a képsíknak a távolsága (kameraállandó, ck), sem talppontjának helyzete a képsíkon (főpont, ε0, η0). Nem ismertek továbbá az objektív igen jelentős elrajzolás értékei sem. Annak érdekében, hogy az ezzel a kamerával készített képekből metrikus adatokat lehessen előállítani, a kamera belső tájékozását meghatározó paramétereket kellő pontossággal meg kell határozni. Ezt az eljárást nevezzük kamera kalibrációnak.

A digitális képalkotást egy CCD érzékelő végzi, melyben az érzékelő elemek (pixelek) 1280 oszlopban és 960 sorban helyezkednek el. A képmátrix mérete is minden esetben megegyezik ezzel. A képmátrix sarok pixeleit tekintjük a továbbiakban keretjeleknek, hiszen ezek minden egyes kép esetében ugyanabban a pozícióban helyezkednek el, feltételezzük, hogy ezekhez viszonyítva – ugyanazon beállítás mellett – a vetítési centrum helyzete sem változik. A sarok pixelek, azaz a keretjelek helyzetét fogjuk rögzíteni egy mérő rendszer koordináta rendszerében.

A CCD érzékelőinek tényleges mérete a gyártó szerint 4.8 mikrométer. A gyakorlati feldolgozáshoz mi egy képpixel méretét 10 mikrométer nagyságúnak választottuk. Természetesen ennek arányában változnak a belső tájékozás további paraméterei is. Ha ezt következetesen alkalmazzuk minden kép esetén a feldolgozás során, akkor ez a végeredményben csak a képméretarány megállapításában jelentkezik. A keretjelek „nominális” képkoordinátái ennek megfelelően a ±6.40 és a

±4.80 mm értékeket veszik fel értelemszerűen. Ez a méretválasztás összhangban van a fotogrammetriában általában megszokott képkoordináta mérés pontosságával. Ugyanis a várhatóan néhány tized pixel (pixel alatti) pontosság megfelel a fotogrammetriai méréseknél tapasztalt néhány mikrométeres képkoordináta mérés pontosságának.

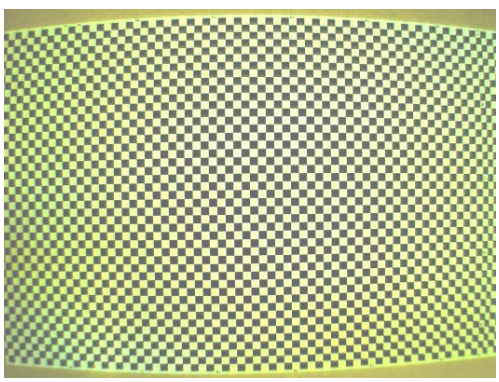
A tárgykoordináta rendszer mértékegységét ettől függetlenül választhatjuk meg. A kalibráció során a tárgykoordinátáknak dm egységet választottunk.

A digitális képeken a képkoordináták meghatározását egy CAD rendszerben végeztük el. A CAD rendszerbe a sarokpixelekhez rendelt „nominális" képkoordináta értékekre transzformáltuk be a képmátrixokat. Ebben a síkkoordináta rendszerben lehetett azután a további képpontok képkoordinátáit meghatározni.

A kamera belső tájékozási adatait két lépésben határoztuk meg. Első lépésben az – igen nagy mértékű – optikai elrajzolás paramétereit számítottuk egy síkbeli tesztmező segítségével, majd a második lépésben a vetítési centrum térbeli helyzetét (ck, ε0, η0) számítottuk egy térbeli tesztmező segítségével. A számításokat mindkét esetben a BINGO sugárnyaláb kiegyenlítő programmal végeztük *(Kruck 1995)*. A feladat két lépésben történő megoldását az tette lehetővé, hogy amennyiben a képsík és a tárgysík közel párhuzamos egymással, akkor az optikai elrajzolás értékek gyakorlatilag függetlenek a kameraállandó értékétől. A vetítési centrum helyzetének meghatározásakor azonban az elrajzolás értékektől nem lehet eltekinteni, de a második lépésben ezek már ismertek.

Az optikai elrajzolás meghatározása

Az optikai elrajzolás meghatározásához a síkbeli tesztmezőt egy 2*2cm-es fekete-fehér sakktáblaszerű mintázat biztosította (*3. ábra*). Erről a mintegy 150 cm hosszú és 90 cm széles tesztmezőről több állásból készítettünk felvételeket, mindkét vizsgálandó kamerával. Az elkészített felvételeken mintegy 120-120 pont képkoordinátáit mértünk ki, egy CAD programot képkoordináta mérő „műszernek", komparátornak alkalmazva. Az alkalmazott sugárnyaláb-kiegyenlítő szoftver (BINGO) által megkívánt képkoordináta-fájlformátumot ezen CAD alkalmazás alá írt makróval állítottuk elő.

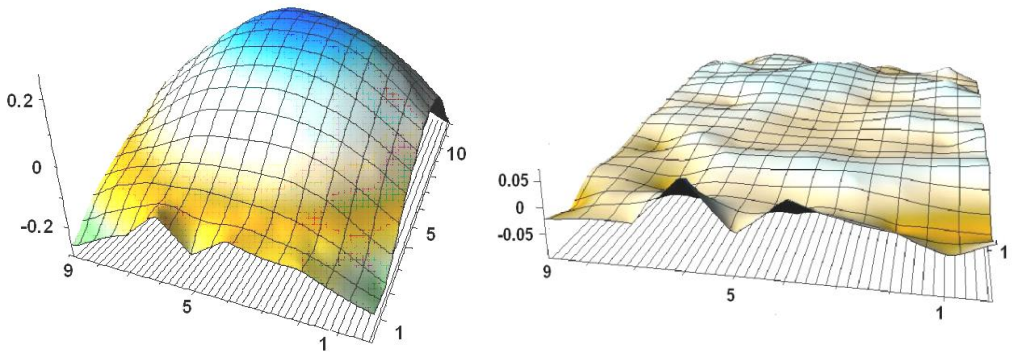


3. ábra. A felhasznált tesztmező

A közelítőleg helyes belső és külső tájékozás előzetes meghatározása után a BINGO sugárnyaláb-kiegyenlítő szoftverrel az optikai elrajzolás figyelembevétele nélkül, szabad hálózatként kiegyenlítve a rendszert, térbeli előmetszéssel meghatározva az illesztőpontok geodéziai koordinátáit, a meglévő jelentős optikai elrajzolás értékek miatt, az eredeti sík helyett - nem meglepő módon - egy jellegzetesen domború felületet kaptunk.

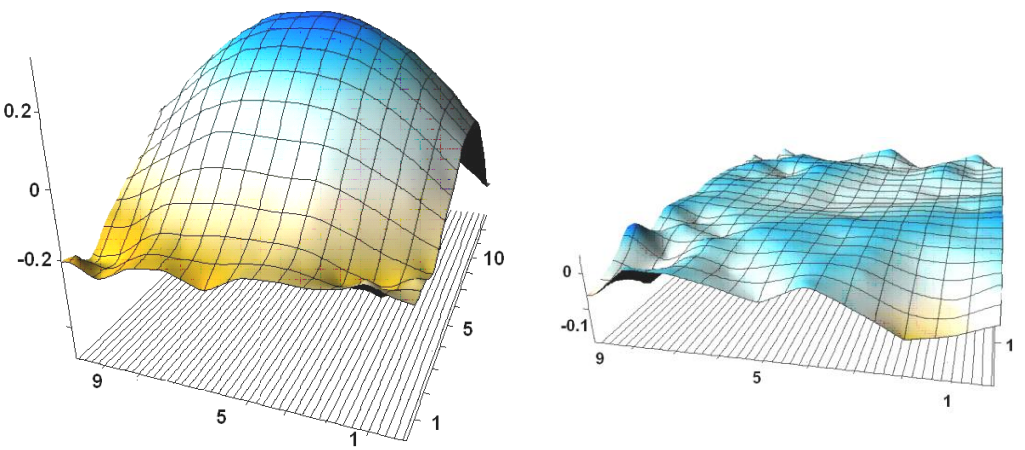
Ezt követően a kiegyenlítést megismételtük, járulékos paraméterek segítségével figyelembe véve az optikai elrajzolás hatásait. A BINGO sugárnyaláb kiegyenlítő programban 34 járulékos

paraméter közül lehet kiválasztani az adott feladathoz legmegfelelőbbeket. A kiválasztást a program automatikusan elvégzi, vagy a felhasználó választhatja ki a szerinte legjellemzőbb paramétereket *(Kruck 1995)*. A paraméter típusának meghatározása ill. kiválasztása után a program a sugárnyaláb kiegyenlítéssel egyidejűleg meghatározza a paraméterek aktuális értékeit. Ezeket az értékeket, a további feldolgozás során, mint radiális optikai elrajzolás értékeket – adott érétékekként – figyelembe lehet venni, mint a belső tájékozás egyik fontos összetevőjét.



a) b)

4. ábra. A szabad hálózatként végzett kiegyenlítés eredménye **a)** járulékos paraméterek nélküli, illetve **b)** azok figyelembevételével az I. kamera esetében (a tengelyek mértékegysége dm)



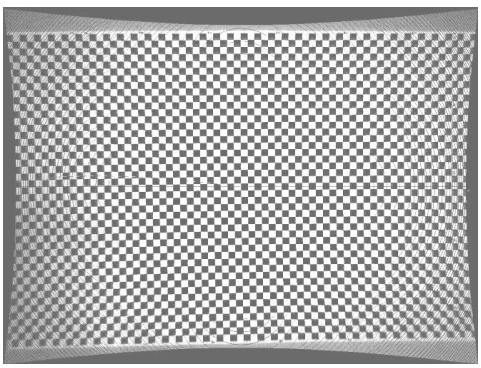
a) b)

5. ábra. A szabad hálózatként végzett kiegyenlítés eredménye **a)** járulékos paraméterek nélküli, illetve **b)** azok figyelembevételével a II. kamera esetében (a tengelyek mértékegysége dm)

Eredményül az optikai radiális elrajzolás értékeit kapjuk, illetve a járulékos paraméterek aktuális értékeit. A kiegyenlítés eredményét a *4. és az 5. ábra* szemlélteti. Az ábrákból látható, hogy a Z koordinátában az elrajzolás figyelembe vétele nélkül mintegy 5-6cm-es „domborulat” kisimult, csupán a képek szélein található mintegy 0.5-1 cm-es eltérés a tényleges síkfelülettől. További vizsgálat tárgyát képezheti, hogy ez a maradék-ellentmondás az optika, vagy a CCD hibájából ered, avagy mérési pontatlanságból származik.

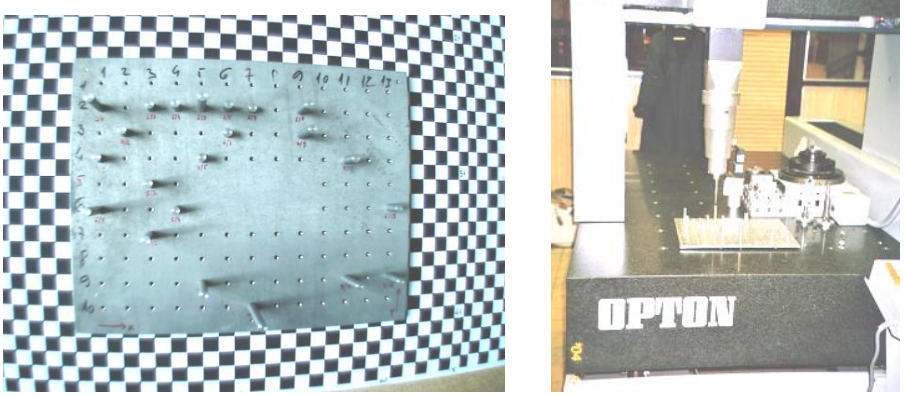
A vetítési centrum meghatározása

Az optikai elrajzolás függvényének birtokában két út áll előttünk, egyrészt a további feldolgozás során megjavíthatjuk a mért képkoordinátákat, illetve – prezentációs céllal – akár a teljes raszterképet is átalakíthatjuk. Ez utóbbi művelethez készítettünk egy alkalmazást, ami pixelenkénti transzformációval korrigálja az eredeti, torzult képet. (*6. ábra*)



6. ábra. Elrajzolással korrigált raszterkép

A vetítési centrum térbeli koordinátáit a képtérben a már említett térbeli tesztmező segítségével számítottuk ki, melyről mindkét kamerával több állásból készítettünk felvételeket. A tesztmező nominális koordinátáit nagy pontosságú koordinátamérő műszer segítségével határoztuk meg *(Fekete 2004)*. A tesztmező eredetileg fogászati fotogrammetriai célokra lett kialakítva, ennek a feladatnak megfelelő ponteloszlással. Az *7. ábrából* látható, hogy mind a ponteloszlás, mind a pontsűrűség tekintetében nem felel meg igazán az elrajzolás meghatározás igényeinek, indokolt volt tehát a két feladat különválasztása.



7. ábra. Térbeli tesztmező és szabatos meghatározása

A kiegyenlítés során az elrajzolás értékeket – már mint adott értékeket – figyelembe véve a következő számszerű eredményeket kaptuk („képkoordináta-egységben”) (*II. táblázat*):

II. táblázat. A belső tájékozás adatai (100pixel egységben)

	1. kamera	2. kamera
ck	9.4418±0.0317	9.3442±0.0412
ε0	-0.0929±0.014	0.2268±0.018
η0	0.0863±0.019	0.1288±0.023

Összefoglalás

Cikkünkben bemutattuk egy eljárást videokamerák kalibrációjára. A további vizsgálataink során más kamerákkal, illetve objektívekkel is el szeretnénk végezni a kalibrációt. A feladat munkaigényének csökkentése érdekében célszerűnek látjuk a sík tesztmező mérések automatizálását.

Hivatkozások

Kruck E (1995): BINGO-F User's Manual.
Fekete K (2004): A közelfotogrammetria és néhány fogászati alkalmazása. Sopron, *Geomatikai Közlemények* VII, 45-49.
Kraus K (1998): Fotogrammetria. *Egyetemi tankönyv*, Budapest.

LEHETŐSÉGEK A FÖLDI LÉZERES FELMÉRÉSBEN

Lovas Tamás, Barsi Árpád *

Potential of Terrestrial Laser scanning *- In this paper we give an overview about the application fields of terrestrial laser scanning. Since we already achieved remarkable results in the field of transportation data acquisition using airborne laser scanned data, this paper also focuses on transportation applications. Transportation authorities require rapid, accurate spatial data acquisition techniques to support intelligent transportation systems. We developed effective method for vehicle classification (into main categories) from laser scanned data sets, which can be the base of deriving further traffic data, such as vehicle count, traffic density or even velocity. We intend to enhance our technique in vehicle classification applying ground-laser measurements. The point density and geometric accuracy enable very accurate vehicle-profile determination, thus even subclasses can be separated, and the performance of the previously developed model-based classification can be significantly improved.*

Keywords: terrestrial and airborne laser-scanning, transportation, model-based classification

Dolgozatunkban áttekintést adunk a földi lézerszkennerek alkalmazási területeiről. Korábbi légi lézerszkenneres kutatásainkban a közlekedési adatnyerés területén értünk el jelentős eredményeket, így a földi esetben is a közlekedési adatnyerésre koncentrálunk. A közlekedésirányítás gyors, pontos térbeli adatnyerési eljárásokat igényel az intelligens közlekedési rendszerek kiszolgálására. Hatékony módszert dolgoztunk ki járművek osztályozására (főbb kategóriákba), amely további forgalmi adatok levezetésének lehet alapja: forgalom nagysága, sűrűsége vagy akár sebessége. A földi felméréssel az osztályozási technológiánkat kívánjuk kiegészíteni, javítani. A pontsűrűség és geometriai pontosság nagyon pontos jármű-profilok levezetését teszi lehetővé, így akár alosztályok is megkülönböztethetővé válnak; a korábban kifejlesztett modell-alapú osztályozó jelentősen javítható.

Kulcsszavak: földi és légi lézerszkenner, közlekedés, modell-alapú osztályozás,

Bevezetés

A 90-es években részben a navigációs rendszerek pontosságának növekedése, részben a technológiai fejlődés okozta elérhetőség miatt a lézerszkennerek óriási ütemben fejlődtek. Az Egyesült Államokban a digitális domborzat és felszín modellek létrehozásában immár vezető technológiának számítanak, de Európából is számos példa bizonyítja ezen új adatnyerési eljárás létjogosultságát. A múlt század végén a földi lézerszkennerek is növekvő ütemben terjedtek, melyek a légi és földi fotogrammetria viszonyához hasonlóan térnek el mind a technológiát, mind az alkalmazási területeket tekintve a légi felméréstől.

A lézerszkenneres technika újabb és újabb területekre tör be, a hagyományos, nagy területi lefedettségű erdészeti, árvízvédelmi, környezetvédelmi feladatokon kívül megjelent az alkalmazások körében a közlekedés is. Elsődlegesen az úthálózat és környezetének felmérése a cél, de egyre nagyobb hangsúlyt kap a forgalmi adatnyerés is. Korábbi vizsgálatainkban légi lézerszkennelt adatsorokból vezettünk le közlekedési információkat, melynek alapja a járművek osztályozása *(Toth et al. 2003)*. A modell-alapú, a járművek profilját, burkológörbéjét használó osztályozó kifejlesztése során merült fel az igény egy pontosabb, referenciaként használható technológia illetve általa biztosított adatsor iránt; ekkor fordultunk a földi lézerszkennerek felé. Tesztméréseinkből járműprofilokat vezettünk le, összehasonlítottuk és beillesztettük a légi felmérésből származó jármű-profilokkal illetve osztályozóval. Eredményeink bizonyítják, más távérzékelési technológiák kombinálásából nyert bíztató eredményekhez hasonlóan, hogy a földi és légi felmérések adott esetben jól kiegészít-

*BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.
E-mail: tlovas@mail.bme.hu

hetik egymást; a földi felmérés nagy pontosságú és pontsűrűségű adatsora referencia adatot szolgáltathat a nagy területi lefedettséget biztosító légi felmérés adatsorának.

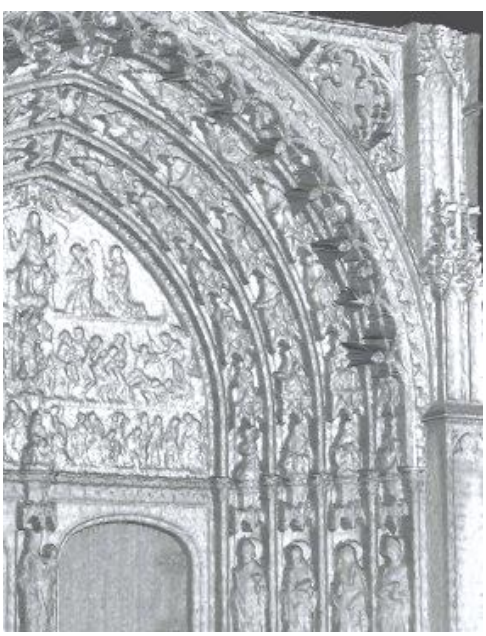
A légi és földi lézerszkennelési technológia

A légi lézerszkenner technológia fő komponensei a hordozó platform, a navigációs rendszer és a szkenner. Légi felmérés esetén a platform általában repülőgép vagy helikopter, ahol DGPS technológiát és inerciális navigációs rendszert ötvöző navigációs berendezés adja meg a szenzor pozícióját és helyzetét, így a lézerszenzor által mért távolság ismeretében a felmért pontok koordinátája számítható. Ezzel szemben a földi felmérésnél a mérés statikus, a szenzor és a térképezendő objektum is mozdulatlan, így nagyságrendekkel nagyobb pontsűrűség és pontosság érhető el. A földi és légi lézerszkenneres technológia összehasonlító paramétereit tartalmazza gyakorlati példák alapján az alábbi táblázat (*I. táblázat*).

I. táblázat. A földi és légi lézerszkenneres technológia jellemző paraméterei

Technológiai paraméterek	Földi lézerszkenner	Légi lézerszkenner
Szkennelési frekvencia	10-12 kHz	80-100 kHz
Pontsűrűség	>100 000 pont/m^2	5-10 pont/m^2
Pontosság	+/- 5 mm	15 cm magassági, 25-50 cm vízszintes
Lézerpont mérete	2-3 cm @ 100 m	20-50 cm @ 400-1000 m

A technológiai sajátosságokban megfigyelhető különbségek természetesen meghatározó jelentőségűek az alkalmazási köröket tekintve is. Míg a légi lézerszkennert többnyire nagy területi lefedettségű feladatokhoz használják, ahol nagy mennyiségű pont nyerhető rövid idő alatt az adott pontossági feltételek mellett, addig a földi felmérést speciálisan kis hatótávú, ám annál nagyobb pontosság-igényű feladatokra alkalmazzák. Az összehasonlítás a technológiai paramétereket és alkalmazási területeket tekintve nagyon hasonló a légi és a közel-fotogrammetria viszonyához.



Homlokzatfelvétel (Optech, Inc.)

Utcakép, Tokió (Optech, Inc.)

1. ábra. Földi lézerszkennerrel felmért állományok [Optech] *(http://www.optech.ca/)*

A légi felmérés főbb területei a digitális felszín és domborzat modell előállítása, erdészeti felmérések, nagy kiterjedésű vagy vonalas objektumok felmérése *(Barsi et al. 2003)*. Ezzel szemben a földi lézeres felmérés legfőbb alkalmazásai a gépészeti felmérés, műemlék-rekonstrukció, homlokzatfelvétel, ipar-technológiai felmérések (*1. ábra*).

Földi felmérés tapasztalatai

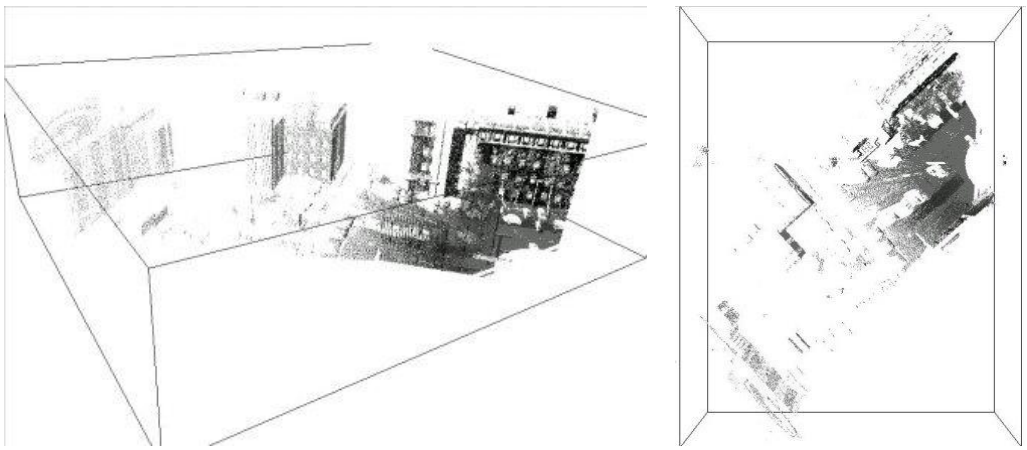
Földi lézerszkenneres vizsgálataink során az osztrák Riegl LMS-Z420i műszert használtuk. Ahogy a *2. ábrán* is látszik, a műszer feje henger alakú, mely 360°–os körbefordulást tesz lehetővé, ez különösen beltéri felmérésben hasznos funkció. Az ábrán szintén jól látható, ahogy egy digitális fényképezőgép kapcsolható a műszerhez, ez teszi lehetővé a digitális kép intenzitásértékeinek hozzárendelését a lézerszkennelt pontokhoz.

2. ábra. A Riegl LMS-Z420i földi lézerszkenner

A műszer állványra erősíthető, felállítása után a kamera és a vezérléshez szükséges laptop csatlakoztatható hozzá. A mérési terület kiválasztásához előzetes felmérésre (preview scan) van szükség, mely gyorsan, szerényebb pontsűrűséggel történik. A műszer vezérlőprogramjában aztán az előzetesen felmért látómezőből egyszerű ablakolással jelölhetjük azt a területet, mely a kívánt pontossággal és pontsűrűséggel kerül felmérésre.

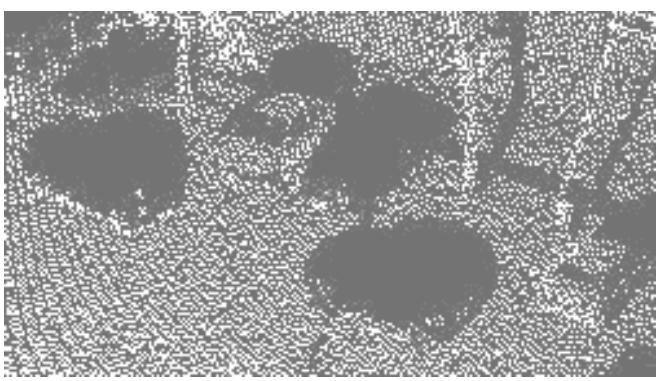
A műszer hatótávolsága 800 m, ez a terület adatállományának képén is látható; a műszer közelében rendkívül nagy a pontsűrűség, de a távolabbi objektumokról is elegendő pont verődött vissza a felismeréshez, kiértékeléshez (*3. ábra*). A viszonylag nagy hatótáv miatt előfordult, hogy a nyitott ablakokon áthaladva a lézersugár az épület egy-egy belső faláról (akár 2-3 szobával beljebb) verődött vissza.

Tesztmérésünket száraz, napfényes nyári időben végeztük, a mérés közben érdekes tapasztalatokra tettünk szert. Az erős napsugárzásban a műszer jelentősen kevesebb pontot gyűjtött akkor, amikor érzékelőjét nap érte; esernyővel leárnyékolva azonban hozta a kívánt pontsűrűséget. Nem a szenzort, hanem a térképezendő objektumot érintő, de szintén a visszaverődéssel kapcsolatos tapasztalat a színek kérdése. Mivel korábbi légi lézerszkenneres kutatásaink során elsődleges feladatunk volt forgalmi információk levezetése és autók térképezése, ezért a földi felmérésnél is arra törekedtünk, hogy járművek pontsorait állítsuk elő.



3. ábra. A teszterület

A cél érdekében egy parkolót és a környező objektumokat mértük fel (3. ábra). Az autók felmérésénél azt tapasztaltuk, hogy a járművek színe is befolyásolja a visszavert pontok mennyiségét. A sötét autókról lényegesen kevesebb pont verődött vissza, mint a világosakról; látványos példa erre az olyan sötét autó, melynek alsó fele bekoszolódott (*4. ábra*). Ahogy az ábrán is látható, a sötét járműveknek csak a világosabb részeiről verődtek vissza pontok, így az alsó, koszosabb részükről, hátsó lámpáikról.



4. ábra. Világos és sötét autókról visszavert pontok

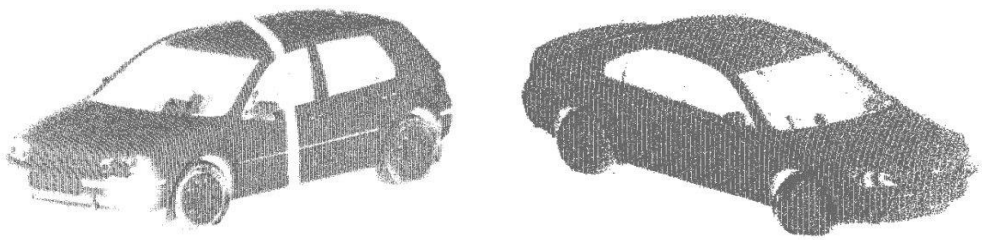
Ez méréseink szempontjából igen lényeges szempont, hiszen a későbbi vizsgálatainkhoz pontosan meghatározott jármű-profilokra volt szükségünk, ezért az autók felmérésére koncentráltunk *(Lovas et al. 2004a)*.

Földi lézerszkenneres felmérés közlekedési adatnyerésre

Légi lézerszkenneres vizsgálatainkban olyan, a közlekedésirányítás számára hasznos információkat vezettünk le, mint a forgalom nagysága, sűrűsége, sebessége. A felsorolt közlekedési adatok kiszámításának alapja az adatsorból leválogatott és főbb kategóriákba osztályozott járművek. A kifejlesztett módszerek egyike a modell-alapú osztályozó, mely a járműveket profilok, burkoló görbék alapján sorolja kategóriákba. A 2.4 pont/m^2-es pontsűrűségű légi adatsorból is elegendő pontossággal határozható meg egy jármű profilja, mely alapján főbb kategóriákba (személyautó, kisteherau-

tó/terepjáró, teherautó stb.) sorolhatók. Kezdetben arra voltunk kíváncsiak, hogy a földi felmérésből levezetett járműprofilok mennyiben járulhatnak hozzá a kifejlesztett osztályozó kiterjesztéséhez.

Első lépésben tehát jellemző járművek pontsorait mértük fel. Vizsgálatainkban Európában elterjedt, népszerű típusokat mértünk fel; a két tesztjármű a Volkswagen Golf és a Ford Mondeo volt (*5. ábra*). Ahogy az ábrán is látni, a járművekről kapott pontfelhő sűrűsége egészen apró részletek megkülönböztetését teszi lehetővé. Egy mérési irányból a járműről több mint 300 000 pont verődött vissza.



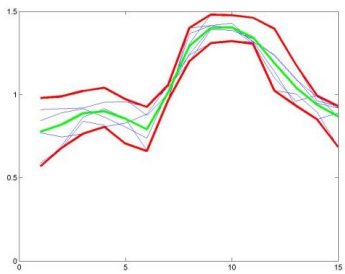
Golf Mondeo

5. ábra. A tesztjárművek

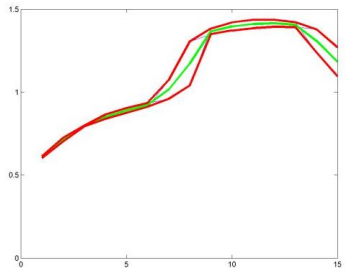
Ahogy korábban említettük, a műszerhez digitális kamera kapcsolható, így az álláspontból készített kép segítségével az összes lézerszkennelt pont intenzitásértékkel ellátható. A pontok méreteinek megnövelésével akár fotorealisztikus képet kaphatunk a térképezett objektumról.

6. ábra. Digitális képpel összeillesztett pontsor (színes eredetiben)

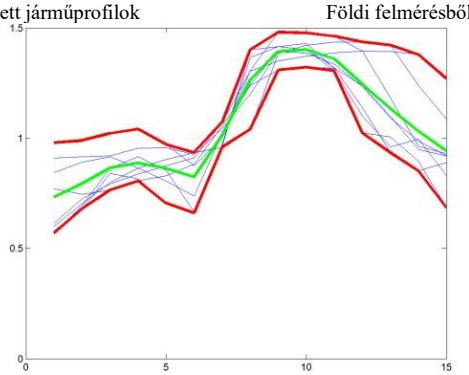
A későbbi alkalmazáshoz a feladat tehát a felmért tesztjárművek profiljainak levezetése. Az adott pontsűrűség rendkívül pontos profil-meghatározást tesz lehetővé. Míg a légi felmérésből 10-20 pontból álló burkológörbék levezetésére volt lehetőség, a földi esetben gyakorlatilag tetszőleges felbontásban írhatjuk le a járművek jellemző alakját. A profilokat összevetve jól látható, hogy a „földi profilok" a járművek farrészein térnek el a légi felmérésből levezett profiloktól. Ennek oka, hogy a légi adatsoraink az Egyesült Államokból származnak, így a vizsgált személyautó kategóriát ott jellemzően a lépcsőshátú autók uralják, melyből a tesztelt európai járművek a magasabb farrészükkel már kilógnak (*7. ábra*).



Légi felmérésből levezetett járműprofilok



Földi felmérésből levezetett járműprofilok



Földi és légi felmérésből származó profilok összevetése

7. ábra. Földi felmérésből levezetett profilok felhasználása; légi felmérésből levezett profilokkal való összevetése

Ahogy a technikai paraméterek és az ábrák is tükrözik, a földi felmérésből lényegesen pontosabb alak-meghatározás válik lehetővé. A pontosabb profilokkal akár alkategóriák is megkülönböztethetőek, mely finomítaná az eddigi durva osztályozást. Az elképzelés szerint a földi felmérésből egy minta profil-könyvtár állítható elő, mely referenciaként szolgálna a légi felmérésből levezetett profilokon alapuló osztályozó számára *(Lovas et al. 2004b)*.

Összefoglalás

A légi lézerszkenneres felmérés a 90-es években óriási fejlődésnek indult, melyet a szenzor árak csökkenésének köszönhetően a földi felmérési technológia elterjedése követett. A technológiai különbségek az alkalmazási területekben is megmutatkoznak, a földi felmérés főbb területei a nagy pontsűrűséget és pontosságot igénylő feladatok.

Tanulmányunkban módszert mutatunk be a földi lézeres felmérés közlekedési célú alkalmazására. A légi lézerszkennelt adatsorra korábban kifejlesztett technológia a leválogatott járművek durva kategorizálását oldja meg, ennek kiterjesztéséhez járulhat hozzá a földi lézerszkenner. A szerényebb pontsűrűség miatt a légi felmérésből durva felbontású járműprofilok vezethetők le, míg földi adatnyerésből valósághű, pontos, nagy felbontású profilok nyerhetők, melyek referenciaként szolgálhatnak a légi felméréshez. A pontosabb profilokkal az egyes fő kategóriákon belül akár alosztályok is megkülönböztethetővé válnak. A gyakorlati alkalmazáshoz, hasznosításhoz egy ún. profilkönyvtár létrehozása lenne célszerű, melyet a földi felméréssel a kívánt kategóriáknak megfelelően leválogatott járművek illetve profiljuk, burkológörbéjük alkotnának.

Hivatkozások

Barsi Á et al. (2003): Adatgyűjtés légi lézerletapogatással. Budapest, *Geodézia és Kartográfia* LV; 7, 10-17.

Lovas T, Barsi A, Toth C (2004a): Detecting Moving Targets in Laser Scanning. *ASPRS Annual Conference*, 136-142.

Lovas T, Toth C, Barsi A (2004b): Model-Based Vehicle Detection from LiDAR Data. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, 134-138.

Toth C, Barsi A, Lovas T (2003): Vehicle Recognition from LiDAR Data. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, XXXIV; 3/W13, 162-166.

KATASZRÓFAVÉDELEM A TÉRINFORMATIKA ÉS TÁVÉRZÉKELÉS SEGÍTSÉGÉVEL

*Kugler Zsófia, Barsi Árpád**

Disaster management with GIS and remote sensing *- Globally, it appears that the toll of death and damages in natural disasters are increasing. Each year about a quarter million people are affected in natural catastrophes nevertheless no comprehensive statistics exist on it. Most deaths and property damage occur as a consequence of lack in technological and social preparedness. However, some catastrophes cannot be avoided, but their social-economic impacts may be reduced by enhancing the effectiveness of disaster management. In order to understand and analyse which measures can be taken to reduce losses and cost of damages caused by disaster events, the fundamentals concepts of disaster studies has to be reviewed. Therefore this study gives a short introduction on comprehensive disaster management. Furthermore it aims to describe the use of Geographic Information Systems and the large-scale mapping possibilities of remote sensing to fulfil the geographic information need of crisis management. Last but not least it reveals the possibilities of the method on the concrete example of flood risk analysis.*

Keywords: Disaster management, GIS, remote sensing, real time data acquisition, risk modeling

A természeti katasztrófák halálos áldozatainak száma illetve az okozott anyagi kár mértéke folyamatosan nő. Minden évben negyed millió embert érintenek a természeti csapások, bár az áldozatok száma nem minden esetben számszerűsíthető. Az alacsony technológiai fejlettség, illetve a nem megfelelő társadalmi felkészültség miatt a legtöbb áldozat és anyagi kár a fejlődő országokat sújtja. Bár a csapások legnagyobb része nem kerülhető el, a gazdasági-társadalmi rendszerre gyakorolt hatásuk átgondolt védekezéssel enyhíthető. Az emberi áldozatok számának és a keletkező anyagi kár csökkentésének érdekében a katasztrófavédelem koncepcióját kell először tisztázni; dolgozatunkban röviden ismertetjük ennek fogalmát. Ezen felül áttekintést adunk a térinformatikai és a távérzékelési technológiák alkalmazhatóságára a katasztrófavédelemben. A módszerek alkalmazási lehetőségeit az árvízrizikó modellezés konkrét példáján mutatjuk be.

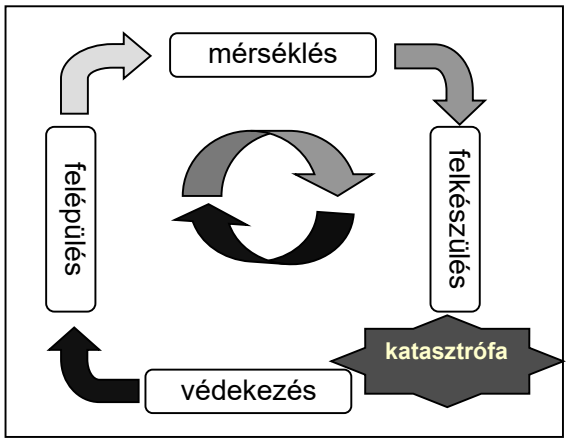
Kulcsszavak: Katasztrófavédelem, térinformatika, távérzékelés, valós-idejű adatgyűjtés, rizikó elemzés

Katasztrófa és katasztrófavédelem fogalma

Természeti csapásnak nevezünk a gazdasági-társadalmi rendszerre gyakorolt hirtelen, beható és pillanatnyi környezeti hatást. *(Alexander 1993)* Ezen definíció értelmében csak akkor beszélünk természeti katasztrófáról, ha a természeti csapás a lakosság életét, egészségét vagy anyagi javait veszélyezteti. Így a lakosságot nem érintő természeti folyamatok, mint például árvizek távoli, lakatlan területen, a fenti meghatározás alapján nem értelmezhetők katasztrófának, csupán szélsőséges hidrológiai jelenségnek tekinthetjük.

A természeti csapások el nem kerülhetők, viszont hatékonyan működő katasztrófavédelem megelőzheti, enyhítheti azok súlyosságát, csökkentve az anyagi károkat illetve az emberi áldozatok számát. A katasztrófavédelem tehát összefoglaló kifejezés, mely magában foglal minden olyan tevékenységet, ami – a katasztrófák bekövetkezése előtt és után – azok megelőzésére, és ellenük való védekezésre irányul. *(Plate 2001)*. A események időrendi sorrendje alapján négy egymástól eltérő szakaszra osztjuk, amely kezdődik a katasztrófa bekövetkezését megelőző mérséklési stádiummal, s tart egészen a katasztrófa utáni újraépítési időszakig (lásd *1. ábra*).

*BME, Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: zsofia.kugler@mail.bme.hu, barsi@eik.bme.hu



1. ábra. A katasztrófavédelem időrendi felosztása

Az egyes stádiumok különböző védelmi feladatokat jelentenek. Ezek a következők:

Mérséklési szakasz: magában foglal minden olyan tevékenységet, mely a katasztrófa bekövetkezése előtt a potenciális veszély kialakulásának és következményeinek enyhítésére illetve a sebezhetőség csökkentésére irányul. Eszközei a rizikó modellezés és a veszély megfelelő enyhítése.

Felkészülési szakasz: összefügg minden olyan aktivitással, mely közvetlenül a csapás bekövetkezte előtt elősegíti a védekezési tervek operatív működését, kezdve a tervek kidolgozásától az előrejelzésig, illetve a lakosságot riasztó rendszer kiépítéséig.

Védekezési szakasz: ezen stádium átfogja a mentési munkálatok végrehajtását és segítségnyújtást a katasztrófa bekövetkezése után. Főbb célja megőrizni a lakosok biztonságát és a rendet a természeti csapás közben. Ezen szakaszhoz tartozik a mentést végző alakulatok mobilizálása, menekülési és evakuálási tervek végrehajtása, az érintett lakosság felkutatása és megmentése, illetve elsődleges megélhetési szükségletek szétosztása az áldozatok között.

Felépülési szakasz: ezen stádium célja az érintett lakosság életének normalizálása és a közhivatalok működésének újraindítása. Vagyis ezen fázis tartalmazza az újjáépítési, felújítási, kárfelmérési, rom-eltakarítási munkálatokat *(Alexander 1993, Cova 1999)*.

A természeti csapások következményeinek enyhítése csak akkor lehet sikeres, ha megfelelő információ áll rendelkezésre a katasztrófa aktuális helyzetéről *(Skidmore 2002).* A távérzékelés és térinformatika ebben tud segítséget nyújtani. A következő fejezet bemutatja, milyen lehetőségekkel mutat túl ezen két eszköz a katasztrófavédelmet támogató hagyományos módszereken.

Távérzékelés és térinformatika a katasztrófavédelemben

Katasztrófavédelemi munkálatok közben számos olyan kérdés merül fel a döntési folyamatok során, melyek megválaszolásához helyhez kötött információkra van szükség. Ilyenek például, hogy „hova és milyen mentőalakulatokat kell küldeni ?”. Ezen kritikus döntéshez ismerni kell az érintett lakosság elhelyezkedését, a terület megközelíthetőségét, illetve az esetlegesen kitelepítendő lakosok elhelyezési lehetőségeit. Megválaszolásukban segítséget nyújthat a térbeli analízis térinformatikai módszere. A példa is mutatja, hogy a térinformatika jelentős szerepet játszhat a katasztrófavédelem helyhez kötött információkkal történő ellátásában. A térinformatikai módszerek a védelmi stádiumok mindegyikében eszközei lehetnek a felmerült információigény kielégítésének. Az *I. táblázat* számos olyan további kérdést sorol fel, melyek a védekezés során nagyban befolyásolhatják a mentési folyamatok megtervezését. A különböző eszközök kezdve az egyszerű lekérdezésektől az összetettebb legrövidebb útkeresésig mind támogathatják a védekezés során felmerülő döntéshozatalt.

I. táblázat. Térinformatika alkalmazási lehetősége a katasztrófavédelemben

Térbeli elemzés kérdésfeltevése	Alkalmazási terület
Mekkora lenne egy a potenciális katasztrófa által sújtott terület kiterjedése? Mik a várható károk?	mérséklés, katasztrófa védelem
Melyek a rendelkezésre álló útvonalak a mentőalakulatoknak?	mentő járművek útvonal tervezése
Hol helyezhető el a kitelepített lakosság?	Evakuálás tervezés
Milyen a kitelepítendő lakosság összetétele?	Evakuálás tervezés

A hagyományos védelmi módszerekkel szemben a térinformatika számos előnnyel rendelkezik, mely alkalmassá teszi a döntési folyamatok támogatására. Ezek összefoglalva a következők:

- adatok gyors feldolgozása,
- elavult adatok gyors frissítési lehetősége (szemben analóg térképekkel),
- az adatokhoz való egyszerű hozzáférés, illetve a védekezésben résztvevők közötti gyors adatcsere,
- különböző forrású, méretarányú, formátumú térbeli adatok egységes rendszerbe történő gyűjtése,
- térbeli információk elemzése egyéni felhasználói igénynek megfelelően,
- továbbá az eredmények digitális megjelenítése lehetővé teszi az eredmények gyors közlését *(Bernhardsen 2002).*

A felsorolt indokok miatt a katasztrófavédelem támogatása céljából az elmúlt évtizedekben számos térinformatikai alkalmazást fejlesztettek ki. A megfelelő információ ugyanis nagyban megnöveli az operatív döntéshozás hatékonyságát, növelve a lakosság biztonságát katasztrófa esetén.

A távérzékelés gyors technikai és módszertani fejlődése új perspektívát nyitott a környezet monitorozásban, ezen belül is a katasztrófák felmérésében. A műholdas távérzékelés rohamos léptékű fejlődése napjainkra már lehetővé tette, hogy a hagyományos, analóg térképek használatánál professzionálisabban, űrfelvételek feldolgozásával elégítsük ki a mentési munkálatok alapvető térbeli információigényét. Nemrégiben több földmegfigyelő műholdas rendszer került pályára, melyek a csapást megelőző védekezést, a mentési munkálatok segítését és az utólagos kárfelmérést célozták meg elősegíteni.

A műholdas távérzékelés célja a katasztrófavédelemben az elsődleges adatgyűjtés, vagyis adatnyerés a csapás aktuális helyzetéről, az érintett területek térbeli elhelyezkedéséről a katasztrófavédelem bármely szakaszában. Ezenfelül, mint elsődleges adatnyerési eljárásnak jelentős szerepe van még elavult adatok frissítésében is. Hagyományos felmérési módszerekkel szemben további előnye, hogy:

- távoli – nehezen megközelíthető területről is képes információt gyűjteni,
- gyakori – valós idejű felvételezésre is képes,
- nagy kiterjedésű területről nyer adatot.

Ezek közül a közel-valós idejű adatnyerés részletesebb bemutatására van szükség. A gyors reagálás minden védekezési munkálat elsődleges szempontja. Az űrfelvételek készítése után az adatállomány hosszú korrekciós és feldolgozási folyamaton megy keresztül. A végtermékeket általában virtuális katalógusokban tárolják, melyekhez az Interneten keresztül jut hozzá a felhasználó. Sajnos a hosszú feldolgozási eljárás miatt hetekkel-hónapokkal a felvételezés után jelennek meg az űrfelvételek az Interneten. Ezért az űrfelvételek valós-időben közvetlenül csak az űrkutatási központoktól szerezhetők meg. Egy katasztrófa bekövetkezése esetén ez nehezen kivitelezhető, hiszen minden űrkutatási központ valós-idejű megrendelési eljárása különböző, illetve a kéréseket is egyenként bírálják el.

Az egyéni kezdeményezések egyesítése végett hozták létre az International Charter „Space and Major Disasters" nevű szervezetet. A charter-t a világ nagyobb űrkutatási központjai alapították azzal a céllal, hogy űrfelvételek valós-idejű rendelkezésre bocsátásával segítsék a katasztrófák vé-

dekezési munkáit. A szervezet non-profit alapon tesz eleget a résztvevő országok felkéréseinek, ezzel is segítve a vészhelyzetek információigényének kielégítését. Magyarország egyenlőre nem tagja a szervezetnek, mivel nem rendelkezik saját űrszondával, mely hozzájárulhatna a szervezet működéséhez. A jelenleg résztvevő országokat és űrkutatási központjait a *II. táblázat* mutatja be.

II. táblázat. Térinformatika alkalmazása a katasztrófavédelemben

Members (Space Agencies)	Space resources
European Space Agency (ESA)	ERS
Centre national d'études spatiales (CNES)	SPOT
Canadian Space Agency (CSA)	RADARSAT
Indian Space Research Organisation (ISRO)	IRS
and Atmospheric Administration (NOAA)	POES, Goes

Az előző két fejezet bemutatta a katasztrófavédelem társadalmi és gazdasági hátterét, illetve, azt, hogy mely modern eszközök állnak rendelkezésünkre a természeti csapások hatásainak enyhítésére. A következő fejezet az árvízvédelem első, mérséklési szakaszának konkrét példáján mutatja be, hogyan tudja a távérzékelés és a térinformatika támogatni ezen fázis fő feladatait.

Árvízvédelem és térinformatika

A természeti csapásokból származó károk közel 40 %-át árvizek okozzák. A világ lakosságának több mint 15 %-át érintik az árvízkatasztrófák. Gyakoriságuk és kiterjedésük a közeljövőben a globális felmelegedés következtében valószínűsíthetően növekedni fog. Ezért fontos, hogy időben, még a katasztrófa bekövetkezte előtt mérjük fel annak esetleges kimeneteleit, következményeit, és ezek tükrében dolgozzunk ki fenntartható védekezési terveket.

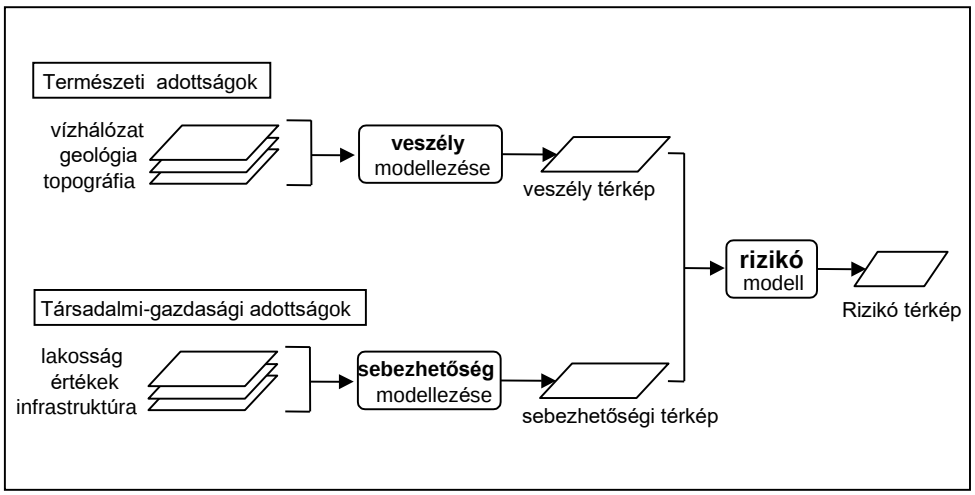
A katasztrófavédelem egyik fontos feladata tehát a lehetséges kockázat felmérése a természeti csapást megelőző mérséklési szakaszban. Ezt a folyamatot rizikó modellezésnek hívjuk. Ahhoz, hogy bemutassuk, hogyan segítheti a térinformatika és távérzékelés a mérséklés szakasz információ igényét, néhány fogalom tisztázása szükséges.

Természeti *veszélynek* hívjuk a csapás bekövetkezése előtt az egyén vagy anyagi értékei természetes vagy ember általi veszélyetetését. A *sebezhetőség* a veszély következtében megsérülő lakosságot illetve anyagi kárt írja le. A kettő kombinációjaként áll fenn a *rizikó*, mely a veszély bekövetkezésének valószínűségét adja meg egy adott időintervallumon belül *(Godschalk 1991).* Ezen fogalmak úgy függenek össze, hogy a veszély a katasztrófa előtt áll fenn, amikor a csapás bekövetkezésének valamekkora valószínűsége fennáll, mivel a lakosság veszélynek tette ki magát. Tehát a természeti veszély csak akkor válik rizikóvá, ha a sebezhetőség az adott területet jellemzi *(Alexander 1993).* A fogalomrendszert a *1. ábra* egyszerű képlete is jól magyarázza. Árvizek esetén az áradást, mint természeti jelenséget nevezzük veszélynek, árvíz rizikónak a 100 éves visszatérésű árvizet hívjuk, a lakosok illetve anyagi javaik attól válnak sebezhetővé, hogy a 100 éves árvíz szétterülési zónájában helyezkednek el. Így a lakosságot és anyagi javakat nem érintő árvízveszély nem minősül rizikónak.

$$\text{RIZIKÓ}_{\text{elem}} = \text{VESZÉLY}_{\text{elem}} * \text{SEBEZHETŐSÉG}_{\text{elem}}$$

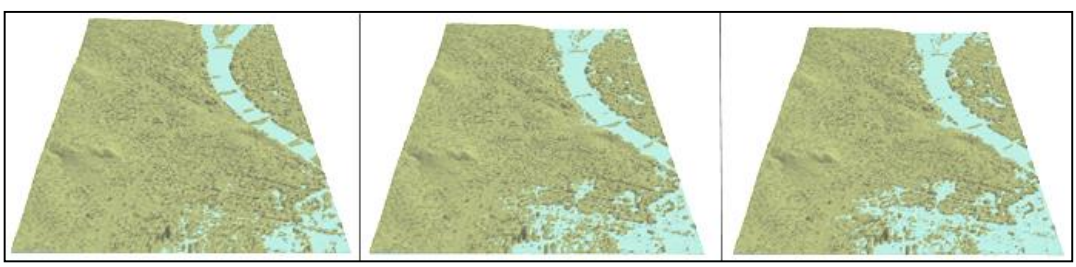
1. ábra. A rizikó, veszély és sebezhetőség összefüggése (UNDRO 1982)

A térinformatika szemszögéből megközelítve a sebezhetőség, illetve a természeti veszély térbeli fedvénynek tekinthető, melyeket a térbeli modellezés során összekapcsolva a valószínűsíthető rizikó mértéke válik becsülhetővé. (lásd *2. ábra*)



2. ábra. A térinformatika szerepe a rizikómodellezésben *(Cova 1999)*

Az árvíz veszélyeztetettség modellezése során a különböző valószínűséggel bekövetkező árvizek szétterülésének kimeneteleit szimuláljuk. Ehhez szükség van az adott terepfelszín magasságának ismeretére digitális terepmodell formájában. Digitális terepmodell előállítása több úton lehetséges. Ezen fázisban kap szerepet a távérzékelés előnye, hogy hatalmas kiterjedésű területről nyerhetünk adatot 3 dimenzióban. Ez történhet nagy térbeli felbontású légi és űrfelvételek kiértékelésével *(Kugler et al. 2004)* illetve a legmodernebb lézeres felméréssel *(Barsi et al. 2003)*. Ez utóbbi használata Magyarországon anyagi korlátok miatt még nem elterjedt. A terepfelszín magasságán és felszínén felül hidraulikai és vízrajzi adatok ismeretében a folyóvizek mozgásának dinamikus modellezése lehetségessé válik. Számos modell létezik árvízi elöntések, a víz szétterülésének leírására. Eredményükként a különböző valószínűségű árvízi vízállásokhoz a folyó által elöntött területek térbeli kiterjedését kapjuk (lásd *3. ábra*)



a. 105 m b. 108 m c. 110 m

3. ábra. Árvíz szétterülésének modellezése magadott tengerszint feletti magasságon

A rizikó modellezés következő lépésében a terület sebezhetőségét kell számszerűsíteni. Ehhez a vizsgált terület felszínborítottságát, felszínhasználatát, illetve infrastruktúráját kell megvizsgálni. Ezen szakaszban is a távérzékeléssel gyűjtött adatoknak lehet nagy jelentősége, hiszen akár távoli, nehezen megközelíthető területekről is gyűjthetünk információt, mely egy árvíz esetében könnyen belátható előnyökkel járhat. A sebezhetőségi fedvényeket a szétterülési modellel kombinálva megbecsülhetjük egy meghatározott visszatérésű árvíz lehetséges kárát. A rizikó modellezése során tehát a terepfelszín adottságaiból kiindulva térképezzük az elöntés lehetséges kimeneteleit, melynek esetleges anyagi kárát a katasztrófa bekövetkezte előtt számszerűsíteni tudjuk. Ez hatalmas segítséget nyújthat a prevenciós védelmi munkálatok ésszerű megtervezésében, lecsökkentve a döntési folyamatok bizonytalanságát.

sebez-
hetőség

Összefoglalás

Ezen cikk bemutatta a térinformatika és a távérzékelés alkalmazási lehetőségeit a katasztrófavédelemben. A módszerekhez tartozó fogalmak tisztázása után tárgyalásra kerültek ezen technológiák előnyei és hátrányai, hagyományos módszerekkel szemben. Megemlítésre került, hogy a térbeli elemzések módszere számos helyhez kötött kérdésre tud választ adni, csökkentve a védekezési munkálatok során felmerülő döntések bizonytalanságát. Vagyis igénynek megfelelő információ generálásával segíthetjük a védelmi feladatok végrehajtása közben felmerülő döntéseket.

A cikk továbbá az árvíz rizikó modellezés konkrét példáján mutatta be a módszerek alkalmazását. A veszély és a sebezhetőség fogalmának különválasztása egyben a modellezés két fő irányát is meghatározta. Míg az árvíz veszélyeztetettséget a különböző valószínűséggel bekövetkező árvizek szétterülésének kimeneteleivel határoztuk meg, addig a sebezhetőség fogalmát a felhalmozott anyagi értékek és emberi élet veszélyeztetettségével definiáltuk. A modellezés két alkotóelemét összekapcsolva jutunk el egy terület árvízveszélyeztetettségének számszerűsítéséhez, amely egyben további kutatásunk fő célja.

Mindezen erőfeszítések arra irányulnak, hogy katasztrófák esetén megfelelő térbeli információ álljon a döntéshozók rendelkezésére, felgyorsítva a katasztrófavédelem munkálatait, növelve a lakosság biztonságát.

Hivatkozások

Alexander D (1993): Natural Disasters, *University College London Press Ltd*, London.

Barsi Á, Detrekõi Á, Lovas T, Tóvári D (2003): Adatgyûjtés légi lézerletapogatással, *Geodézia és Kartográfia*, LV; 7, Budapest.

Bernhardsen T (2002): Geographic Information Systems. An Introduction, 3th edition, *John Wiley & Sons, Inc*.

Cova TJ (1999): GIS in disaster management, In Longley PA, Goodchild MF, Maguire DJ and Rhind WD: Geographical Information Systems, Management Issues and Applications, 2, *John Wiley & Sons*, 845-858.

Kugler Zs, Barsi Á (2004): Flood risk management with photogrammetry and space-borne remote sensing in Hungary, 24th EARSeL Symposium Proceedings, Rotterdam, In Press.

Plate EJ, Merz BC (2001): Naturkatastrophen. Ursachen – Auswirkung - Vorsorge, *Schweizerbart´sche Verlagsbuchhandlung*, Stuttgart.

Skidmore A (2002): Environmental Modelling with GIS and Remote Sensing. *Taylor and Francis*, London and New York.

UNDRO (1982): Natural disaster and vulnerability analysis, Geneva: Office of the United Nations Disaster Relief Co-ordinator.

A FÖLDRENGÉSEK GEO-KÖRNYEZETÉNEK TANULMÁNYOZÁSA TÉRINFORMATIKAI ESZKÖZÖKKEL

Gribovszki Katalin[*], *Szeidovitz Győző*[**]

The investigation of earthquakes' occurrences by using GIS tools *- In the Carpathian Basin earthquake generations are not sufficiently explained in their points of occurrences (namely several earthquakes can not be reduced only to map indications of recent tectonic movements), therefore GIS has come into existence in order to analyze the causes of earth tremors. The special seismological GIS includes all relevant information (maps and joint database) concerned with earthquakes covering the whole territory of Hungary. GIS contains the following maps: special macro- and microseismic epicenters and their parameters; active faults in the Pleistocene; active faults in the Tertiary; digital terrain models of the recent relief, Lower Pannonian bedrock, Upper Pannonian bedrock, Pre-Tertiary basement, Mohorovičić discontinuity; recent and Pleistocene antecedent rivers, water streams; Pleistocene sediment thickness. GIS enables to carry out special operations between different layers by applying its tools in order to reveal the recent tectonic movements and to throw light upon the generation of possible earthquake occurrences.*

Results of our investigation revealed that significant relation exists between the earthquake foci and recent tectonic lines. Some foci, however, can not be related to fracture lines. One part of earthquakes showed good agreement with Tertiary basement areas of considerable slope. On the sloping borders of Tertiary basements by the measurement of the pore pressure in boreholes we found that numerous earthquakes burst out on the sloping parts of Tertiary basement are in relation with overpressure areas as well.

Keywords: **Geographical Information System (GIS), raster analysis, seismology**

A Kárpát-medencében keletkezett rengések kipattanási okai az esetek jelentős részében nem tisztázottak (azaz számos rengést nem tudunk közvetlenül a jelenlegi mozgásokat ábrázoló tektonikai térképi elemekre visszavezetni), ezért a kipattanási okok tisztázására térinformatikai rendszert hoztunk létre. A így felépített térinformatikai rendszer tartalmazza Magyarország teljes területére a földrengésekkel kapcsolatba hozható lényeges információkat térképi és leíró formában (makro és mikroszeizmikus vizsgálatokból származó földrengés-epicentrumok; pleisztocénben aktív törésvonalak és süllyedék-területek; harmadidőszaki törésvonalak; domborzatmodellek: jelenkori-, pannóniai-, harmadidőszaki-, Mohorovičić-felszínek domborzata; jelenkori és pleisztocén kori ős vízfolyások; negyedidőszaki üledékvastagság; pórusnyomást tartalmazó mélyfúrások). A GIS-ben a rendszer különböző rétegei között, a GIS adta lehetőségek felhasználásával műveletvégzések történtek a jelenkori mozgások megállapítására, a földrengések lehetséges kipattanási okainak felkutatására.

A vizsgálat eredményeképpen kimutattuk, hogy a földrengés-epicentrumok és a jelenkori törésvonalak elhelyezkedése között szignifikáns kapcsolat van, találhatók voltak azonban olyan epicentrum-helyek, amelyeket a törésvonalakkal nem lehetett összefüggésbe hozni. Az epicentrumok egy része jó egyezést mutatott a harmadidőszaki medencealjzat nagy lejtésű területeivel. A mélyfúrásokban mért pórusnyomás-értékek alapján azonosítottuk a túlnyomásos zónákat. Vizsgálataink alapján megállapítható, hogy azokon a területeken, ahol a harmadidőszaki medencealjzat lejtése 5 °-nál nagyobb és túlnyomás is fellép, nem zárható ki a földrengések keletkezése üledékcsúszás révén.

Kulcsszavak: térinformatika (GIS), raszterműveletek, földrengéskutatás

Bevezetés

Napjainkban több kidolgozott eljárás létezik a földrengés-veszélyeztetettség megbecslésére. Ezeket a módszereket nagyobb erejű rengések tanulmányozása során fejlesztették ki, azonban a hazai viszonyok közötti alkalmazásuk nem szolgáltat minden esetben elfogadható eredményt.

[*]*MTA GGKI, Geodéziai Főosztály, 9401 Sopron, Pf.: 05, E-mail: kgribovs@ggki.hu*
[**]*MTA GGKI, Szeizmológiai Főosztály, 1112 Budapest, Meredek u. 1,E-mail: szeid@seismology.hu*

A földrengés-veszélyeztetettség megbecslésekor a legnagyobb nehézséget a földrengésfészkek kijelölésében mutatkozó bizonytalanságok jelentik. A néhány száz éves, megbízhatóbb hazai földrengés-megfigyelés nem reprezentálja kellően hazánk aktivitását. (Hazánk földrengés-aktivitásának megállapításában előrelépést jelentett, hogy 1995-től sűrűbb szeizmikus hálózatot hoztak létre, amely lehetővé tette kisebb erejű – lakosság által már nem érzékelhető – rengések pontos helymeghatározását is. Ahhoz azonban, hogy a sűrűbb hálózat által regisztrált földrengés-tevékenységről elegendő adat álljon rendelkezésre, szükség van még további évtizedek adatgyűjtésére.) A földrengés-veszélyeztetettség megbecsléséhez le kell válogatni a földrengés-adatbázisról azokat a rengéseket, amelyek nem tektonikai eredetűek, és csak bizonyos területeken keletkeznek: gondolunk itt elsősorban a mesterségesen gerjesztett földrengés-tevékenységre, illetve a – későbbiekben részletesen magyarázott – üledékroskadáshoz, üledékcsúszáshoz köthető földrengés-tevékenységre. Ez a leválogatás nem minden esetben bizonyul könnyű feladatnak.

A veszélyeztetettség-számításokat pontosabbá tehetné egy olyan térkép megléte, amelyen a megfigyelt rengések és a potenciális földrengésfészkek helyeit egyaránt ábrázolni tudnánk. (A potenciális földrengésfészkek kifejezés jelentése: az eddigi rövid intervallumú makroszeizmikus észlelési időszakon belül – ez az intervallum megfelelő megbízhatósággal mindössze néhány száz évre tehető – nem tapasztaltunk még rengéseket, de jól megalapozott feltételezésekkel állíthatjuk, hogy ezeken a helyeken is számíthatunk a jövőben földrengésekre.)

A nehézségek áthidalásához *Jámbor és Szeidovitz (1995)* a Magyarországon keletkezett nagyobb rengések környezetét tanulmányozva a potenciális fészkek felderítésére munkahipotézist állított fel, melynek segítségével elkészítették Magyarország kvarter kinematikai térképét 1: 500 000 méretarányban. Az általuk elkészített térkép azonban nem váltotta be a hozzá fűzött reményeket. A kinematikai térképet a földrengésadatokkal egybevetve megállapították, hogy a rengések nagy része a kinematikai térképen megjelölt szerkezetek környezetében keletkezett, de voltak olyan rengések is, amelyek keletkezési helyére a kinematikai térkép nem adott magyarázatot. Ennek okait kutatva arra a következtetésre jutottak, hogy a süllyedő medencéken belül és azok környezetében gyakran igen sekély mélységben is várhatóak rengések. Mindezekből következően a potenciális földrengésfészkek feltárása az eredetileg elgondolásuknál bonyolultabb problémához vezetett, ezért a hagyományos elemzési módszereik már nem kecsegtettek eredménnyel. Vizsgálatuk eredményeinek végső konklúziójaként megállapítható, hogy a földrengések kipattanási körülményeivel kapcsolatban hozható nagymennyiségű térképi adathalmaz kezeléséhez mindenképpen számítógépes, térinformatikai feldolgozásra van szükség.

Mindezen előzményekből kiindulóan kutatásunk célkitűzése:

1. A nagyrengések geo-környezetének tanulmányozásával a földrengések kipattanási körülményeire vonatkozóan egységes geo-környezeti jellemzők megállapítása;
2. A megállapított, egységes geo-környezeti jellemzőket az ország más területein is azonosítva, potenciális földrengés-epicentrumok kijelölése.

Jelen cikkben bemutatott kutatási munka a fenti célkitűzés megvalósításának elsődleges állomását ismerteti. Ebben nem koncentráltunk mélyrehatóan egy-egy földrengés-epicentrum környezetének a geológiai, tektonikai fejlődéstörténetére – a harmadidőszak végétől napjainkig –, geomorfológiai változásaira, hanem az összes megállapított földrengés-epicentrumot együttesen kezelve próbáltunk kapcsolatot találni:

— az epicentrumok és a jelenkori mozgások helyeit ábrázoló térképek elemei között;
— az epicentrumok és a különböző geológiai korokhoz tartozó felületmodellek között.

Jelenkori mozgásokra utaló nyomokat kutattunk fel további potenciális földrengésfészek kijelölésére – a földrengés-epicentrumok konkrét figyelembevétele nélkül –, és ennek során különböző témájú geológiai, topográfiai térképeket használtunk fel az elemzésekhez.

A földrengés-epicentrumok geo-környezetének tanulmányozására csatlakoztunk a Veszprémi Egyetem Képfeldolgozás és Neuroszámítógépek Tanszékén folyó IKTA-00142/2002 számú projekthez. A megnevezett projektben adatbányászati módszerekkel vizsgáljuk a földrengés-epicentrumok és azok geo-környezete közötti kapcsolatokat.

Felhasznált munkatérképek

A bevezetőben említett célkitűzések megvalósításához digitális térképeket állítottunk elő, és illesztettünk egységes térinformatikai rendszerbe:

- Makroszeizmikus földrengés-epicentrum térkép (A lakosság által érzékelt földrengések közül az adott településen a legnagyobb intenzitásúak epicentrumai**);**
- Mikroszeizmikus földrengés-epicentrum térkép (Sűrűbb állomáshálózat által regisztrált rengések (1995-2003))**;**
- Magyarország kvarter kinematikai térképe *(Jámbor és Szeidovitz, 1995)*, (továbbiakban *negyedidőszaki mozgások térkép*);
- Pleisztocénben aktív törésvonalak és süllyedékterületek térképe *(Schweitzer Szerk. 1993)*, (továbbiakban *pleisztocén törésvonalak és süllyedékterületek térkép*);
- A negyedidőszaki képződmények vastagsága Magyarországon *(Franyó Szerk. 1992)* (továbbiakban *negyedidőszaki üledékvastagság térkép*);
- Magyarország geomorfológiai térképe *(Pécsi Szerk. 2000)*, annak jelenkori, tektonikus elemei (továbbiakban *geomorfológiai térkép jelenkori tektonikus elemei*);
- Magyarország pannonnál idősebb képződményeinek törésrendszer térképe *(Rumpler és Szabó Szerk. 1985)*
- Neogene tectonic map of the Pannonian Basin and the Surrounding Alpine-Carpathian-Dinaric mountains *(Horváth 1993)* (továbbiakban *neogene tectonic map*)**;**
- Szintvonalas térképek:
    - Jelenkori domborzat (Digital Elevation Modell-500);
    - Felsőpannóniai képződmények talpmélység térképe *(Csiky et al. Szerk. 1987)*;
    - Alsópannóniai képződmények talpmélység térképe *(Csiky et al. Szerk. 1987a)*;
    - Harmadidőszaki medencealjzat mélysége a Kárpát-medencében *(Kilényi és Sefara Eds. 1989)* (továbbiakban *harmadidőszaki medencealjzat*);
    - Mohorovičić-diszkontinuitás mélységtérképe *(Pozsgay et al. 1989)*;
- Jelenkori vízrajz, települések elhelyezkedése (Országos Térinformatikai Adatbázis -200)
- Minimális és maximális talajvízszintek térképe *(Pécsi M. Szerk. 1989)*

Digitális térképek előállítása

A földrengéskutatáshoz felhasználható térinformatikai rendszer tervéről, a rendszerhez szükséges térképi rétegek tartalmáról és azok háttéradatbázisáról már egy korábbi cikkben beszámoltunk (*Gribovszki, Szeidovitz 2000)*.

A munkánkhoz olyan analóg térképeket használtunk fel, amelyeket az ország teljes területére vonatkozóan egységesen, de különböző szempontok figyelembevételével készítettek. A kiindulási papírtérképeink egységesen 1 : 500 000 méretarányúak voltak.

A térképek egy részét magunk digitalizáltuk, további három digitális térképet pedig – nyers formában – kutatási együttműködés keretében a Magyar Állami Földtani Intézettől szereztük be. A digitalizálást AutoCAD 2000 programmal részben digitalizáló táblán, részben képernyőn végeztük. Térinformatikai rendszerünk minden rétegét EOV rendszerben tároltuk. A saját magunk digitalizált térképeket 13, az országhatáron elhelyezkedő pont segítségével tájékoztuk EOV rendszerbe, majd a tájékozást az országhatár további pontjainak felhasználásával AutoCAD CADOverlay transformation/rubbersheet utasításával, illetve az ArcView program Shapewarp nevű extensionjával pontosítottuk. (A térképek tájékozása nem volt egyszerű, mivel a térképeken nem álltak rendelkezésünkre a pontos tájékozáshoz használható koordinátahálózati pontok. Egyetlen tájékozásra alkalmas térképi elemet az országhatár törésvonala jelentette, amely azonban a különböző kutatóhelyeken más-más sablonnal szerepelt.)

A felületmodelleket (jelenkori domborzat, alsó-, és felsőpannóniai képződmények talpmélysége, harmadidőszaki medencealjzat) a bedigitalizált szintvonalak felhasználásával az ArcView program 3D Analyst extensionjával készítettük el.

Térképeinket az ArcView 3.2 térinformatikai programban kezeltük és elemeztük, illetve az elemzésekhez felhasználtuk még a program Spatial Analyst extensionját is.

A földrengés-epicentrum térképek előállítása

Az MTA GGKI Szeizmológiai Főosztályának munkatársaiként két különböző földrengés-epicentrumokat ábrázoló térképet állítottunk elő:

- I. típus: Makroszeizmikus földrengés-epicentrum térkép (a lakosság által érzékelt földrengések közül az adott településen a legnagyobb intenzitásúak figyelembevételével készült);
- II. típus: Mikroszeizmikus földrengés-epicentrum térkép (GeoRisk Földrengéskutató Intézet Bulletinjei alapján (Tóth et al. 1996-2004) készült).

Az I. típusú térkép elkészítésekor kiindulási alapunk *Jámbor et al. (1999) Kinematikai és földrengés-epicentrumok térképe* és a hozzá kapcsolódó 213 darab rengés rövid leírása volt. A hivatkozott térkép az azonos településhez kötődő eseményekből csak egyet, a legnagyobb intenzitású eseményt ábrázolta. Ezt a térképet átdolgoztuk és kiegészítettük. Az átdolgozást az indokolta, hogy a térkép alapján nem minden esetben tudtunk egy-egy földrengés-eseményhez konkrét epicentrum-helyet rendelni, hiszen az a legnagyobb megrázottságú települések mindegyikét ábrázolta. Vizsgálataink elvégzéséhez egy ponttal jellemzett helymeghatározású epicentrumokra volt szükségünk, ezért minden rengés esetén egy epicentrum-helyet kellett kijelölnünk. A térkép átdolgozáshoz felhasználtuk több makroszeizmikus katalógus adatát *(Réthly 1952, Zsíros 2000)*, 1902-től a mikro-szeizmikus bulletinek adatait, majd az 1995 után keletkezett rengéseknél a Georisk Földrengéskutató Intézet Bulletinjeinek makroszeizmikus katalógusadatait is. Eredménytérképünk – makroszeizmikus földrengés-epicentrum térkép – 244 darab különböző földrengés epicentrumát tartalmazza a rengések háttéradatbázisával együtt. A háttéradatbázis a következő oszlopokból áll:

- a rengés kipattanási dátuma;
- a rengés sorszáma (a mi rendszerünkben);
- a rengés maximális intenzitása;
- a település neve, amelyhez a rengés kötődik.

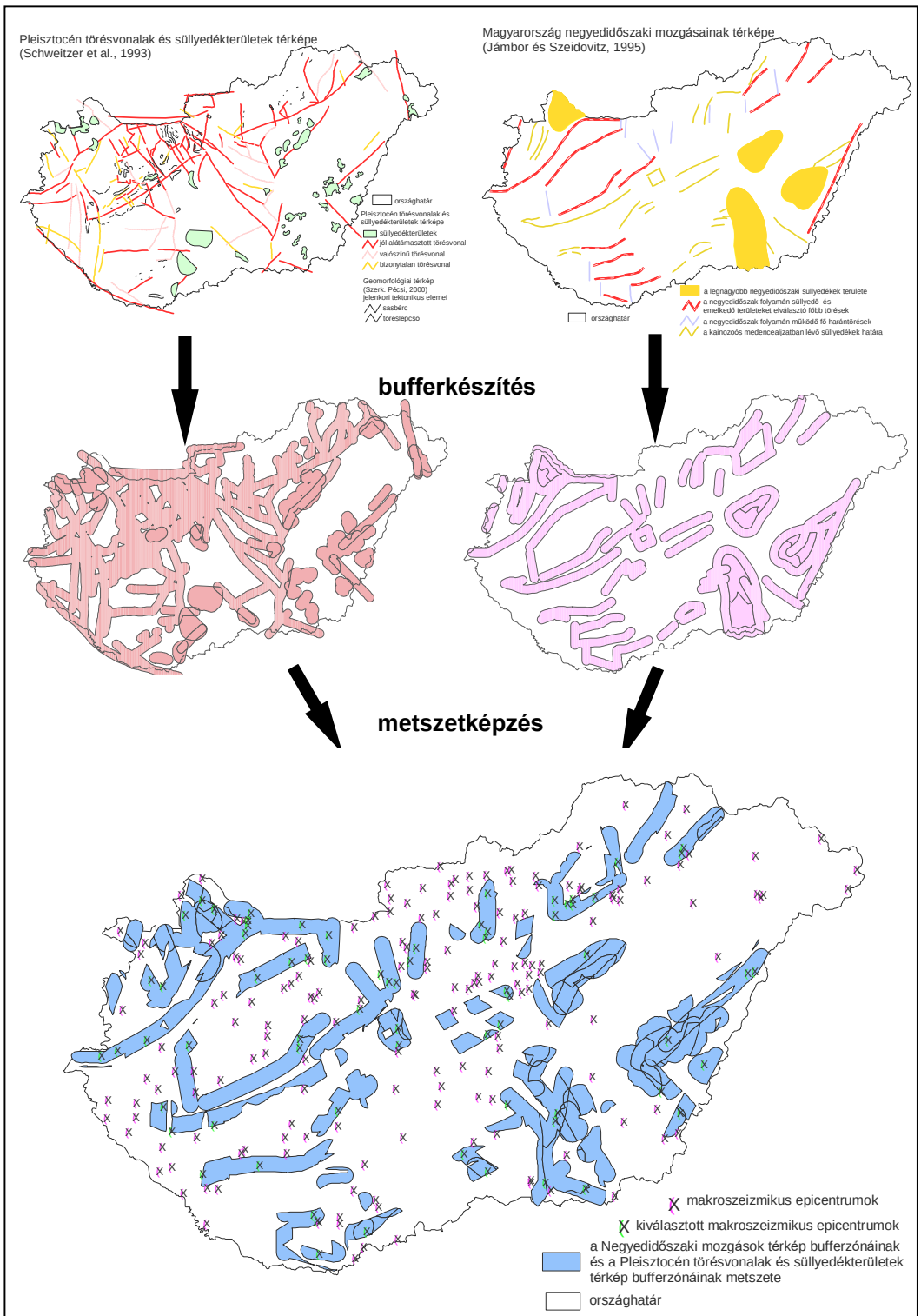
Mivel a fészekmélységek megállapítása a rengések többségénél bizonytalan (Szeidovitz et al. 2004), ezért azt a háttéradatbázisban nem tároltuk.

Elkészítettünk egy, az előzőtől eltérő epicentrum térképet és ahhoz kapcsolódó adatbázist (II. típusú térkép). Ez a térkép a kibővült hazai szeizmológiai hálózat bulletinjei alapján készült *(Tóth et al. 1996-2004)*. A bulletinekből kiválogattuk az általunk meghatározott szempontoknak eleget tevő rengéseket. Azokat a rengéseket, ahol a következő kritériumok közül kettő teljesült kihagytuk az ábrázolásból:

- horizontális irányú hiba (erh) > 5.0 km;
- vertikális irányú hiba (erz) > megállapított fészekmélység (h);
- a beérkezési idők korrekciójának szórása > 0.6;
- a rengést észlelő szomszédos állomások közötti legnagyobb szögérték (gap) > 250.

A felsorolt kritériumok alapján 129 darab rengést tudtunk ábrázolni. Az így előállt II. típusú térkép háttéradatbázisa megegyezik az előző, makroszeizmikus epicentrumok térképének háttéradatbázisával kiegészítve azt az időpont, a magnitúdó és a fészekmélység adatokkal. A kritériumainknak megfelelő rengések többsége az ország középső részén helyezkedik el, és csak néhány megbízható helymeghatározású rengés található a K-i, ÉK-i és DK-i, illetve az ÉNy-i országrészekben. A földrengéseloszlás – a megbízható helymeghatározású földrengések eloszlása – természetesen az állomáshálózat felépítését tükrözi.

A földrengés-epicentrum térképeinkhez hozzárendeltük – ahol erre lehetőség nyílt – fészekmechanizmus adatokat is, melyeket *Gerner (1995)* katalógusából és a Georisk Földrengéskutató Intézet Bulletinjeiből gyűjtöttünk össze. Jól ismert, hogy a fészekmechanizmus adatok tartalmazzák azon vetősík térbeli helyzetének paramétereit, amely mentén a rengés kipattant. Ezeket a vetősík paramétereket összehasonlíthatjuk a digitális térképeinken ábrázolt földrengéshez közeli törésvonalak elhelyezkedésével, adataival.



1.ábra. A jelenkori potenciálisan földrengés-aktív területek kijelölésének egyik módszere

Térképi elemzések

A következőkben bemutatunk néhány konkrét, a térinformatikai rendszerünkkel megvalósított elemzést potenciálisan aktív területek kijelölésére. További elemzéseinkkel kerestük azokat a szerkezeti elemeket, amelyek környezetében az epicentrumok az átlagosnál nagyobb sűrűségben helyezkednek el. Vizsgálataink közé tartozott még jelenkori mozgásokra utaló nyomok azonosítása is.

Egyszerű módszer potenciálisan aktív területek kijelölésére

A hazánkban található jelenkori aktív mozgásos területekről mind a magyar földrajztudósok, mind a geológus szakemberek készítettek térképeket – *pleisztocén törésvonalak és süllyedékterületek térkép; geomorfológiai térkép jelenkori tektonikus elemei; negyedidőszaki mozgások térkép* – az elmúlt évtizedekben. Kézenfekvő és megbízható megoldásnak ígérkezik a potenciálisan földrengés-aktív területek kijelölésére az az eljárás, melyben képezzük a különböző szakembercsoportok által készített térképek közös részét, és így jelöljük ki azokat a területeket, amelyek a jelenkorban aktívnak tekinthetőek.

A térképek közös részeit a következőképpen állítottuk elő. Először képeztük a térképi elemek 5 km-eres bufferzónáját. Erre azért volt szükség, mert a makroszeizmikus adatok alapján 5 km-nél pontosabban nem volt lokalizálható egy-egy földrengés-epicentrum. Ezt követően meghatároztuk az ArcView Geoprocessing moduljának Intersection parancsával a bufferzónák közös részét. Az 1. ábra ezt a munkafolyamatot mutatja be. Az ábra utolsó térképén látható, hogy a rengéseknek mindössze 28.9 %-a található az így kijelölt zónákban, azaz a rengések több mint 70 %-ára nem ad kielégítő magyarázatot az eredménytérképünk. Az ábrából az is látható, hogy a metszetképzés során kirajzolódnak olyan területek is az országban, amelyekben eddig még alig tapasztaltunk makroszeizmikus rengéseket.

A pleisztocén törésvonalak és süllyedékterületek térkép elemeinek összehasonlítása az epicentrumokkal

Az általánosan elfogadott tudományos nézetek szerint a földrengések az aktív törésvonalak mentén pattannak ki. Ezért annak megválaszolására, hogy az epicentrumok mindegyike kötődik-e a térképeken ábrázolt aktív törésvonalakhoz elvégeztünk egy egyszerű vizsgálatot. Ebben a *pleisztocén törésvonalak és süllyedékterületek térkép* elemeit és a *geomorfológiai térkép tektonikus elemeit* vetettük össze a földrengés-epicentrumok elhelyezkedésével.

A fenti térképeknek az együttes felhasználását egyrészt az indokolta, hogy azokat a Földrajztudományi Kutató Intézet munkatársai részben azonos módszerrel készítették el (felszíni geomorfológiai jegyek felhasználásával), másrészt pedig az, hogy a *geomorfológiai térkép tektonikus elemei*nek környezetében epicentrum-sűrűsödéseket figyeltünk meg.

A vizsgálat során ismét használtuk az 5 km-es bufferzóna-képzés műveletét. (Az 1. ábra bal felső és a középső térképe.) Eredményként megállapítható, hogy a makroszeizmikus epicentrumok 69.2 %-a kerül a bufferzónával lefedett területrészekbe, a rengéseknek fennmaradó 30.8%-a azonban nem hozható kapcsolatba törésvonalakkal. A térképi elemektől (törésvonal, süllyedékterület, sasbérc, töréslépcső) 5 km-nél távolabb található epicentrumról úgy gondoljuk, hogy nincsen kapcsolatban az adott törésvonallal, ezért ezeket a epicentrumokat kihagytuk a szórás- és átlagszámításból. A számítások alapján az 5 km-en belüli epicentrumok átlagos távolságára a legközelebbi térképi elemtől 1.8 km, szórására pedig 1.3 km adódott. (Az átlag- és szórásszámításokhoz felhasználtuk az ArcView Spatial Analyst program Find Distance és Reclassify parancsait.) A kapott értékek azt mutatják, hogy amennyiben egy rengés valamelyik térképi elemmel kapcsolatba hozható, akkor ahhoz a térképi elemhez közel helyezkedik el az epicentrum.

Ha a fejezetünkben leírt vizsgálatot elvégezzük a mikroszeizmikus földrengés-epicentrumok térképével is, akkor az előzőekhez nagyon hasonló eredményt kapunk: rengéseink 69.8%-a kerül a térképi elemek 5 km-es bufferzónájába.

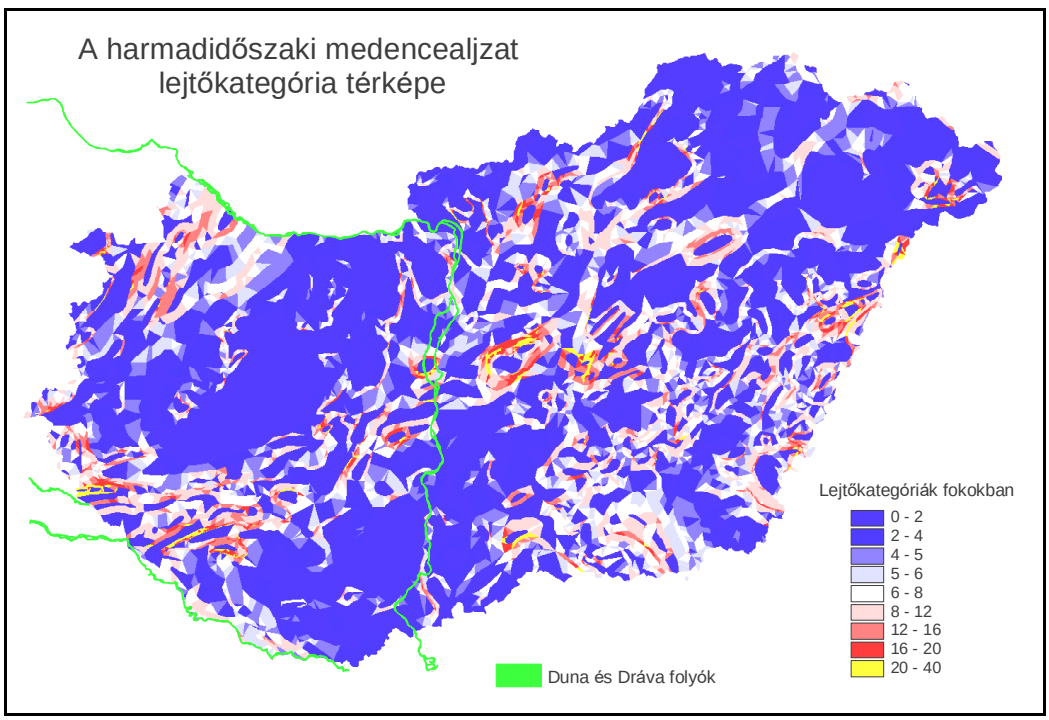
A Neogene tectonic map törésvonalainak összehasonlítása az epicentrumokkal

Külön rétegként szerepeltettük a térinformatikai rendszerünkben *a Neogene tectonic map of the Pannonian Basin and the Surrounding Alpine-Carpathian-Dinaric mountains (Horváth 1993)* című térkép törésvonalait is. A térkép olyan neogénban aktív törésvonalakat ábrázol, amelyeket részben geofizikai módszerekkel, részben epicentrumok alapján jelöltek ki. A törésvonalak köré 5 km-es bufferzónát képezve megvizsgáltuk, hogy a rengések hány százaléka található a bufferzónák által lefedett területrészekben. Eredményül azt kaptuk, hogy a makroszeizmikus epicentrumok 54.9 %-a kerül a bufferzónával lefedett területrészekbe, a mikroszeizmikus epicentrumok esetén pedig azok 60.5 %-a. Megállapíthatjuk, hogy ekkor is kapcsolatot tudtunk kimutatni a törésvonalak és az epicentrum-helyek között.

A harmadidőszaki medencealjzat térképből képzett lejtőkategória-térkép összehasonlítása az epicentrumokkal

Az előző két alfejezet vizsgálatai megmutatták, hogy a rengések legalább 30 %-ának kipattanási helyére a törésvonalak alapján nincs elfogadható magyarázatunk. A bevezetőben utaltunk rá, hogy elképzelhetőnek tartjuk a medencén belüli üledékroskadással, üledékcsúszással magyarázható rengések keletkezését is *(Scholz 1990)*. Kimutatták *(Rubey, King 1959)*, hogy az üledékcsúszást elősegíti, ha a rétegekben túlnyomás uralkodik, és ilyenkor már kisebb lejtésszög esetén is megvalósulhat az üledékcsúszás.

Az előzőekből következően a *harmadidőszaki medencealjzat* térképet felhasználva az ArcView program Spatial Analyst extensionjának Surface/Derive slope parancsával elkészítettük a harmadidőszaki medencealjzat lejtőkategória térképét (*2. ábra*).



2. ábra. A harmadidőszaki medencealjzat lejtőkategória térképe

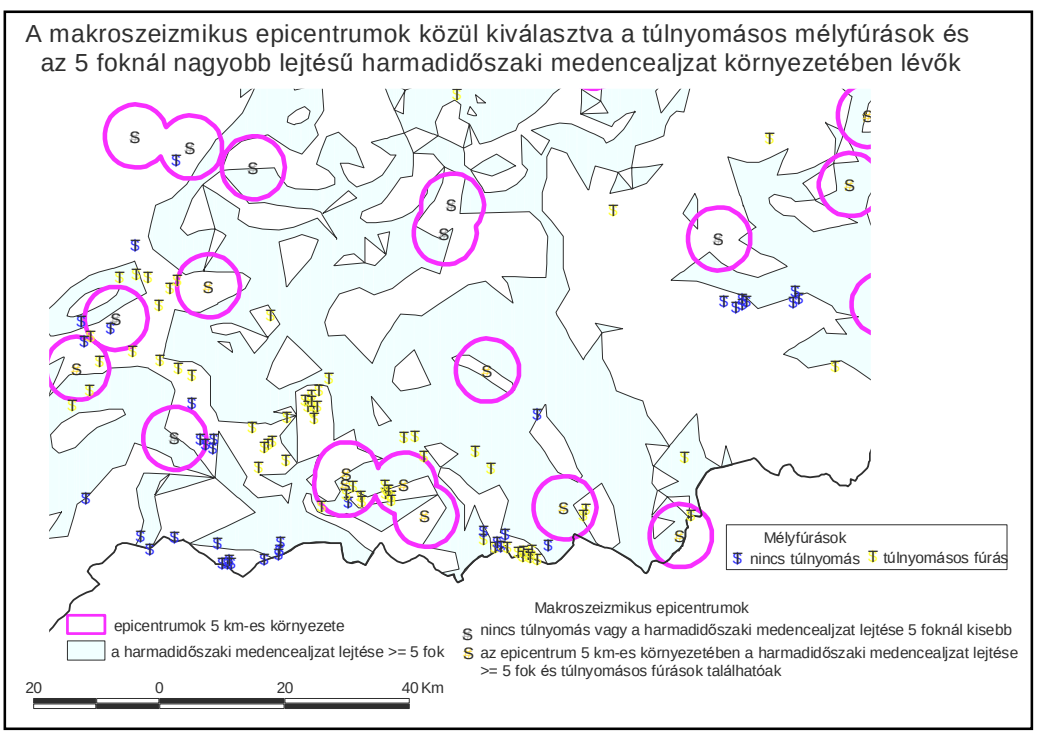
A harmadidőszaki medencealjzat lejtőkategória térképének felhasználásával a következő vizsgálatokat végeztük:

I. Leválogattuk a lejtőkategória térképből az Analysis/Reclassify paranccsal az ország azon területeit, ahol a harmadidőszaki medencealjzat lejtése 5°-os vagy annál nagyobb. Ábrázoltuk azokat a fúráshelyeket, amelyekben történt pórusnyomás-mérés, és megkülönböztettük egymástól a túlnyomásos és a nem túlnyomásos fúráshelyeket. Majd kiválogattuk a térképről azokat a makroszeizmikus epicentrumokat, amelyek 5 km-es környezetében egyszerre található 5°-os vagy annál nagyobb lejtésű medencealjzat és túlnyomással rendelkező fúrás is. Így összesen 29 db makroszeizmikus epicentrumot találtunk az országban. Mivel az ország területének csak egy részén történt pórusnyomás mérés, ezért az országnak csak a pórusnyomást mért területrészein tudunk bármiféle megállapítást tenni az epicentrumok helyére vonatkozóan. Összegzésképpen feltételezhetjük, hogy a kiválogatott 29 db rengés esetében a kipattanás oka az üledékrétegnek a medencealjzaton történő megcsúszása lehetett.

Megjegyezzük, hogy ha az ország területén nagyobb számú pórusnyomás-mérési eredménnyel rendelkeznénk, akkor elképzelhető, hogy több rengés kipattanását magyarázhatnánk üledékcsúszással.

A *3. ábrán* bemutatjuk az ország dél-alföldi területén a harmadidőszaki medencealjzat 5°-os vagy annál nagyobb lejtésű részeit, a túlnyomásos fúrások helyét és a földrengés-epicentrumokat.

II. Két térképen ábrázoltuk az ország azon területeit, ahol a harmadidőszaki medencealjzat lejtése 10 és 20 fok közötti, illetve 20 és 40 fok közötti. Majd elkészítettük ezen területek 5 km-es, 3.75 km-es és 2.5 km-es bufferzónáját (*4. ábra*). A bufferzónák minden esetben tartalmazzák magukat a kiinduló – az adott medencealjzat-lejtésű – területeket, amiknek a bufferzónáját elkészítettük. Ezután a program segítségével megszámoltuk a bufferzónákba eső epicentrumokat, kiszámítottuk az bufferzónák területét, és meghatároztuk a területtel normált epicentrumok számát a különböző lejtőkategóriák, a különböző típusú epicentrumok és a különböző szélességű bufferzónák esetében. A számítási eredményeket az *I. táblázatban* közöltük.



3. ábra. Epicentrumok, túlnyomásos fúrások és 5°<= lejtésű harmadidőszaki medencealjzat a Makói-árok környezetében

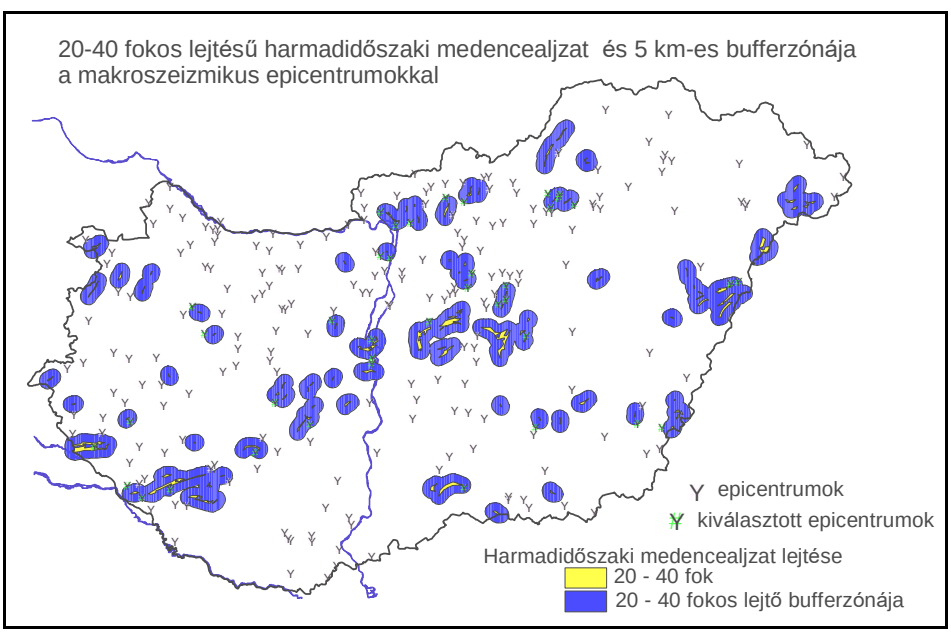
A táblázat mutatja, hogy a bufferzónák szélességének csökkentésével gyakorlatilag nem változik a bufferzónába eső epicentrumok területtel normált értéke (kivéve a 20-40°medencealjzat részeket a makroszeizmikus epicentrumok esetén). Vizsgálatunk eredményeképpen megállapíthatjuk, hogy a makroszeizmikus epicentrumok az átlagos epicentrum-eloszláshoz (2.44×10^{-3} db/km^2) képest sűrűbben helyezkednek el a nagylejtésű – mind a 10-20°, mind a 20-40°lejtőkategóriák esetén – harmadidőszaki medencealjzat környezetében.

I. táblázat. A különböző lejtőkategóriájú harmadidőszaki medencealjzat-területrészek köré képzett különböző szélességű bufferzónák által tartalmazott epicentrumok száma és normált száma

	10-20° lejtés	20-40° lejtés	10-20° lejtés	20-40° lejtés
5 km-es bufferzóna	136 db 51192 km^2 2.66×10^{-3} db/km^2	40 db 12481 km^2 3.20×10^{-3} db/km^2	53 db 51192 km^2 1.03×10^{-3} db/km^2	14 db 12481 km^2 1.12×10^{-3} db/km^2
3.75 km-es bufferzóna	107 db 41890 km^2 2.55×10^{-3} db/km^2	22 db 8904 km^2 2.47×10^{-3} db/km^2	43 db 41890 km^2 1.03×10^{-3} db/km^2	10 db 8904 km^2 1.12×10^{-3} db/km^2
2.5 km-es bufferzóna	82 db 31543 km^2 2.60×10^{-3} db/km^2	13 db 5664 km^2 2.30×10^{-3} db/km^2	29 db 31543 km^2 0.92×10^{-3} db/km^2	6 db 5664 km^2 1.06×10^{-3} db/km^2

A táblázat oszlopai a harmadidőszaki medencealjzat különböző lejtőkategóriáit jelölik. A szürke oszlopok a makroszeizmikus epicentrum-helyekre vonatkozó értékeket tartalmazzák, a fehér oszlopok a mikroszeizmikusakra vonatkozókat. A táblázat egyetlen cellájában fentről lefelé haladva a következő értékek találhatóak: bufferzóna által tartalmazott epicentrumok száma; bufferzóna területe; epicentrumok területtel normált értéke.

Ugyancsak a táblázat mutatja, hogy a nagyobb lejtésű (20-40°) medencealjzat-részek 5 km-es környezetében található makro-szeizmikus epicentrumok normált száma az átlagértéket jóval meghaladja. Ebből következtethetünk arra, hogy a 20-40°meredekségű medencealjzat-részek és azok környezete potenciálisan aktív területeknek tekinthetők. Ha 20-40°meredekségű medencealjzat-részeket vizsgálunk, akkor a makroszeizmikus epicentrumok normált száma nagymértékben függ a bufferzóna szélességétől.

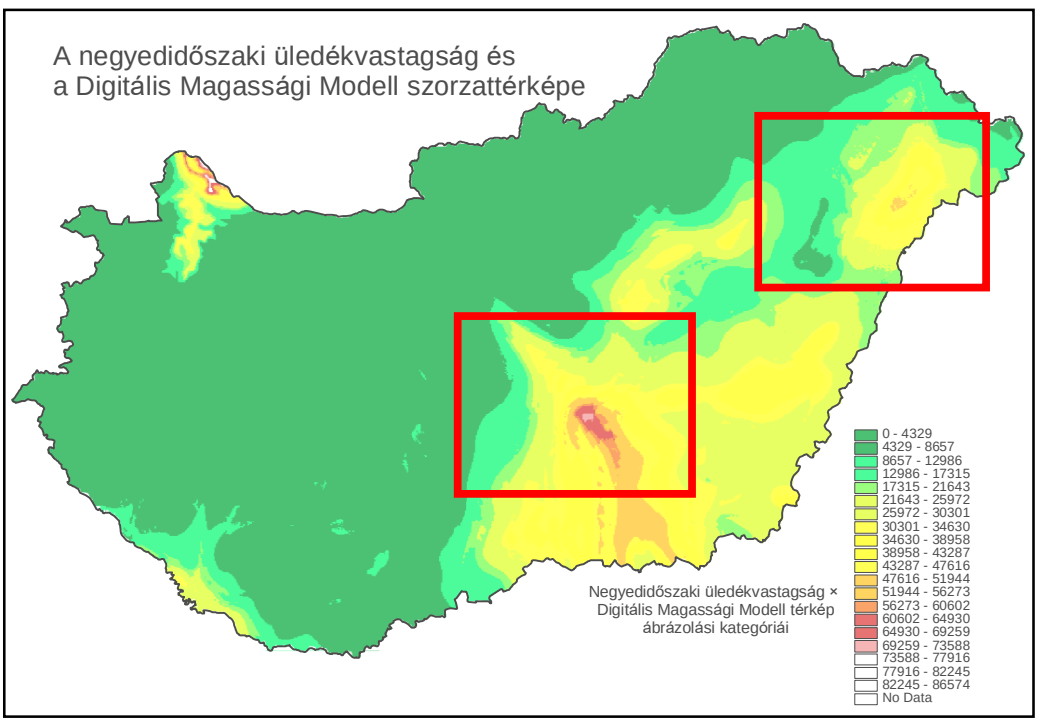


4. ábra. A 20-40° lejtésű harmadidőszaki medencealjzat, annak 5 km-es bufferzónája és a makroszeizmikus epicentrumok

A mikroszeizmikus epicentrumokat megvizsgálva látható, hogy a bufferzónákba eső epicentrumok normált értéke kevéssel átlag alatti értéket mutat (az átlagos epicentrum-eloszlás 1.29×10^{-3} db/km^2). Emiatt egyelőre nem látunk összefüggést a medencealjzat nagylejtésű területei és a mikroszeizmikus epicentrum-helyek között. (A rendelkezésre álló pontos helymeghatározású mikroszeizmikus epicentrumok 8 éves időtartamú gyűjtése még nem reprezentálja kellő mértékben hazánk földrengés-tevékenységét. Hosszabb vizsgálati időszak elteltével változhat az epicentrumok normált értéke.)

A negyedidőszaki üledékvastagság és a jelenkori domborzat szorzattérképe

Szorzattérképet készítettünk két alaptérkép felhasználásával (*negyedidőszaki üledékvastagság térkép, jelenkori domborzat térkép*) raszterműveletet alkalmazva. A szorzattérkép elkészítése a következőképpen történt. A Digital Elevation Modell-500 adatbázisból kiindulva, annak átalakításával, majd az ArcView 3D Analyst program alkalmazásával létrehoztuk a *domborzati felszín térképét*. A *negyedidőszaki üledékvastagság térképet* az ArcView shp formátumában a Magyar Állami Földtani Intézet munkatársai bocsátották rendelkezésünkre kutatási együttműködés keretében. A két térkép mindegyikét 500×500 m-es gridtérképpé alakítottuk át, majd a két gridtérképet összeszoroztuk (*5. ábra*).



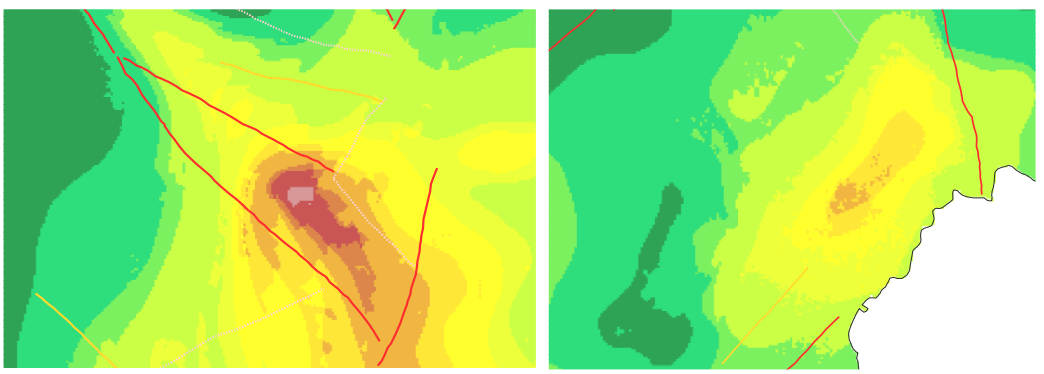
5. ábra. A negyedidőszaki üledékvastagság és a jelenkori domborzat magassági értékeinek szorzattérképe

A szorzattérkép elkészítésének megértéséhez magyarázatképpen a következőket mondjuk. Az Alföld felszínformái egyrészt a Pannon-tenger, majd -tó fokozatos feltöltődésével, másrészt tektonikai mozgások révén alakultak ki. A Pannon-tenger volt az erózióbázisa a környező hegyekből lepusztult üledéknek. A pleisztocén folyamán több ezer km^3 üledék halmozódott fel az Alföld különböző sebességgel süllyedő medencéiben. A feltöltődés során a szárazulatok térnyerése következtében a Pannon-tenger fokozatosan zsugorodott. A hegységekből folyóink a különböző sebességgel süllyedő medencékbe szállították az üledéket, így a medencék feltöltődtek, hegységek pusztulni kezdtek. Ezért a mélyedésekben, medencékben a pleisztocén üledék vastagsága nagyobb, míg a kiemelkedések helyén (hegyek, dombok) kisebb, hiszen ott a felszínformáló erők munkájának következményeképpen kevésbé tudott üledék lerakódni. (A lepusztulás mértéke nagyobb volt, mint az üledék-

lerakódás sebessége.) A környező hegyekből lezúdúló vízfolyások hordalékkúpokat alakítottak ki, és részben ezek hatására medrüket gyakran változtatták, de a vízfolyások mederváltoztatásának legfőképpen tektonikai okai voltak. *(Mike 1991)*

A szorzattérkép elkészítésének kiinduló feltételezése a következő volt. A szorzattérkép értékeitől azt várjuk, hogy az erősen süllyedő medencék nagyvastagságú pleisztocén üledékeinek azokat a területeit emeli ki, amelyeken nemcsak süllyedések, hanem emelkedések is történtek a pleisztocén folyamán illetve a jelenkorban. A tömegátrendeződések irányváltozása utalhat az aktív területek jelenlétére.

A szorzattérképen jól kirajzolódik a Kecskemét környéki földrengés aktív terület – a negyedidőszaki üledék vastagodását a jelenkori domborzat magasságának növekedése is követi –, ugyanezt mondhatjuk a Hoportyó kiemelkedésének környezetéről is (*6. ábra*). A Kecskemét környéki terület jelenkori mozgásait – a szorzattérkép eredményeit is alátámasztva – a *pleisztocénben aktív törésvonalak és süllyedékterületek térkép* törésvonalai is jelzik, hiszen a szorzattérkép emelkedő értékeit minden oldalról törésvonalak veszik körül.



6. ábra. A szorzattérkép Kecskemét - Cegléd és a Hoportyó kiemelkedésének környezetében a pleisztocén törésvonalakkal

A szorzattérképen nem tükröződik az Alföld többi aktív területe: a szegedi, a jászberényi, a békési aktív terület. Annak ellenére, hogy a Dunántúlon több földrengésfészket ismerünk (Komárom, Mór, Bérbaltavár, Tamási, Pincehely) nem találunk semmilyen utalást ezen aktív területekre. (A Kisalföldnek és a Dráva mentének a szorzattérképen látható anomáliája csak a negyedidőszaki üledék vastagodásából adódik, azt nem követi a domborzat jelentős változása.)

A szorzattérkép szerény eredményeinek okát abban látjuk, hogy a vizsgált alföldi területeken dimenzióbeli különbség van a *pleisztocén üledékvastagság* és a *jelenkori domborzat* magasságértékei között, ezért szorzattérképünk leginkább az üledékvastagságot tükrözi vissza.

Összefoglalás

A cikkben közölt kutatómunka során létrehoztunk egy egységes digitális térinformatikai rendszert, egyrészt abból a célból, hogy megpróbáljuk tisztázni a hazai földrengések kipattanási okait, másrészt hogy potenciálisan földrengés-aktív területeket tudjunk kijelölni. A térinformatikai rendszer földrengés-epicentrum térképeit részletes kutatások eredményeképpen készítettük el. A rendszerben lehetőség van a különböző témájú térképi rétegeknek, mint térbeli, helyhez kötött információknak együttes ábrázolására, és közöttük elemzéseket végezésére. A cikkben bemutatott térinformatikai elemzésekkel megmutattuk azt, hogy az egyes térképi rétegek között új, korábban más módszerekkel nehézkesebben megállapítható összefüggéseket is lehetséges kimutatni. Így például térinformatikai módszerekkel állapítottunk meg kapcsolatokat a különböző jelenkorban aktív törésvonaltérképek és a földrengés-epicentrumok, illetve a harmadidőszaki medencealjzat nagylejtésű részei és az epicentrum-helyek között. Sikerült kimutatnunk továbbá jelenkori mozgásokat a negyedidőszaki üledékvastagság és a jelenkori domborzat szorzattérképének segítségével.

Mint a bevezetőben már utaltunk rá jelentős eredményeket akkor érhetünk el a potenciálisan földrengés-aktív területek kijelölésében, ha egy-egy térinformatikai rendszert kisebb területre és

nagyobb méretarányú, részletesebb térképek felhasználásával készítünk el. Az ország teljes területére kiterjedő részletes forrásanyag nem létezik, hiszen számos mélyreható kutatás – amelyeknek eredményeképpen térképek is készültek – csak az ország egy-egy kisebb területére vonatkozóan valósult meg.

A közeljövőben tervezzük, hogy adatbányászati módszerekkel is megkíséreljük a potenciálisan aktív területek kijelölését.

Köszönetnyilvánítás

A cikk szerzői köszönetet mondanak a T 038099 és a T 025320 számú OTKA projekteknek, illetve a Magyar Geofizikusokért Alapítvány Kuratóriumának, hogy pénzügyi támogatásukkal a szerzők munkáját és konferencia-részvételét lehetővé tették. Az IKTA-00142/2002 számú pályázatnak köszönjük, hogy a digitális térképek elkészítéséhez pénzügyi segítséget nyújtott. Az ELTE Geofizikai Tanszéke munkatársai közül Dr. Horváth Ferenc tanszékvezetőnek és Dr. Dövényi Péternek megköszönjük, hogy a fúrások pórusnyomás-értékeit a rendelkezésünkre bocsátották. A Magyar Állami Földtani Intézet kutatóinak pedig, hogy a náluk digitalizált térképekből háromnak a nyers változatát kutatási együttműködés keretében munkánkhoz átadták.

Hivatkozások

Csíky G, Erdélyi Á, Jámbor Á, Kárpátiné Radó D és Kőrössy L Szerk. (1987): Magyarország Pannóniai (s.l.) képződményei. A dunántúli főcsoport (=felső-pannóniai képződmények) talpmélység térképe. M=1: 500 000. Magyar Állami Földtani Intézet, Budapest.

Csíky G, Erdélyi Á, Jámbor Á, Kárpátiné Radó D és Kőrössy L Szerk. (1987a): Magyarország Pannóniai (s.l.) képződményei. A peremartoni főcsoport (=alsó-pannóniai képződmények) talpmélység térképe. M=1: 500 000. Magyar Állami Földtani Intézet, Budapest.

Franyó F Szerk. (1992): A negyedidőszaki képződmények vastagsága Magyarországon. M=1: 500 000. Magyar Állami Földtani Intézet, Budapest.

Gerner P (1995): Catalogue of the earthquake focal mechanism solution for the pannonian region. Geophysical Department Eötvös University, Budapest.

Gribovszki K és Szeidovitz Gy (2001): Potenciális földrengések felkutatása térinformatikai rendszer felhasználásával. *Geomatikai Közlemények*, III, 255-264.

Horváth F (1993): Towards a mechanical model for the formation of the Pannonian basin. *Tectonophysics*, 226, 333-357.

Jámbor Á és Szeidovitz Gy (1995): Preliminary Investigation of the seismic hazard of the areas identified for siting a new NPP. ETV-ERŐTERV.

Jámbor Á, Mónus P és Szeidovitz Gy Szerk. (1999): Kinematikai és Földrengés Epicentrumok térképe. ERŐTERV Adattár, Budapest.

Kilényi É és Sefara J Szerk. (1989): Contour map of the Carpathian Basin beneath Austria, Czechoslovakia and Hungary. Eötvös Loránd Geophysical Institute of Hungary, Budapest.

Mike K (1991): Magyarország ősvízrajza és felszíni vizeinek története. AGUA, Budapest, 698 pp.

Pécsi M Szerk. A munkaközösség tagjai: **Ádám L, Borsy Z, M. Buczkó E, Gazdag L, Góczán L, Hahn Gy, Kaiser M, Láng S, Leél Őssy S, Lovász Gy, Marosi S, Pécsi M, Pinczés Z, Rétvári L, Somogyi S, Székely A és Szilárd J** (2000): Magyarország Geomorfológiai Térképe. Földrajztudományi Kutató Intézet, Budapest.

Pécsi M. Szerk. (1989): Magyarország Nemzeti Atlasza. Kartográfiai Vállalat, Budapest.

Posgay K, Albu I, Mayerová M, Nakládalová Z, Ibrmajer I, Bližkovsky M, Aric K és Gutdeutsch R (1991): Contour map of the Mohorovičić discontinuity beneath Ceantral Europe. *Geophys. Trans*. 36, 7-13.

Réthly A (1952): A Kárpátmedencék földrengései (455-1918). Akadémiai Kiadó, Budapest, 510 pp.

Rumpler J és, Szabó Z Szerk. (1985): Magyarország pannonnál idősebb képződményeinek törésrendszer térképe (a MÁELGI és a GKV felszíni geofizikai mérései alapján). M=1: 500 000. A Magyar Állami Földtani Intézet megbízásából készítette a „GEOS" Gmk, Budapest.

William W Rubey és M King Hubbert (1959): Role of fluid pressure in mechanics of overthrust faulting. *Bull. Geol. Soc. Am.* 70, 167-206.

Scholz A (1990): The mechanics of the earthquakes and faulting. Cambridge University Press. 467 pp.

Schweitzer F Szerk. (1993): Pleisztocénban aktív törésvonalak és süllyedékterületek térképe. MTA Földrajztudományi Kutató Intézet, Budapest

Szeidovitz Gy, Bus Z és Gribovszki K (2004): Focal depths of earthquakes in the Carpathian Basin. *Acta Geod. Geoph. Hung.* 39; 4, 447-470.

Tóth L, Mónus P és Zsíros T (1996-2004): Hungarian Earthquake Bulletin. Budapest, Georisk Földrengéskutató Intézet.

Zsíros T (2000): A Kárpát-medence szeizmicitása és földrengés veszélyessége: Magyar földrengés katalógus (456-1995). MTA GGKI Szeizmológiai Osztálya, Budapest.

ECONOMICAL NUMBERS

Jean-Marie De Koninck[*], *Florian Luca*[**]

This is a short survey concerning economical numbers. Some of these results were communicated by the second author in a seminar talk in the Mathematics Department of the University of West Hungary on May 10, 2004.

Introduction

Santos *(1995)* defined a number *n* to be *equidigital* if the prime factorization of *n* requires the same number of decimal digits as *n*, and *economical* if its prime factorization requires no more digits. He asked whether there are arbitrarily long sequences of consecutive economical numbers.

Pinch *(http://www.chalcedon.demon.co.uk/publish.html#62.)* gave an affirmative answer to this question assuming the *Prime k-tuple Conjecture* stated by Dickson *(1904)*. We recall that the Prime k-tuple Conjecture is the following statement.

Conjecture. 1 (Prime k-tuple Conjecture) *Let* $k \geq 2$ *and* $a_i > 0$ *and* b_i *be integers such that* $\gcd(a_i, b_i) = 1$ *holds for* $i = 1, \ldots, k$ *. Assume further that for every prime number* $p \leq k$ *, there exists a positive integer such that does not divide the product*

$$\prod_{i=1}^{k} (a_i n + b_i) \quad .$$

Then there exist infinitely many positive integers n such that the numbers $(a_i n + b_i)$ *are prime for* $i = 1, \ldots, k$ *.*

As an example, take $k = 2$, and $(a_1, b_1, a_2, b_2) = (1, 0, 1, 2)$. Then $a_1 n + b_1 = n$ and $a_2 n + b_2 n = n + 2$. Note that 2 does not divide any one of these numbers when $n = 1$. Hence, according to Conjecture 1, there should exist infinitely many positive integers *n* such that both *n* and $n + 2$ are primes. Such primes are called *twin primes*.

There are some more explicit versions of the above conjecture (*Hardy and Littlewood, 1923).* That is, Hardy and Littlewood predict that under the assumptions of the Conjecture 1, there should exist a positive constant *c* depending on $k, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$, such that is *x* is a large positive real number, then the number of positive integers $n \leq x$ such that all numbers $a_i n + b_i$ are primes is at least $cx/(\log x)^k$. Here and in what follows, for a positive real number y we use log y for its natural logarithm.

These conjectures are, unfortunately, far beyond what we are able to prove these days in Mathematics. Thus, while Pinch's result suggests that there might exist arbitrarily large sequences of consecutive economical numbers, such a result remains *conditional* until one can find a proof of Conjecture 1. Pinch also found a sequence of length nine of consecutive economical numbers starting with the 19-digit number1034429177995381247, and conjectured that such a sequence of arbitrary length always exists.

Known Results

Pinch's conjecture was proved true by Koninck and Luca *(2003)*. Their method is completely elementary. We describe the main ideas in what follows. Let $B > 1$ be a positive integer. For any positive integer *n*, we written

$$n := n_0 + n_1 B + \ldots + n_{t-1} B^{t-1}$$

[*]*D'epartment de Math'ematiques, Universit'e Laval, Qu'ebec G1K 7P4, Canada*
jmdk@mat.ulaval.ca
[**]*Instituto de Matem'aticas, Universidad Nacional Autonoma de M'exico, C.P. 58180, Morelia, Michoac'an*
fluca@matmor.unam.mx

for the base B representation of n. Here, $n_i \in \{0,1,...,B-1\}$ for $i=0,...,t-1$, and $n_{t-1} \neq 0$. We write $t = S_B(n)$. Thus, $S_B(n)$ stands for the number of digits of n in base B. Now let

$$n = \prod_{p^{\alpha_p} \| n} p^{\alpha_p}$$

be the prime factorization of n. Then,

$$\sum_{p|n} S_B(p)$$

represents the total number of digits of the *distinct* prime factors of n, while

$$\sum_{\substack{p|n \\ \alpha_p > 1}} S_B(\alpha_p)$$

represents the total number of digits needed to represent all the *nontrivial* (i.e., >1) exponents of the various primes dividing n. Hence, if we put

$$S_B(n) = \sum_{p|n} S_B(p) + \sum_{\substack{p|n \\ \alpha_p > 1}} S_B(\alpha_p) \ ,$$

then $T_B(n)$ is just the number of digits of the prime factorization of n in base B. Hence, with these notations, we have the following formal definition.

Definition 1. A positive integer n is called base B economical if $S_B(n) > T_B(n)$. *We write* ε_B *for the set of all economical numbers.*

We note that if $n = p$, then $S_B(n) = T_B(n)$, so primes are economical. Note that $S_B(n) = \lfloor \log n / \log B \rfloor + 1$.

Lemma 2. If

$$\prod_{p^{\alpha_p} \| n} \left(\frac{p^{\alpha_p - 1}}{\alpha_p} \right) > B^{2\omega(n)} \ ,$$

then $n \in \varepsilon_B$.

Lemma 3. Assume that there exists a prime number q and a positive integer β_q *such that* $q^{\beta_q} | n$ *and*

$$q^{\beta_q - 1} > \beta^{4\omega(n)+2} \ .$$

Then $n \in \varepsilon_B$.

Both Lemmas 2 and 3 are only *criteria*, i.e., sufficient conditions for a positive integer to be economical, but not necessary (note that primes fulfill neither the hypothesis of Lemma 2, nor that of Lemma 3). Never the less, they can be used to argue that certain constructions produce economical numbers. For example, recall that a *powerful* number is a positive integer n such that if $p|n$ for some prime number p, then $p^2 | n$. Using Lemma reflem:1, one can prove the following result.

Theorem 4. All powerful numbers are in ε_B *with finitely many exceptions.*

The main result (*Koninck and Luca, 2003)* is the following positive answer in strong effective form to Pinch's conjecture.

Theorem 5. There exist infinitely many positive integers n such that $n+i \in \varepsilon_B$ *holds for all* $i = 1, 2, ..., k(n)$, *where* $k(n) = \left\lfloor \frac{\log\log n}{30 \log B} \right\rfloor$.

The method of proof of the above theorem uses Lemma 3 and the Chinese Remainder Theorem. That is, let *x* be a large positive real number, let *k* and *y* be positive integers depending on *x* to be fixed later, and let $p_1, ..., p_k$ be the first *k* primes exceeding *k* . Let *n* be such that $n + j \equiv 0 \bmod p_j^y$ for $j = 1, ..., k$. By the Chinese Remainder Theorem, there exist infinitely many such positive integers *n*, and they are all of the form $n = n_0 + M\nu$ for some nonnegative integer $\nu \geq 0$, where n_0 is the smallest such integer and $M = \left(\prod_{j=1}^{k} p_j\right)^y$. Now if *M* is much smaller than *x*, then there are many such positive integers $n \leq x$. Fix $j \leq k$. We know that $p_j^y | n + j$, so if it is also the case that $p_j^{y-1} > B^{4\omega(n+j)+2}$, then Lemma 3 will guarantee that $n + j \in \varepsilon_B$. Of course, it might be that for some *n* the above inequality just does not hold, but what is shown by Koninck and Luca *(2003)* that *k* and *y* can be suitably chosen so that for large *x*, „most" of the numbers $n \leq x$ in the above arithmetic progression do satisfy the above inequality for all *j*. What this really means, is that if one picks such an *n* at random, then it is very likely that indeed all numbers of the form $n + j$ for $j = 1, ..., k$ are economical. The best (largest) value for *k* for which this is provably so is display style

$$k := k(x) = \left\lfloor \frac{\log\log x}{30 \log B} \right\rfloor$$

which explains the value of $k(n)$ appearing in the statement of Theorem 5. The proof of this result relies on some estimates for the number of positive integers $n \leq x$ having a fixed value for $\omega(n)$ due to Hardy and Ramanujan *(1917).*

Later, it was observed that the main argument of Theorem 5. can be extended to cover more general situations. Here is such an extension.

Theorem 6. Let $f_1(X), f_2(X), ..., f_k(X) \in Z[X]$ *be nonconstant polynomials. Then there exist infinitely many positive integers n such that all the numbers* $|f_1(n)|, ..., |f_k(n)|$ *are in* ε_B

The proof of Theorem 6 (*Koninck et al. 2004)* is similar to the above described proof of Theorem 5 it uses some more sophisticated ingredients specific to problems involving polynomials such as Hensel's Lemma and Chebotarev's Density Theorem.

We remark that Theorem 6 is a generalization of Theorem 5. To make an analogy with the Prime *k*-tuple Conjecture 1, we point out that there exists a more general version of this conjecture *(Schinzel and Sierpiński, 1958*) and is usually referred to as Schinzel's Hypothesis H.

Conjecture 7. (Schinzel's Hypothesis H) *Suppose* $f_1(X), ..., f_k(X)$ *are irreducible polynomials with rational coefficient which are integer valued for* $n \in Z$ *of degrees* $\geq$ *1 and positive leading terms such that there does not exist any prime number p dividing* $f_1(n), ..., f_k(n)$ *for all* $n \in Z$. *Then there exist infinitely many positive integers n such that* $f_i(n)$ *are prime for* $i = 1, ..., k$.

Thus, we note that Theorem 6 is a generalization of Theorem 5 in the same spirit as Conjecture 7 is a generalization of Conjecture 1.

The idea of the proof of Theorem 5 was used from the computational point of view to find a larger string of consecutive economical numbers in base 10 then Pinch's length nine string. The record is the length 12 string starting with the number

n = 1280035747874669217841432839181450366421676323232071,

all whose members are ε_{10}.

Open Questions

A much more difficult problem is the one of *counting* economical numbers. That is, let x be a large positive real number and let $N_B(x)=\#(\varepsilon_B \cup [1, x))$. What is an asymptotic formula for $N_B(x)$? If this is hard, what is, at least, the order of magnitude of $N_B(x)$? The only result available to us is the inequality

$$\frac{x}{\log x} \le N_B(x) \le \frac{x}{(\log x)^{\alpha_B + o(1)}}$$

as x tends to infinity, where α_B is positive, increasing as a function of B, $\alpha_2 > \frac{1}{20}$ (hence, $\alpha_B > \frac{1}{20}$ for all $B \ge 2$) and finally

$$\alpha_B \ge 1 - (1 + o(1))\sqrt{\frac{2 \log\log B}{\log B}}$$

as $B \to \infty$ *(Koninck and Luca, 2004)*. The lower inequality follows by counting only the primes $p \le x$ and by the Prime Number Theorem. The upper inequality is much more complicated. While we do not know which one of these two inequalities is closer to the truth, we note that the two bounds get close as B tends to infinity.

Acknowledgments

This paper was written during a very enjoyable visit by the second author to University of West Hungary in Sopron; he wishes to express his thanks to Laszlo Szalay and to that institution for the hospitality and support. The first author was supported in part by a grant from NSERC, while the second author's research was also partly supported by grants SEP-CONACYT 37259-E and 37260-E.

References

Dickson LE (1904): A new extension of Dirichlet's theorem on prime numbers, *Messenger of Math*. 33, 155-161.

Hardy GH and Ramanujan S (1917): The normal number of prime factors of an integer, *Quart. J. Math.* (Oxford) 48, 76-92.

Hardy GH and Littlewood JE (1923): Some problems on partitio numerorum III. On the expression of a number as a sum of primes, *Acta Math*. 44, 1-70.

Koninck JMDe and Luca F (2003): On strings of consecutive economical numbers of arbitrary length, Preprint.

Koninck JMDe and Luca F (2004): Counting the number of economical numbers, Preprint.

Koninck JMDe, Luca F and Szalay L (2004): A Schinzel Hypothesis H result with economical numbers, Preprint.

Santos BR (1995): „Problem 2204. Equidigital Representation", *J. Recreational Mathematics* 27, 58-59.

Schinzel A and Sierpiński W (1958): Sur certaines hypoth`eses concernant les nombres premiers, *Acta Arith*. 4, 185-208; Erratum, A*cta*. *Arith.*, (1959) 5, 259.

ÉVFOLYAM **VIII** 2005
Volume

GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK

Publications in Geomatics

SZERKESZTŐ **ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G**
Editor

Geomatikai Továbbképző Szeminárium
Budapest, 2003. november 20.

HU ISSN 1419-6492

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET, SOPRON