

ÉVFOLYAM
Volume

XI

2008

**G E O M A T I K A I
K Ö Z L E M É N Y E K**

Publications in Geomatics

SZERKESZTŐK
Editors

ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G

HU ISSN 1419-6492



*MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET
SOPRON*

Geomatikai Közlemények

Publications in Geomatics

kiadja a

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.
tel.: 99 - 508-340 fax.: 99 - 508-355
E-mail: geomatika@ggki.hu

felelős kiadó:

Závoti József
igazgató

szerkesztő:

Závoti József, Bányai László és Papp Gábor

technikai szerkesztő:

Szlávy Anna

készült a

LŐVÉR PRINT Kft. nyomdájában
9400 Sopron, Ady Endre u. 5.
tel.: 99 - 329-977

megjelent 150 példányban
Sopron, 2008

HU ISSN 1419-6492

GEOMATIKAI
KÖZLEMÉNYEK
XI.

A MŰHOLDAS HELYMEGHATÁROZÁS FÖLDTUDOMÁNYI ALKALMAZÁSA

MTA doktori értekezés – javított változat

Bányai László*

a műszaki tudomány kandidátusa, egyetemi docens



Application of satellite positioning in the field of earth sciences – DSc dissertation – Recent issue contains the revised version of the author's dissertation. Corrections are made according to the comments and proposals of three opponents, namely: Prof. Dr. Ákos Detrekői, member of the Hungarian Academy, Prof. Dr. György Major, member of the Hungarian Academy and Dr. Lajos Völgyesi, doctor of Academy (DSc), university docent.

Prof. Dr. Ákos Detrekői is well known as international expert in the fields of adjustment theory and geoinformatics. Prof. Dr. György Major is also an international expert in the fields of the meteorological satellite techniques and meteorological radiations. Dr. Lajos Völgyesi is internationally accepted expert of the gravity field investigations and the reanalysis of Eötvös-pendulum measurements for geodetic purposes in Hungary.

The dissertation is divided into six large parts. The introductory part gives a short historical review, describes the so-called global navigation satellite systems (GNSS) in general and defines the purposes and the structure of the dissertation. The second and third parts shortly summarise the theoretical background and details the basic deterministic and stochastic models of the satellite observations respectively. The fourth part contains the state of the art description of the satellite positioning in the fields of geodesy, geodynamics, aeronomy and meteorology concentrating on the activities of the International GNSS Service (IGS.) The last two parts describe the scientific results of the author and summarises the utilization of the results.

The results are summarised mainly according to publications of the author after the title of Candidate of Sciences (CSc) was achieved. The results are grouped according to investigations of tropospheric effects on the basis of meteorological data, ionospheric investigations and calibration, adjustment of GPS observations, investigation of antenna mean phase center offsets and coordinate transformation together with geoid estimation.

Keywords: satellite positioning, earth sciences, geodesy, geodynamics, aeronomy, meteorology

Ez a kiadvány a szerző MTA doktori disszertációjának javított változatát tartalmazza, amely Prof. Dr. Detrekői Ákos, az akadémia rendes tagja, Prof. Dr. Major György, az akadémia rendes tagja és Dr. Völgyesi Lajos, az MTA doktora, egyetemi docens, mint a doktori eljárás opponenseinek a megjegyzései és javaslatai alapján készült.

Prof. Dr. Detrekői Ákos a kiegyenlítő számítások és a geoinformatika nemzetközileg elismert szaktekintélye, Prof. Dr. Major György a műholdas meteorológia és a sugárzástan szintén nemzetközileg elismert szakértője, Dr. Völgyesi Lajos a nehézségi erőter és az Eötvös-inga mérések újrafeldolgozásának nemzetközileg elismert szakembere.

A disszertáció többnyire a szerzőnek a műszaki tudományok kandidátusa cím megszerzését követő publikációinak az eredményeit foglalja össze.

Az anyag tartalmilag és szerkezetileg a doktori disszertáció követelményeinek felel, az újraszerkesztés a Geomatikai Közlemények formai előírásainak megfelelően készült.

Kulcsszavak: műholdas helymeghatározás, földtudományok, geodézia, geodinamika, aeronomia, meteorológia

*MTA GGKI, 9400 Sopron, Csatka u. 6-8.

E-mail: banyai@ggki.hu

„Nagydolgozat tenni nem tudunk,
csak kicsiket, nagy szeretettel.”

egy XX. századi humanista

Köszönetnyilvánítás

Ahhoz, hogy ez a dolgozat elkészülhetett sokaknak tartozom hálás köszönettel. Elsőkén az MTA GGKI igazgatóinak, Dr. Somogyi Józsefnek, Dr. Varga Péternek és Dr. Závoti Józsefnek szeretném megköszönni, hogy munkámban támogattak, ha kellett biztattak, és lehetőségeik szerint megteremtették a nélkülözhetetlen feltételeket is.

A mai földtudomány sokrétű ismeretei csoportos munkát igényelnek, még akkor is, ha az eredményekről néha önállóan kell számot adnunk. Ezért külön köszönetet szeretnék mondani a Geodéziai Főosztály munkatársainak, akikkel a munkám során közös publikációk is készültek, név szerint Dr. Mentés Gyulának, Dr. Kalmár Jánosnak, Dr. Papp Gábornak és Eperné Pápai Ildikónak. A Geofizikai Főosztályról Dr. Bencze Pálnak és Dr. Kovács Károlynak.

Külön köszönettel tartozom a Nyugat-Magyarországi Egyetem Erdőmérnöki Kar akkori dékánjának, Dr. Mészáros Károlynak, és a Földmérési és Távérzékelési Tanszék vezetőjének, Dr. Bácsatyai Lászlónak a docensi kinevezéséért, amely lehetővé tette, hogy a globális helymeghatározás területén szerzett ismereteimet a hallgatóknak átadhassam, és az egyetemen rendelkezésére álló eszközöket saját kutatásaimban is felhasználjam.

Nem feledkezhetek meg az MTA X. osztály és a Geodéziai Tudományos bizottság akadémikusairól Dr. Bíró Péter és Dr. Detrekői Ákos akadémikusokról, egykori egyetemi tanárainmról, továbbá Dr. Ádám József akadémikusról, akik munkámban mindig támogattak és ennek a dolgozatnak a megírására is rendszeresen biztattak.

Elnézést kérek azoktól a különböző intézetekben dolgozó kollégáktól (Budapesti és Gazdaságtudományi Egyetem, NYME Geoinformatikai Kar, Földmérési és Távérzékelési Intézet, Kozmikus Geodéziai Observatórium), akiket hely hiányán most nem tudok névszerint megemlíteni.

Külön megköszönöm azonban Dr. Ádám József akadémikusnak, Dr. Borza Tibornak, Dr. Busics Györgynek, Dr. Kenyeres Ambrusnak, Dr. Krauter Andrásnak, Dr. Takács Bencének, valamint Husi Györgynek, a magyar nyelven megjelenő két GPS szakkönyv szerkesztésében együtt eltöltött hasznos munkánkat, amely jelen dolgozatnak is szerves részét képezi. Husi Györgyöt külön is kiemelném, aki holland állampolgárként hiánypótló szakirodalommal és ösztöndíj lehetőséggel is támogatott, az előző politikai rendszer szűkös lehetőségei között.

A rendszerváltást követően köszönettel tartozom az Európai Unió CEE-CIPA CT93-0130 pályázatának (Dr. Rene Warnant kollégának, Royal Observatory of Belgium), a Német Magyar Tét pályázatnak (Dr. Erwin Groten kollégának, Institute der Physikalische Geodäsie, Technische Universität Darmstadt), valamint a magyar OTKA pályázatokért, ahol résztvevő és témavezetőként is jelentős támogatás kaptam a dolgozatban bemutatott eredmények eléréséhez (T-4310, A-125, T-029052, T-030177).

Végül, de nem utolsó sorban, megköszönöm Dr. Gribovszki Katalin és Gyimóthy Attila kollégámnak a dolgozat átolvasását, a stilisztikai és egyéb formai változtatásokra tett javaslatait.

TARTALOMJEGYZÉK

1 Bevezetés	9
1.1 Történeti áttekintés	9
1.2 A GNSS rendszerekről általában	9
1.3 Az értekezés célja és felépítése	11
2 A műholdas helymeghatározás elméleti alapjai	13
2.1 A műholdak által sugárzott jelek	13
2.2 A jelterjedést befolyásoló tényezők	16
2.3 A GPS mérések és a geodinamikai jelenségek kapcsolata	18
2.4 A műholdak pályaszámítása	20
3 A műholdas megfigyelések alapösszefüggései	23
3.1 A helymeghatározás közvetítő egyenletei	23
3.2 Lineáris mérési kombinációk	24
3.3 Legkisebb négyzetes becslési eljárások	34
3.4 A GPS mérések variancia-kovariancia mátrixa	41
3.5 Sztochasztikus folyamatok és korrelált paraméterek	43
3.6 A becsült paraméterek statisztikai vizsgálata	46
3.7 A GPS antennák fáziscentruma	47
4 A műholdas helymeghatározás földtudományi szerepe	51
4.1 Geodézia	51
4.2 Geodinamika	53
4.3 Aeronómia	60
4.4 Meteorológia	64
5 Új eredmények a GPS rendszer alkalmazásában	69
5.1 A troposzférikus hatások vizsgálata meteorológiai adatok alapján	69
5.2 Ionoszférikus vizsgálatok és kalibráció	94
5.3 A GPS mérések relatív feldolgozása és hálózati kiegyenlítése	109
5.4 Az átlagos fáziscentrum-külpontosságok vizsgálata	116
5.5 Koordinátatranszformáció geoidundulációk becslésével	128
6 Összefoglalás, az eredmények hasznosítása	137
Irodalomjegyzék	141
Mellékletek	
I. melléklet: A troposzférikus hatások elméleti háttere	145
II. melléklet: A RETRO GPS program négy alkalmazása	155
III. melléklet: A GPS-NET program egy alkalmazása	173

1

Bevezetés

1.1 Történeti áttekintés

A Szovjetunió által 1957. október 4-én felbocsátott első földkörüli pályán keringő mesterséges hold a „Szputnyik-1” (útítárs, kísérő) pályára állítása az űrkutatás, az űrkorszak kezdetét jelentette (Almár és Horváth 1981). A 83.6 kg tömegű és 0.58 m átmérőjű gömb alakú műhold két rádió frekvencián (20.005 és 40.002 MHz) 1 W teljesítménnyel sugárzott. Pályája a Föld felszíne feletti 220-940 km tartományba esett, és 92 napos élettartama során több mint 1400 alkalommal kerülte meg a Földet, majd a légkörben elégett.

A műhold pályájának megfigyelése a korszak technológiájának megfelelően még speciális fényképező kamerák segítségével, fotografikus módszerrel történt, de a műhold által sugárzott időjelek („beep”) és a rádió frekvenciák Doppler-csúszásának megfigyelése, akkor még szinte beláthatatlan, távlatokat nyitott meg a globális navigációs helymeghatározó rendszerek kifejlesztésében is.

Két ismert megfigyelőhelyen az időjelek beérkezésének időkülönbségéből a megfigyelőhelyek és a műhold közötti távolságok különbsége határozható meg, amely egy hiperbolát ír le. Ez az összefüggés jelenti az ún. hiperbolikus helymeghatározás geometriai alapelvét. Ezt az elvet a korszerű helymeghatározásnál a kódsorozatok futási idejének mérésénél az ún. kód mérésnél alkalmazzák.

A megfigyelő helyen észlelt (f') és az aktuális (f_0) rádió frekvenciák közötti kapcsolat az

$$f' = f_0 \left(\frac{c \pm v_0}{c \pm v} \right) \quad (1.1)$$

Doppler-effektus néven ismert összefüggéssel írható le, ahol v_0 a megfigyelő, v a hullámforrás és c a jelterjedés sebessége. A pozitív előjel a közeledő, a negatív előjel a távolodó objektumokra vonatkozik. Az előbbi esetben az észlelt frekvencia az aktuálisnál nagyobb, az utóbbinál kisebb értéknek adódik.

A Doppler-csúszás időbeli megfigyelésével a műhold és a megfigyelő relatív sebessége, következképpen a műhold-vevő távolságának a változása is meghatározható, amely a helymeghatározás egy másik lehetőségét jelenti. A korszerű helymeghatározásnál ezt az alapelvet a fázismérésnek nevezett módszernél alkalmazzák, a levezetett távolságot, pedig fázistávolságnak nevezik (Ádám et al. 2004).

A korszerű helymeghatározási módszerek és rendszerek kialakulásához az űrkutatás kezdetétől egészen napjainkig jelentős műszaki és technológiai fejlődésen kellett keresztül menni. Ez a folyamat még ma is tart.

1.2 A GNSS rendszerekről általában

Globális navigációs műholdas rendszeren (Global Navigational Satellite System – GNSS) általában olyan emberi felügyelet mellett működő automatikus rendszert értünk, amely a hozzá kapcsolódó vevőberendezések segítségével a Föld bármely pontján, bármely időpontban, az időjárástól függetlenül meghatározza a felhasználó térbeli helyzetét, és azt egyéb, a rendszer szolgáltatásaiban szereplő információkkal is ellátja.

Az első ilyen rendszert az Egyesült Államok Haditengerészete (US Navy) atommeghajtású tengeralattjáróinak a navigációjára fejlesztették ki, amely a TRANSIT NNSS (Navy Navigation Satellite System) hivatalos nevet viselte. Népszerűbb elnevezése az NNSS Doppler rendszer volt, amely utalt a helymeghatározás módjára is.

Ez a rendszer többnyire 5-7 poláris pályán keringő, 1100 km pályamagasságú műholdakból állt, amelyek 150 és 400 MHz frekvencián sugároztak adatokat. A műholdak pályasíkjait úgy helyezték el, hogy a Föld felszínén óránként legalább egy 20-25 perc hosszúságú műholdmegfigyelést lehessen végrehajtani. Ez az állapot ugyan nem teljesítette teljes mértékben a GNSS fenti definíciójában szereplő feltételeket, de a tengeralattjárók esetében megfelelőnek bizonyult.

A műholdak ugyan időjeleket is sugároztak, de a helymeghatározást a pontosabban mérhető Doppler-effektusra alapozták. A megfigyelt (f') és a vevőben előállított (f_0) névleges frekvencia különbségének az ún. beat-frekvenciának a két időpont (t_j, t_k) közötti integrálját határozták meg, amit Doppler számnak (N_{jk}) neveztek (ez lényegében a két időpont közötti hullámhosszak számát, a fázist jelenti). A Doppler számok és a vevő-műhold vektorok ($\mathbf{r}_k, \mathbf{r}_j$) közötti összefüggés az

$$N_{jk} = (f_0 - f_s)(t_k - t_j) + \frac{f_0}{c}(\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j) \quad (1.2)$$

képlettel írható le. A műholdak által sugárzott frekvencia (f_s) eltért a névleges értéktől, ezért mindig pozitív Doppler számok adódtak.

Az ismert koordinátájú rendszerfenntartó állomások méréseinek segítségével meghatározták, és előre jelezték a műhold efemeridáit, amit a műholdak sugároztak, ezért a vevőberendezések koordinátái az alapösszefüggés segítségével meghatározhatóvá váltak. Az efemeridák lényegében módosított Kepler-féle pályaadatokat jelentettek.

A Doppler számokat 15-30 cm pontossággal jellemezték. A két frekvencián történő mérés lehetővé tette az ionoszférikus hatások csökkentését is.

Több műhold megfigyelésével és több vevőberendezés egyidejű alkalmazásával az ún. multilokációval a vevők közötti távolságokat dm pontossággal lehetett meghatározni, amelyek 100 km-nél nagyobb távolságok esetében már kedvezőbbek voltak, mint a hagyományos geodéziai mérésekkel levezethető értékek. A rendszer által sugárzott egyéb üzenetek a haditengerészet céljait szolgálták.

Az NNSS Doppler rendszert a NAVSTAR GPS (Global Positioning System) váltotta fel. Kompromisszumos megoldásként 6 pályasíkban, 20200 km Föld felszín feletti magasságban elhelyezett 24 műholdból álló rendszert terveztek. A pályasíkok 55°-os hajlása lehetővé teszi, hogy a Föld bármely pontján, bármely időpontban legalább 4 műhold egy időben megfigyelhető legyen. A műholdak 1575.42 és 1227.60 MHz frekvencián sugároznak különböző mérőkódokat és információkat. A műholdak azonosítását a kódsorozatokban tárolt információk teszik lehetővé.

A rendszer navigációs alapszolgáltatása a kódsorozatok futási idejének mérésén alapszik. A mesterséges holdról származó kódsorozatot összehasonlítják a vevőberendezésben előállított azonos formátumú kódsorozattal. A két kódsorozat közötti időkülönbség a vevő-műhold távolságát szolgáltatja, amely órahibával terhelt mennyiség. Kezdetben a C/A kódmerést 3 m, a P kódmerést 30 cm megbízhatósággal jellemezték. A korszerű berendezések megbízhatósága már 15-30 cm értékkel jellemezhető. A geodéziai pontosság biztosításához, a Doppler rendszerhez hasonló, fázismérési módszert is kidolgoztak. A fázismérés pontossága 2-3 mm értékkel jellemezhető.

A GPS rendszer nagyobb frekvenciái kevésbé érzékenyek az ionoszférikus hatásokra és a korszerű digitális technológia következtében pontosabb fázismérést tettek lehetővé, mint a Doppler rendszer esetében. A GPS korszerűsítésénél további frekvenciák bevezetését is tervezik.

Az ismert koordinátájú rendszerfenntartó állomások méréseinek segítségével itt is meghatározzák, és előre jelzik a helymeghatározáshoz szükséges műhold efemeridákat. A Nemzetközi GNSS Szolgálat (IGS) a tudományos közösség részére utólagos, nagy pontosságú pályaadatokat is rendelkezésre bocsát. A rendszer által sugárzott egyéb üzenetek itt is katonai célokat szolgálnak.

A GPS rendszerrel szinte egy időben fejlesztették ki a szovjet-orosz GLONASSZ rendszert, amely nagyon hasonlít az amerikai társához. A tervek szerint 19100 km magasságban három 65°-os hajlású pályasíkban összesen 24 műhold keringene.

A műholdak $1602 + n \times 0.5625$ MHz frekvencián sugároznak időjeleket és üzeneteket. A csatorszámoknak ($n = 0, 1, 2, \dots$) megfelelően az egyes műholdak eltérő frekvencián sugároznak, amely lehetővé teszi azok egyszerű azonosítását. Az efemeridák félóránkénti derékszögű koordinátákból, sebességekből és gyorsulásokból állnak.

Ezt a rendszert is alapvetően katonai célra fejlesztették ki, de anyagi okok miatt sajnos még ma sem működik teljes kiépítettségében.

A bemutatott amerikai rendszereket a nemzetközi tudományos és polgári célú felhasználók is költségtérítés nélkül alkalmazhatták, illetve még ma is alkalmazhatják, amely lényegesen hozzájárult más tudományterületek jelentős fejlődéséhez is.

A GPS rendszer integritásának növelésére és a nem katonai célú alkalmazások támogatására különböző kiegészítő rendszereket építettek ki, magántőke és állami pénzforsorok bevonásával is. Ezek részben a pontosság növelését, részben a specifikus szolgáltatások biztosítását teszik lehetővé. Az IGS szolgáltatás mellett példaként az Európai Űrhajózási Ügynökség (ESA) WAAS-EGNOS (Wild Area Augmentation System – European Geostationary Navigation Overlay Service) rendszert érdemes megemlíteni, amely a földi monitorállomások mérései alapján meghatározott korrekciós jeleket geoszinkron műholdak segítségével juttatja el a GPS rendszer egyes navigációs típusú műszereinek a felhasználóihoz.

Az GNSS definícióját teljesítő, és alapvetően nem katonai célú, jelenleg is fejlesztés alatt álló rendszer, az Európai Unió Galileo rendszere. A Galileot egy autonóm, a GPS rendszertől független, de ahhoz hasonló és azt kiegészítő rendszernek képelték el, amely az EU közlekedési, távközlési és energia szektorának is szerves részévé válhat.

A tervek szerint 23600 km magasságban, három 56°-os hajlású pályasíokban összesen 30 műhold keringene, amely a nagyobb földrajzi szélességeknél a GPS-nél kedvezőbb lefedést biztosítana. A rendszer a jeleket és az üzeneteket négy, a GPS rendszerrel részben átfedő frekvencia sávban sugározná (1176.45, 1207.14, 1278.75 és 1572.42 MHz).

A polgári rendszer különböző pontosságú és szakágazati szolgáltatásai között ingyenes és díjfitetéshez kötött kereskedelmi szolgáltatásokat is terveznek.

A teljesség igénye nélkül a részben már működő kínai Beidou-1 és Compass valamint a tervezett indiai IRNSS regionális rendszert érdemes még megemlíteni.

1.3 Az értekezés célja és felépítése

A műholdak és a megfigyelőhelyek relatív mozgása, a mozgást befolyásoló dinamikai jelenségek, a jelterjedés közege és a közeg fizikai állapotának változása számos olyan földtudományi szakterületnek nyújt hasznos információt, amelyek az elsődleges navigációs szolgáltatásokat csak részben, vagy egyáltalán nem is igénylik. A dolgozat azokat a módszereket és eljárásokat mutatja be, amelyekkel a GNSS rendszerek hozzájárultak, és a jövőben is fokozottan hozzájárulhatnak a földtudományok által vizsgált jelenségek jobb megismeréséhez.

A GPS rendszer elterjedésével kialakultak azok a mérési módszerek és eljárások, amelyek a kódsorozatok futási idejének mérését és a vivőfrekvenciákra vonatkozó fázismérést használják fel a helymeghatározás végrehajtásában. Ezek a módszerek geometriai értelemben azonosnak tekinthetők a különböző rendszerek esetében is, csak az eltérő paramétereket kell megfelelően figyelembe venni.

A rövid bevezetést követő második rész összefoglalja a műholdas helymeghatározás elméleti alapjait. Bemutatja a felhasznált mérőjeleket, a mérőjelek generálását, a mérések alapösszefüggéseit és a mérések hardveres hibaforrásait. A mérések és a geodinamikai jelenségek kapcsolatát, valamint a műholdak pályaszámításának alapösszefüggéseit szintén ismerteti.

A harmadik rész a műholdas megfigyelések alapösszefüggéseit írja le. Bemutatja a helymeghatározás közvetítő egyenleteit, a különböző lineáris kombinációkat, a különböző legkisebb négyzetes becslési és szűrési eljárásokat, valamint a becslések statisztikai vizsgálatát. A GPS antennák fáziscentrumával kapcsolatos ismereteket önállóan fejezet foglalja össze.

A negyedik rész az IGS (International Global Navigation Satellite System (GNSS) Service) szervezet szolgáltatásain keresztül mutatja be a műholdas megfigyelések földtudományi szerepét a geodinamika, a geodézia, az aerónómia és a meteorológia szakterületein. Azokat az egyéb pl. geofizikai, geológiai, vagy navigációs alkalmazásokat (Ádám et al. 2004), amelyek csak meghatározott geometriai hely ismeretét hasznosítják a dolgozat nem tárgyalja.

Az ötödik rész a szerzőnek a különböző szakterületekhez kapcsolódó tudományos eredményeit foglalja össze. Az 5.1 fejezet a troposzférikus hatások meteorológia adatok alapján történő vizsgálatát, az 5.2 fejezet az ionoszférikus vizsgálatok különböző módszereit és az ionoszféra vizsgálati célú

vevők kalibrációját mutatja be. A hármaskülönbségek szabatos kiegyenlítésének egy új lehetőségét és a GPS vektorok közvetett hálózati kiegyenlítésének különböző hibamodelljeit az 5.3 fejezet tárgyalja. Az átlagos fáziscentrum külpontosságok becslésére kifejlesztett új általánosított módszert az 5.4 fejezet mutatja be. Az eredmények ismertetése a koordináta transzformációk és a geoid-undulációk egy lépésben történő becslésének vizsgálatával zárul (5.5 fejezet).

A dolgozat hatodik része az eredményeket és az eredmények hasznosítására tett javaslatokat foglalja össze.

A dolgozathoz szorosan kapcsolódó meteorológiai alapismereteket, amelyek túlmutatnak a dolgozat egységes szerkezetén, továbbá a bemutatott módszerekhez kapcsolódó programokkal végzett kísérleti számítások eredményeit önálló mellékletek foglalják össze.

2 A műholdas helymeghatározás elméleti alapjai

2.1 A műholdak által sugárzott jelek

A kódmerésen alapuló korszerű helymeghatározás alapelvét a GPS által sugárzott, az irodalom alapján jól ismert, mérőjelek bemutatásával foglalom össze.

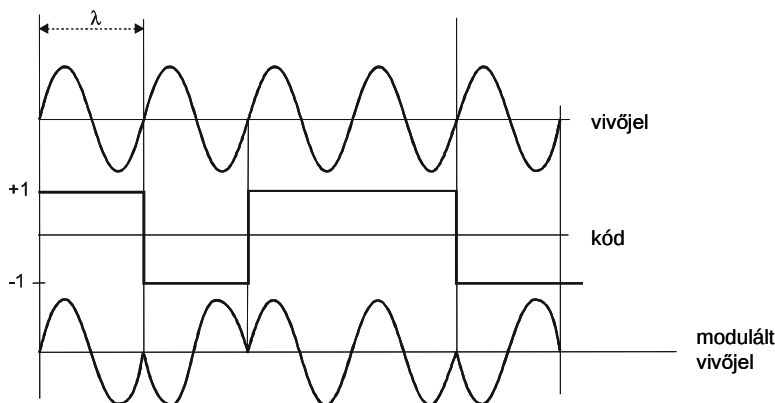
A kódsorozatokat stabil, nagyfrekvenciás vivőhullámok bináris bifázis-modulációjával állítják elő, amely a korszerű digitális technológia segítségével jól kezelhető.

A vivőjeleket egy $f_0=10.23$ MHz alapfrekvencia meg többszörözésével állítják elő:

$$L1: f_1 = 154 \times 10.23 \text{ MHz} = 1575.42 \text{ MHz}, \quad \lambda_1 = 0.19029 \text{ m}$$

$$L2: f_2 = 120 \times 10.23 \text{ MHz} = 1227.60 \text{ MHz}, \quad \lambda_2 = 0.24421 \text{ m}.$$

A kódgenerálást is ez az alapfrekvencia vezérli. A bifázis-moduláció elvét a 2.1 ábra mutatja be, ahol a vivőhullám fázisának invertálása (1,-1) egy kódolt bináris jelsorozatnak megfelelően történik. Ezt a módszert „fázisbillyentyűzésnek” is nevezik.



2.1 ábra. A bináris bifázis moduláció alapelve

A rendszer alapvetően a C/A kódot alkalmazza, amelynél a kódgenerálás frekvenciája, az ún. csip-frekvencia az alapfrekvencia tizedrésze ($f_0/10=1.023$ MHz). Ennek a frekvenciának ~ 300 m hullámhossz, az ún. csiphossz felel meg. Egy ismétlődő kódsorozat 1023 bitből áll, amely időben 1 ms kódhossznak (~ 300 km) felel meg. Minden műhold egyedi C/A kódot sugároz.

Pontosabb méréshez kezdetben a nagyobb felbontású P kódot alkalmazták, amelynél a kódgenerálás frekvenciája maga az alapfrekvencia ($f_0=10.23$ MHz), ezért a csiphossz is csak ~ 30 m. A P kód hosszát titkosítási megfontolások alapján 38 hét hosszúságúnak választották. Ebből minden aktív műhold egy hét hosszúságú saját szakasszal rendelkezik.

Mivel a P kódot kezdetben polgári felhasználók is megkaphatták, nemzetbiztonsági okokból egy járulékos W kódot is bevezettek $f_0/20$ modulációs frekvenciával. A gyakorlatilag feltörhetetlen $Y=P \cdot W$ kódnak a zavaró jelek elleni védelem a deklarált célja (Anti-Spoofing, A-S).

A vivőhullámokra a mérőkódok mellett adatkódokat is modulálnak az $f_0/204600$ modulációs frekvenciával. Egy egységnyi adatkódot (frame) öt darab alrészletre (subframe), egy alrészletet tíz gépi szóra (word), egy gépi szót 30 adatbitre osztottak. Egy gépi szó modulációs ideje 0.6 s, amely 50 adatbit/s modulációs sebességnek felel meg. (Ez alatt az idő alatt 600 C/A kódsorozatot generálnak).

A GPS rendszernél alkalmazott kódgenerálást matematikailag a következőképpen írhatjuk fel (Ádám et al. 2004):

$$\begin{aligned} L1(t) &= a_{1P} P(t)W(t)D(t) \cos(f_1 t) + a_{1C} C(t)D(t) \sin(f_1 t) , \\ L2(t) &= a_{2P} P(t)W(t)D(t) \cos(f_2 t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ahol a a jel amplitúdója, $P(t)$ a pontos (Precise) vagy védett (Protected) kód, $W(t)$ az a kód, amely a P kódot a titkos Y kódra alakítja át, $C(t)$ a C/A kód (Coarse vagy Clear Acquisition, durva vagy nyílt adatnyerés, mások szerint Civil Access, polgári hozzáférés), $D(t)$ az adatkód, f a vivőjel frekvenciája és t az idő.

Az $Y=P \cdot W$ kódot mindkét vivőhullám hordozza. A C/A kódot azonban csak az $L1$ tartalmazza, az Y kódhoz viszonyítva 90° fáziseltolással (az Y kód a cosinus, a C/A kód a sinus függvény szerint változik).

A mérési folyamat során a vevőberendezések „felismerik” a műholdakat, és azokkal elvileg azonos vivőfrekvenciákat és mérőkódokat, un. replika jeleket állítanak elő. A mérési folyamat alapvetően a C/A kódok segítségével kezdődik. A műholdról beérkező és Doppler csúszást szenvedő (f'_S) jelet keverve (szorozva) az alapfrekvenciás (f_R) replika jellel egy nagyfrekvenciás ($f_R + f'_S$) és egy kisfrekvenciás ($f_R - f'_S$) jelet állítanak elő. A nagyfrekvenciás jelet szűréssel eltávolítják, és a digitális jelfeldolgozást a kisfrekvenciás (lekevert) jel az un. beat-frekvenciás jel segítségével hajtják végre. Ezek a lekevert jelek a kódsorozatok és a Doppler csúszásból származó fázis információkat is tartalmazzák.

A D adatkódok alrészleteinek első gépi szava telemetriai (TLM), második gépi szava (Hand Over Word – HOW) időadatokat tartalmaz, amely lehetővé teszi a beérkezett kódok generálási idejének a meghatározását és a kódsorozatok azonosítását is.

A fáziszárt digitális áramkörök folyamatosan követik a különböző holdakról beérkezett jeleket. A beérkező és a replika kódsorozatok digitális korrelátor segítségével hasonlítják össze. A replika kód fázisának eltolásával megkeresik azt az időeltolást, amelynél a két kódsorozat korrelációja a legnagyobb. Ez az eltérés a kódok futási idejével azonos. A kódsorozatok eltolásával előállíthatók a kódsorozatok már nem tartalmazó un. rekonstruált vivő jelek, amelyek a vivőfázis mérésére használhatók fel.

Az első geodéziai típusú vevőberendezések a gépi szavak hosszának megfelelően általában 0.6 másodpercenként határoztak meg egy-egy C/A kód futási időt, és az adott mérési időponthoz tartozó fázisértéket is ekkor regisztrálták. A fázismérés kezdetétől folyamatosan számolják az egész ciklusokat (a rekonstruált vivő pozitív zéró átmeneteit). A mért fázisértékek ebből az egészrészéből és a mért törtrészéből állnak össze.

A GPS rendszernél a különböző kódok és a vivőhullámok generálása fáziskapcsolt rendszert alkot, és a jelgenerálást is az alapfrekvenciához kapcsolódó atomórák vezérlik. A kódsorozatok mért futási ideje a GPS időrendszerében (t) a következőképpen írható fel:

$$\Delta t_R^S(t) = t_R(t) - t^S(t - \tau) , \quad (2.2)$$

ahol t_R a vevő és t^S a műhold időrendszere, továbbá τ a műhold és vevő közti távolság befutásához szükséges időtartam a GPS időrendszerében mérve. Ha feltételezzük, hogy a vevők és a műholdak órái is hibátlanul működnek ($t_R(t) = t$ és $t^S(t) = t$) akkor a

$$\Delta t_R^S(t) = t - (t - \tau) = \tau \quad (2.3)$$

összefüggést kapnánk. Az atomórák azonban nem tekinthetők hibátlanoknak. A GPS időtől való eltérést jelöljük a

$$\begin{aligned} t_R(t) &= t - dt_R(t) \\ t^S(t) &= t - dt^S(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

összefüggésekkel, ahol a dt mennyiségek a pillanatnyi órahibát, vagy az órák igazíthatlanságát jelölik. Ekkor a

$$\Delta t_R^S(t) = dt^S(t - \tau) - dt_R(t) + \tau \quad (2.5)$$

összefüggéshez jutunk. A t időpontra vonatkozó futási idő tehát a τ mennyiségen kívül tartalmazza még a vevő órahibáját a vétel (t) és a műhold órahibáját a jel kisugárzásának ($t - \tau$) időpontjában. Az egyenletet a fény vákumbeli sebességével (c) megszorozva áttérhetünk a távolságra

$$P_R^S(t) = c \cdot dt^S(t - \tau) - c \cdot dt_R(t) + \rho_R^S, \quad (2.6)$$

ahol a $P_R^S(t) = c \cdot \Delta t_R^S(t)$ mennyiséget az órahibák jelenléte miatt csak pszeudó-, vagy áltávolságnak neveznek, a $\rho_R^S = c \cdot \tau$ mennyiség a műhold és a vevő közötti távolság a t időpontban.

Számos publikáció esetében a (2.4) összefüggésben az órahibákat pozitív előjellel veszik figyelembe. A fedélzeti efemeridák leírásánál azonban egyértelműen definiálták, hogy a sugárzás időpontjából az adott műhold órakorrekciót le kell vonni (Interface Control Document, 20.3.3.3.3.1 paragraph, (1) equation). A tetszőlegesen választható előjelek konzekvens alkalmazásánál tehát erre a tényre mindig figyelemmel kell lenni!

A műhold által sugárzott adatok (efemeridák) segítségével kiszámíthatók a műholdak tetszőleges időpontra vonatkozó térbeli pozíciói és a műholdak $dt^S(t)$ órahibái. A navigációs egyenlet tehát három helyzeti és egy vevő órahiba ismeretlent tartalmaz, amely négy műholdra vonatkozó egyidejű áltávolság mérésből egyértelműen meghatározható.

A rekonstruált beat-frekvencián a kezdeti 0 és egy t mérési időpont közötti fázis (az egész hullámhosszak és az aktuális törtrész) a

$$\varphi_R^S(t) = \int_0^t (f_R - f'_S) dt \quad (2.7)$$

összefüggéssel írható le. Ez a fázisérték azonban azonos a vevő által a t időpontig és a műhold által a $(t - \tau)$ időpontig generált és sugárzott fázisok különbségével:

$$\begin{aligned} \varphi_R(t) &= \int_0^t f dt = \varphi_{0R} + f \cdot t \\ \varphi^S(t) &= \int_0^{t-\tau} f dt = \varphi_{0S} + f \cdot (t - \tau) \\ \varphi_R^S(t) &= \varphi_R(t) - \varphi^S(t) = \varphi_{0R} - \varphi_{0S} + f \cdot \tau = (\varphi_{0R} - \varphi_{0S}) + f \cdot \frac{\rho_R^S}{c} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ahol a φ_0 mennyiségek a kezdő időpontban ismeretlen fázis többértelműségeket jelölik. Ezek az összefüggések azonban szintén csak hibátlan vevő és műhold órák, továbbá azonos vivőfrekvenciák esetében érvényesek. A (2.4) órahibák bevezetésével a

$$\varphi_R^S(t) = (\varphi_{0R} - \varphi_{0S}) + f \cdot dt^S(t - \tau) - f \cdot dt_R(t) + f \cdot \frac{\rho_R^S}{c} \quad (2.9)$$

összefüggéshez jutunk. A $c/f = \lambda$ értékkel szorozva most is áttérhetünk a távolságra

$$\Phi_R^S(t) = \lambda \cdot (\varphi_{0R} - \varphi_{0S}) + c \cdot dt^S(t - \tau) - c \cdot dt_R(t) + \rho_R^S, \quad (2.10)$$

amely formailag csak annyiban tér el a kódtávolság egyenletétől, hogy ismeretlen fázis többértelműséget is tartalmaz.

Az általános relativitáselméletből következő frekvencia eltolódást a műholdak által sugárzott órakorrekcióik tartalmazzák, a speciális relativitáselméletből származó idő eltérés a pályaadatok segítségével számítható.

A kódgenerálás során a műholdak és a vevők hardvere kis mértékben eltérő órákésleltetést okoz az L1 és L2 vivők esetében. A differenciális csoport, vagy kódésleltetést (T_{GD}) az

$$\begin{aligned} \text{L1: (C/A, P)} \quad dt &= dt_C - T_{GD} \\ \text{L2: (P)} \quad dt &= dt_C - \gamma \cdot T_{GD} \end{aligned} \quad (2.11)$$

modellel lehet figyelembe venni, ahol dt_C a tulajdonképpeni órahiba és $\gamma = f_1^2/f_2^2$. Ez a késleltetés elektronikusan kimérhető állandó mennyiség, amely azonban a hardver öregedésével lassan változhat. Az egyes műholdakra vonatkozó becsült értékeket a fedélzeti efemeridák szintén tartalmazzák.

A fáziskapcsolt kódgenerálás elméletileg nulla fázis értéknél történik. Ez azonban csak bizonyos hibahatáron belül igaz, ezért a fázismérés többértelműsége gyakorlatilag mégsem tekinthető egész számnak. Ez az elvárás csak a mérések kettőskülönbségénél teljesül (3.4 fejezet). A folyamatos jelkövetésnél ez egy kicsi, de konstans értéket jelent. Az egész hullámhosszak számlálásának megszakadása egész számú hibát un. ciklusugrást eredményez. A jel ismételt befogása új ciklus többértelműséget eredményez.

A mért mennyiségek véletlen jellegű hibáit, a mérések pontosságát, általában a csiphossz és a vivő hullámhossz 1%-ával jellemzik. A vevőfüggetlen adatcsere fájlokban (Receiver Independent Exchange Format - RINEX) használt jelöléseknek megfelelően a C/A kódmerésből származó C1 kódtávolságok 3 m, a két vivőre vonatkozó P1 és P2 kódtávolságok 0.3 m, az L1 és L2 jelű fázismérések 2-3 mm szórással jellemezhetők.

A modern berendezések az Y kód hiányában (többnyire a P kód segítségével) is végre tudják hajtani a második vivő hullámra vonatkozó P2(C2) és L2 jelölésű kód, illetve fázisméréseket (Hofmann-Wellenhof et al. 2001). A P2 és C1 mérések napjainkban már 15-30 cm pontossággal jellemezhetők.

A fázismérések nagy pontossága szükségessé teszi a fáziscentrum helyzetének pontos ismeretét is. Fáziscentrum alatt azt a fiktív pontot értjük, amelyre a méréseinket geometriai értelemben vonatkoztatjuk. A vevő és a műhold antennák fáziscentruma függ a mérés frekvenciájától, a magassági szögétől és az azimutjától, ez utóbbi két mennyiség a mérés során folyamatosan változik. Az átlagos fázishelyzetet és az ahhoz tartozó változások meghatározását a 3.7 fejezet részletesebben bemutatja.

A GPS mérések legveszélyesebb hibaforrása azonban a közvetlen és a másodlagos (reflektált) koherens jelek által okozott interferencia az un. többutas terjedés, amely a kód és a fázisméréseket is jelentősen befolyásolja. A modern berendezések alkalmas antennák és nem publikus digitális módszerek segítségével próbálják eltávolítani ezt a hibát, amit leghatásosabban a megfelelő mérési hely kiválasztásával lehet elkerülni.

2.2 A jelterjedést befolyásoló tényezők

A műholdak által sugárzott jelek a vevőberendezésekig tartó útjuk során áthaladnak az atmoszféra különböző rétegein és kölcsönhatásba lépnek az ott található anyagi részecskékkel. Ezt a jelenséget refrakciónak nevezzük. A refrakció hatására a jel görbült út mentén változó sebességgel terjed, a minimális terjedési idő Fermat-elvének megfelelően. A refrakciós törésmutatót az $n=c/v$ összefüggéssel definiálják, ahol c a fény sebessége vákumban és v a pillanatnyi sebesség.

A GPS technika esetében a kódok és a fázisinformációk terjedése a geometriai optika segítségével jól leírható jelenség. A jelek futási idejét megkapjuk, ha a műholdtól a vevőig terjedő úton összegezzük az egyes rétegeken történő áthaladás idejét:

$$t = \int dt \quad (2.12)$$

A pillanatnyi sebesség ($v=ds/dt$) és a törésmutató (n) segítségével az időbeli integrálról áttérhetünk az s út menti integrálra:

$$t = \int dt = \int \frac{1}{v} ds = \frac{1}{c} \int n ds \quad (2.13)$$

A fénysebességgel megszorozva megkapjuk a görbült út menti hosszat:

$$s' = \int n \, ds \quad (2.14)$$

Mivel a törésmutató az egységtől csak kis mértékben tér el, az $n=1+\Delta n$ helyettesítéssel felírhatjuk a vákumbeli legrövidebb s (geometriai) és a tényleges út eltérését:

$$s' = \int ds + \int \Delta n \, ds = s + \int (n-1) \, ds \quad (2.15)$$

A GPS által sugárzott jelek terjedése szempontjából az atmoszféra két jól elkülöníthető tartományra bontható. Az egyik ilyen jellemző tartomány a jelentős mennyiségű szabad elektront tartalmazó ionoszféra (és plazmaszféra), a másik a száraz és nedves légkört magában foglaló troposzféra. Ezeket a hatásokat általában ionoszférikus és troposzférikus hatásoknak nevezik.

Az ionoszféra a GPS jelek terjedése szempontjából diszperzív közeg. Ez azt jelenti, hogy a jelterjedés sebessége, útja és a polarizációja is változik a frekvencia (illetve a hullámhossz) függvényében, továbbá az egyedi elektromágnes hullám terjedési sebessége a v_{ph} fázissebesség eltér a különböző frekvenciájú hullámcsoportok energiájának terjedési sebességétől a v_{gr} csoportsebességtől. A két sebesség közötti kapcsolatot a

$$v_{gr} = v_{ph} - \lambda \frac{dv_{ph}}{d\lambda} \quad (2.16)$$

Rayleigh egyenlet írja le. A megfelelő törésmutatókat bevezetve az

$$n_{gr} = n_{ph} + f \frac{dn_{ph}}{df} \quad (2.17)$$

egyenlethez jutunk (Hofmann-Wellenhof et al. 2001).

Az ionizált gázokban a fázis és a csoport törésmutató az

$$n_{ph} = 1 - \frac{40.3 N_e}{f^2} \quad (2.18)$$

$$n_{gr} = 1 + \frac{40.3 N_e}{f^2}$$

egyszerűsített összefüggés segítségével modellezhető, ahol N_e a szabad elektronok sűrűsége (elektronszám/m³). A fázis és kódtávolságok tehát a

$$\begin{aligned} \Phi &= \rho_R^S - \frac{40.3}{f^2} \int N_e = \rho_R^S - \frac{40.3}{f^2} TEC = \rho - I \\ P &= \rho_R^S + \frac{40.3}{f^2} \int N_e = \rho_R^S + \frac{40.3}{f^2} TEC = \rho + I \end{aligned} \quad (2.19)$$

összefüggésekkel modellezhetők. Az elektronsűrűség jelterjedés menti integrálját teljes elektron tartalomnak nevezik (Total Electron Content – TEC), dimenziója elektronszám/m².

A szabad elektronok hatására a jelek polarizációja is megváltozik, amit Faraday-rotációnak neveznek. A GPS esetében jobbsodrású körpolarizációt és derékszögben elhelyezett kettős dipólus antennákat alkalmaznak, amely jelentősen lecsökkenti a Faraday-rotáció hatását. A mesterséges holdak antennáját azonban folyamatosan a Föld irányába, a napelemeket, pedig a Nap irányába kell forgatni, mialatt a vevőantennák a Földdel együtt elfordulnak. Ez a jelenség szintén fázis elcsavarodást (wind-up) eredményez, amelynek az állandó részét részben az órahiba, részben a fázis-

többértelműség nyeli el. A maradék rész közeli állomások esetében elhanyagolható, de nagyobb távolságok esetében szükséges lehet ennek a hatásnak a modellezése is (Wu et al. 1993).

A troposzféra a GPS jelek frekvenciatartományában nem diszperzív közeg, tehát a refrakció nem függ a jelek frekvenciájától, és a fázis és a csoportsebesség is azonos. Mivel a törésmutató csak kis mértékben tér el az egységtől a troposzférikus hatást az

$$s' = s + 10^{-6} \int N \, ds \quad (2.20)$$

összefüggéssel adják meg, ahol az $N = (1-n) \cdot 10^6$ mennyiséget refraktivitásnak nevezik. A troposzférikus refraktivitás az

$$N = k_1 \frac{P_d}{T} + k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (2.21)$$

összefüggéssel írható le, ahol P_d a száraz levegő nyomása, e a parciális párányomás T a hőmérséklet és a k értékek tapasztalati konstansok. A fázis és kódtávolságok tehát a

$$\begin{cases} \Phi = \rho_R^S + 10^{-6} \int N \, ds = \rho_R^S + T \\ P = \rho_R^S + 10^{-6} \int N \, ds = \rho_R^S + T \end{cases} \quad (2.22)$$

összefüggéssel modellezhetők. A troposzférikus korrekciók felszíni meteorológiai adatokból történő meghatározásának modelljeit a 4.4 fejezet és az I. melléklet foglalja össze.

A (2.19) és a (2.22) összefüggések a jel terjedése mentén csak a változó sebességből származó hatásokat írják le. A geometriai szempontból legrövidebb (egyenes) és az energiaterjedés szempontjából legrövidebb (görbült) út hosszának eltérését gyakorlatilag elhanyagolhatjuk. Az L1 és L2 vivőre vonatkozó információk az ionoszféra hatása miatt eltérő görbült út mentén terjednek.

2.3 A GPS mérések és a geodinamikai jelenségek kapcsolata

A helymeghatározás alapegyenleteiben a műhold (X^S, Y^S, Z^S) és a megfigyelő (X_R, Y_R, Z_R) derékszögű koordinátái a

$$\rho_R^S(t) = \sqrt{((X^S(t-\tau) - X_R(t))^2 + (Y^S(t-\tau) - Y_R(t))^2 + (Z^S(t-\tau) - Z_R(t))^2)} \quad (2.23)$$

másodfokú összefüggéssel vehetők figyelembe, amely a műhold és a vevő távolságát adja meg a t időpontban. A koordinátákat természetesen azonos koordináta rendszerben kell értelmezni.

A földi megfigyelő állomások koordináta rendszerét alapvetően a Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszer (International Terrestrials Reference System – ITRSxxxx) aktuális realizációjában definiálják.

Kezdetben a geocentrikus rendszernek a Föld tömegéhez viszonyított Z tengelyét a pillanatnyi forgástengely 1900-1905 évek közötti csillagászati megfigyeléséből származó CIO (Conventional International Origin) helyzetben rögzítették. Jelenleg a Nemzetközi Referenciai Pólus (International Reference Pole - IRP) definíciót használják. A jobbsodrású rendszer X tengelyét az egyenlítői síkban a Greenwich-i kezdő meridián iránya jelöli ki.

A rendszert fizikailag a Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Kerethálózat (International Terrestrials Reference Frame – ITRFxxxx) aktuális realizációjában adott több mint 400 megfigyelő állomás koordinátái definiálják. Az xxxx maszk az aktuális reprezentáció évét jelenti, amely a dolgozat írásakor az ITRF2000. A megfigyelő helyeket az adott koordinátarendszerben és az egy lépésben feldolgozott mérések időtartamában általában mozdulatnak tekinthetjük, de a rendszeres megfigyelés során a globális lemeztectonikai okokra visszavezethető mozgást a t_0 referencia időpontra vonatkozó koordinátákkal és a v sebességekkel az ITRF rendszerben adják meg:

$$\begin{aligned}
 X_R(t) &= X(t_0) + v_X(t - t_0) \\
 Y_R(t) &= Y(t_0) + v_Y(t - t_0) \\
 Z_R(t) &= Z(t_0) + v_Z(t - t_0)
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

A mesterséges holdak mozgását a legegyszerűbben a Newton-féle mechanika inerciális koordináta rendszerében lehet leírni. Ezt a kvázi inerciális koordinátarendszert a Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Rendszerben (International Celestial Reference System - ICRS) definiálják. A rendszert fizikailag a legpontosabban a Nemzetközi Égi Vonatkoztatási Kerethálózatban (International Celestial Reference Frame - ICRF) adott mintegy 600 távoli rádióforrás (kvazár) koordinátái jelölik ki.

A mesterséges holdak pályaszámításánál az ICRS rendszert geocentrikus helyzetben alkalmazzák. A rendszer Z tengelyét a Föld forgástengelyének a J2000 referencia időpontban (2000. január 1. 12:00 óra) a nutációval korrigált átlagos helyzetében, a jobbsodrású rendszer X tengelyének irányát az egyenlítői síkban, az átlagos tavaszpont irányában választották meg.

A mérések során azonban a Föld a pillanatnyi forgástengelye körül a pillanatnyi szögsebességgel forog, ezért a pályaszámítás helyzetvektorát ($\mathbf{r}_{ICRS}^S$) a pillanatnyi forgástengelyre vonatkozó inerciális rendszerre kell átszámítani:

$$\mathbf{r}_{Pill}^S = \mathbf{R}^N(t) \mathbf{R}^P(t) \mathbf{r}_{ICRS}^S, \tag{2.25}$$

ahol az $\mathbf{R}^N$ nutációs és az $\mathbf{R}^P$ precessziós forgatási mátrixot a referencia időponttól eltelt t idő függvényében kell kiszámítani.

A nemzetközi földi vonatkoztatási rendszerre az

$$\mathbf{r}_{ITRS}^S = \mathbf{R}_Y(-x_P) \mathbf{R}_X(-y_P) \mathbf{R}_Z(GASP) \mathbf{r}_{Pill}^S \tag{2.26}$$

forgatásokkal lehet áttérni, ahol x_P és y_P a pillanatnyi póluskoordinátákat, $GASP$ a pillanatnyi Greenwich-i csillagidőt jelöli, amely a Föld forgásához kapcsolódó mennyiség. A pillanatnyi Greenwich-i csillagidő az ismert csillagászati konstansok mellett a koordinált világidő (UTC) és a pólus koordinátákkal korrigált világidő (UT1) különbségének is a függvénye ($\Delta UT1 = UT1 - UTC$). Ennek a pillanatnyi értéke azonban nem modellezhető kellő pontossággal, ezért csak megfigyelésekkel lehet meghatározni.

A földforgási paraméterek azonban közvetlenül nem határozhatók meg a műholdakra végzett mérésekből, ezért egy kezdő időpontban ismert értékekhez ismeretlen időbeli lineáris változásokat rendelnek (Beutler 1996, Bock 1996):

$$\begin{aligned}
 y_P &= y_{P0} + (t - t_0) \delta y_P \\
 x_P &= x_{P0} + (t - t_0) \delta x_P \\
 \Delta UT1 &= \Delta UT1_0 + (t - t_0) \delta_{\Delta UT1}
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Ha feltételezzük, hogy az UTC időskálát pontosan ismerjük, és az egyenleteket úgy írjuk fel, hogy a változások 1 napra (86400 s) vonatkozzanak, a $\delta_{\Delta UT1}$ paraméter közvetlenül az UT1 időskála változását, azaz a nap hosszának (LOD - length of day) a változását szolgáltatja. Az UTC és a GPS időskála közötti konstans eltérés ismeretében a két időrendszer könnyen átszámítható.

Amikor a hullámfront a $(t - \tau)$ időpontban elhagyja a műholdat és a t időpontban beérkezik a vevőberendezésbe a τ időtartam alatt a Föld kis mértékben elfordul, amit korrekcióként mindig figyelembe kell venni.

A Nap, a Hold (és a többi égitest) közvetlen (és közvetett) gravitációs hatása a viszkózus elasztikus Föld esetében a földfelszíni pontok helyének periodikus változását eredményezi, amit földi árapálnak neveznek. Ez a hatás a közeli pontok esetében többnyire azonos és a relatív helyzetet

gyakorlatilag nem befolyásolja. A nagyobb hálózatok esetében azonban ezt a hatást is célszerű modellezni, még akkor is, ha az egynapos mérési intervallum során a legnagyobb amplitúdójú napos és félnapos periódusok többé-kevésbé kiátlagolódnak. Ezek a hatások globális földmodellekkel jól modellezhetők.

2.4 A műholdak pályaszámítása

Elméletileg a műholdak pályáját ismert helyzetű pontokról egyidejű távolságmérések feldolgozásával is meghatározhatnánk, amit geometriai módszernek neveznek. A pálya-meghatározást azonban a dinamikai módszer segítségével célszerű elvégezni, ahol a műholdak mozgását befolyásoló ismert erőhatásokat is figyelembe lehet venni.

A GPS mérések és a műholdak mozgását befolyásoló hatások közötti kapcsolatot az $\mathbf{r}$ helyzetvektor segítségével írhatjuk fel. A GPS holdak esetében a Föld, a Nap és a Hold közvetlen tömegvonzásából ($\ddot{\mathbf{r}}_F, \ddot{\mathbf{r}}_N, \ddot{\mathbf{r}}_H$), a Nap és a Hold közvetett tömegvonzásából, a földi árapályból ($\ddot{\mathbf{r}}_{AN}, \ddot{\mathbf{r}}_{AH}$), továbbá a nem gravitációs eredetű közvetlen sugárnyomásból ($\ddot{\mathbf{r}}_S$) származó gyorsulásokat (a helyzetvektor időszerinti második deriváltjait) kell figyelembe venni:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_F + \ddot{\mathbf{r}}_N + \ddot{\mathbf{r}}_H + \ddot{\mathbf{r}}_{AN} + \ddot{\mathbf{r}}_{AH} + \ddot{\mathbf{r}}_S \quad (2.28)$$

A közegellenállás, az óceáni árapály és az egyéb hatások gyakorlatilag elhanyagolhatók.

A Föld tömegvonzásának hatása a műhold egységnyi tömegpontként (1 kg) történő figyelembevételével az

$$\ddot{\mathbf{r}}_F = \text{grad}(V) \quad (2.29)$$

összefüggéssel írható fel. A földi potenciál gömbfüggvényysorba fejtett alakja

$$V = \frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (J_{nm} \cos m\lambda + K_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi) \right), \quad (2.30)$$

ahol GM a Föld gravitációs állandója, a_e a földi ellipszoid fél nagytengelye, J_{nm} , K_{nm} a gömbfüggvények együtthatói, P_{nm} az asszociált Legendre függvények és φ , λ , r a gömbi koordináták.

Az ITRS rendszerben adott potenciálfüggvény két lényeges összetevőre bontható. Az első tag $\left(\frac{GM}{r} \right)$ a Földnek, mint tömegpontnak, a további tagok a földi tömeg-rendellenességnek (inhomogenitásnak) a hatását írják le. Az első összetevő csak az r függvénye, ezért az ICRS rendszerre vonatkozó gyorsulás közvetlenül felírható. A földi tömeg-rendellenességből származó összetevőnél ($\ddot{\mathbf{r}}_{FR}$) a műhold helyzetvektorát először a földi rendszerbe kell átszámítani, majd az ott meghatározott gyorsulásokat az inerciális rendszerbe vissza kell transzformálni:

$$\ddot{\mathbf{r}}_F = -GM \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \ddot{\mathbf{r}}_{FR} \quad (2.31)$$

A Nap és a Hold közvetlen tömegvonzási gyorsulása az

$$\ddot{\mathbf{r}}_E = GM_E \left(\frac{\mathbf{r}_E - \mathbf{r}}{(r_E - r)^3} - \frac{\mathbf{r}_E}{r_E^3} \right), \quad (2.32)$$

a közvetett árapály hatása az

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \frac{k_2}{2} \frac{GM_E}{r_E^3} \frac{a_e^5}{r^4} (3 - 15 \cos^2 \theta) \frac{\mathbf{r}}{r} + 6 \cos \theta \frac{\mathbf{r}_E}{r_E} \quad (2.33)$$

általános képlettel írható fel, ahol az $\dot{E}$ index az aktuális égitestre vonatkozik (Nap, Hold), k_2 a Föld rugalmasságára jellemző Love szám, $\mathbf{r}$ a műhold és $\mathbf{r}_E$ az égitest inerciális rendszerre vonatkozó helyzetvektora, θ a két vektor által bezárt szög és r , r_E a vektorok hossza. Az égitestek ismert helyzetvektorát csillagászati katalógusok tartalmazzák.

A Nap közvetlen sugárnyomása az

$$\ddot{\mathbf{r}}_S = \nu P_S C_r \frac{A}{m} (AU)^2 \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_N)}{(r - r_N)^3} \quad (2.34)$$

modellel számolható, ahol m a műhold tömege, A a műholdnak a Nap irányára merőleges effektív felülete, $AU = 1.5 \cdot 10^8$ km asztronómiai egység, $C_r = 1.95$ az alumínium reflektivitási tényezője, P_S a napállandó (asztronómiai egységben) és ν az árnyékfüggvény. Teljes árnyékban $\nu = 0$, félsárnyékban 0 és 1 érték között folyamatosan változik, egyébként $\nu = 1$. A sugárnyomás számításához a műholdak alakját és a forgatási mechanizmusát is ismerni kell.

Szintén a sugárnyomáshoz kapcsolódik, az ún. Y-hatás (Y-bias). A műhold forgatási mechanizmusának mindig biztosítani kellene, hogy a műhold koordináta-rendszer z tengelye, amely párhuzamos az adóantenna tengelyével, a nadír irányában a Föld felé mutasson, az y tengelye, amely a napelem-panelek tengelyének iránya, pedig mindig merőleges legyen a műhold-Nap irányára. Ha ez nem teljesül, pl. a napelemek nem megfelelően nyíltak ki, az

$$\ddot{\mathbf{r}}_Y = \nu P_2 \mathbf{e}_Y \quad (2.35)$$

járolékos gyorsulással is számolnunk kell, ahol $\mathbf{e}_Y$ a műhold koordináta rendszer y irányú egységvektora és P_2 konstans érték (Beutler 1996b).

A műholdak pályakorrekcióinál alkalmazott gyorsulásokat szintén számításba kell venni, vagy ismeretlenként meghatározni.

A GPS műholdak esetében a földi potenciál első tagjából származó gyorsulás a legnagyobb összetevő (0.59 m/s^2), amit Kepler tagnak is neveznek. A tömeg-rendellenesség $5 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$, a Nap és Hold gravitációs hatása $2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}^2$, a közvetlen sugárnyomás $9 \cdot 10^{-8} \text{ m/s}^2$ és a földi árapály $1 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$ nagyságrendű perturbációs hatást eredményez.

A nagy pontosságú pályaszámítást numerikus módszerekkel hajtják végre, amely matematikailag egy másodfokú differenciálegyenlet kezdőérték (esetenként peremérték) megoldására vezethető vissza. A műholdra ható gyorsulást az $\mathbf{r}$ helyzetvektor, az $\dot{\mathbf{r}}$ sebességvektor és a t idő segítségével az

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \quad (2.36)$$

formális alakban is felírhatjuk, amit az $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ helyettesítéssel két elsőfokú csatolt differenciál egyenletre bonthatunk:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{a}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \end{aligned} \quad (2.37)$$

A t_0 időpontra vonatkozó $\mathbf{r}_0(X_0, Y_0, Z_0)$ és $\mathbf{v}_0(\dot{X}_0, \dot{Y}_0, \dot{Z}_0)$ kezdőértékek felvételével a műhold pályája a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{a}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) dt \end{aligned} \quad (2.38)$$

Euler integrál segítségével határozható meg, a kezdőpontra vonatkozó gyorsulások kiszámítását követően. A gyakorlatban általában az Euler módszer korszerű numerikus változatait alkalmazzák.

A megfigyelési időszakot alkalmas integrációs intervallumokra bontják és a kezdőértékből kiindulva, folyamatosan meghatározzák az intervallumok végpontjaihoz tartozó ismeretlen értékeket. A szekvenciális feldolgozás formálisan a

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_n) \\ \mathbf{r}(t_n) \end{bmatrix} = F(t_n, t_{n-1}) \begin{bmatrix} \mathbf{v}(t_{n-1}) \\ \mathbf{r}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

alakban is felírható, ahol a kezdőértékek szerepét most az előző időpontra vonatkozó értékek veszik át.

Az inerciális rendszerre vonatkozó koordináták és a műholdak mozgását befolyásoló hatások között tehát az

$$\mathbf{r}_{ICRS}^S = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, a_e, GM, J_{nm}, K_{nm}, GM_N, GM_H, P_S) \quad (2.40)$$

formális összefüggés írható fel. Kezdetben a mesterséges holdak megfigyelése jelentősen hozzájárult a képletben szereplő alapvető konstansok meghatározásához. A GPS esetében ezeket a paramétereket gyakorlatilag már ismertnek tekintjük és a gömbfüggvényeket elegendő 10-15 fokig és rendig figyelembe venni. A mesterséges holdakra vonatkozó mérésekből levezetett távolságok és a pályaintegrál összehasonlításából a legjobb illeszkedést biztosító kezdőértékek, valamint a napállandó pillanatnyi értékei becsülhetők:

$$\mathbf{r}_{ICRS}^S = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, P_S). \quad (2.41)$$

Az egyes időpontokra vonatkozó derékszögű koordináta és sebesség értékekből áttérhetünk a pillanatnyi Kepler-pálya elemekre, amelyek megkönnyítik a műholdak dinamikájának nyomon követését, a rezonáns pályák felismerését is.

A mesterséges holdak mozgását leíró egyenletek a műholdak tömegközéppontjára, a GPS mérések pedig az adóantenna átlagos elektronikus fáziscentrumára vonatkoznak. Szabatos adatfeldolgozás során ezeket a külpontosságokat is mindig figyelembe kell venni, illetve további ismeretlenként kell meghatározni.

3

A műholdas megfigyelések alapösszefüggései

3.1 A helymeghatározás közvetítő egyenletei

A 2. rész alapján most már részletesen is felírhatjuk a GPS mérések közvetítő, vagy megfigyelési egyenleteit:

$$\Phi_{i,L1}^j(t) = \rho_i^j(t) - c dt_i(t) + c dt^j(t - \tau_i^j) + \lambda_{L1} N_{i,L1}^j + F_{i,L1}^j(t) + T_i(t) - I_i^j(t) + v_{\Phi,L1} \quad (3.1)$$

$$\Phi_{i,L2}^j(t) = \rho_i^j(t) - c dt_i(t) + c dt^j(t - \tau_i^j) + \lambda_{L2} N_{i,L2}^j + F_{i,L2}^j(t) + T_i(t) - \gamma I_i^j(t) + v_{\Phi,L2} \quad (3.2)$$

$$P_{i,L1}^j(t) = \rho_i^j(t) - c dt_i(t) + c dt^j(t - \tau_i^j) + T_i(t) + I_i^j(t) + v_{P,L1} \quad (3.3)$$

$$P_{i,L2}^j(t) = \rho_i^j(t) - c dt_i(t) + c dt^j(t - \tau_i^j) + T_i(t) + \gamma I_i^j(t) + v_{P,L2} \quad (3.4)$$

ahol:

- Φ a fázis- és P a kódtávolság méterben,
- a (j) felső index a műhold és az (i) alsó index a vevő sorszáma,
- t a mérés időpontja a vevő óráján mérve,
- τ_i^j a jel futási ideje a műhold és a vevő között,
- $dt_i(t)$ a vevő órahibája a t vételi időpontban,
- $dt^j(t - \tau_i^j)$ a műhold órahibája a $(t - \tau_i^j)$ sugárzási időpontban,
- $N_i^j = \varphi_{0R} - \varphi_{0S} = \varphi_i + \delta_i - \varphi^j - \delta^j = \varphi_i^j + \delta_i - \delta^j$ a fázis többértelműség ciklus számában, φ az egészrészt és δ az egészszámtól való konstans eltérést jelöli a műholdnál a sugárzási és a vevőnél a vételi időpontban,
- $F_i^j(t)$ a fáziscentrum külpontossága (átlagos helyzet és irányfüggő változás),
- $T_i(t)$ a troposzférikus korrekció méterben,
- $I_i^j(t)$ az f_1 vivőfrekvenciához tartozó ionoszférikus korrekció méterben,
- λ_1 és λ_2 az f_1 és f_2 vivőfrekvenciához tartozó hullámhosszak méterben,
- $\gamma = f_1^2 / f_2^2 = \lambda_2^2 / \lambda_1^2$,
- c a fény sebessége vákumban (299 792 458.0 m/s) és
- v a véletlen jellegű mérési hibákat jelöli.

A további paraméterek a (2.23) egyenletnek megfelelően a

$$\rho_i^j(t) = \mathbf{r}^j(t - \tau_i^j) - \mathbf{r}_i(t) \quad (3.5)$$

$$\rho_i^j(t) = \sqrt{((X^j(t - \tau_i^j) - X_i(t))^2 + ((Y^j(t - \tau_i^j) - Y_i(t))^2 + ((Z^j(t - \tau_i^j) - Z_i(t))^2}$$

összefüggés segítségével vehetők figyelembe, ahol a megfigyelő $\mathbf{r}_i(t)$ és a műhold $\mathbf{r}^j(t - \tau_i^j)$ ITRS rendszerre vonatkozó helyzetvektorának derékszögű koordinátáit X_i, Y_i, Z_i illetve X^j, Y^j, Z^j betűk jelölik.

A földforgás és a műholdak mozgása a (2.25, 2.26 és 2.40) összefüggéseknek megfelelően az

$$\mathbf{r}^j(t) = \mathbf{R}_Y(-x_P) \cdot \mathbf{R}_X(-y_P) \cdot \mathbf{R}_Z(\text{GASP}) \cdot \mathbf{R}^N(t) \cdot \mathbf{R}^P(t) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0, P_S) \quad (3.6)$$

formális összefüggéssel vehetők figyelembe, ahol t most a jelkisugárzás időpontja.

A (3.1-3.4) egyenletek geometriai értelemben a vevő-műhold távolságra vonatkoznak, amelyek a magassági szög függvényében 20200-25800 km között változnak.

Az órák igazíthatatlansága elérheti akár az 1 ms értéket is, amely 300 km távolságnak felel meg. A műholdak által sugárzott órákorrekciókkal a hiba 5^{-10} ns érték alá csökkenthető, amely 1.5-3 m távolságnak felel meg. A cézium atomórák frekvencia stabilitása $2 \cdot 10^{-13}$ értékkel jellemezhető, amely naponta 5 ns eltérést okozhat. A vevők óráhibái miatta a (3.1-3.4) összefüggéseket csak általosságoknak nevezik.

Az L1 vivőre vonatkozó ionoszférikus hatás az ionoszféra állapotának és a magassági szögnek megfelelően 2-30 m között változhat, amely extrém esetekben ennél jóval nagyobb érték is lehet. Ionoszféra modellekkel ez a hatás általában csak 50%-kal csökkenthető.

Általános meteorológiai körülmények között a magassági szög függvényében a troposzférikus hatások szintén 2-30 m között változhatnak. A változások 10%-kát a nedves légkör okozza. Ellenkéntben az ionoszférával a száraz légkör hatása standard atmoszféra modell segítségével is jól meghatározható. A nedves légkör modellje 2-5 cm bizonytalansággal jellemezhető.

A különböző antennák fáziscentrumai 0-3 cm értékek között változnak. A véletlen jellegű mérési hibákat a 2.1 fejezet tartalmazza.

A megfigyelőhelyek és a műholdpozíciók közti kapcsolatot a (3.5) összefüggésnek megfelelően a műhold-vevő távolságok adják meg. Elméletileg egyetlen műholdpozíció és a hozzá tartozó óráhibák meghatározásához négy olyan egyidejű kódtávolságra van szükség, amely ismert koordinátájú és pontos órával rendelkező megfigyelőhelyről származik. A dinamikai módszer segítségével a műhold pályáját hat ismeretlennel (a három kezdő pozícióval és a három sebességgel) lehet leírni, ezért három, vagy több időpont esetében a mérések száma meghaladja a pálya ismeretlenek és az időpontokénti óráhibák számát.

A pontosabb fázistávolságok esetében további négy ismeretlen fázis-többértelműséggel kell számolnunk, ezért négy vagy több egyidejű folyamatos mérés esetében rendelkezünk csak fölös mérésekkel. Négyenél több megfigyelőállomás jelentősen növeli a fölös mérések számát.

A fölös mérések számának növelése lehetővé teszi a napállandó és bizonyos feltételek mellett a földforgási paraméterek becslését is. Ezt a geodinamikai alkalmazást bemutató 4.2 fejezet tárgyalja.

A műholdak pályájának és óráhibáinak az ismeretében a fordított feladattal találkozunk. Négy műholdra vonatkozó egyidejű mérésből a vevő helyzete és óráhibája határozható meg. Több műhold és vevő méréseinek együttes feldolgozásával pontos geodéziai hálózatok létesíthetők (4.1 fejezet).

A geodinamikai és a geodéziai alkalmazásoknál a legfontosabb ismeretlenek ugyan eltérőek, de mindkét esetben alapvetően fontos az óráhibák pontos becslése és a kellő pontossággal nem modellezhető ionoszférikus hatások csökkentése. A szélső pontosságú alkalmazások a fázis-többértelműségek elvi egészértékűségének a felhasználását, a fáziscentrum modellek figyelembe vételét és a nedves légkör egyes paramétereinek a becslését is igénylik. Ezek a problémák alkalmas lineáris mérési kombinációk és kiegyenlítési modellek segítségével kezelhetők.

3.2 Lineáris mérési kombinációk

A geodinamikai és a geodéziai alkalmazásoknál a koordináta ismeretlenek jelenléte miatt a helymeghatározás közvetítő egyenletei nem lineárisak. Az adatfeldolgozás során ezért a koordináta ismeretlenek előzetes értékeinek segítségével a (3.5) összefüggést elsőfokú Taylor sorba fejtik, és az előzetes értékekhez rendelt változásokat tekintik ismeretlennek.

Ha a műhold koordinátáit az efemeridák alapján ismert értéként kezeljük, és a megfigyelőhelyek koordinátáit a megfigyelés időtartamában mozdulatlanak tekintjük, azaz a tektonikai okokra visszavezethető időfüggést nem vesszük figyelembe, a

$$\begin{aligned}
\rho_i^j(t) &= \rho_{i0}^j + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X_i} \delta x_i + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y_i} \delta y_i + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z_i} \delta z_i \\
\rho_i^j(t) &= \rho_{i0}^j - \frac{X^j(t - \tau_i^j) - X_{i0}}{\rho_{i0}^j} \delta x_i - \frac{Y^j(t - \tau_i^j) - Y_{i0}}{\rho_{i0}^j} \delta y_i - \frac{Z^j(t - \tau_i^j) - Z_{i0}}{\rho_{i0}^j} \delta z_i \quad (3.7) \\
\rho_i^j(t) &= \rho_{i0}^j + a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i
\end{aligned}$$

összefüggéshez jutunk, ahol ρ_{i0}^j az X_{i0}, Y_{i0}, Z_{i0} előzetes koordinátákból számolt távolság. A fázismérések esetében, amennyiben erre szükség van, az előzetes koordinátákat a földi árapály adott időpontra vonatkozó értékével és a fáziscentrum átlagos helyzetével is ekkor célszerű korrigálni. A fáziscentrum változásával a mért értékeket javítjuk (3.7 fejezet).

A τ_i^j jelterjedési időt és a műhold koordinátáit is csak fokozatos közelítéssel lehet meghatározni, a

$$\begin{aligned}
(\tau_i^j)_0 &= 0 \\
(\tau_i^j)_n &= \frac{\rho_{i0}^j(t - (\tau_i^j)_{n-1})}{c} \quad (3.8)
\end{aligned}$$

rekurzív összefüggés segítségével, amely néhány iterációs lépés után már elfogadható eredményt szolgáltat. A műhold koordinátáit is a földi koordináta rendszerben kell kiszámítani a pályaelemekhez tartozó összefüggéseknek megfelelően, vagy a precíz koordinátákból megfelelő interpolációs módszer alkalmazásával. Mivel a τ_i^j idő alatt a földi koordináta rendszer az inerciális rendszerben a forgástengely körül kis mértékben el is fordul, ezért még a (3.7) összefüggések kiszámítása előtt a

$$\begin{bmatrix} X^j \\ Y^j \\ Z^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\cos(\tau_i^j \omega) & +\sin(\tau_i^j \omega) & 0 \\ -\sin(\tau_i^j \omega) & +\cos(\tau_i^j \omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^j(t - \tau_i^j) \\ Y^j(t - \tau_i^j) \\ Z^j(t - \tau_i^j) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

korrekciót is mindig figyelembe kell venni, ahol ω a Föld forgási szögsebessége.

A fedélzeti efemeridákból számolható, vagy a precíz efemeridákból interpolációval meghatározható műhold óráhibákat ($dt^j(t - \tau_i^j)_E$) relativisztikus korrekcióval kell ellátni, és előzetes korrekcióként kell figyelembe venni:

$$dt^j(t - \tau_i^j) = dt^j(t - \tau_i^j)_E - 2 \frac{\mathbf{r}^j(t - \tau_i^j) \cdot \dot{\mathbf{r}}^j(t - \tau_i^j)}{c^2}, \quad (3.10)$$

ahol $\mathbf{r}^j(t - \tau_i^j)$ a műhold helyzet- és $\dot{\mathbf{r}}^j(t - \tau_i^j)$ a műhold sebességvektora. A sebességvektor a helyzetvektorral együtt az efemeridákból számítható.

Ha a mesterséges holdak helyzetét a másodfokú differenciál egyenletek kezdőérték megoldására vezetjük vissza, és a Föld forgási paramétereit is ismeretlenként kezeljük, először a (3.5) egyenletet a holdak pozíciói szerint, majd a pozíciókat a (3.6) vektoregyenletnek megfelelő ismeretlenek szerint kell deriválni.

A bonyolult forgatási mátrixok miatt a deriválást csak formálisan mutatjuk be a (3.11) összefüggések segítségével. Bizonyos esetekben a megfigyelőhelyek és a műholdak paramétereit is ismeretlenként kezelhetjük.

A (2.39) szerinti szekvenciális pálya-meghatározásnál és a Kálmán szűrés (3.3 fejezet) együttes alkalmazásánál a kezdőérték szerepét az aktuális időpontra vonatkozó értékek veszik át.

$$\begin{aligned}
\rho_i^j(t) = & \rho_{i0}^j + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial X_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial X_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial X_0^j} \right) \delta x_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial Y_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial Y_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial Y_0^j} \right) \delta y_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial Z_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial Z_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial Z_0^j} \right) \delta z_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial \dot{X}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial \dot{X}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{X}_0^j} \right) \delta \dot{x}_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial \dot{Y}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial \dot{Y}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{Y}_0^j} \right) \delta \dot{y}_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial \dot{Z}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial \dot{Z}_0^j} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial \dot{Z}_0^j} \right) \delta \dot{z}_0^j \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial P_s} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial P_s} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial P_s} \right) \delta p_s \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial y_p} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial y_p} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial y_p} \right) \delta y_p \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial x_p} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial x_p} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial x_p} \right) \delta x_p \\
& + \left(\frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial X^j} \frac{\partial X^j}{\partial \Delta UTI} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Y^j} \frac{\partial Y^j}{\partial \Delta UTI} + \frac{\partial \rho_i^j(t)}{\partial Z^j} \frac{\partial Z^j}{\partial \Delta UTI} \right) \delta_{\Delta UTI}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

A GPS berendezések működése során legalább négy műholdra vonatkozó egyidejű C/A kódérés feldolgozására van szükség. A (3.2) egyenletnek a (3.7) szerinti linearizálásával a következő egyenletet kapjuk:

$$b_{i,p1}^j = a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i - c \, dt_i(t) + v_{p,L1} \, , \tag{3.12}$$

ahol a baloldal

$$b_{i,p1}^j = P_{i,L1}^j(t) - \rho_{i0}^j - c \, dt^j(t - \tau_i^j) - T_i(t) - I_i^j(t) \, .$$

A kódéréseket tehát az előzetes koordinátákból számított távolsággal, a műhold órahibájával és az ionoszféra és a troposzféra modellből származó értékekkel korrigáltuk. Ionoszférikus korrekcióként a fedélzeti efemeridák által megadott modell alkalmazható. Négy műhold esetében az adott időpontra vonatkozó három koordináta és a vevő órahibája egyértelműen meghatározható (a véletlen jellegű hibák ekkor nullaértékűek).

A mérések utólagos kiértékelésénél, ahol a több műholdra vonatkozó méréseket együtt dolgozzák fel, a három koordináta ismeretlen és az időpontonkénti órahibák egylépesben határozhatók meg. Ezeket a pontosabb fázismérések feldolgozása során előzetes értékeként veszik figyelembe.

A pontosabb P(W) kódérések esetében a kétfrekvenciás mérések segítségével az ionoszférikus hatások ki is küszöbölhetők. A következő egyenletek annyiban térnek el a (3.12) összefüggéstől, hogy az ionoszférikus hibát most nem korrigáltuk, és a (2.19) modellnek megfelelően írtuk fel:

$$\begin{aligned} b_{i,P1}^j &= a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i - c \, dt_i(t) + \frac{40.3}{f_1^2} TEC_i^j + v_{P,L1} \\ b_{i,P2}^j &= a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i - c \, dt_i(t) + \frac{40.3}{f_2^2} TEC_i^j + v_{P,L2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Az első és a második egyenletet az

$$\frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} (\approx 2.55) \quad \text{és a} \quad -\frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (\approx -1.55) \quad (3.14)$$

értékekkel végigsorozva és összeadva, a következő ionoszféramentes kombinációt kapjuk:

$$b_{i,P,Ion}^j = a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i - c \, dt_i(t) + v_{P,Ion}, \quad (3.15)$$

$$\text{ahol} \quad b_{i,P,Ion}^j = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} b_{i,L1}^j - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} b_{i,L2}^j \quad \text{és} \quad v_{P,Ion} = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} v_{P,L1} - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} v_{P,L2}$$

A hibaterjedés törvényének megfelelően most nagyobb véletlen jellegű hibák várhatók. Mivel a konstans differenciális kódkezelés (2.11) most nem választható szét a konstans órahibától, ezért az itt becsült órahibák elvileg nem azonosak az L1 illetve L2 mérésekből önállóan meghatározható órahibákkal. A kódkezelés meghatározását a 4.3 fejezetben tárgyalja.

A szélső pontosságú adatfeldolgozáshoz az L1 fázismérések használhatók. A (3.1 és 3.7) összefüggésnek megfelelően:

$$b_{i,\phi 1}^j(t) = a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i + c \, \delta t^j(t - \tau_i^j) - c \, \delta t_i(t) + \lambda_{L1} N_{i,L1}^j + \delta T_i - \delta I_i^j + v_{\phi,L1}, \quad (3.16)$$

$$\text{ahol a baloldali} \quad b_{i,\phi 1}^j(t) = \Phi_{i,L1}^j(t) - \rho_{i0}^j + c \, dt_i(t) - c \, dt^j(t - \tau_i^j) - T_i(t) + I_i^j(t).$$

Ebben az esetben a (3.12) megoldásból származó vevő órahibát is korrekcióként vettük figyelembe. Mivel az előzetes órakorrekciók is hibával terhelt mennyiségek, ezért ezekhez is differenciális ismeretleneket rendeltünk ($dt_i(t) + \delta t_i(t)$ és $dt^j(t - \tau_i^j) + \delta t^j(t - \tau_i^j)$).

Az adatfeldolgozás során kezdetben a különbségképzésen alapuló relatív helymeghatározást vezették be. Az „1” és „2” számú állomáson az „1” és „2” számú műholdra vonatkozó L1 fázismérések a következőképpen írhatók fel:

$$b_{1,\phi 1}^1(t) = a_{1,x}^1 \cdot \delta x_1 + a_{1,y}^1 \cdot \delta y_1 + a_{1,z}^1 \cdot \delta z_1 + c \, \delta t^1(t - \tau_1^1) - c \, \delta t_1(t) + \lambda_{L1} N_{1,L1}^1 + \delta T_1 - \delta I_1^1 + v_{1,\phi 1}^1 \quad (3.17)$$

$$b_{2,\phi 1}^1(t) = a_{2,x}^1 \cdot \delta x_2 + a_{2,y}^1 \cdot \delta y_2 + a_{2,z}^1 \cdot \delta z_2 + c \, \delta t^1(t - \tau_2^1) - c \, \delta t_2(t) + \lambda_{L1} N_{2,L1}^1 + \delta T_2 - \delta I_2^1 + v_{2,\phi 1}^1 \quad (3.18)$$

$$b_{1,\phi 1}^2(t) = a_{1,x}^2 \cdot \delta x_1 + a_{1,y}^2 \cdot \delta y_1 + a_{1,z}^2 \cdot \delta z_1 + c \, \delta t^2(t - \tau_1^2) - c \, \delta t_1(t) + \lambda_{L1} N_{1,L1}^2 + \delta T_1 - \delta I_1^2 + v_{1,\phi 1}^2 \quad (3.19)$$

$$b_{2,\phi 1}^2(t) = a_{2,x}^2 \cdot \delta x_2 + a_{2,y}^2 \cdot \delta y_2 + a_{2,z}^2 \cdot \delta z_2 + c \, \delta t^2(t - \tau_2^2) - c \, \delta t_2(t) + \lambda_{L1} N_{2,L1}^2 + \delta T_2 - \delta I_2^2 + v_{2,\phi 1}^2 \quad (3.20)$$

Legyen az „1” számú a bázisállomás, ezért a (3.18) egyenletből vonjuk ki a (3.17) egyenletet és a (3.20) egyenletből a (3.19) egyenletet. Ezeket a különbségeket azonos műholdra, de két különböző állomásra vonatkozó, egyszeres különbségnek nevezzük. Geometriailag ezek az „1”-ről a „2” állomásra mutató vektor komponenseit tartalmazzák. Ha azonban az „1” állomás koordinátáit ismert mennyiségnek tekintjük, a „2” állomás koordinátáit kezelhetjük ismeretlenként:

$$\Delta_{12}^1 = a_{2,x}^1 \cdot \delta x_2 + a_{2,y}^1 \cdot \delta y_2 + a_{2,z}^1 \cdot \delta z_2 - c(\delta t_2(t) - \delta t_1(t)) + \lambda_{L1}(N_{2,L1}^1 - N_{1,L1}^1) + \delta T_2 - \delta T_1 + v_{12}^1, \quad (3.21)$$

$$\Delta_{12}^2 = a_{2,x}^2 \cdot \delta x_2 + a_{2,y}^2 \cdot \delta y_2 + a_{2,z}^2 \cdot \delta z_2 - c(\delta t_2(t) - \delta t_1(t)) + \lambda_{L1}(N_{2,L1}^2 - N_{1,L1}^2) + \delta T_2 - \delta T_1 + v_{12}^2, \quad (3.22)$$

ahol $\Delta_{12}^1 = b_{2,\phi 1}^1(t) - b_{1,\phi 1}^1(t)$, $\Delta_{12}^2 = b_{2,\phi 1}^2(t) - b_{1,\phi 1}^2(t)$, $v_{12}^1 = v_{2,\phi 1}^1 - v_{1,\phi 1}^1$ és $v_{12}^2 = v_{2,\phi 1}^2 - v_{1,\phi 1}^2$.

A műholdak órahibáinál a $(\tau_2^1 - \tau_1^1)$ és $(\tau_2^2 - \tau_1^2)$ különbségek a legkedvezőtlenebb esetben sem nagyobbak 0.02 s értéknél. Ilyen kis idő alatt az órák járásából származó hiba gyakorlatilag nulla értékűnek tekinthető, ezért a különbségképzés során a műholdak órahibái kiesnek, és a műholdhoz kapcsolódó egyéb hatások, például az efemeridák hibái is jelentősen csökkennek. Közeli pontok esetén feltételezhetjük, hogy az ionoszférikus hatások is nagymértékben kiejthetők. A hibaterjedésnek megfelelően ekkor is nagyobb véletlenjellegű hibára számíthatunk, mint a különbségképzés nélküli esetben.

Legyen az „1” jelű a bázisműhold, ezért a (3.22) egyenletből vonjuk ki a (3.21) egyenletet. Ez a különbség az azonos állomásokra de különböző műholdakra vonatkozó egyszeres különbségekből származik, ezért kettős különbségnek nevezzük:

$$\Delta_{12}^{12} = a_{2,x}^{12} \cdot \delta x_2 + a_{2,y}^{12} \cdot \delta y_2 + a_{2,z}^{12} \cdot \delta z_2 + \lambda_{L1} N_{12}^{12} + v_{12}^{12}, \quad (3.23)$$

ahol $a_{2,x}^{12} = a_{2,x}^2 - a_{2,x}^1$, $a_{2,y}^{12} = a_{2,y}^2 - a_{2,y}^1$, $a_{2,z}^{12} = a_{2,z}^2 - a_{2,z}^1$, $v_{12}^{12} = v_{12}^2 - v_{12}^1$ és

$$N_{12}^{12} = (N_{2,L1}^2 - N_{1,L1}^2) - (N_{2,L1}^1 - N_{1,L1}^1).$$

A különbségképzés során a vevő órahibák is kiesnek, és a vevőhöz kapcsolódó egyéb hatások, például a troposzférikus hatások is jelentősen csökkennek. Ezeket a hibákat már nem is jeleztük, de a szélsőpontosságú feldolgozás és a meteorológiai alkalmazások során ezeknek a modellezése is szükségessé válhat. A hibaterjedésnek megfelelően most még nagyobb véletlenjellegű hibára számíthatunk. Elméletileg tehát négy, időben egymást követő, kettős különbség segítségével a három koordináta és az egyetlen fázistöbbértelműség-kombináció egyértelműen meghatározható.

A bázisállomás és a bázisműhold kiválasztásának a több műhold és több vevő méréseinek együttes feldolgozásánál van nagy jelentősége.

A fázistöbbértelműség-kombinációkat a (3.1) és (3.23) összefüggéseknek megfelelően a

$$\begin{aligned} N_{12}^{12} &= N_{2,L1}^2 - N_{1,L1}^2 - N_{2,L1}^1 + N_{1,L1}^1 \\ &= \varphi_2^2 + \delta_2 - \delta^2 - \varphi_1^2 - \delta_1 + \delta^2 - \varphi_2^1 - \delta_2 + \delta^1 + \varphi_1^1 + \delta_1 - \delta^1 \\ &= \varphi_2^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^1 + \varphi_1^1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

alakban írhatjuk fel, amely igazolja, hogy ezek a kombinációk már nemcsak elméletileg, de gyakorlatilag is egész számnak tekinthetők. Ha a kettős különbségek kellő mértékben redukálták az egyéb hibahatásokat, akkor ezek az egész értékek is különböző módszerek segítségével meghatározhatók (Ádám et al. 2004). Az egész értékek rögzítésével csökkenthetjük az ismeretlenek számát, amely jelentősen megnöveli a megoldás geometriai kondícióját is.

Az azonos állomásokra és műholdakra vonatkozó kettőskülönbségek idősorából a szomszédos értékek kivonásával hármas különbségek állíthatók elő, amelyek a fázistöbbértelműség-kombinációkat is kiejtik, és a szabályos hibahatások is nagyon nagy mértékben csökkennek. Mivel egy ilyen kombináció nyolc mérésből áll, a véletlen jellegű hibák azonban tovább növekednek. Ezeket a kombinációkat többnyire a ciklusugrások detektálására használják, vagy közelítő megoldással az állomáskoordináták előzetes értékeit javították. Az 5.3 fejezet a hármaskülönbségek szabatos megoldására mutat be egy új módszert.

Nagyobb távolságok esetében a kettős különbségek sem küszöbölik ki teljes mértékben az ionoszférikus hatásokat, amely nagyon megnehezítheti a fázistöbbértelműség-kombinációk egész számként történő meghatározását. A (3.14) összefüggések alkalmazásával az ionoszféra ugyan a

fázismérések esetében is kiejthető, de a fázistöbbértelműségek ekkor már elméletileg sem tekinthetők egész számoknak, ezért más módszert kell alkalmazni.

Első lépésben ezért a széles sávú („Wide Lane” – WL) lineáris kombinációt kell előállítani. A (3.16) egyenletnek megfelelően írjuk fel a linearizált egyenleteket mind a két frekvenciára vonatkozóan a következő alakban:

$$\frac{b_{i,\phi 1}^j(t)}{\lambda_{L1}} = \frac{1}{\lambda_{L1}} R_i^j + N_{i,L1}^j - \frac{1}{\lambda_{L1}} I_i^j(t) + \frac{v_{\phi,L1}}{\lambda_{L1}}, \quad (3.25)$$

$$\frac{b_{i,\phi 2}^j(t)}{\lambda_{L2}} = \frac{1}{\lambda_{L2}} R_i^j + N_{i,L2}^j - \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}^2} I_i^j(t) + \frac{v_{\phi,L2}}{\lambda_{L2}}, \quad (3.26)$$

$$\text{ahol} \quad R_i^j = a_{i,x}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z}^j \cdot \delta z_i + c \delta t^j(t - \tau_i^j) - c \delta t_i(t) + \delta T_i.$$

A (3.25) és (3.26) egyenletek különbsége adja a keresett kombinációt:

$$\frac{\lambda_{L2} b_{i,\phi 1}^j(t) - \lambda_{L1} b_{i,\phi 2}^j(t)}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} = R_i^j + \frac{\lambda_{L2} \lambda_{L1}}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} (N_{i,L1}^j - N_{i,L2}^j) + \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}} I_i^j(t) + \frac{\lambda_{L2} v_{\phi,L1} - \lambda_{L1} v_{\phi,L2}}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}}. \quad (3.27)$$

$$b_{i,WL}^j(t) = R_i^j + \lambda_{WL} N_{i,WL}^j + \frac{\lambda_{L2}}{\lambda_{L1}} I_i^j(t) + v_{WL}$$

Ez az összefüggés a véletlen jellegű hibák mellett ugyan az ionoszférikus hatásokat is megnöveli, de ez a hatás jóval kisebb a kombinációhoz tartozó hullámhossz növekedéséhez képest, amelynek a fázis-többértelműsége elvileg most is egész számnak tekinthető:

$$\lambda_{WL} = \frac{c}{f_1 - f_2} = \frac{\lambda_{L1} \lambda_{L2}}{\lambda_{L2} - \lambda_{L1}} \approx 86.2 \text{ cm} \quad (3.28)$$

A WL kombinációk kettőskülönbségei tovább csökkentik a hibahatásokat, és a nagyobb hullámhossz megkönnyíti a fázis-többértelműségek egész számú meghatározását.

A (3.27) egyenletet a λ_2 hullámhosszal végigosztva és összevonva a (3.25) egyenlettel az ionoszféra mentes (IF) kombináció egy másik lehetséges változatához jutunk:

$$\frac{\lambda_{L2}^2 b_{i,\phi 1}^j(t) - \lambda_{L1}^2 b_{i,\phi 2}^j(t)}{\lambda_{L2}^2 - \lambda_{L1}^2} = R_i^j + \frac{\lambda_{L2} \lambda_{L1}^2}{\lambda_{L2}^2 - \lambda_{L1}^2} (N_{i,L1}^j - N_{i,L2}^j) + \frac{\lambda_{L2} \lambda_{L1}}{\lambda_{L2} + \lambda_{L1}} N_{i,L1}^j + \frac{\lambda_{L2}^2 v_{\phi,L1} - \lambda_{L1}^2 v_{\phi,L2}}{\lambda_{L2}^2 - \lambda_{L1}^2}. \quad (3.29)$$

$$b_{i,IF}^j(t) = R_i^j + \frac{\lambda_{L2} \lambda_{L1}^2}{\lambda_{L2}^2 - \lambda_{L1}^2} N_{i,WL}^j + \lambda_{IF} N_{i,IF}^j + v_{\phi,IF}$$

A kombináció fázis-többértelműsége alapvetően most sem egész szám. Ha azonban feltételezzük, hogy a WL fázis-többértelműség ismert, akkor az új egész számú fázistöbbértelműség hullámhossza:

$$\lambda_{IF} = \frac{c}{f_1 + f_2} = \frac{\lambda_{L1} \lambda_{L2}}{\lambda_{L2} + \lambda_{L1}} \approx 10.7 \text{ cm}, \quad (3.30)$$

amely azonos a keskeny sávú („Narrow Lane” – NL) lineáris kombináció hullámhosszával. Ez az érték ugyan kedvezőtlenebb az eredeti hullámhosszknál, de a kombináció az ionoszférikus hatásokat már nem tartalmazza. Ha a kettős különbségek megfelelően redukálják az egyéb hibahatásokat, akkor jelentősen megnövekszik az $N_{i,IF}^j$ egész értékek meghatározásának a lehetősége is.

Ha ez a stratégia sem vezet eredményre, az ionoszférikus hatásokat más módszerrel kell meghatározni. Több eljárást fejlesztettek ki a fázis és kódtávolságok együttes feldolgozására és az ionoszférikus hatások ismeretlenként történő becslésére is. A kódtávolságok kisebb pontossága azonban korlátozó tényezőként jelentkezik. Az ionoszférikus hatások meghatározásával a 4.3 és az 5.2 fejezet foglalkozik.

Az újabb módszerek a különbségképzés helyett az eredeti méréseket dolgozzák fel (de Jonge 1998), amely a linearizált L1 fázisméréseket, vagy az L1 és az L2 fázismérések WL kombinációjának segítségével előállított IF kombinációit alkalmazzák.

Általánosan a

$$b_{i,k}^j = a_{i,x,k}^j \cdot \delta x_i + a_{i,y,k}^j \cdot \delta y_i + a_{i,z,k}^j \cdot \delta z_i + \lambda N_i^j - c \delta t_{i,k} + c \delta t_k^j + v_i^j \quad (3.31)$$

egyenlet írható fel, ahol feltételeztük, hogy a műhold koordinátákat és a troposzférikus hatásokat kellő pontossággal ismerjük, továbbá a (k) alsóindex a mérési időpontok sorszáma. Ha r számú vevővel, m számú műholdra, n számú időpontban egyidejű mérést végzünk, akkor:

$$\begin{aligned} \text{a felírható egyenletek száma:} & \quad n \times r \times m, \\ \text{a koordináta ismeretlenek száma:} & \quad 3 \times r, \\ \text{a vevők órahibáinak a száma} & \quad n \times r, \\ \text{a műholdak órahibáinak a száma:} & \quad n \times m, \\ \text{a fázistöbbértelműségek száma:} & \quad r \times m. \end{aligned}$$

Írjuk fel ezeket az egyenleteket növekvő idősorrendben $(1 \dots n)$, ezen belül a vevők sorrendjében $(1 \dots r)$, végül a vevők sorrendjén belül a műholdak sorrendjében $(1 \dots m)$. Az ismeretlenek sorrendje legyen a (3.31) összefüggésnek megfelelően $(3 \times r)$ koordináta ismeretlen, $(r \times m)$ fázistöbbértelműség a vevők és azon belül a műholdak sorrendjében, valamint $(n \times (r + m))$ vevő és műhold órahiba, ez utóbbiak vevőnként és műholdanként ismétlődve.

Mátrixos alakban a következő particionált egyenletet írhatjuk fel:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{v}, \quad (3.32)$$

ahol $\mathbf{x}_1$ a koordináta ismeretlenek, $\mathbf{x}_2$ a járulékos fázistöbbértelműségek, a vevők és a műholdak órahibáinak vektora. Ha a λN és $c \delta t$ mennyiségeket tekintjük ismeretlennek egyenletünk a 0 partíciók elhagyásával tovább egyszerűsíthető:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N & \mathbf{D}_t & & \\ & \mathbf{I}_N & \mathbf{D}_t & \\ & \vdots & & \ddots \\ & \mathbf{I}_N & & \mathbf{D}_t \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

$$\text{ahol} \quad \mathbf{G}_i \quad , \quad \mathbf{I}_N \quad , \quad \mathbf{D}_t \quad .$$

$$\quad (r \times m, 3 \times r) \quad (r \times m, r \times m) \quad (r \times m, r + m)$$

Az egyes partíciók méretét sor és oszlop sorrendben alsó indexeléssel adtuk meg.

Tovább részletezve:

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & & \\ & \mathbf{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{B}_k \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_R & & & \mathbf{I}_S \\ & -\mathbf{e}_R & & \mathbf{I}_S \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & -\mathbf{e}_R & \mathbf{I}_S \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

Az A_1 és A_2 partíciók egymás komplemente (Schaffrin és Grafarend 1986), amely azt jelenti, hogy az A_1 oszlopainak a lineáris kombinációi nem írhatók fel az A_2 oszlopainak a lineáris kombinációjaként. Továbbá az A_1 és A_2 együttes rangja és együttes defektusainak a száma azonos az A_1 és A_2 partíciók egyenkénti rangjainak és defektusainak az összegével.

Ha eltekintünk az A_2 partíciótól, az A_1 csak lineárisan független oszlopokat tartalmaz, mivel a műholdak pozíciót ismertnek tekintettük. (Három műholdra vonatkozó egyidejű távolságból a vevők helyzete elméletileg már egyértelműen meghatározható lenne.) A rendszer defektusait tehát az A_2 hordozza, ezért a defektusok feloldásának a módszere nincs hatással a koordináta-ismeretlenekre.

Ha az időpontenkénti D_t partíciókat önállóan vizsgáljuk (kódtávolságok esete), akkor azok csak egyetlen defektust tartalmaznak. Az n mérési időpontra vonatkozóan tehát n óra defektussal rendelkezünk. A végtelen sok lehetséges megoldás közül gyakorlatilag célszerű lehet pl. valamely nagystabilitású oszcillátorral rendelkező vevő- vagy műhold óráját hibátlanak tekinteni. Gyakorlatilag ezeket a hibákat kihagyjuk az ismeretlenek közül, vagy n számú kényszerfeltétellel előírjuk, hogy időpontenként a nulla értéket vegyék fel. Ha az első vevőhöz tartozó órahibákat rögzítjük csak a $\delta t_{i,k} - \delta t_{1,k}$ ($i \neq 1$) és a $\delta t_k^i - \delta t_{1,k}$ mennyiségeket lehet feltevésmentesen meghatározni (lásd később). Egy másik gyakorlati megoldás szerint az n számú kényszerfeltétel az alkalmasan választott műholdak vagy vevők órahibái átlagának (vagy súlyozott átlagának) a nulla értékét írják elő. (A kódtávolságok feldolgozásánál a műholdak órahibáit ismertnek tekintettük, ezért ebben az esetben nem volt defektus.)

Vizsgáljuk meg most önállóan az egyetlen időpontra vonatkozó $[I_N \ D_t]$ partíciót (fázistávolságok esete). Ekkor a korábbi n idő defektus mellett további $(r + m - 1)$ defektus is jelentkezik. Ez azt jelenti, hogy a fázis-többértelműségeket sem lehet feltevésmentesen meghatározni, ezért ezek közül $(r + m - 1)$ mennyiséget kell rögzíteni. Ezeknél a rögzítendő ismeretleneknél minden műholdhoz és minden állomáshoz egyértelműen kapcsolódó mennyiségeket kell kiválasztani, amely nagyon sokféleképpen megtehető. Egy ilyen sorozat lehet például a kettőskülönbségeknek megfelelően egy bázisállomás és egy bázisműhold kiválasztása.

Legyen az „1” számú vevő és az „1” számú műhold a kiválasztott bázis, amely a következő halmaz első sorának és első oszlopának az $(r + m - 1)$ elemét jelenti:

$$\begin{bmatrix} \lambda N_1^1 & \lambda N_1^2 & \cdots & \lambda N_1^m \\ \lambda N_2^1 & \lambda N_2^2 & \cdots & \lambda N_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda N_k^1 & \lambda N_k^2 & \cdots & \lambda N_k^m \end{bmatrix}.$$

Mivel az I_N partíciók minden időpontban azonosak, ezért a teljes rendszer defektusainak a száma $(n + r + m - 1)$. (A fázistávolságok kettős különbségeinél az órahibák kiesnek és az eredeti négy fázistöbbértelműség helyett csak egyetlen kombinációt tudunk meghatározni, tehát ebben az esetben a defektusokat is kiküszöböltük.)

A teljes rendszerhez tartozó kényszerfeltétel, amely az első vevő órahibáját is rögzíti:

$$C \mathbf{x}_2 = 0, \quad (3.35)$$

ahol $C = \begin{bmatrix} I_1 & & & & & \\ & s_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & s_r & & \\ & & & & w_1 & 0_m \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & w_n & 0_m \end{bmatrix},$

továbbá $\mathbf{I}_1$ egység mátrix, $\mathbf{s}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{0}_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$.

A további nulla partíciókat nem jelöltük. A $\mathbf{C}$ mátrixnak a konkrét példánkhoz kapcsolódó elemeit a következő halmazban szemléltetjük:

$$\begin{pmatrix} N_1^1 & N_1^2 & N_2^1 & N_2^2 & \alpha_{1,1} & \alpha_{2,1} & \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_{1,3} & \alpha_{2,3} & \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_{1,4} & \alpha_{2,4} & \alpha_4^1 & \alpha_4^2 \\ 1 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & \mathbf{I}_1 & & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathbf{S}_2 & & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathbf{W}_1 & \\ & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \mathbf{0}_m \\ & \mathbf{W}_1 \\ & \mathbf{0}_m \\ & \mathbf{W}_1 \\ & \mathbf{0}_m \\ & \mathbf{W}_1 \\ & \mathbf{0}_m \end{pmatrix}$$

Rendezzük át az $\mathbf{x}_2$ ismeretlenek sorrendjét és az $\mathbf{A}_2$ mátrix oszlopait az $\mathbf{x}'_2$ és az $\mathbf{A}'_2 = [\mathbf{R} \ \mathbf{Z}]$ particionált alakba úgy, hogy a (3.35) összefüggésnek megfelelően, a rögzített ismeretleneket helyezzük át az $\mathbf{x}'_2$ vektor végére, illetve az oszlopokat a $\mathbf{Z}$ partícióba. A feltevésmentesen becsülhető mennyiségek Baróthy és Hetényi (1981) alapján:

$$[(\mathbf{I}) \ ((\mathbf{R}^t \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{Z})] \mathbf{x}'_2, \quad (3.36)$$

ahol $\mathbf{I}$ az egységmátrix és t a transzponáltat jelöli. Az általános megoldás a következő:

$$\begin{aligned} & ((N_i^j - N_1^j) - (N_i^1 - N_1^1)) \quad , \text{ ahol } i \neq 1 \text{ és } j \neq 1 \quad , \\ & \delta_{t_{1,k}} - \delta_{t_{1,k}} - (N_i^1 - N_1^1) \quad , \text{ ahol } i \neq 1 \text{ és } \\ & \delta t_k^j - \delta_{t_{1,k}} + N_1^j \quad . \end{aligned}$$

A fázistöbbértelműségek elhagyásával a $\mathbf{D}_1$ partíciók korábban már megadott feltevésmentes órákombinációt kapjuk. A fázistávolságok esetében tehát az órahibák és a fázistöbb-értelműségek egymástól nem független mennyiségek. A feltevésmentes fázistöbbértelműség kombinációk azonban azonosak a kettőskülönbségek kombinációival, ezért az N_1^j egész számú értékei itt is meghatározhatók, mivel a kombinációban szereplő másik három paraméter nulla (egész) értéként rögzítettük. Ha a kettőskülönbségek feldolgozásánál rögzített koordinátákat itt is rögzítjük, és a különbségképzésből származó hibaterjedést is szabatosan kezeljük, akkor a különbségképzéssel elméletileg azonos eredményeket kell kapnunk. A hibaterjedéssel és a legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel a következő fejezet foglalkozik.

A különbségképzés nélküli feldolgozás gyakorlati előnye a nagyobb kontinentális hálózatok kiegyenlítésénél jelentkezhet, ahol nagyon hosszú bázisvonalak is előfordulhatnak. Ekkor a műholdankénti viszonylag kevés közös megfigyelés miatt számos, egyébként megfelelő mérést kellene elhagyni a kettőskülönbségek előállításakor. Számítástechnikai szempontból a különbségképzés nélküli módszer nagyon nagy és ritka normálmátrixhoz vezet, a kényszerfeltételi egyenletek száma is nagy, továbbá a műholdkonfigurációk változása látszólag megnehezíti a megfelelő kényszerek felírását.

3.3 Legkisebb négyzetes becslési eljárások

A geodéziai hálózatok méréseinek szabatos feldolgozásánál a legkisebb négyzetes becslési eljárásokat alkalmazzák. A GPS mérések szabatos feldolgozásánál is ennek a módszernek a különböző változatait használják. Az adatfeldolgozás során általában megkülönböztetik a determinisztikus modellt, amely a mért mennyiségek és az ismeretlen paraméterek közötti összefüggést adja meg, továbbá a sztochasztikus modellt, amely a mérések és a paraméterek véletlen jellegű tulajdonságait írja le (Detrekői 1991).

A kiegyenlítő számítások determinisztikus modellje mindig visszavezethető a lineáris algebraiban tárgyalt

$$\underset{n,1}{\mathbf{b}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \underset{m,1}{\mathbf{x}} \quad (3.37)$$

inhomogén ($\mathbf{b} \neq 0$) egyenletrendszerre, ahol $\mathbf{b}$ az előző fejezetben bemutatott módon a mérésekhez kapcsolódó mennyiség (a mérések és az előzetes értékek, továbbá a korrekciók ellentmondásainak a vektora), $\mathbf{A}$ az együtttható mátrix, $\mathbf{x}$ az ismeretlen paraméterek vektora, n a mérések és m az ismeretlenek száma.

Ennek az egyenletrendszernek, akkor és csak akkor van megoldása, ha a $\mathbf{b}$ vektor felírható az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopvektorainak lineáris kombinációjaként, vagyis a $\mathbf{b}$ vektor eleme az $\mathbf{A}$ mátrix oszlopai által kifeszített térnek. Ebben az esetben konzisztens, ellenkező esetben inkonzisztens egyenletrendszerrel beszélünk.

A geodéziai és a GPS alkalmazások is nagyszámú fölös, az ismeretlenek számánál jóval nagyobb számú mérést dolgoznak fel, ezért ezek az egyenletek általában inkonzisztensek. A mérések közötti ellentmondások kezeléséhez ezért további ismeretlen mérési javításokat kell bevezetni:

$$\underset{n,1}{\mathbf{b}} = \underset{n,m}{\mathbf{A}} \underset{m,1}{\mathbf{x}} + \underset{n,1}{\mathbf{v}} \quad (3.38)$$

Az egyenletrendszer megoldása során keressük azt a $(\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{x}})$ vektort, amelyhez tartozó $\hat{\mathbf{v}}$ vektor optimális tulajdonságokkal rendelkezik. Ilyen geometriailag értelmezhető megoldás lehet, pl. az, amelyik a $\hat{\mathbf{v}}$ vektor hosszát minimalizálja. Ekkor a $\hat{\mathbf{b}}$ vektor a $\mathbf{b}$ vektor ortogonális projekciója, és a mért és a becsült értékek a lehető legközelebb kerülnek egymáshoz.

Az általános megoldás matematikailag egy szélsőérték problémára vezethető vissza:

$$\Phi = \mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} = \min! \quad , \quad (3.39)$$

ahol $\mathbf{P}$ egy alkalmasan választott pozitív definit súlymátrix és t a transzponáltat jelöli. A legkisebb négyzetek elnevezés is erre a minimum normára utal. A minimalizálás az

$$(\underset{m,1}{\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b}}) = (\underset{m,m}{\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}}) \underset{m,1}{\mathbf{x}} \quad (3.40)$$

normál egyenletekhez vezet. Mivel a normálegyenletek száma most azonos az ismeretlen paraméterek számával, ezért mindig létezik az egyértelmű megoldásuk, ha m egyenlő az $\mathbf{A}$ mátrix rangjával, vagyis $\mathbf{A}$ csak lineárisan független oszlopokat tartalmaz. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a normál mátrix invertálható:

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) = \mathbf{I} \quad , \quad (3.41)$$

ahol $\mathbf{I}$ az egységmátrix.

A geodéziában gyakran találkozunk olyan problémával, ahol m nagyobb, mint az $\mathbf{A}$ rangja (r), tehát a normál mátrix továbbra is szinguláris. Ez azt jelenti, hogy r egymáshoz kapcsolódó és $(m-r)$ tetszőlegesen megválasztható szabad ismeretlennel rendelkezünk.

A geodéziai hálózatoknál dátum-defektusnak nevezzük azt a ranghiányt, amely annak a következménye, hogy a hálózat koordináta rendszerét nem definiáltuk egyértelműen. Konfigurációs de-

fektusról beszélünk akkor, ha a mérések segítségével a pontthalmaz alakját és méretét nem lehet egyértelműen leírni. Az egyenletek rosszul kondicionáltságáról akkor beszélhetünk, ha az egyes paraméterek elméletileg ugyan nem, de a numerikus számítások során nagyon szoros összefüggést mutatnak, ami közel szingularitást eredményez.

A GPS alkalmazásoknál a dátumdefektusok megfelelő számú állomás-, vagy műholdpozíció rögzítésével elkerülhetők. A kódtávolságok esetében néhány órahibat, a fázistávolságok esetében további fázis-többértelműséget is rögzítenünk kell, vagy ki kell ejtenünk, hogy elkerüljük a konfigurációs defektusokat. A defektusokat járulékos kényszerfeltételi egyenletek felírásával is feloldhatjuk:

$$\underset{m-r,m}{C} \underset{m,1}{x} = 0, \quad (3.42)$$

ahol a szabad paraméterek megfelelően felvett értékei, vagy a paraméterek célszerűen megválasztott kombinációi az adatfeldolgozás során nem változnak (0 értéket kapnak).

A geodéziában gyakorlati jelentősége többnyire a szinguláris normál mátrixok ún. pszeudó inverzének (+) van, amely a (3.39) feltétel mellett a:

$$\Phi = x^t x = \min! \quad (3.43)$$

járlékos feltételt is kielégíti. Ekkor

$$(A^t P A)^+ (A^t P A) \neq I, \quad (3.44)$$

de a két mátrix szorzatának az egységmátrixtól való eltérése minimális, továbbá

$$\begin{aligned} (A^t P A)(A^t P A)^+ (A^t P A) &= (A^t P A) \\ A(A^t P A)^+ (A^t P A) &= A \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ez a megoldás, melyet gyakran szabadhálózatos megoldásnak is neveznek, a dátum-defektusok esetében a hálózat eltolását, elforgatását és a méretarány változatlanágát előíró $(m-r)$ számú minimális kényszerfeltétel felírásával is előállítható (van Mierlo 1980).

A (3.37) egyenletek tehát pusztán algebrai megfontolások alapján is megoldhatók. Amennyiben az egyenletekhez tartozó bizonyos mennyiségek sztochasztikus tulajdonságokkal is rendelkeznek, a becslőt mennyiségek jellemzői is levezethetők, illetve figyelembe vehetők az egyes megoldások során. A GPS esetében gyakran alkalmazott három modellt részletesebben is bemutatjuk.

Gauss-Markov modell

A (3.38) egyenletek (3.39) szerinti megoldását:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A^t P A)^{-1} (A^t P b) \\ \hat{b} &= A \hat{x} \\ \hat{v} &= b - \hat{b} \end{aligned} \quad (3.46)$$

és a hozzá rendelt:

$$\begin{aligned} E\langle v \rangle &= 0 \\ D\langle v \rangle &= D\langle b \rangle = M_b = \sigma_0^2 Q_b = \sigma_0^2 P^{-1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

sztochasztikus tulajdonságokat a szakirodalom általában Gauss-Markov modellként tárgyalja, ahol $E\langle \rangle$ a várható értékek vektorát és $D\langle \rangle$ a variancia-kovariancia mátrixot jelöli, utóbbi főátlója a szórásokat, az átlón kívüli értékek a változók közötti összefüggéseket adják meg. (Az $E\langle \rangle$ és $D\langle \rangle$

jelölések az egydimenziós valószínűségi változók várható értékének és szórásának a többdimenziós általánosítása.)

A mérések a priori pontosságát az $\mathbf{M}_b = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_b = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$ variancia-kovariancia mátrix írja le, amely lehetőséget teremt a determinisztikus modell $\mathbf{P}$ súlymátrixának a felvételére is. A súlyegység szórásának a priori értéke (σ_0) egy tetszőlegesen felvehető konstans. A $\mathbf{Q}_b$ súlykoefficiens mátrix az $\mathbf{M}_b$ mátrixtól csak "méretarányában" különbözik, ezért a továbbiakban a $\sigma_0 = 1$ feltételezéssel élünk. (Könnyen belátható, hogy ha a (3.46) összefüggésekbe a $\mathbf{P}$ helyett az $\mathbf{M}_b^{-1}$ mátrixot helyettesítenénk a σ_0 konstans kiesne, azaz a megoldás szempontjából elméletileg közömbös a konkrét értéke.)

A modell szerint tehát a $\mathbf{v}$ sztochasztikus változónak a várható értéke és a szórása is, míg a $\mathbf{b}$ sztochasztikus változónak a szórása az előzetesen ismert mennyiség.

A becslt várható értékek a (3.46) és (3.47) összefüggések alapján:

$$\begin{aligned} E\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= E\langle (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b}) \rangle \\ &= E\langle (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v})) \rangle = E\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x} \\ E\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= E\langle \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{A} \mathbf{x} \\ E\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= E\langle \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \rangle = E\langle \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v} - \mathbf{A} \mathbf{x} \rangle = E\langle \mathbf{v} \rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

A becslt értékek variancia-kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényének megfelelően:

$$\begin{aligned} D\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = ((\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}) \mathbf{Q}_b (\mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}) \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \\ D\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \\ D\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_b - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \end{aligned} \quad (3.49)$$

A súlyegység szórásának a posteriori (kiegyenlítés utáni) értéke:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^t \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{n-r}, \quad (3.50)$$

ahol $(n-r)$ a kiegyenlítés szabadságfoka (a mérések mínusz a lineárisan független ismeretlenek száma, reguláris normálmátrix esetében $(n-m)$). Ennek az értéknek a segítségével a becslt mennyiségek variancia-kovariancia mátrixa is kiszámítható:

$$\mathbf{M}_{\hat{\mathbf{x}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}}, \quad \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{b}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}}, \quad \text{és} \quad \mathbf{M}_{\hat{\mathbf{v}}} = \hat{\sigma}_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} \quad (3.51)$$

Mivel feltételeztük, hogy a normálmátrix invertálható, ezért az $E\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{x}$ eredményt kaptuk. Ez azt jelenti, hogy a modell az ismeretlenekre vonatkozóan a legkedvezőbb lineáris torzítatlan becslést szolgáltatja.

Ha a modell szinguláris és a defektusokat a pszeudóinverz segítségével oldottuk fel a (3.45) összefüggés alapján:

$$\begin{aligned}
E\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= E\langle (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ (\mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v})) \rangle \\
&= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} = \mathbf{x} \\
E\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= E\langle \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{A} \mathbf{x} \\
E\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= E\langle \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \rangle = E\langle \mathbf{v} \rangle = 0
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Ekkor a modellünk az ismeretlenekre vonatkozóan csak a legkedvezőbb lineáris minimális torzítású becslést szolgáltatja. Az m ismeretleneknek azonban létezik r számú lineáris kombinációja, amelyre vonatkozóan torzítatlan becslést kapunk (3.1 fejezet (3.36) összefüggés).

A becslült értékek variancia-kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényének megfelelően:

$$\begin{aligned}
D\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = ((\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P}) \mathbf{Q}_b (\mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+) \\
&= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \\
&= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \\
D\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t \\
D\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_b - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^+ \mathbf{A}^t
\end{aligned} \tag{3.53}$$

A becslült értékek várható értékének és szórásának meghatározásához tehát csak az előzetesen sztochasztikusnak tekintett változók várható értékét és szórását használtuk fel.

Ha a (3.37) modellt linearizálással állítottuk elő, a végeredményt fokozatos közelítéssel kapjuk meg. Az előzetes értékek pontosításával újra elvégezzük a linearizálást és a kiegyenlítést, amíg a változások gyakorlatilag már elhanyagolhatóvá válnak.

A GPS mérések megfelelő lineáris modelljének felírásával a Gauss-Markov modell általában mindig megfelelő eredményeket szolgáltat. A hibaparaméterek nem megfelelő felvételéből adódó rosszul kondicionáltságot azonban mindig el kell kerülni, ez gyakorlati szempontból nemcsak hátrányos, de előnyös tulajdonság is lehet.

Legkedvezőbb lineáris becslés, BLE

A Gauss-Markov modellnél a járulékos hibaparaméterek által jelentkező rosszul kondicionáltság kezelésére, azaz a GPS méréseket terhelő hibák összetettebb figyelembe vételére, számos, a legkedvezőbb lineáris becslések kategóriájába tartozó eljárást is alkalmaznak. Gyakran az elnevezések sem egységesek, ezért mindig vizsgáljuk meg a programok által felkínált megoldásokat. Az egyik leggyakrabban használt módszer a legkedvezőbb lineáris becslés - BLE (Best Linear Estimation, Bock 1982), ahol a (3.38) determinisztikus modellhez az

$$\begin{aligned}
E\langle \mathbf{v} \rangle &= 0 \\
D\langle \mathbf{v} \rangle &= D\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{M}_b = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_b = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\
E\langle \mathbf{x} \rangle &= \bar{\mathbf{x}} \\
D\langle \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{M}_x = \sigma_0^2 \mathbf{Q}_x = \sigma_0^2 \mathbf{P}_x^{-1}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

sztochasztikus modell kapcsolódik. Ebben az esetben a paraméterekre vonatkozóan is járulékos információkkal rendelkezünk. Az $\mathbf{x}$ paraméterek már definíció szerint is véletlen jellegű mennyiségek és a pozitív definit súlymátrixuk ($\mathbf{P}_x^{-1}$) is ismert. Az $E\langle \mathbf{x} \rangle = \bar{\mathbf{x}}$ értékeket ugyan nem ismerjük, de jeleztük, hogy nem nulla várható értékű, determinisztikus értékek. (A Gauss-Markov modellnél megkülönböztetjük a mérések és az ismeretlenek terét, az $\hat{\mathbf{x}}$ értékek azért lesznek véletlen jellegű változók, mert véletlen jellegű mennyiségek segítségével becsültük őket.)

Ennél a modellnél gyakorlatilag megszüntettük a javítások és az ismeretlen paraméterek közötti megkülönböztetést, egymással nem korrelált változóknak tekintjük őket, amelyek azonban azonos eloszlásból származnak, ezért a négyzetösszegüket együttesen minimalizáljuk:

$$\Phi = \mathbf{v}^t \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{x}^t \mathbf{P}_x \mathbf{x} = \min! , \quad (3.55)$$

amely a következő megoldást szolgáltatja:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b}) \\ &= \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Az $\hat{\mathbf{x}}$ paraméter első megoldásánál az invertálandó mátrix mérete a paraméterek számával, a második megoldásnál a mérések számával azonos, ezért az első megoldás gyakorlati szempontból előnyösebb.

Mivel $\mathbf{P}_x$ egy pozitív definit súlymátrix, ezért a normálmátrix akkor is invertálható, ha a determinisztikus modell egyébként szinguláris.

A (3.38) és (3.54) modelleknek megfelelően a $\mathbf{b}$ paraméternek az $\mathbf{x}$ és a $\mathbf{v}$ komponens szerinti feltételes és együttes eloszlásai:

$$\begin{aligned} E\langle \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle &= \mathbf{A} \mathbf{x} & , & \quad D\langle \mathbf{b} | \mathbf{x} \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1} \\ E\langle \mathbf{b} | \mathbf{v} \rangle &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{v} & , & \quad D\langle \mathbf{b} | \mathbf{v} \rangle = \sigma_0^2 \mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t \\ E\langle \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} & , & \quad D\langle \mathbf{b} \rangle = \sigma_0^2 (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

A becsült várható értékek:

$$\begin{aligned} E\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= E\langle (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v})) \rangle \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{x}} \\ E\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= E\langle \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} \rangle = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \bar{\mathbf{x}} \\ E\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= E\langle \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \rangle = (\mathbf{A} - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})) \bar{\mathbf{x}} \neq 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

A becsült értékek variancia-kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényének megfelelően:

$$\begin{aligned} D\langle \hat{\mathbf{x}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{P}_x^{-1} - \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{Q}_b (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \\ &= \mathbf{P}_x^{-1} - \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1}) (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \\ &= \mathbf{P}_x^{-1} - \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} \quad (3.59) \\ D\langle \hat{\mathbf{b}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{b}}} = \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} \mathbf{A}^t \\ D\langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &= \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_b - \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t = (\mathbf{A} \mathbf{P}_x^{-1} \mathbf{A}^t + \mathbf{P}^{-1}) - \mathbf{A} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{P}_x)^{-1} \mathbf{A}^t \end{aligned}$$

A súlyegység szórásának a posteriori értéke:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{v}}^t \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{x}}^t \mathbf{P}_x \hat{\mathbf{x}}}{n} \quad (3.60)$$

A becsült paraméterek várható értéke itt sem azonos a sztochasztikus modellben adott várható értékekkel, ezért ez a megoldás csak a legkedvezőbb lineáris torzított becslést szolgáltatja. Egyedülállóan tekinthető azonban abból a szempontból, hogy a (3.55) feltételt kielégíti és az $\hat{\mathbf{x}}$ paraméterek szórását minimalizálja (Bock 1982).

A bővített sztochasztikus modell az $\mathbf{x}$ paraméterekre vonatkozó m járulékos információt is tartalmaz, ezért a szabadságfok definíciója itt is érvényesül $(n+m-m)$.

Mivel $\mathbf{P}_x$ egy pozitív definit súlymátrix a (3.56) megoldás szinguláris determinisztikus modell esetében is létezik, ezért ez csak sztochasztikus megoldásnak tekinthető. Mivel a dátum-defektus feloldása a súlymátrixon keresztül történik, geometriailag nem definiáltuk egyértelműen, ezért gyenge dátumú becslésnek is nevezik.

Az a tény, hogy a modellnek mindig létezik megoldása gyakorlati szempontból nemcsak előnyös, de hátrányos tulajdonság is lehet, ezért az alkalmazása során mindig óvatosan kell eljárni. Ha a paraméterekhez $\mathbf{P}_x = 0$ súlyt rendelünk, akkor a modell azonos lesz a Gauss-Markov modellel. Nagyon nagy súly felvételével gyakorlatilag rögzíthetjük a paramétereket. Az alkalmazás során tehát akkor járunk el helyesen, ha az egyes paramétereket reális súlyozással látjuk el, és az így bevitt járulékos információk és az összetett hibamodell segítségével kedvezőbb megoldáshoz juthatunk.

A GPS esetében ezért célszerű az egyes programok által javasolt opciókat alkalmazni, ahol a dátum paraméterek (az ismert pontok) nagy súllyal (kis a priori szórással), a hibaparaméterek és a Gauss-Markov modellel is becsülhető ismeretlenek reális súllyal szerepelnek a kiegyenlítésben. Ekkor a Gauss-Markov modellekhez hasonló megoldást kapunk, de a lineárisan kevésbé független hibaparamétereket is megbecsülhetjük.

Kálmán szűrés

A GPS mérések esetében is gyakran alkalmazzák a Kálmán szűrés diszkrét esetét az időben változó paraméterek (műhold- és vevő koordináták, ionszférikus hatások stb.) becslésére.

A vizsgált paraméterek állapotvektorát az

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \quad (3.61)$$

lineáris átviteli függvénnyel becslik, ahol $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ az előző időpontban becsült állapotvektor és $\mathbf{T}$ az átviteli mátrix. Az átviteli mátrixot általában egy másodfokú differenciálegyenlet megoldásaként (2.4 fejezet), vagy a vizsgált folyamat másodfokú idő szerinti Taylor sorba fejtésével állítják elő:

$$\mathbf{x}'_i = \begin{bmatrix} r_i \\ \dot{r}_i \\ \ddot{r}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0.5\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{i-1} \\ \dot{r}_{i-1} \\ \ddot{r}_{i-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_{i-1}, \quad (3.62)$$

ahol $\Delta t = t_i - t_{i-1}$. Az állapotvektor ekkor a folyamat adott időpontbeli függvényértékéből (r_i), valamint az első ($\dot{r}_i$) és második ($\ddot{r}_i$) differenciál értékéből áll.

Mivel ez a becsült mennyiség is hibával terhelt érték, ezért felírhatjuk a következő lineáris egyenletrendszer a hozzá tartozó sztochasztikus modellel együtt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_i &= \mathbf{I} \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_x \\ E\langle \mathbf{v}_x \rangle &= 0 \\ D\langle \mathbf{v}_x \rangle &= D\langle \mathbf{x}'_i \rangle = \mathbf{Q}_{x'_i} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} \mathbf{T}^t + \mathbf{Q}_x, \\ E\langle \mathbf{x}'_i \rangle &= \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (3.63)$$

hol $\mathbf{I}$ az egységmátrix és $\mathbf{Q}_{x'_i}$ a becslés variancia-kovariancia mátrixa, amely két részből áll, az x'_{i-1} paraméter és a modell $\mathbf{Q}_x$ bizonytalanságából. Ez utóbbi taggal a sorfejtés magasabb rendű tagjainak az elhanyagolását vehetjük figyelembe.

A t_i időpontra vonatkozóan azonban hagyományos értelemben vett mérésekkel is rendelkezünk, ahol a lineáris modellben szereplő paraméterek (legalább részben) azonosak az állapotvektor paramétereivel

$$\begin{aligned}\mathbf{b} &= \mathbf{A} \mathbf{x}_i + \mathbf{v} \\ E\langle \mathbf{v} \rangle &= 0 \\ D\langle \mathbf{v} \rangle &= D\langle \mathbf{b} \rangle = \mathbf{Q}_v, \\ E\langle \mathbf{b} \rangle &= \mathbf{A} \mathbf{x}_i\end{aligned}\quad (3.64)$$

Mivel a (3.63) és a (3.64) modellek lényegében azonosak (nulla várható értékű ismert varianciájú mennyiségek), a megoldás a $\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1}$ helyettesítéssel visszavezethető a Gauss-Markov modell particionált megoldására:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}'_i \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{x'_i} & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_v \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

A partíciók rekurzív megoldásánál az első partícióból (a becslésből) származó megoldáshoz a második partíció alapján korrekciókat számítunk, amit ennél a modellenél szűrésnek neveznek.

A megoldás

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}'_i + \mathbf{K}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}'_i) \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{Q}_{x'_i},\end{aligned}\quad (3.66)$$

ahol a $\mathbf{K} = \mathbf{Q}_{x'_i} \mathbf{A}^t (\mathbf{Q}_b + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{x'_i} \mathbf{A}^t)^{-1}$

mátrixot Kálmán, vagy nyereség-mátrixnak is nevezik. A következő időpont adatainak feldolgozásánál tehát a (3.66) becslült értékeket kell a következő adatátvitelnél felhasználni.

A (3.63) és a (3.64) modellek megfelelően

$$E\langle \hat{\mathbf{x}}_i \rangle = E\langle \mathbf{x}'_i + \mathbf{K}(\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}'_i) \rangle = \mathbf{x}_i, \quad (3.67)$$

tehát a Kálmán szűrés is lineáris torzítatlan becslést szolgáltat.

A formai hasonlóság ellenére a Kálmán szűrés azonban lényeges elvi eltérést mutat a Gauss-Markov modellhez viszonyítva. Itt is megszüntettük a mérések és a paraméterek közötti megkülönböztetést. Az előző BLE modellhez hasonlóan ismerjük a paraméterek szórását, de itt a várható értékének egy konkrét realizációját is figyelembe vesszük. Ebből a szempontból tehát ez is sztochasztikus megoldásnak tekinthető.

Ha az átviteli mátrixot és a kezdő értékeket a (3.62) összefüggésnek megfelelően csak a mérésekből határozzuk meg, a vizsgált jelenségnek csak a változását követjük nyomon, kinematikus feldolgozásról beszélünk. Ha azonban a változást okozó ismert erőhatásokat is bevonjuk a számításokba (pl. a műhold pálya-meghatározásánál, (2.39) összefüggés) dinamikus feldolgozásról beszélünk.

A modell alkalmazásánál tehát itt is nagy gonddal kell eljárni, különösen a kezdő időpontra vonatkozó állapotvektor és a sztochasztikus modell felvételénél. A módszer előnye, hogy az egyes időpontokhoz tartozó megfigyeléseket nem kell tárolnunk, valós időben szolgáltat megoldást és a vizsgált paramétereket az átviteli mátrix segítségével időben előre is tudjuk jelezni.

3.4 A GPS mérések variancia-kovariancia mátrixa

Az előző fejezetben bemutattuk, hogy a mérésekhez tartozó sztochasztikus modell fontos szerepet játszik az adatok feldolgozásában. A különböző GPS mérési típusokat (az időben egymást, követő méréseket) megfelelő modell hiányában egymástól független, azonos szórású valószínűségi változóknak tekintjük, ezért a variancia-kovariancia mátrix az

$$\mathbf{M} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

alakban írható, ahol σ a mérési típus szórása. Az adatfeldolgozásba bevont összes mérést a különböző kombinációk nélkül a

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (3.69)$$

általános alakban írhatjuk fel. Bevezetve a D kombinációs mátrixot az eredeti egyenleteket a

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \mathbf{b} &= \mathbf{D} \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{v} \\ \hat{\mathbf{b}} &= \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x} + \hat{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (3.70)$$

helyettesítéssel formailag visszavezethetjük az eredeti alakra, ahol a hibaterjedésnek megfelelően az $\mathbf{M}$ mátrixot is módosítani kell ($\sigma_0 = 1$ esetben $\mathbf{M} = \mathbf{Q}$):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{M}} &= \mathbf{D} \mathbf{M} \mathbf{D}^t \\ \hat{\mathbf{Q}} &= \mathbf{D} \mathbf{Q} \mathbf{D}^t \end{aligned} \quad (3.71)$$

A $\mathbf{D}$ különbségképző mátrixok a WL, NL és IF kombinációktól eltérően, az alapvető ismeretlenek számát is csökkentik. A kiegyenlítést követően a kétféle javítási sorozat között a:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Q} \mathbf{D}^t \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\mathbf{v}} \\ \hat{\mathbf{v}}^t \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{v}^t \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.72)$$

összefüggések is érvényesek, és a hibaterjedésnek megfelelően a variancia-kovariancia mátrixok is becsülhetők. A szabadságfok kiszámításánál azonban mindig az eredeti mérésszámot kell figyelembe venni. A továbbiakban az egyes kombinációk $\mathbf{M}$ mátrixait mutatjuk be.

Ha az L1 és L2 méréseket azonos szórásúnak tekintjük a (3.27) szerinti széles sávú (WL) lineáris kombinációk variancia-kovariancia mátrixa a hibaterjedés törvényének megfelelően

$$\mathbf{M}_{WL} = \mathbf{D}_{WL} \mathbf{M} \mathbf{D}_{WL}^t = \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{WL}^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

ahol

$$\mathbf{D}_{WL} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} & -\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{bmatrix}.$$

Azonos feltételek mellett a (3.29) szerinti ionoszféra mentes (IF) lineáris kombinációk variancia-kovariancia mátrixa

$$\mathbf{M}_{IF} = \mathbf{D}_{IF} \mathbf{M} \mathbf{D}_{IF}^t = \frac{\lambda_2^4 + \lambda_1^4}{(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)^2} \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{IF}^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

ahol

$$\mathbf{D}_{IF} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & \cdots & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\lambda_2^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} & -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \end{bmatrix}.$$

Amennyiben a súlyegység a priori szórását a σ , σ_{WL} illetve a σ_{IF} értékeknek megfelelően választjuk, a különbségképzés nélküli relatív helymeghatározásnál a súlymátrix még egységmátrix marad.

A különbségképzésen alapuló relatív helymeghatározásnál, különösen a több állomás méréseinek szigorú együttes kiegyenlítésénél, a súlymátrix előállítása lényegesen bonyolultabb. Egyetlen bázisvonal esetében az egyszeres különbségek variancia-kovariancia mátrixa

$$\mathbf{M}_{EK} = \mathbf{D}_{EK} \mathbf{M} \mathbf{D}_{EK}^t = 2\sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \sigma_{EK}^2 \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

ahol

$$\mathbf{D}_{EK} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ebben az esetben a súlymátrix még szintén egységmátrix marad.

Az egyszeres különbségekből levezethető kettőskülönbségek variancia-kovariancia mátrixa

$$\mathbf{M}_{KK} = \mathbf{D}_{KK} \mathbf{M}_{EK} \mathbf{D}_{KK}^t = \sigma_{EK}^2 \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{D}_n \end{bmatrix}, \quad (3.76)$$

ahol a $\mathbf{D}_i$ partíció mérete az egyes időpontokhoz tartozó műholdak számának (m) a függvénye. Matematikailag két változat rendelkezik kedvező tulajdonságokkal. Ha az m számú műholdat

választjuk bázisnak

$$\mathbf{D}_{KK_i} = \begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ & \ddots & -1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

ahol $\mathbf{D}_{KK_i}$ a különbségképző mátrix egyetlen időpontra (i) vonatkozó partíciója. A $\mathbf{D}_i$ partíciók inverze, a $\mathbf{P}_i$ súlymátrix, zárt formában is könnyen felírható:

$$P(i,i) = \frac{n}{n+1} \quad \text{és} \quad P(i,j) = \frac{-1}{n+1} \quad (i \neq j), \quad (3.78)$$

ahol n a szimmetrikus mátrix mérete, i és j az elemek sor- és oszlop száma.

Ha a műholdak sorrendjében váltakozó bázisműhold szerepel a különbségképzésben

$$\mathbf{D}_{KK_i} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & \ddots & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.79)$$

ahol $\mathbf{D}_{KK_i}$ a különbségképző mátrix egyetlen időpontra vonatkozó partíciója. Ennek a $\mathbf{D}_i$ partícióknak az inverzét csak jóval bonyolultabb összefüggés segítségével lehet közvetlenül felírni. Egy optimális megoldást az 5.3 fejezet mutat be.

Mindkét esetben a bázisműholdak miatt a mérések korreláltak lesznek (a súlymátrix nem diagonális), de a partíciók mérete csak az egyidejű műholdak számától függ, ezért az inverz numerikusan még könnyen kezelhető.

A kettős különbségek (3.77) és (3.79) összefüggéseinek $\mathbf{D}_i$ partícióiból most is kiemelhetnénk a 2 értéket. A főatlóban ekkor egységnyi súly szerepelne, amelyhez a $\sigma_{KK}^2 = 2\sigma_{EK}^2$ érték tartozik.

A hármas különbségek esetében könnyen belátható, hogy az időben egymást követő mérések különbségei miatt a (3.76) mátrix blokkdiagonális szerkezete sávmátrixá alakul, és lényegesen nagyobb méretű mátrixot kell invertálni a mérésekhez tartozó súlymátrix előállításához.

A hármas különbségek esetében a különbségképzés sorrendjétől függetlenül $\sigma_{HK}^2 = 2\sigma_{KK}^2$.

A kettőnél több állomás méréseinek együttes, szigorú kiegyenlítésénél a műholdakhoz hasonlóan bázisállomásokat is választani kell, ezért már az egyszeres különbségek is korreláltak lesznek. Itt is elmondhatjuk, hogy egy nagyon nagy, ritka mátrixnak az invertálását kell végrehajtani már az adatfeldolgozás elején. A kettőskülönbségek felírásánál és a súlymátrixok előállításánál tehát nagy gondnal kell eljárni. Ez a különbségképzésen alapuló egyszerűbb megfigyelési egyenleteknek az "ára".

Gyakran választható lehetőség a mérések magassági szögtől függő pontosságának figyelembevétele is. Ekkor a (3.72) mátrix nem írható le egységmátrix segítségével és a levezetett mátrixok is jóval bonyolultabbak lesznek. Ezzel a lehetőséggel azonban mindig nagyon óvatosan kell bánni, mivel a geometriai kondíció szempontjából nagyon fontos horizontközeli mérések kapnak kisebb súlyokat.

3.5 Sztochasztikus folyamatok és korrelált paraméterek

A bemutatott legkisebb négyzetes becslési eljárásoknál feltételeztük, hogy a sztochasztikus változók egymástól függetlenek, amelyeknek a várható értékeit és bizonyos esetekben a szórásait is előzetesen ismertük, illetve az adatfeldolgozás során azokat megbecsültük.

Vannak azonban olyan sztochasztikus folyamatok is, ahol az időben folyamatosan jelentkező valószínűségi változók között további összefüggések is tapasztalhatók. Ilyen jelenségek a műholdas megfigyeléseknél is előfordulnak, ezért ezeknek az összefüggéseknek a figyelembevételével tovább javíthatjuk a megoldást.

A szakirodalomban a műholdas megfigyelésekre vonatkozóan is több eljárással találkozhatunk. Ebben a fejezetben csak néhány alapvető modellt mutatunk be.

Valamely $x(t)$ sztochasztikus folyamat megfigyelt (mért) értékei

$$\begin{aligned} b(t_1) &= x(t_1) + v_1 \\ b(t_2) &= x(t_2) + v_2 \\ &\vdots \\ b(t_n) &= x(t_n) + v_n \end{aligned}, \quad (3.80)$$

alakban írhatók, ahol t az időt jelöli. Az adatfeldolgozás során el kell távolítanunk a v egyedi mérési hibákat, amit ebben az esetben szűrésnek neveznek.

Ha az $x(t)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye normális eloszlású, akkor *véletlen normális* (vagy Gauss) folyamatról beszélünk.

Két sztochasztikus változó közötti autokorreláció (R_x) és autokovariancia (C_x) az

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= E\langle x(t_1) \cdot x(t_2) \rangle \\ C_x(t_1, t_2) &= E\langle (x(t_1) - \omega(t_1)) \cdot (x(t_2) - \omega(t_2)) \rangle \end{aligned} \quad (3.81)$$

összefüggésekkel adható meg, ahol $\omega(t)$ a várható értékeket jelöli. A két mennyiség nulla várható értékű változók esetében tehát azonos.

Stacionárius folyamatról beszélünk akkor, ha a változók sűrűségfüggvénye (p) független a konkrét időponttól, és az autokorreláció is csak a két időpont különbségének (τ) a függvénye

$$\begin{aligned} p(x(t)) &= p(x(t + \tau)) \\ R_x(\tau) &= E\langle x(t) \cdot x(t + \tau) \rangle \end{aligned} \quad (3.82)$$

A műholdas helymeghatározásnál a sztochasztikus folyamatok egyik speciális esete a ***véletlen konstans folyamat***:

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x(t_{i-1}) = c \\ E\langle c \rangle &= 0 \\ E\langle c^2 \rangle &= \sigma^2 \\ C_x(\tau) &= \sigma^2 \end{aligned} \quad , \quad (3.83)$$

ahol időben állandó, de véletlen paramétert kívánunk meghatározni. A folyamatnak csak a szórását ismerjük.

A ***véletlen bolyongási folyamat*** (más néven Brown mozgás, vagy angolul „random walk”):

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x(t_{i-1}) + c \\ E\langle c \rangle &= 0 \\ E\langle c^2 \rangle &= 2\sigma^2 \\ C_x(\tau) &= \sigma^2 \end{aligned} \quad , \quad (3.84)$$

ahol a változók közötti időbeli kapcsolatot csak az jelenti, hogy a sztochasztikus mennyiségek az időben folyamatosan összegződnek (véletlenszerűen halmozódnak). (Ebből a szempontból az előbbi modellt akár „helybenjárásnak” is nevezhetnénk.)

Az ***első fokú Gauss-Markov folyamat*** (exponenciálisan korrelált, vagy autoregresszív):

$$\begin{aligned} x(t_i) &= e^{-\alpha|\tau|} \cdot x(t_{i-1}) + c \\ E\langle c \rangle &= 0 \\ E\langle c^2 \rangle &= \sigma^2(1 - e^{-2\alpha|\tau|}) \\ C_x(\tau) &= \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \end{aligned} \quad , \quad (3.85)$$

ahol $\tau = t_i - t_{i-1}$ és az $\alpha > 0$ paraméter a korrelációs távolság reciproka. (A korrelációs távolságnál veszi fel az autokovariancia függvény a legnagyobb érték felét.) Spektrális értelemben itt egyetlen összetevővel, az előző modelleknél a teljes spektrummal van dolgunk, ezért a fény analógiájára ezt a változót „színes”, az előzőeket „fehér” zajnak is nevezik. A mérési hibák is fehérzajnak minősülnek.

A műholdas helymeghatározásnál gyakran alkalmazzák a **véletlen lineáris** modellt is („random ramp”), ahol a folyamatot és annak sebességét, mint segédváltozót, nulla várható értékű ismert szórással fehér zajként kezelik:

$$\begin{bmatrix} x(t_i) \\ \dot{x}(t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (t_i - t_{i-1}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t_{i-1}) \\ \dot{x}(t_{i-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ \dot{c} \end{bmatrix}$$

$$E\langle c \rangle = 0$$

$$E\langle \dot{c} \rangle = 0 \quad (3.86)$$

Ezeknek a sztochasztikus folyamatoknak a megfigyelései formálisan a Kálmán szűrés alapegyenleteivel dolgozhatók fel. A (3.83 - 3.86) összefüggések első sorai az állapot átviteli mátrix (**T**) speciális esetei (3.62). A szűrés is a (3.66) összefüggéseknek megfelelően történik, ahol az **A**=1 és a **Q_v** = σ_v^2 mátrixok is lényegesen leegyszerűsödnek. A folyamatok kezdő értékeit nullának kell felvenni.

Ezek a modellek abban különböznek a korábban bemutatott modellektől, hogy itt nem a determinisztikus folyamatot határozzuk meg, amelynek a bizonytalanságát sztochasztikus modellel vetjük figyelembe, hanem maga a folyamat, illetve annak a paraméterei is sztochasztikus mennyiségek.

A GPS mérések idősorának szekvenciális feldolgozásánál például véletlen konstans mennyiségeknek tekinthetjük a fázis-többsértelműségeket. A troposzférikus paraméterek esetében alkalmazhatjuk a véletlen bolyongást, a napállandó változását exponenciálisan korrelált mennyiségnek, az órahibákat, vagy a lassan változó jelenségeket, véletlen lineáris folyamatként is kezelhetjük.

A sztochasztikus folyamatokra vonatkozó ismeretek bővebben a Teunissen (2001) és a Strang és Borre (1997) munkáiban találhatók meg.

A BLE modell szerinti adatfeldolgozásnál is figyelembe vehetünk bizonyos paraméterek közötti korrelációt, ha a paraméterek apriori variancia-kovariancia mátrixát az ismert autokovariancia függvények alapján állítjuk elő.

Az időben (vagy térben) ismert autokovariancia függvények segítségével lehetőség nyílik a legkisebb négyzetes predikció (vagy interpoláció) végrehajtására is, ha a valószínűségi változók egyes ismeretlen értékeit az ismert értékek lineáris kombinációjaként szeretnénk meghatározni úgy, hogy a becslült értékek hibája a legkisebb négyzetes értelemben minimális legyen.

Ha a (3.80) egyenletekben szereplő $x(t)$ sztochasztikus változóknak ismerjük az autokovariancia függvényét, akkor a predikció:

$$\hat{x}_p = C_x(Q_x + Q_v)^{-1}b, \quad (3.87)$$

ahol $\hat{x}_p$ a predikált értékek vektora, **C_x** a predikált és a **b** mérésekben szereplő **x** paraméterek közötti kovarianciák mátrixa, **Q_x** az **x** paraméterek és **Q_v** a **v** mérési hibák variancia-kovariancia mátrixa. A **C_x** és **Q_x** mátrixok elemei az autokovariancia függvények segítségével számíthatók. (Egy ilyen függvényt mutat be az 5.1 fejezet.)

Ha a mérések determinisztikus trendjét a legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel határozzuk meg úgy, hogy a véletlen mérési hibák mellett az **x** paraméterek sztochasztikus tulajdonságait is figyelembe vesszük, és a nem mért paramétereket a (3.87) szerint becsüljük, akkor legkisebb négyzetes kollokációról beszélünk (Moritz 1973, Závoti 1977).

Az autokovariancia függvények és korrelogrammok gyakorlati meghatározásának kérdéseivel ez az anyag nem foglalkozik, a szükséges ismereteket Meskó (1984) tartalmazza.

3.6 A becsült paraméterek statisztikai vizsgálata

A determinisztikus modellnél bemutattuk, hogy az inkonzisztens egyenletrendszerek különböző matematikai feltételek mellett is mindig megoldhatók, anélkül, hogy a paraméterek véletlen jellegű tulajdonságairól bármit is feltételeznénk. A sztochasztikus modelleknél láttuk, hogy bizonyos változók várható értékének és szórásának ismeretében a becsült paraméterek szórása és várható értéke is levezethető anélkül, hogy a véletlen jellegű változók eloszlását is ismernünk kellene. (A legkisebb négyzetek módszere szerint becsült szórásokat a geodéziai szóhasználatban középhibának nevezik.)

A maximális valószínűség elve szerinti becslések (M becslők) alkalmazásával bizonyítható, hogy normális eloszlású valószínűségi változók esetében a Gauss-Markov modell szerinti legkisebb négyzetes becslés szolgáltatja a legkedvezőbb megoldást (Závoti 1999).

Normális eloszlást feltételezve tehát lehetőségünk nyílik a megoldás különböző paramétereinek statisztikai vizsgálatára, azaz a lineáris modell tesztelésére és a kiugró eloszlású mérések kiszűrésére is.

A legkedvezőbb lineáris torzítatlan becslés esetében normális eloszlású és nulla várható értékű mérési javításokat feltételezve a súlyegység a posteriori szórása f szabadságfokú khi-négyzet eloszlást követ

$$\hat{\sigma}_0^2 \approx \chi_f^2 \quad (3.88)$$

A standardizált paraméterek f szabadságfokú student eloszlást követnek

$$\frac{\hat{x}_i}{\sigma_{\hat{x}_i}} \approx t_f \quad (3.89)$$

A standardizált javítások f szabadságfokú tau (τ) eloszlást követnek

$$\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \approx \tau_f \quad (3.90)$$

A standardizáláshoz szükséges szórások négyzetét a becsült variancia-kovariancia mátrixok főátló elemei tartalmazzák.

Mivel a Gauss-Markov modell szerint a becsült javítások is nulla várható értékűek, ezért ezt a tau statisztikai próba segítségével ellenőrizhetjük. Ha

$$\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \geq \tau_{f,p} \quad , \quad (3.91)$$

ahol $\tau_{f,p}$ az f szabadságfokú p valószínűségi szintre vonatkozó elméleti küszöbérték, ami a student eloszlásból a

$$\tau_f = \frac{\sqrt{f} \, t_{n-1}}{\sqrt{f-1+t_{n-1}^2}} \quad (3.92)$$

összefüggéssel számítható (Patterson 1985), ahol n a mérések száma, akkor a becsült javítás kiugró, eltérő eloszlású értéknek tekinthető. Elméletileg mindig csak a legnagyobb eltérést mutató mérést szabad kihagynunk az ismételt kiegyenlítésből.

Ha a méréseink a kiugró értékekkel már nem szennyezettek akkor a ($p = 1-e$) valószínűségi szinten a σ_0 és $\hat{\sigma}_0$ mennyiségek azonossága a

$$\chi_{f,1-e/2}^2 \leq f \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{f,e/2}^2 \quad (3.93)$$

kétoldali khi-négyzet teszt segítségével ellenőrizhető.

A geodéziai gyakorlatban a statisztikai vizsgálatokat általában a $p=0.95$ valószínűségi szinten hajtják végre. A GPS mérések esetében a szabadságfok a több tízezres nagyságrendet is elérheti, ezért a tau eloszlás a normális eloszlással helyettesíthető. Ekkor a $p=0.95$ szinten a küszöbérték 1.96, amely nagyon szigorú érték. A (3.90) összefüggés a nagy mérés szám miatt a

$$\frac{\hat{v}_i}{\sigma_{\hat{v}_i}} \approx \frac{\sigma_0}{\hat{\sigma}_0} \frac{\hat{v}_i}{\sigma_i \sqrt{f/n}} \quad (3.94)$$

közelítő megoldással is becsülhető (Leick 1995).

Mivel az egyes műholdakra vonatkozó GPS mérések időben lejátszódó folyamatnak is tekinthetők, ezért a mérési javítások normális eloszlása mellett azok időbeli korrelációja is vizsgálható. A becsült paraméterek közti korreláció a

$$C_{\hat{x}_{ij}} = \frac{M_{\hat{x}_{ij}}}{\sigma_{\hat{x}_i} \sigma_{\hat{x}_j}} \quad (3.95)$$

összefüggéssel számítható. Az egyes paraméterek közötti nagy korreláció azt jelzi, hogy a determinisztikus modellben ezek a paraméterek egymástól csak kevésbé függetlenek, azaz a becslés során nehéz őket szétválasztani.

A determinisztikus és a sztochasztikus modell elméletileg csak akkor elfogadható, ha a javítások kiugró értékektől mentesek, összhangban vannak az előzetes sztochasztikus modellel, normális eloszlásúak és időben nem korreláltak, azaz csak fehér zajt tartalmaznak. Ellenkező esetben a modelleket meg kell változtatni, illetve gyakorlati szempontból még elfogadható megoldást kell keresni.

Az itt bemutatott statisztikák a BLE becslések esetében elméletileg nem tekinthetők korrektnek. A több tízezres nagyságrendet is elérő szabadság fok miatt azonban a GPS feldolgozó programok is gyakran csak közelítő módszereket alkalmaznak kevésbé szigorú küszöb értékekkel.

3.7 A GPS antennák fáziscentruma

A korábbi részek már utaltak rá, hogy a fázismérések szélsőpontosságú feldolgozásánál fáziscentrum modelleket is alkalmazni kell. Az elektronikus fáziscentrum az a geometriai pont, amelyre a konkrét méréseket geometriai értelemben vonatkoztatni kell. Az antenna fizikailag kijelölhető, mechanikus fázisközpontja nem azonos az elektronikus fáziscentrummal, amely a frekvencia és az irány függvényében folyamatosan változik.

A méréseket a műholdak fedélzeti adóantennáinak és a földi vevőberendezések vevőantennáinak fáziscentrum külpontosságai is terhelik. A műholdak koordináta-rendszerének kezdőpontja a műholdak tömegközéppontja. Ebben a rendszerben adják meg a fáziscentrum névleges átlagos helyzetét. A pályára állítás és a forgatási mechanizmus (2.4 fejezet) tájékozási hibái miatt ezek az adatok azonban csak előzetes értéknek tekinthetők. Az effektív külpontosságokat csak közvetett GPS mérések segítségével lehet megbecsülni. (Ezzel ez a dolgozatban nem foglalkozik.) Az újabb IIR műholdaknál az x és y névleges külpontosság 0.0 m a z irányú effektív külpontosságok 0.5-1.2 m között változnak.

Kezdetben a külpontosságra nem fektettek nagy hangsúlyt, mivel a kettőskülönbségek nagymértékben ezeket a hibákat is kiejtik. A fedélzeti efemeridák gyakorlatilag az átlagos fázishelyzetre, a precíz efemeridák viszont a műholdak tömegközéppontjára vonatkoznak, ezért a szélsőpontosságú alkalmazásoknál műhold-antennamodellekre is szükség van. Ilyen feladat például a LEO (Low Earth Orbiter) műholdak pályájának GPS mérésekkel történő meghatározása. Az adóantenna jellemzői a földi vevőantennákhoz hasonlóan vizsgálhatók (Mader és Czopek 2002), de itt a tömegközéppont helyzetét is meg kell határozni.

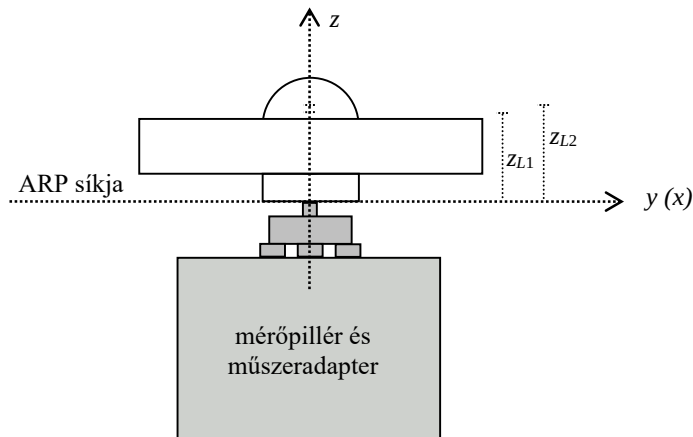
Az IGS definíciója szerint a földön használt vevőantennáknak azt a valós, vagy képzeletbeli síkját, amely a geodéziai alapponthoz (vagy a műszeradapterhez) közvetlenül kapcsolódik, referencia

síknak nevezik. Az antenna koordináta-rendszerének z tengelye, amely egyúttal az antenna szimmetria tengelye is, merőleges a referencia síkra és átmegy az antenna csatlakoztatási pontján. Ezt a pontot antenna referencia pontnak ARP (Antenna Reference Point) nevezik. A z tengelyt a mérések előtt a helyi függőlegeshez kell tájékoztatni, amely így zenit irányba mutat. Az antennán egy egyértelmű jelölés, vagy maga az antennakábel csatlakozójának az iránya jelöli ki az ARP síkjában az antenna koordináta-rendszerének x kezdő irányát, amit a szabatos méréseknél általában északi irányba kell forgatni. Az y tengely ekkor keleti irányba mutat (3.1 ábra).

Ebben a koordináta-rendszerében adják meg az átlagos (elektronikus) fáziscentrum helyzetet, amelyhez PCV (Phase Center Variation) fáziscentrum változásokat is rendelnek. A PCV értékeket a zenitszög (vagy magassági szög) és esetenként az azimut függvényében ötfokosként adják meg. Az adott zenitszöghöz (és azimuthoz) tartozó fázisméréseket ezekkel az értékekkel kell korrigálni. Az antennafájlok tartalmát és formátumát az IGS szintén rögzítette, és az egyes antenna típusokhoz tartozó modelleket is megadta.

A gyártók ugyan törekednek stabil és kis változású, azimut-szimmetrikus antennák gyártására, de az antennák vizsgálata, és a pontos antennamodellek alkalmazása továbbra is nagyon fontos tényező. Az ionoszférikus és troposzférikus hatások szintén magasság és azimut függő viselkedést mutatnak, ezért a különböző hatások szétválasztására nagy gondot kell fordítani.

A szakirodalomban a fedélzeti és a földi antennák esetében is abszolút és relatív antennamodelleket különböztetnek meg. Az antennák vizsgálata történhet visszhangmentes vizsgáló csarnokban („süketszobában”), vagy valós mérési körülmények között is (Schupler és Clark 1991, Akrou et al. 2005).



3.1 ábra. Az antenna koordináta-rendszere és tájékozása, valamint az AOA Dorne Margolin T referenciaantenna vázlata.

A visszhangmentes vizsgáló csarnokban az antennát egy olyan adatperen helyezik el, ahol az antenna a tengelye körül adott szögértékekkel elforgatható és meg is dönthető. A csarnokban az elnyelő anyagok kellő mértékben csökkentik a többutas terjedést, ezért a GPS jeladóból származó jel erőssége és fázisa, illetve a jeladó és az aktuális fáziscentrum távolsága megmérhető. Az antennák forgatását és döntését, valamint a méréseket számítógép vezérli.

Ha a fáziscentrum egyetlen pont lenne, amely azonos a forgatási és döntési középponttal, a mért r_i távolságok a hibahatáron belül azonosak lennének és az

$$\begin{aligned} x_i &= r_i \sin \zeta_i \cdot \cos \alpha_i \\ y_i &= r_i \sin \zeta_i \cdot \sin \alpha_i \\ z_i &= r_i \cos \zeta_i \end{aligned} \quad (3.96)$$

koordináták egy ideális félgömböt írnának le, ahol ζ_i és α_i az adott forgatáshoz és döntéshez tartozó zenitszög és azimut, x_i a helyi rendszerre vonatkozó északi, y_i a keleti és z_i a magassági

koordináta. Mivel a forgatási és döntési középpont nem azonos az átlagos fáziscentrum helyzettel, az adatfeldolgozás az

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 - r^2 = 0 \quad (3.97)$$

gömb illesztésével történik, ahol x, y, z az átlagos fáziscentrum helyzete és r a legjobban illeszkedő gömb sugara. A (3.97) egyenlet sorba fejtésénél a (3.96) koordinátákhoz, mint közvetett mérésekhez, mérési javításokat rendelnek, és a négy ismeretlent legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel határozzák meg. Az ismeretlenek előzetes értékeként a névleges, vagy mechanikai fáziscentrum helyzetet továbbá az antenna és GPS jeladó távolságát célszerű felvenni. A forgatási és mérési hibák mellett a becslött mérési javítások ($\Delta r_i(\zeta_i, \alpha_i)$) tartalmazzák az aktuális zenitszöghöz és azimutához tartozó PCV fáziscentrum értékeket is.

Ezzel a módszerrel alapvetően abszolút antennamodelleket lehet meghatározni. A relatív modellek ekkor különbségképzéssel határozhatók meg.

A relatív antennamodellek terepi körülmények között is viszonylag egyszerűen meghatározhatók. Az IGS az AOA Dorne Margolin T „choke-ring” (gyűrűs) antennát választotta referenciátípusnak. A referenciátípust $x = y = 0$, $z_{L1} = 0.1100\text{m}$ és $z_{L2} = 0.1280\text{m}$ átlagos fáziscentrum helyzetével, továbbá az irányfüggő eltéréseket ($\Delta r_i(\zeta_i, \alpha_i) = 0$) értékként definiálták (3.1 ábra).

A módszer lényegét a következőképpen foglalhatjuk össze. Egy referencia és egy vizsgálandó antennát helyezünk el egymáshoz közel, egy ismert bázisvonal végpontjain. A bázisvonal ismert komponenseit szabatos geodéziai módszerekkel, vagy referenciaantennák alkalmazásával GPS mérésekkel is meghatározhatjuk. Ekkor az antennák közelsége miatt feltételezhetjük, hogy az atmoszférikus hatások azonosak és az egyes műholdakra vonatkozó egyidejű mérések azimutjai és zenitszögei néhány ívmásodpercen belül azonosnak tekinthetők. A méréseket célszerű többutas jelterjedéstől mentes körülmények között végrehajtani.

Az egynapos GPS mérésből meghatározott bázisvonal komponenseknek az ismert értékekhez viszonyított különbségei adják a relatív átlagos fáziscentrum helyzetet, amely az opcionális magassági szög alsó értékének is a függvénye. A becslött értékek figyelembevételével korrigált, azonos műholdra, de különböző antennára vonatkozó egyszeres különbségek a mérési hibák mellett tartalmazzák a fázis-többértelműséget, a vevők közötti órahibát és az aktuális zenitszöghöz és azimutához tartozó relatív fáziscentrum-eltéréseket is ($\Delta r_i(\zeta_i, \alpha_i)$). Ha a vevőkhöz azonos, nagypontosságú külső atomórát is csatlakoztatnak, akkor az órahibák nagymértékben csökkenthetők.

Ha a méréseket másnap azonos műhold-konfiguráció alatt (azonos csillagidőben) megismétlik úgy, hogy mind a két antenna x tengelyét most déli irányba tájolják, a kétnapos mérések sokkal jobb antenna lefedést biztosítanak. A GPS mérésből levezethető bázisvonal-komponenseket ekkor természetesen a kétnapos meghatározás átlaga jelenti. (A második napon a horizontális bázisvonal komponensek különbségei ellentétes előjellel jelentkeznek.)

Az abszolút antennamodellek terepi körülmények közötti meghatározásának alapelvét Wübbena et al. (1996) mutatja be. Az előző módszernek megfelelően egy rövid bázisvonal két végpontján helyezünk el egy referencia és egy vizsgálandó antennát. Ha az egynapos mérést másnap azonos műhold-konfiguráció alatt (azonos csillagidőben) megismételnék, és olyan kettős különbségeket állítanának elő, ahol a két műhold szerepét most ugyan annak a holdnak két eltérő napra, de azonos csillagidőre vonatkozó fázisméréseiből állítanák elő, akkor a geometriai tag és a műhold órahibái is kiesnének, továbbá az atmoszférikus hatások és a vevők órahibái is nagymértékben csökkennének. Ezek a kombinációk lényegében csak fázis-többértelműséget és mérési hibákat tartalmaznának. A kombinációnak azonban az a legnagyobb gyakorlati előnye, hogy a csillagidőben ismétlődő többutas jelterjedésből származó hibák is nagymértékben kiesnének. (A műhold két különböző napra, de azonos csillagidőre vonatkozó irányvektorai csak néhány ívmásodperces eltérést mutatnak.)

Ha a méréseket másnap azonban úgy ismétljük meg, hogy a vizsgálandó antennát a süketszobához hasonlóan forgatjuk és döntjük, akkor a kettős különbségek a vizsgált antenna két eltérő helyzetére vonatkozó radiális fázis-külpontosságok különbségét is tartalmazza. Az azonos külpontossági értéket az órahibák nyelik el. Ha a relatív adatfeldolgozást különbségképzés nélkül végezzük el, és

az órahibákat is megfelelően modellezzük, akkor az átlagos fáziscentrum helyzet és az irányfüggő eltérések is meghatározhatók. Annak ellenére, hogy itt is egy (tetszőleges) referenciavévre van szükség az eljárás abszolútnak tekinthető, mivel a referencia berendezést csak a szabályos jellegű hibák kezelésére használják. A módszer elméletileg nem igényli a bázisvonal pontos ismeretét sem.

A módszer legújabb gyakorlati változatánál már két különböző napra vonatkozó mérésre sincs szükség, ugyanis a többutas terjedést az időben közeli, de eltérő antenna helyzetre vonatkozó kettős különbségek is megfelelően kiejtik. A műhold-konfigurációnak megfelelően az antennát egy robotkaron programvezérléssel automatikusan döntik és forgatják. A forgatásból és döntésből származó antenna külpontosságot korrekcióként mindig figyelembe kell venni. Mivel ezzel a módszerrel az antenna egész tartománya nagyon jól és viszonylag gyorsan lefedhető már egész napos mérésre sincs szükség.

A bemutatott módszereknél a fáziskülpontosságok meghatározásához egyedi programrendszereket fejlesztettek ki. A vizsgáló csarnokból, vagy terepi mérésekből származó abszolút, vagy relatív fáziscentrum eltérésekhez többnyire legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel gömbfüggvény sort illesztnek:

$$\Delta r_i(\zeta_i, \alpha_i) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} \sum_{m=0}^n \tilde{P}_{n,m}(\cos \zeta_i) \cdot (\tilde{A}_{n,m} \cos(m \cdot \alpha_i) + \tilde{B}_{n,m} \sin(m \cdot \alpha_i)), \quad (3.98)$$

ahol $\tilde{P}_{n,m}(\cos \zeta_i)$ normalizált, asszociált Legendre függvény és az $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ konstansok az ismeretlen paraméterek. Ezzel az illesztéssel a véletlen jellegű hibák és a nagyfrekvenciás, többutas terjedésből származó hibák is részben kiszűrhetők, és a külpontosságok tetszőleges irányban is meghatározhatók. A gömbfüggvény sort általában 10-15 fokig és rendig veszik figyelembe. Az azimut szimmetrikus modelleknél csak zenit-, vagy magassági szögtől függő polinomokat illesztnek.

A relatív módszernél az időpontenkénti órahibát és a zenitirányú PCV értéket gyakorlatilag nem lehet szétválasztani, ezért ezt az antennamodelleknél nulla értéknek választották. Ez a hiba azonban a kettős különbségek esetében egyébként is kiesik, és a mérések az átlagos fáziscentrum helyzetre vonatkoznak.

A legköltségesebb módszert nyilvánvalóan a visszhangmentes csarnokban történő vizsgálat jelenti, amely világviszonylatban is csak néhány helyen végezhető el. A módszer speciális GPS jeladót használ és a csarnok sem tekinthető tökéletesen visszhangmentesnek.

A terepen történő abszolút kalibráció annyiban tekinthető olcsóbbnak, hogy itt nincs szükség egy speciális csarnok építésére. Mivel a módszer a többutas terjedésből származó hibákat kellő mértékben kiküszöböli, ezért a meghatározás elvileg bárhol elvégezhető. A módszer valódi GPS jeleket használ, és elméletileg a vizsgálatban használt bázisvonalat sem kell nagy pontossággal ismerni. A feldolgozáshoz viszont bonyolult procedúrára és adatfeldolgozó programra van szükség. Ezt az eljárást jelenleg csak a német GEO++ GmbH (<http://www.geopp.de>) alkalmazza.

A legegyszerűbb és legolcsóbb eljárás a terepen történő relatív kalibráció, amely nem igényel különleges segédeszközöket. A legnagyobb hibája, hogy nagyon érzékeny a többutas terjedésre, ezért csak ideális mérési körülmények között célszerű alkalmazni. A kedvezőtlen külső körülmények aszimmetrikus, azimutfüggő modelleket eredményezhetnek.

Annak ellenére, hogy a bemutatott módszerek lényegesen eltérnek egymástól, a levezetett modellek eltérései többnyire 2 mm alatt maradnak. A szabályos eltérésekből adódó hibák relatív értelemben azonban kiesnek, ha mindig azonos módszerből származó modelleket alkalmaznak.

A relatív antennamodellek nagyon hosszú bázisvonalak esetében már nem alkalmazhatók, ezért a közeljövőben a nagyobb nemzetközi hálózatoknál az abszolút és egyedi antennamodellek kerülnek az előtérbe. Ezek a bemutatott abszolút módszerekkel, vagy a referenciaantennák abszolút modelljével és relatív mérések kombinációjával állítható elő.

Az intézetünkben kidolgozott egyszerű vizsgálati és mérési módszert az 5.4 fejezet ismerteti.

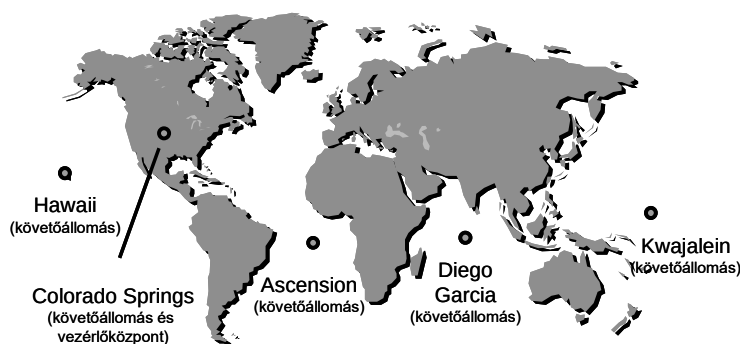
4

A műholdas helymeghatározás földtudományi szerepe

4.1 Geodézia

A GPS rendszert alapvetően katonai navigációs célra fejlesztették ki, ahol két pontossági kategóriát határoztak meg: a C/A kód mérésen és a jóval pontosabb P kód mérésen alapuló helymeghatározást. A C/A kódot a polgári felhasználók részére is elérhetővé tették, és a műszerfejlesztésekbe polgári cégek is bekapcsolódhattak.

A geodéziai alapokat a katonai célra kifejlesztett WGS-84 nevű geocentrikus földi vonatkoztatási rendszer jelenti, amely tartalmazza a Föld geometriai és fizikai paramétereit. Az eredeti katonai rendszerfenntartó monitoring hálózat öt követőállomásból áll (4.1 ábra), ahol Colorado Springs a vezérlőközpont szerepét is betölti.



4.1 ábra. A követő állomások hálózata.

A követőállomások P(W) kódú méréseit és a mért meteorológiai adatokat a vezérlőközpontban dolgozzák fel. A méréseket földforgási, relativisztikus, ionoszférikus és troposzférikus korrekciókkal látják el. Az adatfeldolgozás fázisméréssel simított kód mérésen alapszik.

A fedélzeti efemeridák előállítását két lépésben történik (Seeber 2003). Az első lépésben több napos megfigyeléseket dolgoznak fel egy bonyolult numerikus pályaintegrál segítségével, amit referencia pályának tekintenek. A második lépésben az aktuális mérések és a referencia pálya el-lentmondásait Kálmán szűrővel javítják. Az állapotvektor a következő paramétereket tartalmazza:

- időpontként a műholdak helyzetvektora
- időpontként a műholdak sebesség vektora
- műholdanként három óraparaméter
- műholdanként a napállandóhoz tartozó paraméterek
- megfigyelőállomásonként két óraparaméter
- megfigyelőállomásonként egy troposzférikus méretarány tényező

A javított referencia pálya segítségével vezetnek le az előre jelzett fedélzeti pályaadatokat. Megbízhatóságuk 1-3 m értékkel jellemezhető.

A nemzetközi polgári és tudományos közösség számára részben nyitottá tett rendszer a mérés-technika, az adatfeldolgozás és az alkalmazások területén is nagyon nagy – a honvédelem által nem várt – fejlődésen ment keresztül. A fázismérések és a különbségképzésen alapuló relatív helymeghatározás nagy pontosságát az SA (Selective Availability) „szelektív hozzáféréssel” sem tudták csökkenteni, amely az órahibák és elvileg a pályaadatok pontosságának a csökkentését jelentette. Ezt a degradációt 2000. május elsején fel is függesztették.

Az általános geodéziai alkalmazás, amely általában 1-5 cm pontosságot igényel, többnyire a völkkel együtt árusított kereskedelmi szoftverekkel történik.

Kezdetben a fázistávolságok kettőskülönbségein alapuló statikus mérést és relatív helymeghatározást alkalmazták, ahol a mozdulatlan vevők több órás (esetleg több napos) méréseit független vektorokként dolgozták fel, majd a geodéziai hálózatot a fölös vektorok kiegyenlítésével határozták meg.

A következő programgeneráció már több vevő méréseinek szabatos együttes kiegyenlítését is lehetővé tette. Az n számú vevő egyidejű méréseiből $(n-1)$ számú lineárisan független vektort lehet egy lépésben meghatározni. A radiális módszernél a bázisállomást a vevők súlypontjához közeli pontban célszerű megválasztani, hogy a nagyon hosszú vektorok elkerülhetők legyenek. A váltakozó bázis állomásoknál azt az optimális stratégiát követik, hogy az $(n-1)$ számú egymáshoz kapcsolódó vektorok hossza minimális legyen. A teljes hálózat meghatározása itt is utólagos vektorkiegyenlítéssel történik. Az MTA GGKI vektorkiegyenlítésre és hibaelemzésre kifejlesztett szabatos kiegyenlítési módszerét az 5.3 fejezet mutatja be.

A geodéziailag fejlett országokban kezdetben GPS hálózatokat létesítettek, hogy a relatív GPS mérésekhez szükséges alappontok elegendő számban álljanak a rendelkezésre. Magyarországon a FÖMI KGO irányításával 1154 pontos OGPSH hálózatot hoztak létre 10 km átlagos pontsűrűséggel (Borza 1998). A fejlődés következő lépését a permanens állomáshálózat jelentette. A szolgáltatótól utólag megvásárolható mérések elősegítették a felhasználók vevőinek gazdaságosabb kihasználását (Kenyeres 1998).

A GPS alapponthálózatok léte, a műszerek és a szoftverek területén – különösen a fázistöbbértelműségek gyors meghatározásában – bekövetkező jelentős fejlődés lehetővé tette a mérési idő drasztikus csökkentését (3-20 perc), amit gyors statikus mérésnek neveznek.

A mozgó járműveken elhelyezett vevők mérési időpontonként történő geodéziai pontosságú meghatározása, amit folyamatos kinematikus mérésnek neveznek, már kezdetben is nagy kihívást jelentett. Korábban több statikus inicializálási módszert is kidolgoztak a fázistöbbértelműségek feloldására, amit a mozgó szakaszban ismert értéként kezeltek. A nagy áttörést itt is a fázistöbbértelműségek gyors meghatározása jelentette. A legkorszerűbb módszereknél statikus inicializálásra már nincs is szükség. A felmérendő pontokon néhány másodpercig megállnak, hogy ezzel is növeljék a pontosságot, ekkor félkinematikus (Stop&Go) mérésről beszélünk.

Az adatfeldolgozás fejlődése felvetette annak az igényét is, hogy a relatív helymeghatározás eredménye a hagyományos geodéziai mérőállomásokhoz hasonlóan már valós időben a felhasználó rendelkezésére álljon. A műszerek közötti URH, GSM, vagy újabban az internetes GPRS kapcsolat lehetővé teszi a valós idejű adatfeldolgozást a mozgó vevő szoftverében is. Ezt a módszert RTK (Real Time Kinematic), vagy valós idejű kinematikus mérésnek is nevezik. Az adatfeldolgozásnál a Kálmán szűrési módszerét is egyre gyakrabban alkalmazzák.

Kezdetben a felhasználók maguk létesítettek bázisállomásokat. A permanens állomásokon RTK bázis vevők elhelyezésével aktív GPS állomásokat hoztak létre, amelyek hosszabb távon a hagyományos országos geodéziai alpponthálózatokat is felválthatják (Borza 2000).

Magyarországon a FÖMI KGO kezdeményezte az aktív GPS hálózat kialakítását (Horváth 2005). A 4.2 ábra a 2006. év végi állapotot mutatja. A hálózat az állami földmérés és külső partnerek által üzemeltetett állomásokból épül fel. A rendszer szolgáltatásai (www.GNSSnet.hu) Internet segítségével érhetők el. Az MTA GGKI az SPRN nevű állomást üzemelteti.

Mivel az állami alaptérképek és a földnyilvántartás a helyi ellipszoidhoz kapcsolódó EOV vetületi rendszert, és a balti magassági rendszert alkalmazza, ezért a hagyományos és a GPS hálózatok közötti transzformációt is biztosítani kell. A geoid (tengerszint) feletti magasságok GPS mérésekkel történő meghatározása a magyarországi geoid felület pontos ismeretét is igényli, amely szorosan kapcsolódik a transzformáció feladatához is. A transzformációk és a geoidundulációk együttes meghatározására az 5.5 fejezet mutat be egy új megoldást.

A szélső pontosságú (1-5 mm) geodéziai hálózatokat, az alkalmazási területüknek megfelelően, a következő geodinamika fejezetben mutatjuk be, amely tudományos igényű szoftvereket használ. A tudományos szoftverek fejlesztési eredményeit és szolgáltatásait (pl. a precíz pályaadatok) a kereskedelmi szoftverek is folyamatosan adoptálják.



4.2 ábra. Aktív GPS hálózat Magyarországon (2006).

4.2 Geodinamika

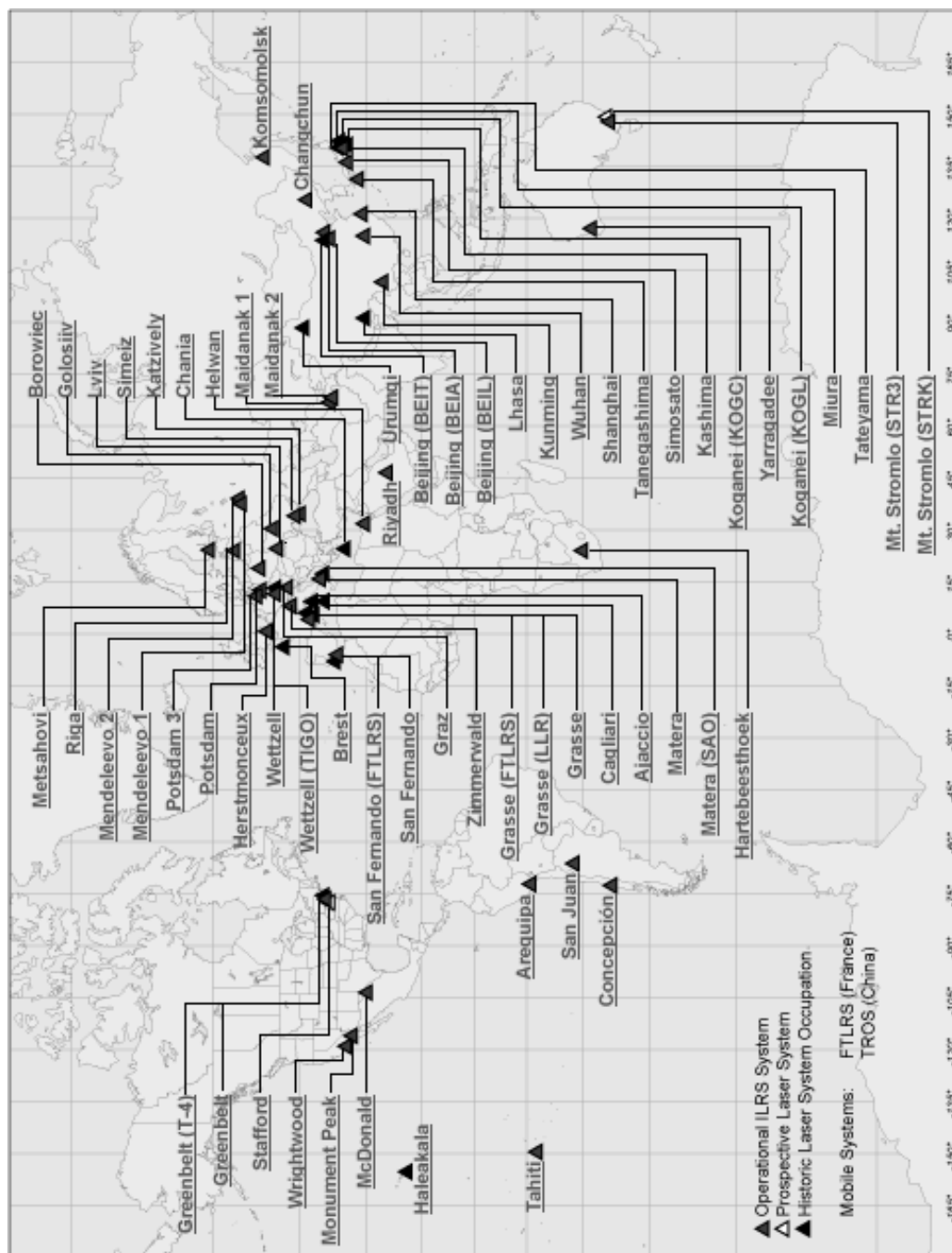
A geodinamika az általános definíciója szerint a Föld fizikai és geometriai paramétereinek az időbeli változását vizsgáló tudományág. A vizsgálatok területi kiterjedésének megfelelően beszélhetünk globális, regionális és helyi jelenségekről. A GPS mérésekhez kapcsolódó globális geodinamikai jelenségeket a 2.3 és 2.4 fejezetben már bemutattuk.

Az ICRS rendszert és az ICRF kerethálózatot VLBI (Very Long Base Interferometry) mérések segítségével tartják fenn, amely a kvázi-inerciális konvencionális rendszer tengelyeinek az irányát definiálja. Nagy pontossággal meghatározzák a Föld forgási paramétereinek az abszolút értékeit (γ_p , x_p és $\Delta UT1$) és a rádióteleszkópok közötti távolságok változásait. A méréseket a nemzetközi IVS (International VLBI Service for Geodesy and Astrometry) szolgálat koordinálja. Az állomáshálózatot a 4.3 ábra mutatja be. Ez a technika azonban érzéketlen a koordináta-rendszer kezdőpontjának a helyzetére.

A földi megfigyelőhelyek geocentrális helyzetét legpontosabban a Föld felszínétől távol keringő mesterséges holdak, és maga a Hold nagy pontosságú lézeres távolságmérésével lehet meghatározni, amely az ITRS rendszer és az ITRF kerethálózat fenntartásában játszik jelentős szerepet. A méréseket a nemzetközi lézeres megfigyelő szolgálat az ILRS (International Laser Ranging Service) koordinálja. Az állomáshálózatot a 4.4 ábra szemlélteti.

Mivel a lézeres megfigyelések csak a földforgási paraméterek változására érzékenyek, ezért ez a két rendszer (az ICRS és az ITRS) szorosan kapcsolódik egymáshoz. A rendszerek gyakorlati fenntartásához tehát olyan megfigyelő helyekre is szükségünk van, ahol ez a két különböző technológia együttesen (kollokáltan) áll a rendelkezésre.

A GPS állomások nagy sűrűsége és a mérések időbeli nagy felbontása is jól kiegészíti ezt a két nagyon költséges technikát. A viszonylag olcsó berendezésekkel gyakorlatilag folyamatosan juthatunk olyan adatokhoz, amellyel a VLBI technikához hasonlóan nagy pontossággal meghatározhatjuk az állomások relatív helyzetének a változását. Mivel a GPS mérések is érzékenyek a Föld forgási paramétereinek időbeli változására, ezért a GPS mérések is hozzájárulnak ezeknek a paramétereknek a folyamatos meghatározásához.

4.4 ábra. Lézeres állomáshálózat (<http://ilrs.gsfc.nasa.gov/>)

A GPS technológia alkalmazhatóságát bizonyító kísérleti mérési kampányokat követően 1994-ben hozták létre az IGS (International GPS Service for Geodynamics), geodinamikai célú nemzetközi GPS szolgálatot, amely koordinálta a folyamatos megfigyeléseket és azok geodinamikai célú feldolgozását. A jelenkori kihívásoknak megfelelően az „IGS” mozaikszó megtartása mellett az elnevezés és a tartalom is folyamatosan változott. Először nemzetközi GPS szolgálatra rövidült (International GPS Service), majd az orosz GLONASSZ és az EU Galileo programját is figyelembe véve nemzetközi GNSS szolgálatra változott (International Global Navigation Satellite System (GNSS) Service).

Tevékenységi köre a geodinamikai jelenségek megfigyelése mellett az általános értelemben vett földtudományok és egyéb polgári, geodéziai és navigációs felhasználók igényeinek a széleskörű támogatását is feladatának tekinti.

Az IGS a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG – International Association of Geodesy) szolgálatként tagja a Csillagászati és Geofizikai Adatelemző Szolgálatok Szövetségének is (FAGS - Federation of Astronomical and Geophysical Data Analysis Services), és szorosan együttműködik a Nemzetközi Földforgás és Referencia Rendszerek Szolgálatával (IERS - International Earth Rotation and Reference Systems Service, <http://www.iers.org/>).

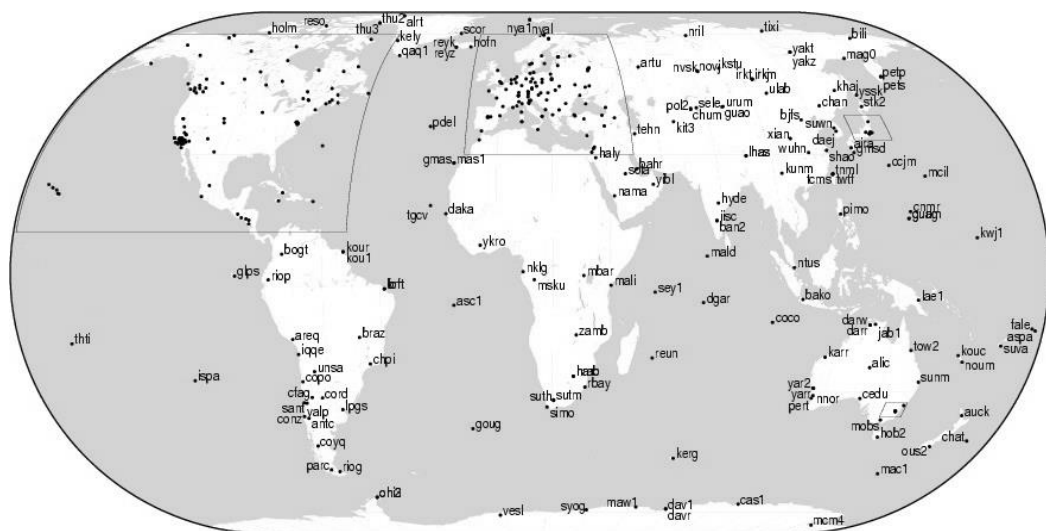
Az IERS szervesen együttműködik az IVC, ISLR, IGS és IDS szolgálatokkal, mint külső technológiai központokkal. A franciák által létrehozott IDS szolgálat (International DORIS Service, <http://ids.cls.fr/>) is jelentősen hozzájárul a rendszerek fenntartásához. Bizonyos szempontból ugyan nagyon hasonlít a GPS rendszerhez, de céljaiban nem felel meg az GNSS általános definíciójának.

A globális geodinamikai alkalmazások az IGS tevékenységén keresztül kerülnek bemutatásra. Az ionoszférikus és troposzférikus vizsgálatokkal kapcsolatos ismereteket külön fejezetek tárgyalják. Az IGS állomáshálózatot a 4.5 és 4.6, a kapcsolódó európai hálózatot a 4.7 ábrák szemléltetik. Az IGS a kapcsolódó hálózatokkal együtt több, mint 400 állomás közvetett üzemeltetésében vesz részt a szervezet által szolgáltatott adatok segítségével. A szigorú előírásokat teljesítő IGS besorolású állomások (4.5 és 4.6 ábra) az adatfeldolgozás során fontos szerepet töltenek be.

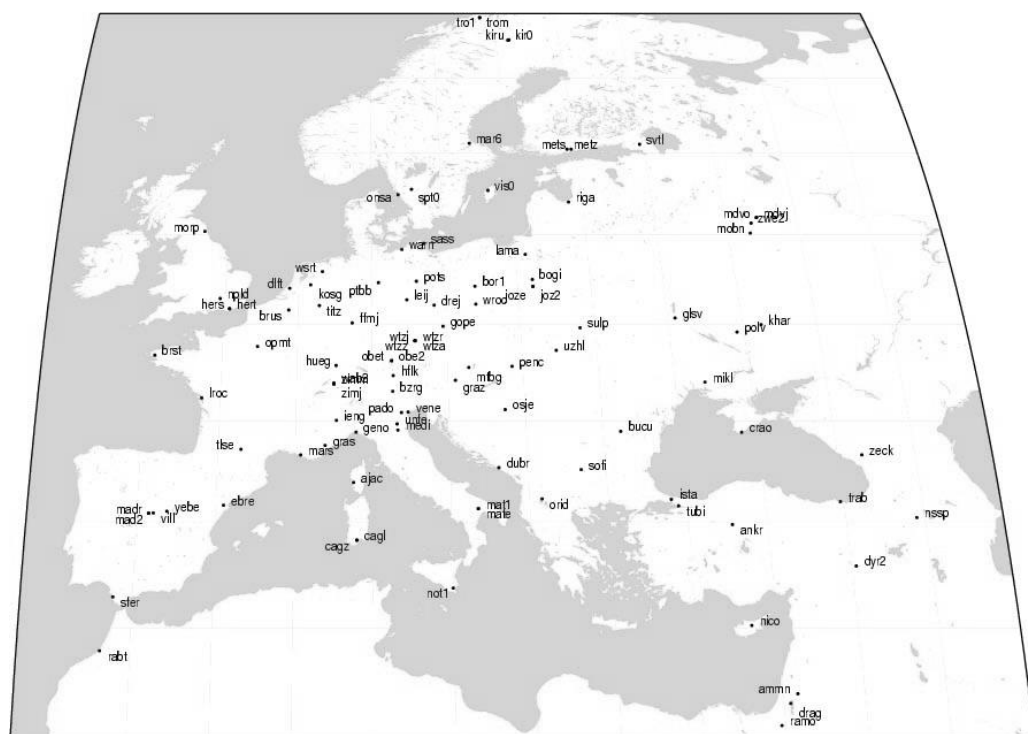
Az európai kontinens az EUREF albizottság (IAG Reference Frame Sub-Commission for Europe) EPN (EUREF Permanent Network) permanens állomáshálózatával vesz részt a szervezet tevékenységében (4.7 ábra), amely csak részben azonos az IGS európai regionális hálózatával. Az EPN fő feladata az európai geodéziai alapok fenntartása és egységesítése.

Az IGS által feldolgozandó mérések különböző helyi adatközpontokba kerülnek. Az IGS állomások adatait ezek a helyi adatközpontok továbbítják a regionális adatközpontokba. A hálózatokban nem szereplő egyedi állomások közvetlenül a regionális adatközpontba továbbítják az adatokat. A mérési adatokat vevőfüggetlen RINEX (Receiver Independent Exchange Format) formátumban tárolják 30 s adatsűrűséggel. A nyers mérési adatokat minimálisan naponta, újabbán óránkénti csomagokban kell elküldeni az adatközpontokba. Az adatfeldolgozás az IGS adatelemző központjaiban történik (jelenleg 10 db központ működik). Az adatfeldolgozási régiókat úgy határozzák meg, hogy a szomszédos régiók legalább egy közös állomást (kapcsoló pontot) is tartalmazzanak, amely lehetővé teszi az eredmények globális összekapcsolását. Az adatelemző központok részben a kettős különbségeken alapuló programokat (Bernese, GAMIT, Page5) részben a különbségképzés nélküli (GIPSY-OASIS) programot alkalmazzák. A programok eredményei közötti szabályos eltéréseket hétparaméteres hasonlósági transzformációval szüntetik meg.

Mindegyik eljárás tartalmazza a 2.4 és a 3.4 fejezetekben bemutatott szabatos pályaintegrált és a földforgási paraméterek meghatározását is. A legkisebb négyzetes becslés általában a BLE modell szerint történik, ahol az állomások ismert koordinátáit néhány mm előzetes pontossággal veszik figyelembe. Ez a megoldás bizonyos mértékig lehetővé teszi az egyéb paraméterek becslése mellett a pontthalmaz alakjában és méretében bekövetkező, tektonikai okokra visszavezethető differenciális kicsiny deformációk meghatározását is. Az egynapos mérések feldolgozásából származó aktuális állomáskoordinátákat és azok variancia kovariancia mátrixát SINEX (Software Independent Exchange Format) formátumban tárolják. A különböző régiókra vonatkozó eredményekből kombinált megoldást állítanak elő, amit a kapcsolópontok és a részben átfedő pályáívek és a földforgás paraméterek tesznek lehetővé.



4.5 ábra. IGS állomáshálózat (<http://igsb.jpl.nasa.gov/>)



4.6 ábra. IGS állomáshálózat európai régiója (<http://igsb.jpl.nasa.gov/>)

4.1 táblázat. Az IGS pálya-, állomás- és földforgás adatainak jellemzői.

IGS „termékek”		Megbízhatóság	Látencia	Aktualizálás	Mintasűrűség
Műhold efemeridák és órahibák					
Fedélzeti	pálya óra	~160 cm ~7 ns	valós idejű	-	napos
Ultra-gyors (predikált)	pálya óra	~10 cm ~5 ns	valós idejű	naponta négyyszer	15 perc
Ultra-gyors (megfigyelt)	pálya óra	<5 cm ~0.2 ns	3 óra	naponta négyyszer	15 perc
Gyors	pálya óra*	<5 cm ~0.1 ns	17 óra	naponta	15 perc 5 perc
Végleges	pálya óra*	<5 cm 0.1 ns	~13 nap	hetente	15 perc 5 perc
IGS állomáskoordináták (>130 állomás)					
helyzet- vektor	horizontális vertikális	3 mm 6 mm	12 nap	hetente	hetente
sebesség- vektor	horizontális vertikális	2 mm/év 3 mm/év	12 nap	hetente	hetente
Földforgás paraméterek					
Ultra-gyors (predikált)	y_P, x_P $\delta y_P, \delta x_P$ LOD	0.0003" 0.0005"/nap 0.06 ms	valós idejű	naponta négyyszer	00,06,12,18 óra (világidő)
Ultra-gyors (megfigyelt)	y_P, x_P $\delta y_P, \delta x_P$ LOD	0.0001" 0.0003"/nap 0.03 ms	3 óra	naponta négyyszer	00,06,12,18 óra (világidő)
Gyors	y_P, x_P $\delta y_P, \delta x_P$ LOD	<0.0001" <0.0002"/nap 0.03 ms	17 óra	naponta	12 óra (világidő)
Végleges	y_P, x_P $\delta y_P, \delta x_P$ LOD	0.00005" <0.00002"/nap 0.02 ms	~13 nap	hetente	12 óra (világidő)

*az adatokat a műholdak és az állomások óráira is meghatározzák.

Az alappontok koordinátái 1989-ben még azonosak voltak mind a két rendszerben (ITRF89= ETRF89). Feltételezték, hogy az alappontok az Eurázsia lemezzel együtt mozdulnak el, ezért a két rendszer közötti szabályos eltérés transzformációik segítségével is jól modellezhető, ezért elegendő ezeket a transzformációs paramétereket meghatározni, így az alappontok koordinátái az ETRF rendszerben változatlanok tekinthetők.

A transzformációs paraméterek meghatározása az EPN hálózat segítségével történik. Ha a pontok mozgása meghaladja a mérések hibahatárait, akkor az ETRF koordinátákat is meg kell változtatni. Jelenleg az ETRF2000 az aktuális reprezentáció.

A kontinentális lemezek globális mozgásának meghatározása mellett a GPS technika segítségével regionális (Grenerczy et al. 2000), országos (Grenerczy 2000) valamint lokális (Bányai 2003) kéregdeformációs vizsgálatok is végrehajthatók, amelyekre az 1-5 mm szélső pontosság a jellemző. Ezek a vizsgálatok is a korábban említett tudományos szoftverekkel történnek, de a pontos efemeridák ismeretében itt már nincs szükség a pályaintegrál végrehajtására. A regionális állomások összekapcsolásával a globális változások is jól nyomon követhetők. A tektonikai lemezek belső részein végrehajtott ismételt mérésekből a pontthalmaz alakjának és méretének változása vizsgálható. Ezek a vizsgálatok történhetnek az IGS feldolgozáshoz hasonlóan a koordináta sorozatok további elemzésével, vagy a mért koordináta különbségek szabadhálózatos feldolgozásával is. A szakirodalomban

számos adatfeldolgozási stratégia található, amely többnyire a hálózat nagyságától függ. A GGKI által alkalmazott lokális hálózatra vonatkozó GPS eljárást az 5.3 fejezet ismerteti.

4.3 Aeronómia

Az aeronómia a felső légkör fizikai és kémiai tulajdonságaival, szerkezetével és összetételével, továbbá a légköri elektromágneses jelenségek vizsgálatával foglalkozó tudományterület.

Az ionoszféra állapotának hagyományos vizsgálatát a függőleges, vagy ferde beesésű rádiófrekvenciás impulzusok (1-20 MHz) ionoszonddal történő megfigyelésével hajtják végre, nemzetközi állomáshálózat méréseire támaszkodva. A különböző frekvenciákon kibocsátott impulzussorozatok visszaverődnek az ionoszféra különböző rétegeiről, ezért a futási idők alapján a rétegek magassága és a szabad elektronok sűrűsége is meghatározható. Mivel a nagyobb frekvenciák áthatolnak az ionoszférán, a legsűrűbb réteg feletti eloszlásról ezzel a földi módszerrel nem juthatunk információkhoz. A felső ionoszféráról közvetlen sűrűségi adatokat csak mesterséges holdakon elhelyezett ionoszonák szolgáltatnak.

Az ionoszféra globális leírására számos tapasztalati modellt fejlesztettek ki. Az egyik legjelentősebb az IRI (International Reference Ionosphere) modell, amit nemzetközi projekt keretében a COSPAR (Committee on Space Research) és az URSI (International Union of Radio Science) munkacsoportjai együttműködés keretében folyamatosan továbbfejlesztnek (<http://modelweb.gsfc.nasa.gov/ionos/iri.html>). Jelenleg az IRI2001 a legújabb verzió, amely 50 és 2000 km tartományban az elektron sűrűség és egyéb paraméterek mellett TEC adatokat is szolgáltat. A program Fortran forráskódja és PC Windows változata is letölthető, vagy a számítások közvetlenül a Web-en is elvégezhetők.

A 2.2 fejezet bemutatta, hogy a GPS jelek áthatolnak a jelentős mennyiségű szabad elektront tartalmazó ionoszférán (és plazmaszférán). Ez a közeg a GPS jelek terjedése szempontjából diszperzív, amely azt eredményezi, hogy a jelterjedés sebessége, útja és a polarizációja is folyamatosan változik a frekvencia (illetve a hullámhossz) függvényében. Amíg az alapvető (navigációs, geodéziai és geodinamikai) alkalmazások során ezt a jelenséget, mint hibaforrást el szeretnénk távolítani, addig az aeronómia szempontjából az ionoszféra állapotára vonatkozó hasznos információkhoz juthatunk.

Az ionoszférikus vizsgálatok optimális mérési kombinációit a 3.1 fejezet (3.2) és (3.1), továbbá a (3.4) és (3.3) egyenleteinek a különbségei adják, amelyek csak differenciális kódképletetéseket (2.11), fázistöbbértelműségeket, ionoszférikus hatásokat és fáziscentrum eltéréseket tartalmaznak. Ha a fáziscentrum eltéréseket elhanyagoljuk és feltételezzük, hogy a kódképletetések a műhold megfigyelése során konstans értékek tekinthetők, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\Phi_{i,L2}^j(t) - \Phi_{i,L1}^j(t) = c(\gamma - 1)(T_{i,GD} - T_{GD}^j) + (\lambda_{L2} N_{i,L2}^j - \lambda_{L1} N_{i,L1}^j) - (\gamma - 1)I_i^j(t) + v_{\Phi,L2-L1}, \quad (4.1)$$

$$P_{i,L2}^j(t) - P_{i,L1}^j(t) = c(\gamma - 1)(T_{i,GD} - T_{GD}^j) + (\gamma - 1)I_i^j(t) + v_{P,L2-L1}. \quad (4.2)$$

Mivel ezek a kombinációk a geometriai tagot és az ahhoz kapcsolódó hibákat is kiejtik geometriamentes (GF) kombinációknak is nevezik őket. A szakirodalomban a GPS rendszer definíciójától eltérően (2.11) általában a kódérések különbségében jelentkező ($\tau = (\gamma - 1)T_{GD}$) eltérést tekintik kódképletetésnek. A (2.19) összefüggéseknek megfelelően:

$$\Phi_{i,GF}^j(t) = c(\tau_i - \tau^j) + (\lambda_{L2} N_{i,L2}^j - \lambda_{L1} N_{i,L1}^j) - \alpha TEC(t) + v_{\Phi,GF}, \quad (4.3)$$

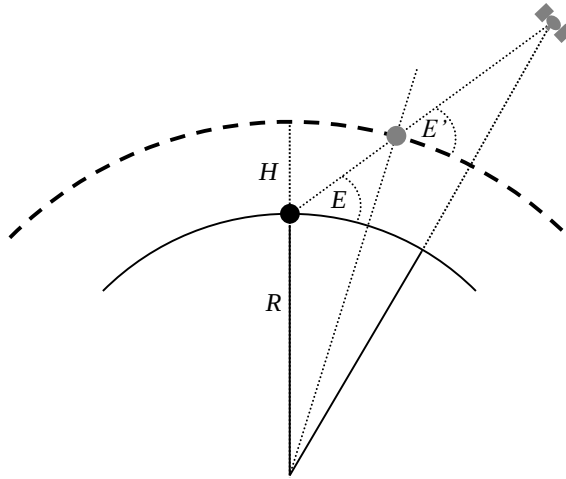
$$P_{i,GF}^j(t) = c(\tau_i - \tau^j) + \alpha TEC(t) + v_{P,GF}, \quad (4.4)$$

ahol $\alpha = 40.3(f_1^2 - f_2^2)/(f_1^2 f_2^2) = 1.05046 \cdot 10^{-17} \text{ m}^3$ konstans érték. A 10^{16} m^{-2} TEC értéket 1 TECU egységnek nevezik.

A (4.3) és (4.4) kombinációk az ionoszférikus hatások mellett csak konstans műszerparamétereket tartalmaznak. A konstans értékek ismeretében mind a két mennyiség alkalmas az ionoszférikus hatások vizsgálatára. A fázismérések nagyobb pontosságának kihasználására általában a két kombinációt együttesen alkalmazzák. A kódkezeléseket alapvetően a kódérések alapján lehet meghatározni, amely az alkalmazott mérési módszernek is függvénye.

A szakirodalomban számos megoldás található (Lányi és Roth 1988, Wanninger 1994, Warnan 1997, Engler et al. 1997). Gyakran a kombinációkat is fordított sorrendben írják fel, és a kódkezeléseket is eltérően definiálják. A különböző megoldások összehasonlításánál ezért a modelldefiníciókat mindig meg kell vizsgálni. A (4.3) és (4.4) szerinti kombinációknál az ionoszféra hatása a kódéréseknél pozitív, a fázisméréseknél negatív értéként jelentkezik.

A GPS mérések és az ionoszférikus hatások közötti geometriai kapcsolatot az egyszerű ionoszférikus rétegmodell („single layer”) segítségével modellezhetjük (Lányi és Roth 1988). A modellt a 4.8 ábra mutatja be, ahol R a Föld sugara, H az ionoszférikus réteg magassága, E a műhold megfigyelési helyére és E' az ionoszférikus pontra vonatkozó magassági szög.



4.8 ábra. Egyszerű ionoszférikus rétegmodell.

Ha az ionoszférikus hatásokat egyetlen vékony rétegbe sűrítjük, a vonal menti integrált (TEC) az ionoszférikus pont vertikális irányába transzformálhatjuk:

$$TEC = V_{TEC} / \sin(E') . \quad (4.5)$$

A Föld tömegközéppontja, a megfigyelőhely és az ionoszférikus pontok által bezárt háromszögben a szinusz tétel alapján

$$\cos(E') = \frac{R}{R + H} \cos(E) . \quad (4.6)$$

A gyakorlatban általában az $R = 6371$ km és a $H = 450$ km értékkel számolnak. A módosított egyszerű lemez modell („extended slab”) egy további konstans is tartalmaz:

$$\cos(E') = \frac{R}{R + H} \cos(a \cdot E) , \quad (4.7)$$

ahol $H = 506.7$ km és $a = 0.9782$. A kombinációk ugyan geometriamentesek, de a magassági szögek és a fáziscentrum korrekciók számításánál a megfigyelőhely és a műholdak koordinátáit is ismerni kell.

A vertikális TEC értékek (V_{TEC}) az ionoszférikus pontok földrajzi, vagy elektromágneses koordinátáinak, a Nap óraszögének és a napfoltszámok függvényében pl. az IRI modellből is meghatá-

rozhatók. Ha feltételezzük, hogy egy adott megfigyelési hálózat felett a megfigyelések időtartamában a V_{TEC} felület állandónak tekinthető, akkor az időbeli változást lényegében csak a magassági szögek változása hordozza. Ekkor a megfigyelési egyenletek:

$$\Phi_{i,GF}^j = c(\tau_i - \tau^j) + (\lambda_{L2} N_{i,L2}^j - \lambda_{L1} N_{i,L1}^j) - \alpha \cdot V_{TEC} / \sin(E') + v_{\Phi,GF} , \quad (4.8)$$

$$P_{i,GF}^j = c(\tau_i - \tau^j) + \alpha \cdot V_{TEC} / \sin(E') + v_{P,GF} , \quad (4.9)$$

$$V_{TEC} = I_{00} + I_{10}(\varphi - \varphi_0) + I_{01}(\vartheta - \vartheta_0) + \dots , \quad (4.10)$$

alakban írhatók fel, ahol φ az ionoszférikus pontok mágneses (vagy földrajzi) szélessége és ϑ a Nap mérési időpontra vonatkozó óraszöge, továbbá φ_0 és ϑ_0 a hálózat területén alkalmasan megválasztott kezdőértékek.

A (4.9) megfigyelési egyenlet ismeretlen paraméterei a kódkésleltetések és az ionoszférikus polinom együtthatói. A különböző vevők és műholdak kódkésleltetéseit csak az ionoszférikus polinom kapcsolja össze. A Gauss-Markov modell szerinti kiegyenlítésnél a kódkésleltetések miatt egy járulékos dátumdefektussal is számolnunk kell. A defektus valamely vevő, vagy műhold késleltetésének rögzítésével is feloldható. Gyakori megoldás, hogy kényszerfeltételként a műholdak késleltetéseinek nulla átlagértékét írják elő. Gyakorlati szempontból megfelelő megoldás lehet az is, ha a vevő és műhold párra vonatkozó feltevésmentesen becsülhető τ_i^j összevont értéket tekintjük ismeretlennek.

A becslés a BLE modell és a Kálmán szűrés segítségével is megoldható, továbbá a (4.10) trendfüggvényhez sztochasztikus folyamatok is kapcsolhatók. Ezeknél a modelleknél a kezdő paraméterek és a sztochasztikus modellek megválasztása is fontos szerepet játszik.

Mivel a konstans kódkésleltetések és az I_{00} paraméterek erősen korreláltak (az I_{00} ismeretlen együtthatói a magassági szög függvényében lassan változnak) gyakorlatilag csak alacsony fokszámú polinomokat lehet választani. A becslés is akkor szolgáltat kedvező eredményeket, ha az ionoszférikus változások is kicsik. Mivel a kódkésleltetések csak a feldolgozás időtartamában tekinthetők állandónak (az eszközök öregedésével ezek folyamatosan változnak) az órahibák rendszeres becslése is nagyon fontos feladat (Warnant 1997). Az intézetünkben kidolgozott eljárást és a kísérleti vizsgálatok eredményeit az 5.2 fejezet mutatja be.

A kódkésleltetések és a fázistöbbértelműségek meghatározását követően, a regionális és a lokális V_{TEC} felületek már bonyolultabb matematikai eszközök segítségével is leírhatók (Takács 2003). A kisebb regionális területeken általában Taylor sort:

$$V_{TEC}(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n C_{n,m} (\varphi - \varphi_0)^n (\vartheta - \vartheta_0)^m , \quad (4.11)$$

a globális modelleknél gömbfüggvényt alkalmaznak:

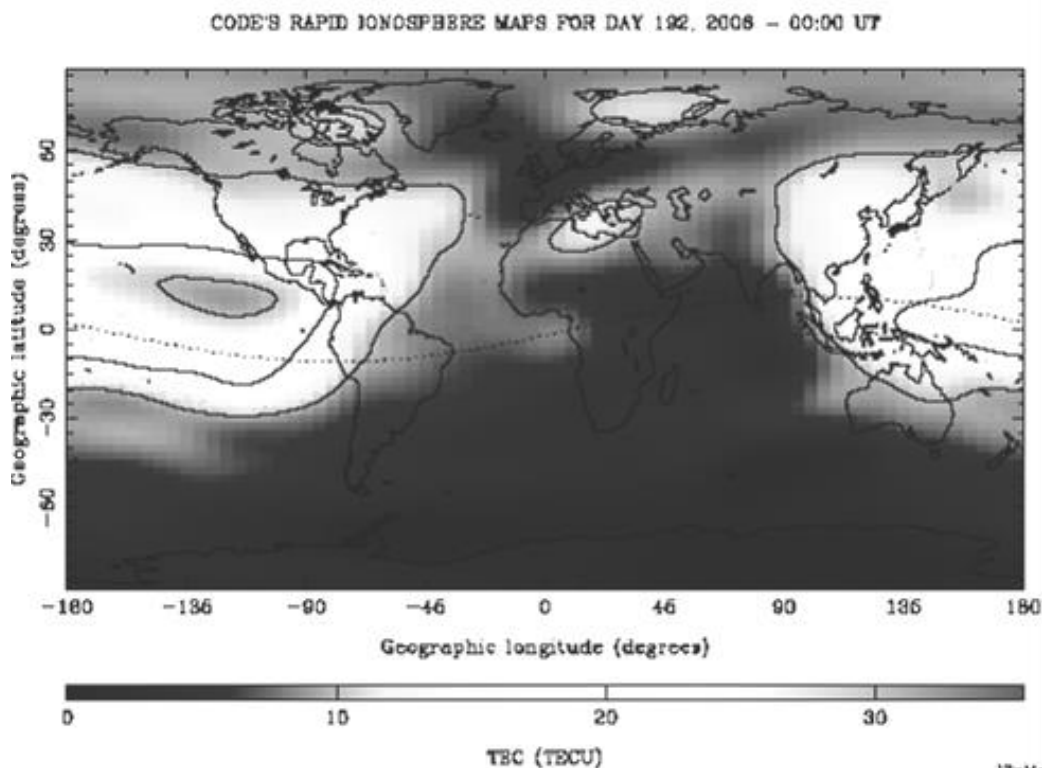
$$V_{TEC}(\varphi, \vartheta) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n \tilde{P}_{n,m}(\sin \varphi) (\tilde{A}_{n,m} \cos(m \cdot \vartheta) + \tilde{B}_{n,m} \sin(m \cdot \vartheta)) , \quad (4.12)$$

ahol $\tilde{P}_{n,m}(\sin \varphi)$ normalizált, asszociált Legendre függvény. A $C_{n,m}$ és az $\tilde{A}_{n,m}, \tilde{B}_{n,m}$ konstansokat legkisebb négyzetes illesztéssel határozzák meg. A becsült konstansok általában két órás idő intervallumra vonatkoznak, így az ionoszféra időbeli változása is folyamatosan nyomon követhető.

Az IGS európai adatfeldolgozó központjában (CODE) több mint 200 globális állomás méréseiből határoznak meg kódkésleltetési értékeket, és a gömbfüggvényt együtthatóit is 15 fokig és rendig meghatározzák (<http://www.cx.unibe.ch/aiub/ionosphere.html>). A legkisebb négyzetes kollokáció segítségével a VTEC értékekről egy és két napos előrejelzéseket is készítenek. Az IGS rácshálózatban adott V_{TEC} adatainak jellemzőit a 4.2 táblázat foglalja össze. Egy globális térképet a 4.9 ábra szemléltet.

4.2 táblázat. Az IGS rácshálózatban adott V_{TEC} adatainak jellemzői.

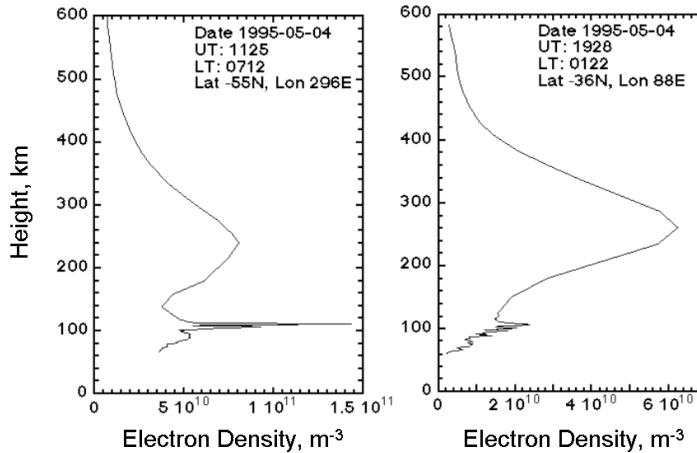
IGS „termékek”	Megbízhatóság	Látencia	Aktualizálás	Mintasűrűség
Végleges VTEC	~2-8 TECU	11 nap	2 óra	$3^\circ (\varphi) \times 2.5^\circ (\lambda)$
Gyors VTEC	~2-9 TECU	24 óra	2 óra	$3^\circ (\varphi) \times 2.5^\circ (\lambda)$



4.9 ábra. A CODE központ gyors VTEC térképe (2006. július 11. 00 óra világidő).

A teljesség igénye nélkül a GNSS műholdak közvetett, rádió okkultációs alkalmazásának alapelve röviden a következő.

Ha GPS vevőberendezéseket helyezünk el olyan, alacsony pályán keringő LEO (Low Earth Orbiting) műholdakon, amelyek közel poláris pályán a GPS holdakhoz viszonyítva viszonylag gyorsan keringenek, és valamely GPS műhold is éppen ennek a pályasíknak a közelében tartózkodik (innen az okkultáció, együttállás elnevezés), akkor az okkultációs síkban a TEC értékek tomografikus feldolgozásával az elektron sűrűség is meghatározhatóvá válik. Ilyen elektronsűrűség profilokat mutat be Hajj és Romans (1988) alapján a 4.10 ábra, ahol a függőleges tengely a magasságot (km), a vízszintes tengely az elektronsűrűséget (m^{-3}) jelöli.



4.10 ábra. GPS/MET kísérletből levezetett elektronsűrűség profilok
Hajj és Romans 1988 alapján.

4.4 Meteorológia

A meteorológia az alsó légkör fizikai és kémiai tulajdonságaival, szerkezetével és összetételével, továbbá a légköri jelenségek vizsgálatával és előrejelzésével foglalkozó tudományterület.

Az alsó légkör állapotának hagyományos módszerekkel történő vizsgálatát kezdetben a földi meteorológiai állomások több évtizedes megfigyelési adatai tették lehetővé. A földfelszínen mért és a meteorológiai ballonszondázásból származó adatokat földi radarmegfigyelésekkel egészítették ki, majd a távérzékelési műholdak megjelenése és elterjedése is további jelentős fejlődést eredményezett. A GNSS műholdas rendszerek közvetett módon szintén alkalmasak légköri paraméterek vizsgálatára is (Bevis et al. 1992, Borbás 1997, Baltink et al. 2002).

A 2.2 fejezet bemutatta, hogy a GPS jeleknek az alsó légkörben történő terjedését a törésmutatón keresztül a légnyomás, a hőmérséklet és a páratartalom térbeli eloszlása befolyásolja, amit troposzférikus késleltetésnek is neveznek. Az ionoszférához hasonlóan az alapvető alkalmazások során ezt a jelenséget is hibaforrásként szeretnénk eltávolítani, de a meteorológia szempontjából ismét hasznos információkhoz juthatunk. Az ionoszférától eltérően ezek a hatások azonban függetlenek a jelterjedés frekvenciájától, ezért csak közvetett módon határozhatók meg. Az alapvető alkalmazásoknál a troposzférikus hatásokat mindig megfelelően modellezni kell. A modellhibák a különbségképzés során a bázisvonal hosszának függvényében nagyrészt kiejthetők, vagy járulékos ismeretlenek bevezetésével tovább csökkenthetők. A meteorológiai alkalmazásnál az inverz feladatot kell alkalmaznunk, azaz a mérést terhelő egyéb összetevőket kell a lehető leghatékonyabban eltávolítani, és a maradék részt kell felhasználni a meteorológiai paraméterek pontosabb becslésére. A kettős feladat megoldásához tehát alkalmas modellekre van szükségünk, amelyek azonban számos elhanyagolást és tapasztalati konstansokat is tartalmaznak. Ezek a konstansok csak hagyományos mérési adatok felhasználásával becsülhetők.

A GPS mérések feldolgozásánál a refraktivitás (2.21) alapösszefüggésének a következő változatait alkalmazzák:

$$N = k_1 \frac{P}{T} + \left((k_2 - k_1) \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \right) = N_d + N_w, \quad (4.13)$$

$$N = k_1 \frac{P}{T} + (k_3 + T_m (k_2 - k_1)) \frac{e}{T^2} = N_d + N_w, \quad (4.14)$$

$$N = k_1 \cdot R_d \cdot \rho + \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w \cdot \rho_w = N_d + N_w, \quad (4.15)$$

ahol $P = P_d + e$ a teljes légnyomás (a száraz és a parciális párányomás pontosan csak együtt mérhető értéke), T_m az átlagos hőmérséklet, R_d a száraz levegő és R_w a vízpára gázállandója, $\rho = (\rho_d + \rho_w)$ az együttes és az egyes komponensek aktuális sűrűsége, továbbá N_d a (nagy részben) száraz és N_w a nedves összetevő refraktivitása. A nyomással kapcsolatos paraméterek hPa (mb), az egyéb mennyiségek SI alap dimenziókban adottak.

A refraktivitás zenitirányú integráljai, a troposzférikus késleltetések, alkalmas modellekkel közvetlenül meghatározhatók. A jelterjedés menti integrálok a zenitirányú összetevőkből leképezési függvény (vagy ferdeségi szorzó) segítségével állíthatók elő. A zenitirányú késleltetések meghatározására két alapvető modell, a Hopfield (1969) és Saastamoinen (1972) nevéhez fűződő modellek, és ezek különböző változatai terjedtek el.

Hopfield elméleti megfontolások és számos meteorológiai ballonszondázási adat vizsgálatából arra a következtetésre jutott, hogy gyakorlati szempontból a száraz és a nedves refraktivitás magassági változása egységesen és önkényesen negyedfokú polinomnak választható. A zenitirányú integrálok ekkor

$$ZHD = 10^{-6} k_1 \frac{P_s}{T_s} \frac{(h_d - h_s)}{5}, \quad (4.16)$$

$$ZWD = 10^{-6} \left(\frac{k_3}{T_s} + (k_2 - k_1) \right) \frac{e_s}{T_s} \frac{(h_w - h_s)}{5}, \quad (4.17)$$

$$ZWD = 10^{-6} (k_3 + T_m (k_2 - k_1)) \frac{e_s}{T_s^2} \frac{(h_w - h_s)}{5} \quad (4.18)$$

összefüggésekkel számíthatók, ahol ZHD a zenitirányú (többnyire hidrosztatikus egyensúlyi állapotban lévő) száraz és ZWD a nedves késleltetés (m), h_d és h_w az egyes komponensek effektív magasságai, továbbá az s index a felszínre vonatkozó paramétereket jelenti.

A h_w magasság 10-11 km, a h_d magasság 40-45 km körüli érték. A száraz légkör magassága a $h_d = a + b \cdot T_s$ polinommal pontosabban becsülhető, ahol a és b szintén tapasztalati konstansok.

Saastamoinen a hidrosztatikai egyensúlyi állapotnak megfelelő alapösszefüggésekből vezette le a száraz késleltetéseket:

$$ZHD = 10^{-6} \frac{k_1 \cdot R_d}{g_m} P_s, \quad (4.19)$$

$$ZWD = 10^{-6} \left(\left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 \right) \frac{R_d}{4g_m} e_s + \left(\frac{k_3 \cdot R_d}{4g_m - R_d \alpha} \right) \frac{e_s}{T_s} \right), \quad (4.20)$$

$$ZWD = 10^{-6} (k_3 + T_m (k_2 - k_1)) \left(\frac{R_d}{4g_m - R_d \alpha} \right) \frac{e_s}{T_s}, \quad (4.21)$$

ahol g_m a mérési hely közepes nehézségi gyorsulása, valamint $\alpha = -dT/dh$ a közepes lineáris hőmérsékleti gradiens, amely 11 km magasságig tekinthető érvényesnek. Ennél a modellen csak felszíni meteorológiai adatokra van szükség.

Az ionoszférához hasonlóan a zenit irányban modellezhető késleltetéseket szintén a jelterjedés irányába kell leképezni. A troposzféra azonban nem tekinthető egy vékony rétegnek, ezért a refraktivitás térbeli eloszlását is modellezni kell. Hopfield viszonylag egyszerű negyedrendű magassági változásának felhasználásával több leképezési függvényt is levezettek.

A leképezési függvényeknek két nagy csoportját különböztetjük meg. Vannak olyan modellek, melyek a száraz és a nedves összetevők esetében is azonosak, míg a pontosabb modelleknél eltérő függvényeket alkalmaznak:

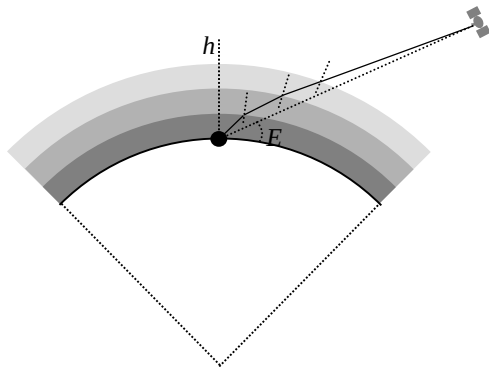
$$\begin{aligned} T_{dw}(E) &= F(E) \cdot ZTD \\ T_{dw}(E) &= F_d(E) \cdot ZHD + F_w(E) \cdot ZWD \end{aligned} \quad (4.22)$$

ahol $ZTD = (ZHD + ZWD)$ a teljes vertikális troposzférikus késleltetés, T_{dw} a 3. résznek megfelelően most a troposzférikus korrekciót, E a magassági szöget és F a leképezési függvényt jelöli.

Jelenleg az ún. láncörtékekkel leírható leképezési függvényeket tekintik a legpontosabbaknak, amelyek alacsony magassági szögek (5-15 fok) esetében is alkalmazhatók. Az egyik leggyakrabban alkalmazott Marini-Herrig modell:

$$F_{dw}(E) \cong \frac{1 + \frac{a_{dw}}{1 + \frac{b_{dw}}{1 + c_{dw}}}}{\sin E + \frac{a_{dw}}{\sin E + \frac{b_{dw}}{\sin E + c_{dw}}}} \quad (4.23)$$

ahol a száraz és nedves leképezés formailag azonos, de az a , b , c paraméterek eltérőek. A paramétereket a földrajzi szélesség, a tengerszint feletti magasság és a felszíni hőmérséklet függvényében tapasztalati úton határozták meg. A rétegek elvi vázlatát a 4.11 ábra mutatja be. A görbült és a geometriai út hosszából adódó eltérést általában itt is elhanyagolják. Néhány modell gyakorlati összehasonlítása Ádám et al. (2004) munkájában is megtalálható.



4.11 ábra. A láncörtéken alapuló leképezési függvények elvi vázlata.

A szélső pontosságú adatfeldolgozásnál a troposzférikus korrekciók, de különösen a nedves összetevő nem tekinthető elég pontosnak. Ha a GPS mérésekkel egy időben a terepen mért felszíni meteorológiai adatok is pontosak, további hibákat vihetünk be az adatfeldolgozásba. A gyakorlatban ezért általában standard értékeket használnak, és a zenit irányú teljes késleltetéshez (ZTD), vagy csak a nedves taghoz (ZWD) egy-három órás intervallumokban sztochasztikus korrekciókat is rendelnek.

A bemutatott modellek azimut szimmetrikusak. A legújabb módszerek járulékos, azimut függő gradiensek becslésével kívánják az adatfeldolgozást még pontosabbá tenni.

A GPS technika meteorológiai alkalmazását éppen az teszi lehetővé, hogy a modellből és a felszíni mérésekből származó adatokat a GPS mérések feldolgozását követően pontosabban megismerhetjük. A tudományos szoftverek támogatják a megfigyelési helyekhez tartozó troposzférikus korrekciók becslését, amely a feldolgozó programok ismeretét és megfelelő alkalmazását is igényli.

Ha a troposzférikus paraméterek meghatározása a fő cél, pontos állomáskoordinátákra és pontos (utólagos) pályaadatokra van szükség. Az ionoszférikus hatásokat ki kell ejteni, alkalmas fáziscentrum modellt kell felhasználni, a fázis-többértelműségeket meg kell határozni, valamint az órahibákat is megfelelően kell kezelni. A kettőskülönbségek relatív feldolgozásánál az órahibák kiesnek, és lényegében a becslt troposzférikus paraméterek is relatív értékek tekinthetők. Különbségképzés nélkül elvileg az egyes megfigyelési helyekhez tartozó értékeket becsljük, de ez a megközelítés is csak akkor alkalmazható, ha az állomások optimális távolságban helyezkednek el egymástól, azaz a meteorológiai hatások nem szorosan korreláltak. A BLE szerinti kiegyenlítésnél az előzetes állomás koordinátákat néhány mm, a troposzférikus paramétereket néhány cm pontossággal kell figyelembe venni. Gyors, vagy ultra gyors pontos efemeridáknál a pályaparaméterek becslése is javíthatja a megoldást.

Az GPS hálózatok meteorológia célú felhasználásánál a területen rendelkezésre álló ballonszondázási adatokat is célszerű felhasználni. A különbségképzéssel történő feldolgozásnál a bázis-állomást a ballonszondázási obszervatórium közelébe célszerű elhelyezni.

A GPS megfigyelések óránként becslt ZWD értékeiből az integrált páratartalom (IWV) az

$$IWV = \frac{ZWD}{Q(T_m)} \quad (4.24)$$

összefüggéssel becslhető, ahol

$$Q(T_m) = 10^{-8} \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w \quad (4.25)$$

Az integrált páratartalom meghatározásához az átlagos hőmérséklet pontos ismerete is szükséges, ezért a $T_m = a + b \cdot T_s$ tapasztalati függvényt a vizsgált régió ballonszondázási adatainak segítségével célszerű meghatározni. Az integrált páratartalom a (4.24) és (4.25) képleteknek megfelelően kg/m^2 dimenziójú. Ha ez a páratömeg eső formájában kihullna, akkor a víz $\approx 1000 \text{ kg/m}^3$ sűrűségének megfelelően az IWV számértéke mm dimenzióban adná meg a PWV (Precipitation Water Vapor) kihullható vízmennyiséget.

A (4.13) – (4.25) összefüggések levezetését és a paraméterek néhány tapasztalati értékét az I. melléklet tartalmazza.

Az IGS a rendszeres adatfeldolgozás során az állomáshálózat pontjaiban a ZTD adatokat is meghatározza, ezeknek a jellemzőit a 4.3 táblázat foglalja össze.

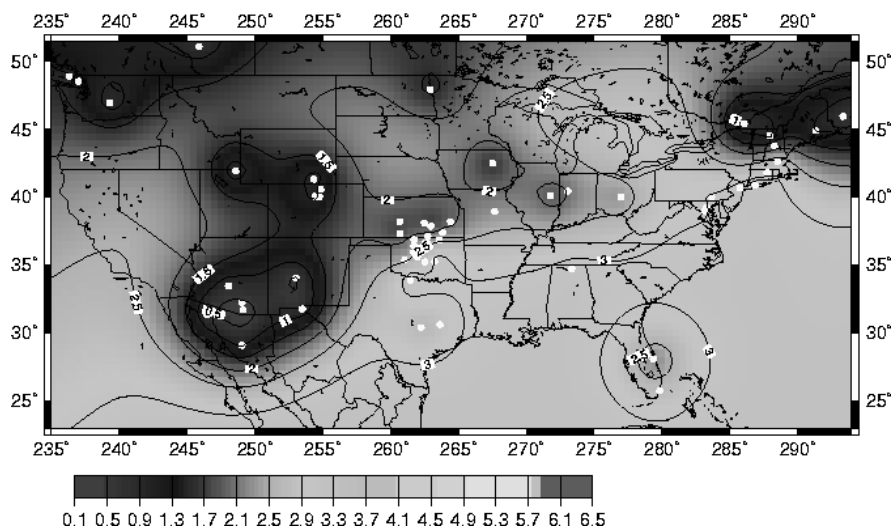
4.3 táblázat. Az IGS troposzférikus adatainak jellemzői.

IGS „termékek”	Megbízhatóság	Látencia	Aktualizálás	Mintasűrűség
Végleges ZTD	4 mm	< 4 hét	1 hét	2 óra
Gyors ZTD	6 mm	2-3 óra	3 óra	1 óra

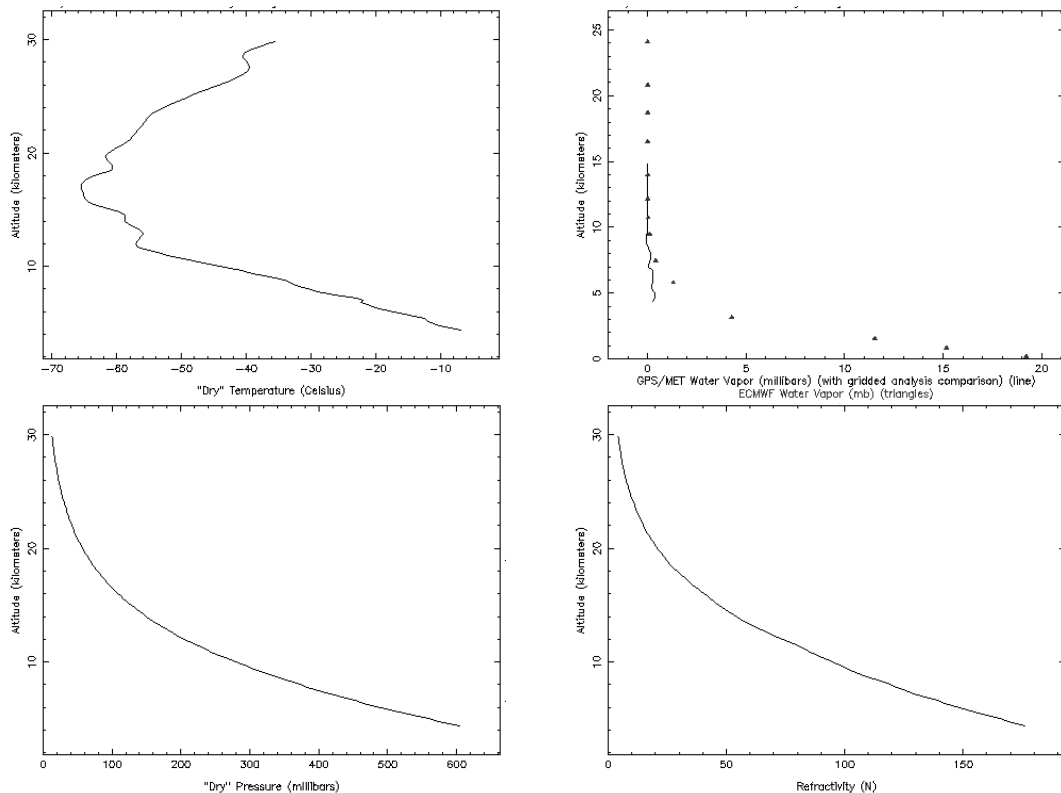
Az GPS állomáshálózatok óránként meghatározható kihullható vízmennyiség adataiból az ionoszférához hasonlóan polinomok, vagy más interpolációs módszerek segítségével PWV térképek szerkeszthetők, és az időbeli változások animáció segítségével is vizsgálhatók. Példaként az amerikai NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration) egy regionális térképét mutatja be a 4.12 ábra.

Az ionoszférához hasonlóan a rádió okkultációs mérések szintén felhasználhatók a meteorológiai paraméterek vizsgálatára. A GPS mérések becslt troposzférikus korrekcióiból a tomografikus

feldolgozás módszerével szintén meghatározhatók az egyes paraméterek eloszlásai az okkultációs síkban. Példaként a 4.13 ábra ismét Hajj és Romans (1988) alapján mutat be néhány profilt, ahol a függőleges tengely a magasságot (km), a vízszintes tengely a bal felső ábrán a hőmérsékletet ($^{\circ}\text{C}$), a jobb felső ábrán a száraz légnyomást (mb), a bal alsó ábrán a parciális párányomást (mb) és a jobb alsó ábrán a refraktivitás mutatja.



4.12 ábra. Az amerikai NOAA egy PWV térképe (mm).



4.13 ábra. GPS/MET kísérletből levezetett profilok Hajj és Romans 1988 alapján.

5 Új eredmények a GPS rendszer alkalmazásában

5.1 A troposzférikus hatások vizsgálata meteorológiai adatok alapján

A 4.4 fejezet bemutatta a GPS rendszer jelenlegi hozzájárulását a meteorológiai vizsgálatokhoz. Az I. melléklet részletesen összefoglalta a troposzférikus hatások elméleti hátterét, a gyakorlatban alkalmazott modelleket, az egyes konstansok definícióját, továbbá azok aktuális értékeit. Az egyes modellek számos területileg illesztett paramétert is tartalmaznak.

A GPS technológia meteorológiai alkalmazásával Magyarországon a meteorológusok között elsőként Borbás (1997) foglalkozott, amit PhD dolgozatban is összefoglalt. A hazai meteorológiai adatok GPS technikával kapcsolatos részletes vizsgálatáról azonban nincs tudomásom, ezért OTKA kutatások keretében megvizsgáltam a paraméterek helyi jellegzetességeit és a hazai meteorológiai adatok hozzájárulását a GPS mérések hatékonyabb feldolgozásához. A vizsgálatokhoz megvásároltam az 1991.10.28 – 11.10. kéthetes időszak adatait, amely azonos a FÖMI KGO által létesített GPS geodinamikai hálózat első mérésének időtartamával.

A feldolgozott adathalmaz az egykori budapesti KLFi (ma Marczell György Főobszervatórium) és a szegedi meteorológiai állomás 00 és 12 óra világidőben (UT) végrehajtott ballonszondázási megfigyeléseiből származó, továbbá az akkori felszíni állomásokon háromóránként mért hőmérséklet, légnyomás és páratartalom adatokból áll. Amíg a felszín közelében mért adatok 0.1 K, 0.1 hPa és 1% pontossággal jellemezhetők, addig a ballon adatok ennél lényegesen pontatlanabbak (1.0 K, 1.0 hPa és 5%).

Az 5.1a ábra a ballonszondázásból származó légnyomás adatokat együtt mutatja be. Az együttes görbék látszólag jól megközelítik az exponenciális csökkenést. Az 5.1b ábrán a felszíni értékek azonban 35–40 hPa eltérést mutatnak, amely a görbék végén (5.1c ábra) már csak 5–10 hPa. A budapesti és a szegedi adatok jó egyezést mutatnak, de a görbehalmazban jellegzetes sűrűsödések is felismerhetők (5.1b ábra). A görbe kezdeti (talaj közeli) szakasza lineáris gradienssel is jól jellemezhető (ez teszi lehetővé a tengerszintre történő átszámítást). A legmagasabb adatok Budapestről 35 km magasságból származnak, ahol a légnyomás még 5 hPa körüli érték. Az 5.1c ábrán adathiányos görbék is felismerhetők.

Az 5.2 ábra a ballonszondázásból származó hőmérsékletet, az 5.3 ábra a levezetett parciális párányomás adatokat mutatja be, ahol az 5.1 ábrával azonos jelöléseket használtunk. A hőmérséklet a 0–4 km tartományban irreguláris viselkedést mutat, ahol a felszín közelében negatív és pozitív gradiensek, inverziók is előfordulnak. Az 5–10 km tartományban már a jellegzetes, többé-kevésbé hasonló, negatív gradiens látható. A 10 km feletti tartományban, amely már nem tartalmaz nedvességet, szintén megjelenik a jellegzetes, dominánsan pozitív gradiens, amely a két állomáson már nagyobb eltéréseket is mutat.

A parciális párányomás értékek, ahol az első zérus helyeket is ábrázoltuk, látszólag nagyobb el-lentmondásokat tartalmaznak (5.3 ábra). A felszíni eltérések azonban csak 4–12 hPa között mozognak, amely tizedrésze a légnyomás felszíni eltéréseinek.

Az 5.4 ábra egy jellegzetes száraz, az 5.5 ábra egy kedvezőtlen nedves refraktivitási görbét mutat, ahol az illesztett modell görbéjét is ábrázoltuk. A továbbiakban ezeknek az illesztett modelleknek a meghatározását és a tulajdonságait ismertetjük.

A száraz refraktivitás legegyszerűbben az

$$N_d = k_1 \frac{P}{T} \quad (5.1)$$

összefüggéssel számítható. A N_d értékek magassági eloszlásában a P nyomás továbbra is domináns, de a T hőmérséklet viselkedése valamelyest rontja a görbék szabályos lefutását.

A zenitirányú száraz késleltetés a refraktivitás magasságmentén történő numerikus integráljával határozható meg. Gyakorlatilag célszerű azonban a numerikus integrált egy illesztett függvény segítségével végrehajtani, mivel a ballonszondázási görbék adatai időnként nem egyenletesek, néha

adathiányok is előfordulnak, és a legmagasabb adatok sem érik el a légkör felső határát (a nulla légnyomás értéket).

A magassági változás a Hopfield modellnek megfelelően az

$$N_d = k_1 \frac{P(h)}{T(h)} = k_1 \frac{P_0}{T_0} \left(\frac{h_d - h}{h_d} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1}, \quad (5.2)$$

$$N_d(h) = N_{d0} \left(\frac{h_d - h}{h_d} \right)^{a_d} \quad (5.3)$$

alakban is általánosítható. Ezek az összefüggések annyiban térnek el az I. mellékletben adott összefüggésektől, hogy itt a felszíni értékekről áttértünk a tengerszintre ($h_s = 0$). A ballonszondázási adatok alapján meghatározzuk az adott magasságokhoz tartozó N_d értékeket, és keressük a legjobban simuló tengerszintre vonatkozó N_{d0} refraktivitást, a h_d effektív magasságot (ahol $N_d = 0$) és az a_d alakszámot (hatványkitevőt). Ezeknek a paramétereknek az ismeretében a magasság szerinti integrál tetszőleges határok között is egyszerűen kiszámítható.

Az I. mellékletben bebizonyítottuk, hogy a Hopfield és a Saastamoinen modellek bizonyos feltételek mellett elvileg azonos eredményt adnak, ezért az (5.3) modell alkalmas a ballonszondázási adatok kezelésére is.

A paramétereket a Gauss-Markov modell szerinti legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel határoztam meg. Mivel az adatok jól illeszkednek a modellhez, kondicionális problémák nem jelentkeznek, de az előzetes értékek megválasztása itt is nagyon fontos tényező. Kezdő értéként a Hopfield által javasolt $a_d = 4$ értéket célszerű felvenni, és az N_{d0} , h_d kezdő értékeket az első és az utolsó adatpont alapján célszerű felvenni. Az egyes adatpontokhoz egységnyi súlyokat rendeltem. A megfelelő illeszkedést már 2-3 iteráció is biztosítja. Az N_{d0} értékek középhibája 1.0 körüli érték, az a_d középhibája 0.2-0.3. A legkedvezőtlenebb paraméter a h_d magasság, amely csak 1-2 km pontosan becsülhető. A súlyegység középhibája 1-2 érték között mozog, amely valamivel kedvezőtlenebb, mint a ballonadatok pontosságából becsülhető 1.0-0.5 érték. Egy tipikus illeszkedési görbét az 5.4 ábra már bemutattott.

A kiegyenlített paraméterek az 5.6a-c ábrákon az időpont függvényében láthatók. Mivel az ábrák jellegzetes, de időben változékony képet mutatnak, a paramétereket a felszíni hőmérséklet függvényében is ábrázoltam (5.7a-c ábrák). Jól látható, hogy a napos (éjszakai és déli) járás és az 5.6 ábrán látható időszakos változások a felszíni hőmérséklet függvényében valamivel egységesebb képet mutatnak, és a felszíni hőmérséklet (T_s) lineáris függvényeként is modellezetők. Az 5.1 táblázat az illesztés maradék hibáinak szórását is tartalmazza. A budapesti és a szegedi adatok is viszonylag jól illeszkednek egymáshoz, továbbá a nappali és éjszakai görbék is egységes képet mutatnak.

A nedves késleltetések az

$$N_w = \left((k_2 - k_1) + \frac{k_3}{T} \right) \frac{e}{T} \quad (5.4)$$

összefüggéssel is pontosan meghatározhatók. Az N_w értékek magassági eloszlásában az e parciális párányomás jellemzői és a T hőmérséklet földközeli inverziói okozzák a görbék szabálytalanságait. Ha az együtthatóban az átlagos hőmérsékletet (T_m) helyettesítjük be, kedvezőbb modell hiányában, a száraz taggal analóg összefüggést kapunk:

$$N_w = \left((k_2 - k_1) + \frac{k_3}{T_m} \right) \frac{e(h)}{T(h)} = \left((k_2 - k_1) + \frac{k_3}{T_m} \right) \frac{e_0}{T_0} \left(\frac{h_w - h}{h_w} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1} \quad (5.5)$$

$$N_w(h) = N_{w0} \left(\frac{h_w - h}{h_w} \right)^{a_w}$$

Az irregularitásokból adódóan a függvényillesztés ebben az esetben gyakran irreális (elcsordult) eredményt szolgáltatott, ezért a h_w értéket célszerű az első $e=0$ adatpont magasságában önkényesen rögzíteni, és csak az N_{w0} , a_w értékeket tekinteni ismeretlennek. Kezdő értéként szintén az $a_w=4$ értéket célszerű választani és az N_{w0} értékeket az első adatpont alapján célszerű felvenni. A paraméterek illeszkedése néhány esettől eltekintve általában kétszer rosszabb, mint a száraz összetevőnél, amely különösen kedvezőtlen esetekben (5.5 ábra) ennél akár nagyobb is lehet. A nedves refraktivitásból származó zenitirányú késleltetést a ballonadatok esetében ezért közvetlenül a trapéz módszer szerinti numerikus integrállal célszerű meghatározni.

Az előbbi vizsgálatoknak megfelelően az eredményeket az 5.8a-c és 5.9a-c ábrák foglalják össze. Az N_{w0} értékek hasonló, de ellentétes tendenciát mutatnak, mint az N_{d0} értékek. A h_w magasságok számszerint kisebb intervallumban szóródnak, de relatív értelemben, összhangban vannak a h_d érték szóródásával. A felszíni hőmérséklettel azonban kevésbé korreláltak, mint a h_d értékek, ezért gyakorlatilag konstansnak tekinthetők. Az a_w hasonlóan viselkedik, mint az a_d , de itt több kiugró érték is található. A lineáris trendeket az 5.2 táblázat foglalja össze.

A GPS technológia alkalmazásánál két további paraméter, az α hőmérsékleti gradiens és a T_m közepes hőmérséklet is fontos szerepet játszik, amely szintén ballonadatok alapján vizsgálható. A T_m paraméter a kihullható vízmennyiség meghatározásánál alapvető szerepet tölt be.

A közepes hőmérsékletet a

$$T_m = \frac{\int \frac{e}{T} dh}{\int \frac{e}{T^2} dh} \quad (5.6)$$

összefüggésnek megfelelően a trapéz módszer szerinti numerikus integrállal határozható meg.

A közepes hőmérséklet változását az 5.12a és 5.12b ábrák szemléltetik. Az értékekhez a felszíni hőmérséklet függvényében itt is lineáris trendet illesztettünk. Az 5.3 táblázat a Bevis at al. (1991) által meghatározott értékeket is tartalmazza. A látszólag nagy eltérés ellenére a vizsgált intervallumban (268–286 K) csak 3 K eltérés tapasztalható.

A hőmérsékleti profilok jellegzetes szakaszaihoz egyenest illesztettem, és meghatároztam az α lineáris gradienst. A maradék hőmérsékletek szórása jellemzően 1 K körüli érték, amely összhangban van a mérések pontosságával. Egy jellegzetes görbét mutat be az 5.10 ábra. A gradiensek változását az 5.11a és 5.11b ábrák szemléltetik. Az értékekhez a felszíni hőmérséklet függvényében lineáris trendet illesztettem, amely gyakorlatilag konstansnak tekinthető (5.3 táblázat).

A ballonzondázási adatok a kihullható vízmennyiség meghatározását is lehetővé teszik. Hidrosztatikai egyensúlyi állapotot feltételezve, a vízpára R_w speciális gázállandójának ismeretében az (5.7) összefüggés segítségével a vízpára ρ_w sűrűsége is meghatározható:

$$\frac{e}{T} = R_w \cdot \rho_w \quad (5.7)$$

5.1 táblázat. A becsült paraméterek lineáris trendje

paraméter	lineáris modell (T_s (K))	szórás
N_{d0}	$292.49 - 0.968 (T_s - 268)$	4.0
h_d (m)	$62807.77 - 1232 (T_s - 268)$	6.3 km
a_d	$6.79 - 0.16 (T_s - 268)$	0.8

5.2 táblázat. A becsült paraméterek lineáris trendje

paraméter	lineáris modell (T_s (K))	szórás
N_{w0}	$22.80 + 0.849 (T_s - 268)$	7.8
h_w (m)	$11338.6 - 8.00 (T_s - 268)$	1.0 km
a_w	$4.70 - 0.06 (T_s - 268)$	1.9

5.3 táblázat. A becült paraméterek lineáris trendje

paraméter	lineáris modell (T_s (K))	szórás
α (K/m)	$-0.0069 - 0.000037 (T_s - 268)$	0.0005
T_m (K)	$265.99 + 0.38 (T_s - 268)$ $(163.66 + 0.38 T_s)$	2.4
Bevis et al. (1991)	$70.20 + 0.72 T_s$	-

A korábban már bemutatott példának megfelelően az 5.13 ábra egy parciális páranymás görbét és a levezetett sűrűség értékeket mutatja. Jól látható, hogy a görbék lefutása a nedves refraktivitással is szoros összefüggést mutat (5.5 ábra) és a páranymás a domináns paraméter. A sűrűség magassági integráljával kiszámíthatjuk az egységnyi területre vonatkozó páraoszlop tömegét, az IWV integrált páratartalmat. A kg/m^2 dimenzióban adott érték szám szerint azonosnak tekinthető az egységnyi területen kihullható vízoszlop mm dimenzióban adott magasságával.

Az IWV értéket közvetve is meghatározhatók. A zenit irányú nedves késleltetést (ZWD) a nedves refraktivitás trapéz módszer szerinti numerikus integráljával határozzuk meg, és a GPS esetében alkalmazott

$$IWV = \frac{ZWD}{Q(T_m)}, \quad (5.8)$$

$$Q(T_m) = 10^{-8} \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w \quad (5.9)$$

összefüggéseket használjuk, ahol R_d a száraz levegő speciális gázállandója, és az aktuális közepes hőmérsékletet (T_m) szintén a ballonszondázásból határozható meg. Ezzel a két megközelítéssel a mérési és modellhibákra vonatkozó információkhoz juthatunk.

A különböző modellek összehasonlításánál megvizsgáltam, hogy a ballon adatokból származó zenitirányú száraz (ZHD) és nedves (ZWD) késleltetések, amit referencia értékeknek tekinthetünk (R), mennyire térnek el az I. mellékletben adott Hopfield (H) és a Saastamoinen (S) modellekből származó értékektől, továbbá az 5.1 és 5.2 táblázatban adott illesztett Hopfield modelltől (IH). A nedves késleltetésnél az (5.5) modellre vonatkozó egyedileg illesztett értékeket (M) is meghatároztam.

A PWV kihullható vízmennyiség referencia értékeit (R) a levezetett sűrűség numerikus integrálásával számítottam ki. Alternatív megoldásként a numerikus integrálból származó referencia ZWD értékekből (R_2) és egyedileg illesztett (5.5) modell (M) késleltetéseiből származó értékeket is megvizsgáltam az egyedileg illesztett T_m paraméterek alkalmazásával. A Hopfield (H), a Saastamoinen (S) és az illesztett Hopfield (IH) modellek alapján két megoldást is megvizsgáltam, az illesztett és a Bevis et al. (1991) által levezetett T_m lineáris modell felhasználásával (5.3 táblázat).

Az egyes modelleknél a Thayer (1974) k_1 , k_2 és k_3 konstansait, a Hopfield modellnél az (5.10), a Saastamoinen modellnél az (5.11) összefüggéseket és paramétereket alkalmaztam. A meteorológiai állomásoknál a KLFI ($\varphi=47^\circ 26'$, $h_s=83$ m) és a Szeged ($\varphi=46^\circ 15'$, $h_s=140$ m) értékekkel vettem figyelembe.

$$\begin{aligned} ZHD &= 10^{-6} k_1 \frac{P_s (h_d - h_s)}{T_s} \frac{1}{5} \\ ZWD &= 10^{-6} \left(\frac{k_3}{T_s} + (k_2 - k_1) \right) \frac{e_s (h_w - h_s)}{T_s} \frac{1}{5}, \\ h_d - h_s &= 40136 + 148.72(T_s - 273.15) \\ h_w - h_s &= 11000 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned}
ZHD &= 10^{-6} \frac{k_1 \cdot R_d}{g_m} P_s \\
ZWD &= 10^{-6} \left(\left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 \right) \frac{R_d}{4g_m} e_s + \left(\frac{k_3 \cdot R_d}{4g_m - R_d \alpha} \right) \frac{e_s}{T_s} \right), \\
g_m &\cong 9.784(1 + 0.0026 \cos 2\varphi + 0.00000028 h_s) \\
R_d &= 287.0583 \\
R_w &= 461.5254 \\
\alpha &= 0.0065
\end{aligned} \tag{5.11}$$

A statisztikai vizsgálatok eredményeit az 5.4 és 5.5 táblázatok foglalják össze.

Az 5.4 táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy a Hopfield és Saastamoinen modellből származó statisztikák gyakorlatilag azonosnak tekinthetők, csak néhány mm eltérést mutatnak. A ZHD késleltetések ≈ -2 cm szabályos (átlagos) hibával és ≈ 2 cm szórással jellemezhetők, de a legnagyobb eltérések az 5 cm értéket is elérhetik. A ZWD esetében a szabályos hibák valamelyest kisebbek, a szórássok valamelyest nagyobbak, de a legnagyobb eltérések a 9 cm értéket meghaladták. A nedves összetevő pontatlansága különösen feltűnő, ha a vizsgált időszakban az átlagos ($ZHD=2.280$ m és $ZWD=0.075$ m) késleltetéseket is figyelembe vesszük.

Az R-M értékek kedvező statisztikája, viszont azt mutatja, hogy a (5.5) modell nagyon jól megközelíti a referenciái értékeket és a legnagyobb eltérések is csak 1 cm körüliek. Éppen ezért nagyon meglepő az a látszólagos ellentmondás, hogy az illetékes Hopfield modellnél csak a szabályos (átlagos) hiba kedvezőbb (a ZHD esetében közel nulla), a többi érték viszont rosszabb.

Az 5.5 táblázat alapján megállapíthatjuk, hogy a referencia értékek, amelyek csak egy fizikai konstans alkalmaznak, gyakorlatilag azonosak az alternatív megoldással, amely öt fizikai paramétert is tartalmaz. Az (5.8) modell hibája tehát gyakorlatilag elhanyagolható.

Az 5.4 táblázat ZWD késleltetése és az 5.5 táblázat PWV értékei között szoros összefüggés van, ezért természetes, hogy a statisztikai jellemzők is hasonló viselkedést mutatnak. A vizsgált esetekben 1 cm nedves késleltetésnek nagyjából 1-2 mm/m² kihullható vízmennyiség felel meg és a T_m értékek (≈ 3 K) eltérései gyakorlatilag elhanyagolhatók.

5.4 táblázat. A zenitirányú késleltetések statisztikai jellemzői

	ZHD (mm)			ZWD (mm)			
	R-H	R-S	R-IH	R-M	R-H	R-S	R-IH
átlag	-20	-16	1	2	13	14	10
szórás	16	16	25	4	23	23	32
min.	-57	-53	54	-10	-17	-15	-39
max.	36	39	56	13	88	87	106

5.5 táblázat. A kihullható vízmennyiség statisztikai jellemzői

PWV (mm/m ²)	T_m egyedi		T_m illesztett			T_m Bevis		
	R-R2	R-M	R-H	R-S	R.IH	R-H	R-S	R-IH
átlag	0.2	0.5	2.3	2.4	1.8	2.3	2.4	1.8
szórás	0.1	0.6	3.7	3.7	5.0	3.7	3.7	5.0
min.	0.1	-1.1	-2.4	-2.2	-5.9	-2.4	-2.2	-5.9
max.	0.6	2.0	14.6	14.5	17.4	14.5	14.5	17.3

A tapasztalt ellentmondások és a nagy szélső értékek különösen elgondolkodtatóak, mivel számos esetben a modellek csak nagyon kis eltérést mutattak a referencia értékekhez képest. Az eredeti Hopfield és Saastamoinen modellek vagy egységesen jó, vagy egységesen rossz egyezést szolgáltattak.

Az 5.14 ábrán egy nedves refraktivitási görbét mutatunk be (Budapest, 12 UT, 1991.11.02):

- az egyedi modell paraméterei: $N_{ws}=20.46$, $a_w=12.96$, $h_w-h_s=12160$ m.
- a Hopfield modell paraméterei: $N_{ws}=19.48$, $a_w=4$, $h_w-h_s=11000$ m.

A referencia értékhez viszonyított ZWD eltérés az egyedi modellnél 13 mm, a Hopfield és Saastamoinen modelleknél -12 mm. Az egyedi modell eltérése a 4-9 km közötti irregularitásokból származik. A Hopfield modell esetében az alakfüggvény okozza az eltérést.

Az 5.15 ábra két jellegzetességet is mutat (Budapest, 00 UT, 1991.11.04):

- az egyedi modell paraméterei: $N_{ws}=33.18$, $a_w=2.57$, $h_w-h_s=12580$ m,
- a Hopfield modell paraméterei: $N_{ws}=24.34$, $a_w=4$, $h_w-h_s=11000$ m.

A referencia értékhez viszonyított ZWD eltérés az egyedi modellnél -10 mm, a Hopfield modellnél 54 mm és a Saastamoinen modellnél 55 mm. Az eltéréseket a felszín közeli irregularitások okozzák, amely a hőmérsékletben is jelen van. A felszíni refraktivitás tehát nem reprezentatív és részben az alakszámok is eltérőek. A Hopfield modell eltérését ez a két tényező okozta.

Az 5.16 ábra egy ideális nedves refraktivitás mutat be (Szeged, 12 UT, 1991.11.07):

- az egyedi modell paraméterei: $N_w=28.24$, $a_w=3.69$, $h_w-h_s=10177$ m,
- a Hopfield modell paraméterei: $N_w=28.97$, $a_w=4$, $h_w-h_s=11000$ m.

A referencia értékhez viszonyított ZWD eltérés az egyedi modellnél -1 mm, a Hopfield modellnél -3 mm és a Saastamoinen modellnél -4 mm. A modell paraméterek is nagyon közeli értékek, ezért ebben az esetben a nedves összetevő is jól megközelíti a hidrosztatikai egyensúlyi állapotot.

Az 5.17 ábra egy hiányos száraz görbét mutat (Szeged, 00 UT, 1991.11.06). Az utolsó érték a szokásos 34-35 km helyett csak 18 km magasságból származik:

- az egyedi modell paraméterei: $N_{ds}=275.58$, $a_d=3.62$, $h_d-h_s=37354$ m,
- a Hopfield modell paraméterei: $N_{ds}=279.27$, $a_d=4$, $h_d-h_s=40909$ m.

A referencia értékhez viszonyított ZHD eltérés a Hopfield modellnél -57 mm, a Saastamoinen modellnél -53 mm. Annak ellenére, hogy az alakszám és a magasság is nagyon hasonló, az N_s értékek eltérése miatt a párhuzamosan futó görbék közötti eltérés okozza a nagy hibát.

Az 5.18 ábra is kedvezőtlen száraz görbét ábrázol (Szeged, 00 UT, 1991.11.02):

- az egyedi modell paraméterei: $N_{ds}=288.48$, $a_d=9.19$, $h_d-h_s=83709$ m,
- a Hopfield modell paraméterei: $N_{ds}=295.49$, $a_d=4$, $h_d-h_s=39497$ m.

A Hopfield modell eltérése 36 mm és a Saastamoinen modelle 39 mm. Ebben az esetben a paraméterek is nagyon eltérőek, ezért a hidrosztatikai egyensúlyi állapot itt sem érvényesül.

Az 5.19 ábrán kedvező száraz görbét mutatunk be (Szeged, 00 UT, 1991.10.30):

- az egyedi modell paraméterei: $N_{ds}=288.74$, $a_d=6.04$, $h_d-h_s=56564$ m,
- a Hopfield modell paraméterei: $N_{ds}=292.64$, $a_d=4$, $h_d-h_s=39705$ m.

A Hopfield modell eltérése -4 mm a Saastamoinen modelle -1 mm. Ebben az esetben a hidrosztatikai egyensúly is jól érvényesül. A metsző görbék eltérései kiegyenlítik egymást.

Az 5.20 és az 5.21 ábrákon az egyedi és a Saastamoinen modellből származó zenitirányú késleltetések különbségét ábrázoltuk a napok függvényében. Jól látható, hogy az első hat napon (40% adat) viszonylag jól megközelítik a hidrosztatikai egyensúlyi állapotot, míg a többi napon (60% adat) jelentős anomáliák tapasztalhatók.

Most már a IH modell viselkedését is megérthetjük. A rövid időszak és az anomáliák miatt a felszíni hőmérséklet lineáris trendje nem elég pontosan írta le a vizsgált jelenséget. Mivel a kedvező és kedvezőtlen szakaszok közel egyenlő mértékben voltak jelen, a trend a két csoport közé esett, így a közel nulla átlagos eltérések mellett nagyobb szórások adódtak.

Az 5.6a-c, 5.8a-c, 5.20 és 5.21 ábrák alapján nagyon jellegzetes tartományokat jelölhetünk ki. Ha a paramétereket ezekben a lépésenkénti tartományokban illesztettük volna, kedvezőbb eredmé-

nyeket kapnánk. Ez különösen a száraz összetevő esetében lehet célszerű, mivel nagyon reprezentatív képet mutat, és a kihullható vízmennyiség meghatározásának is egyik kritikus pontja a száraz késleltetés lehető legpontosabb meghatározása.

A kedvező intervallumra vonatkozó Hopfield, Saastamoinen és az egyedi nedves késleltetésre vonatkozó statisztikákat az 5.6 táblázat foglalja össze (az IH modell elhagyásával). Az eredmények most jóval kedvezőbb képet mutatnak, mint a 5.4 táblázat esetében. Az átlagos ZHD eltérések és a szórások is 1 cm körüliek, amelyek még maradék szabályos jellegű hibák jelenlétére is utalnak. A ZWD statisztikák meglepő módon még kedvezőbb képet mutatnak, az átlagos hibák gyakorlatilag nullák és a szórás is kedvezőbb 1 cm-nél.

Az 5.6a-c ábrák alapján kiválasztottam három jellemző intervallumot, amelyben az egyedileg illesztett hidrosztatikus modellek paramétereikhez a felszíni hőmérséklet és a napok függvényében is lineáris trendet illesztettem. A lineáris trendeket az 5.7 táblázat tartalmazza. Az új paraméterekkel megismételt illesztett Hopfield modellre (IH) vonatkozó vizsgálatok statisztikai jellemzőit az 5.8 táblázat foglalja össze. A nedves modell intervallumait az 5.8a-c ábrák alapján jelöltem ki. A zavart időszakok itt már közel egy nappal korábban jelentkeztek. A vizsgálatok eredményeit az 5.9 és 5.10 táblázat tartalmazza.

Az első intervallumban, mind a két esetben, a felszíni hőmérséklet és az idő szerinti lineáris függvény alkalmazásával is gyakorlatilag azonos eredményeket adódnak. A ZHD érték átlagos hibája lényegesen csökkent (0-1 mm), a ZWD értékeké romlott (5-6 mm). A szórások is valamelyest romlottak, de továbbra is 1 cm értékkel jellemezhetők. A másik két intervallumban, az időben illesztett paraméterek lényegesen kedvezőbbek, mint a felszíni hőmérséklet szerinti modelleknél. Az együttes statisztikák alapján a ZHD értékek megbízhatóan modellezhetők. A ZWD értékek valamelyest kedvezőtlenebbek és nagyobb szélsőértékek is előfordulhatnak.

A budapesti és a szegedi adatok független feldolgozásával még kedvezőbb értékek adódnának. Az együttes feldolgozás azonban a regionális hatásokat is jól jellemzi.

Az 5.22 ábrán fekete körök jelölik azokat a meteorológiai állomásokat, amelyeknek a háromóránkénti adatai is ismertek. Megvizsgáltam, hogy a felszínközeli refraktivásokat felhasználhatjuk-e tetszőleges helyre történő interpoláció céljára. A refraktivásokat sztochasztikus változóknak tekintettem és a legkisebb négyzetes kollokáció módszerét választottam (3.5 fejezet).

Az első lépésben a trendet kell leválasztani, amit kiegyenlítéssel is megtehetünk. Mivel a felszíni adatok magassági eloszlása nem reprezentatív, ezért az adott tengerszintfeletti magasságra vonatkozó száraz és nedves felszíni értékeket a Hopfield modell segítségével a tengerszintre redukáltam:

$$N_0 = N_s \left(\frac{h - h_s}{h} \right)^{-a}, \quad (5.12)$$

ahol h és a az aktuális összetevő paraméterei, N_s a h_s magasságú pontban mért refraktivitás.

Az azonos szintre vonatkozó értékek trendje polinom illesztéssel határozható meg. A bemutatott vizsgálatoknál az átlag értéket tekintettem trendnek és ezt vontam le az egyes felszíni refraktivitásokból. Az így előállított sztochasztikus változók nulla várható értékűek, és segítségével a tapasztalati autokovariancia függvény (ACF) paraméterei is becsülhetők. A vizsgálatok alapján a harmadfokú Markov függvényt találtam az egyik legalkalmasabb megközelítésnek:

$$C(r) = \sigma^2 \left(1 + \frac{r}{\alpha} + \frac{r^2}{2\alpha^2} \right) \exp \left(-\frac{r}{\alpha} \right), \quad (5.13)$$

ahol r a két pont közötti távolság (az esetünkben km), σ a szórás és α a korrelációs távolság (a függvény itt veszi fel a fél értéket).

A korábbi vizsgálatokkal összhangban a 00 és 12 (UT) időpontra vonatkozó paramétereket az 5.23 és 5.24 ábrák mutatják be. (A háromóránkénti adatokkal a paraméterek sűrítethetők és interpolálhatók.) A α értékek a száraz, a σ értékek általában a nedves összetevőnél nagyobbak.

5.6 táblázat. A zenitirányú késleltetések statisztikai jellemzői

	ZHD (mm)		ZWD (mm)		
	R-H	R-S	R-M	R-H	R-S
átlag	-14	-11	2	1	2
szórás	8	7	4	7	7
min.	-26	-22	-6	-14	-14
max.	0	3	9	14	16

5.7 táblázat. A becsült paraméterek lineáris trendje

nap (D)	paraméter	lineáris modell (T_s (K), D (nap))	szórás
1.0-5.5	N_{d0}	$291.85 - 0.4149 (T_s - 268)$	0.5
		$289.60 - 0.2438 (D - 1)$	1.7
	h_d (m)	$58058.6 - 572.3 (T_s - 268)$	3.2 km
		$55525.8 - 587.7 (D - 1)$	3.9 km
	a_d	$6.25 - 0.08 (T_s - 268)$	0.4
6.0-9.5		$5.90 - 0.09 (D - 1)$	0.5
	N_{d0}	$290.86 - 1.1607 (T_s - 268)$	3.8
		$287.37 - 5.1586 (D - 6)$	2.5
	h_d (m)	$70639.2 - 1640.4 (T_s - 268)$	6.2 km
		$69015.8 - 8234.13 (D - 6)$	2.6 km
10.0-12.0	a_h	$7.65 - 0.21 (T_s - 268)$	0.8
		$7.41 - 1.02 (D - 6)$	0.3
	N_{d0}	$284.87 - 0.2873 (T_s - 268)$	2.2
		$279.15 + 2.3440 (D - 10)$	1.6
	H_d (m)	$48054.4 - 346.0 (T_s - 268)$	3.9 km
		$39095.6 + 4887.0 (D - 10)$	1.8 km
	a_d	$4.92 - 0.04 (T_s - 268)$	0.5
		$3.81 + 0.59 (D - 10)$	0.2

5.8 táblázat. A ZHD késleltetések statisztikai jellemzői (R-IH)
(a felszíni hőmérséklet (T) és a napok (D) függvényében)

ZHD (mm)	1.0-5.5		6.0-9.5		10.0-12.0		együttes	
	T	D	T	D	T	D	T	D
Átlag	-1	0	2	1	-1	0	0	0
szórás	10	9	27	15	22	13	20	12
min.	-14	-15	-36	-23	-45	-21	-45	-23
max.	19	16	62	26	23	22	62	26

A $\sigma = 1$ esetben az (5.13) képlet az autokorrelációs függvény szerepét tölti be. A vizsgálatok alapján a legkisebb és a legnagyobb α értékhez tartozó autokorrelációs függvényt az 5.25 ábra mutatja be. A rövidebb korrelációs távolságok az első napokban jelentkeztek, ekkor csak a nagyon közeli állomások között jelentős a korreláció, ezért itt a trend a domináns komponens. A legnagyobb korrelációs távolság a zavart időszak közepén jelentkezett, ezért az állomások között nagy területen is szoros a kapcsolat. A legnagyobb szórás is ekkor jelentkezett a nedves komponensnél. Az 5.22 ábra az aktuális nedves sztochasztikus változókat is feltünteti. Az ország keleti részén nagyobb negatív, a nyugati részen nagyobb pozitív értékek találhatók. Az átlagtól való nagy, de területileg egységes eltérés okozta a kiugró szórást és a nagy korrelációs távolságot.

Az 5.22 ábrán fehér körök jelölik az ellenőrzésként felhasznált meteorológiai állomásokat. Az egyik a KLFI, amely a budaörsi meteorológiai állomáshoz nagyon közel található, a másik a kecskeméti, amely az Alföld közepén helyezkedik el, és csak az első tíz nap hatóránkénti adatai ismertek. Ebben a két pontban, amely nem vett részt az autokorrelációs függvények előállításában a kolláció módszerével határoztam meg a refraktivitási értékeket (3.5 fejezet, 3.87 képlet).

5.9 táblázat. A becsült paraméterek lineáris trendje

nap (D)	paraméter	lineáris modell (T_s (K), D (nap))	szórás
1.0-6.5	N_{w0}	$26.10 - 0.2685 (T_s - 268)$	2.1
		$23.43 + 0.3163 (D - 1)$	2.3
	$h_w(m)$	$10768.0 + 65.0 (T_s - 268)$	0.9 km
		$10786.7 + 151.6 (D - 1)$	0.9 km
	a_w	$4.53 + 0.12 (T_s - 268)$	2.3
		$3.33 + 0.73 (D - 1)$	2.0
7.0-9.0	N_{w0}	$13.49 + 2.1872 (T_s - 268)$	9.8
		$18.48 + 17.4600 (D - 7)$	3.4
	$h_w(m)$	$13266.0 - 96.5 (T_s - 268)$	0.7 km
		$12623.0 - 374.0 (D - 7)$	0.7 km
	a_w	$2.50 + 0.04 (T_s - 268)$	0.4
		$2.69 + 0.18 (D - 7)$	0.4
9.5-11.5	N_{w0}	$38.15 - 0.2132 (T_s - 268)$	7.3
		$44.79 - 6.2780 (D - 9)$	5.6
	$h_w(m)$	$9455.4 + 72.7 (T_s - 268)$	0.7 km
		$11470.5 - 713.0 (D - 9)$	0.5 km
	a_w	$3.45 + 0.02 (T_s - 268)$	0.7
		$2.90 + 0.50 (D - 9)$	0.5

5.10 táblázat. A ZWD késleltetések statisztikai jellemzői (R-IH)
(a felszíni hőmérséklet (T) és a napok (D) függvényében)

ZWD (mm)	1.0-6.5		7.0-9.0		9.5-11.5		együttes	
	T	D	T	D	T	D	T	D
átlag	6	5	2	2	21	11	9	6
szórás	9	11	31	17	45	25	28	17
min.	-10	-19	-34	-22	-33	-31	-34	-31
max.	21	25	58	25	102	50	102	50

A becsült sztochasztikus értékekhez hozzá adtam a korábban levont trendet, így megkaptam a tengerszintre vonatkozó értékeket, amit a Hopfield modell segítségével a mért értékek magasságába számítottam vissza. A mért és a becsült értékek különbségeit az 5.11 táblázat foglalja össze, ahol a nagyobb és zavart periódushoz kapcsoló értékeket vastagítással emeltem ki. A legnagyobb hiba a nedves összetevőnél a legnagyobb α és σ értéknél jelentkezett.

A száraz összetevők szórása jóval kedvezőbb nappal (12 UT), mint éjszaka (00 UT). A KLFI esetében a szórások egy kicsit kedvezőbbek, ami a közeli meteorológiai állomás hatása lehet. A KLFI nedves összetevő szórása éjszaka is megközelíti a nappali szórás értéket. Kecskemét esetében még kedvezőtlenebb a helyzet, mivel itt található a legnagyobb hiba is. Annak ellenére, hogy a becsült értékek szórása összhangban van a ballon adatok illeszkedésével, a felszíni adatok alkalmazása nagyon drága megoldás lenne. A modern szoftverek egyébként is megfelelően kezelik a troposzférikus korrekciókat.

Ha megvizsgáljuk azokat a görbéket, amelyeket a napok függvényében ábrázoltam (száraz refraktivitás 5.6a-c ábrák, nedves refraktivitás 5.8a-c ábrák, hőmérsékleti gradiens 5.11a ábra, közepes hőmérséklet 5.12a ábra, a Saastamoinen modell eltérései 5.20 és 5.21 ábra, valamint az ACF függvény paraméterei 5.23 és 5.24 ábra), akkor szembetűnő a nagy hasonlóság. Ezt a jellegzetes viselkedést ugyanaz a meteorológia jelenség, egy meleg front átvonulása okozta, amit a 2.2 ábrán szintén feltüntettem.

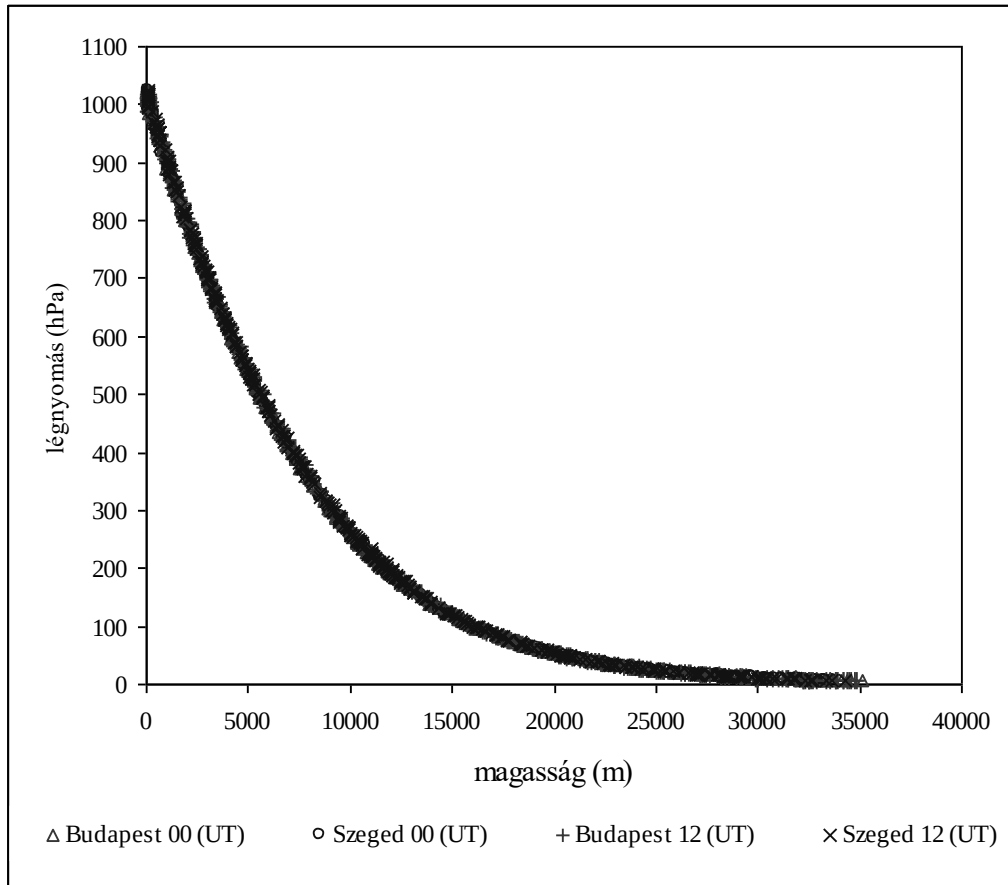
A vizsgálatok első napjaiban többnyire kicsi, napos járást mutató paramétereket találhatók. Ekkor a Hopfield és a Saastamoinen modellek is kedvező értékeket szolgáltatottak, tehát a száraz és nedves összetevők is jól megközelítették a hidrosztatikai egyensúlyi állapotot. Az ACF függvények korrelációs távolsága és szórása ekkor volt a legkedvezőbb. A meteorológiai front átvonulása (5-9

nap) felborította ezt az állapotot, amely nagy lineáris változásokat eredményezett. A következő napok a hidrosztatikai egyensúlyi állapot visszatérése irányába mutató periodikus változásokat mutattak, de az egyensúlyi állapot még nem állt vissza.

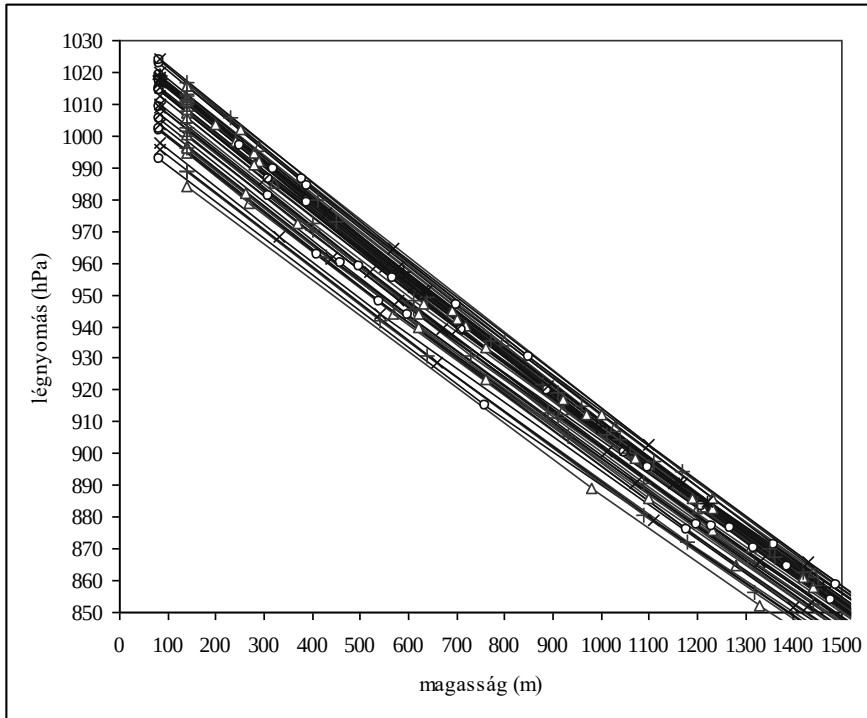
A meteorológiai frontok alapján illesztett módosított Hopfield modell azonban jelentősen megjavíthatja a troposzférikus korrekciókat, amire a kihullható vízmennyiség meghatározásánál van szükség. Ekkor a ballonszondázáshoz közel legalább egy permanens állomásra van szükség, és a permanens állomásokat meteorológiai szenzorokkal is el kell látni.

5.11 táblázat. A becsült refraktivitások hibái

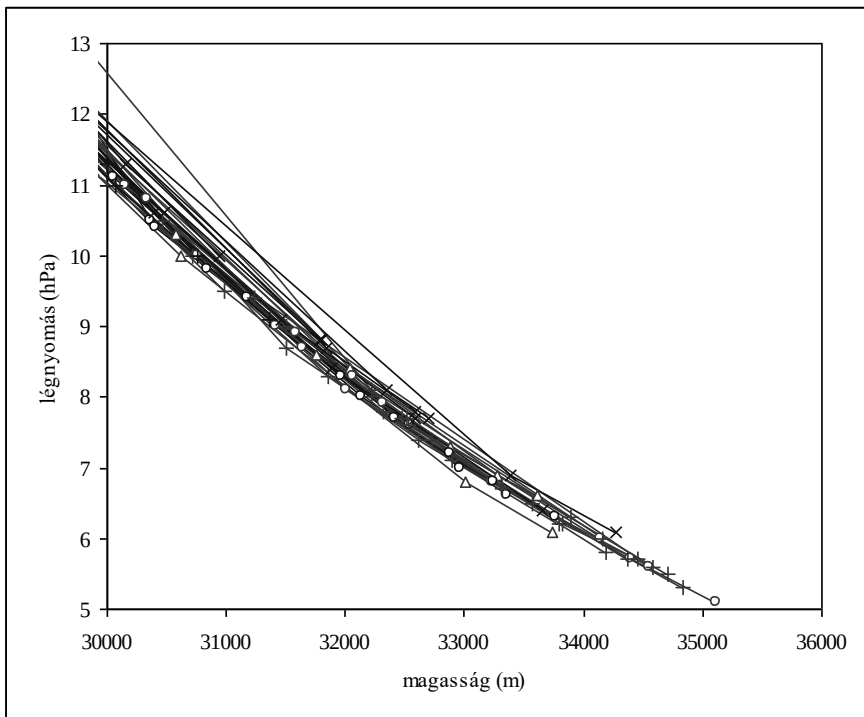
nap	dátum (UT)	KLFI				Kecskemét			
		száraz		nedves		száraz		nedves	
		00	12	00	12	00	12	00	12
1.0	10.28	-2.9		-0.7		0.5		-1.2	
1.5			0.0		-1.5		0.4		3.9
2.0	10.29	-2.3		-0.1		1.3		-2.1	
2.5			-0.1		-2.7		-0.1		2.8
3.0	10.30	-1.5		0.1		0.7		-1.0	
3.5			0.3		-2.9		0.5		1.6
4.0	10.31	-0.4		-1.2		4.3		-3.5	
4.5			0.2		-4.0		-0.1		-0.8
5.0	11.01	-3.0		-0.5		-1.5		-0.3	
5.5			0.2		-4.5		0.5		3.5
6.0	11.02	-4.5		2.9		0.5		-1.3	
6.5			0.0		-3.6		0.6		2.3
7.5	11.03	-0.1		-1.6		-0.3		-1.7	
7.5			0.2		-1.2		0.9		5.0
8.0	11.04	1.1		-1.5		1.9		-0.9	
8.5			-1.0		-2.2		-1.8		10.1
9.0	11.05	-0.8		2.5		0.1		2.5	
9.5			-0.2		-1.0		-0.2		3.8
10.0	11.06	-2.0		2.7		-1.4		1.6	
10.5			0.0		-5.5		0.3		-0.5
11.0	11.07	0.2		1.3		nincs adat			
11.5			0.1		-4.0				
12.0	11.08	0.1		-2.6					
12.5			0.3		-2.1				
13.0	11.09	-1.4		0.6					
13.5			0.1		-2.8				
14.0	11.10	-0.4		-0.8					
14.5			-0.2		-2.2				
átlag		-1.3	0.0	0.1	-2.9	0.6	0.1	-0.8	3.2
szórás		1.5	0.3	1.7	1.3	1.7	0.8	1.7	3.1
min.		-4.5	-1.0	-2.6	-5.5	-1.5	-1.8	-3.5	-0.8
max.		1.1	0.3	2.9	-1.0	4.3	0.9	2.5	10.1



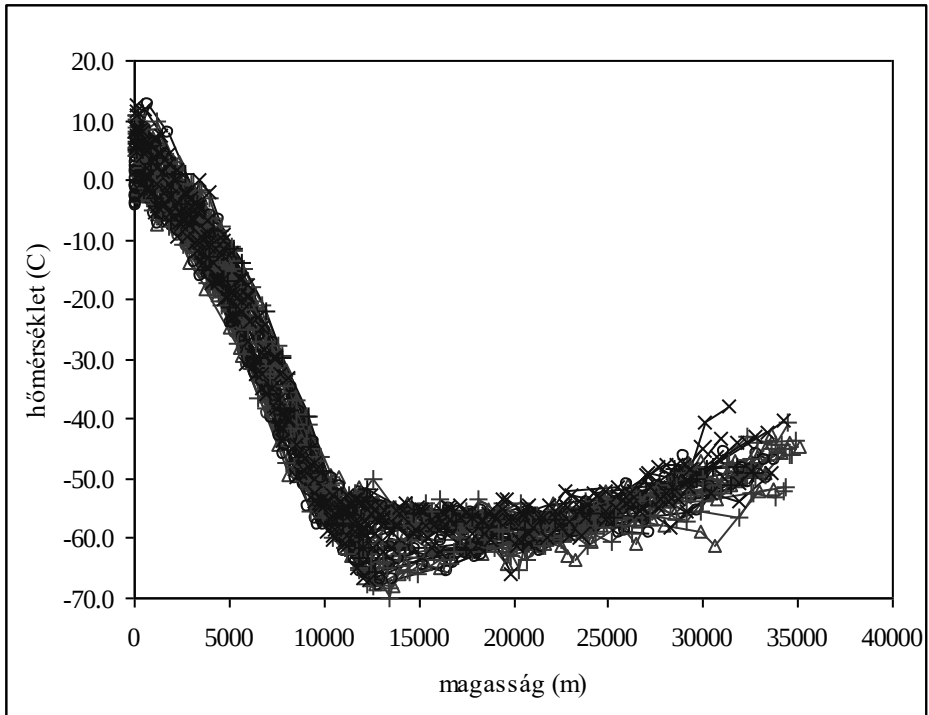
5.1a ábra. Ballonszondázásból származó légnyomás értékek



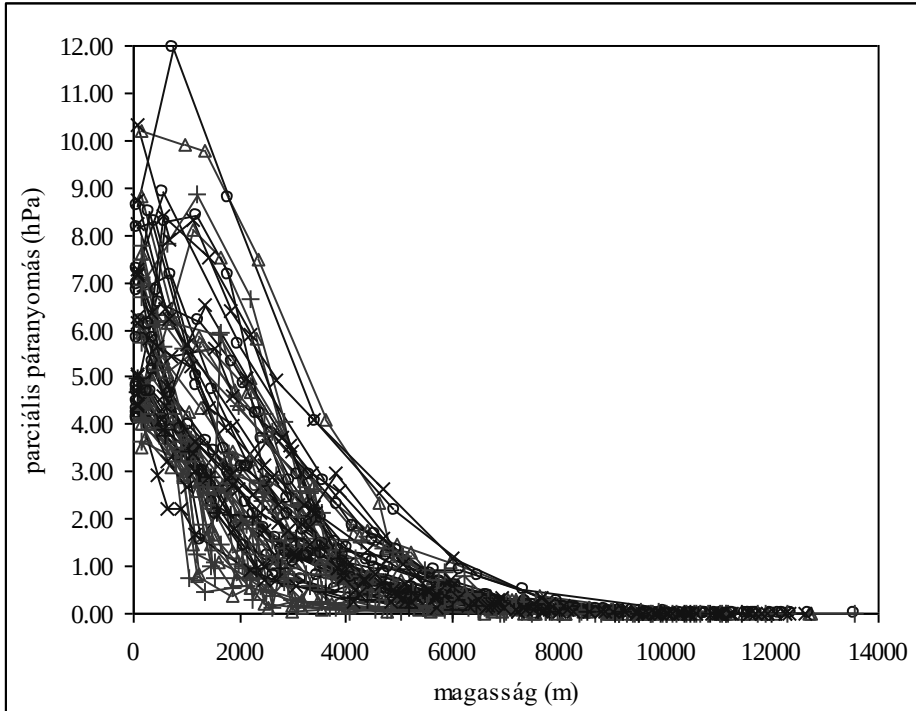
5.1b ábra. Ballonszondázásból származó légnyomás értékek alsó szakasza



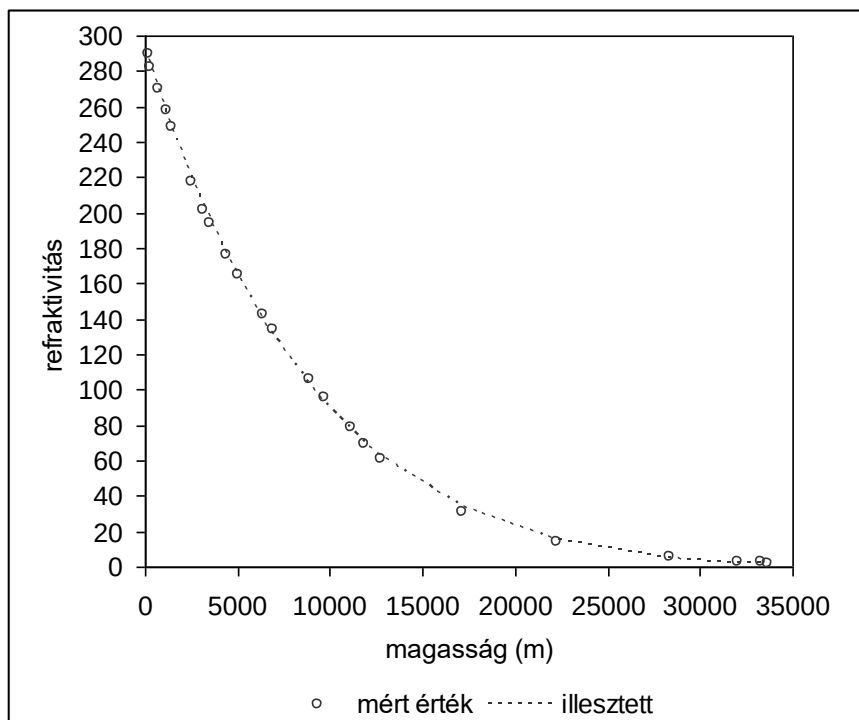
5.1c ábra. Ballonszondázásból származó légnyomás értékek felső szakasza



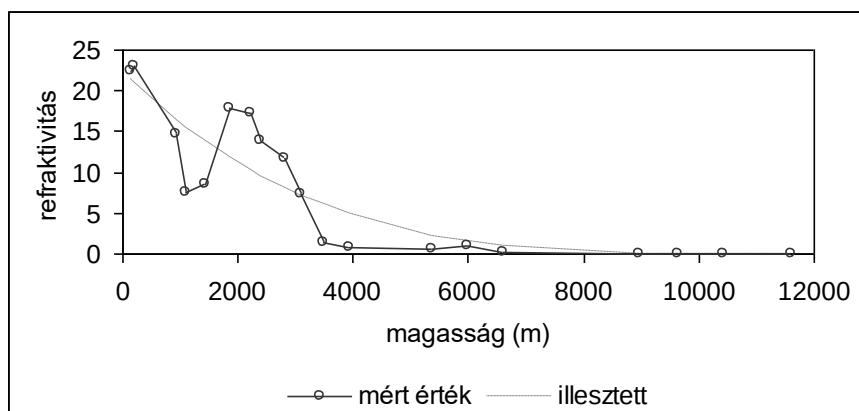
5.2 ábra. Ballonzondázásból származó hőmérséklet értékek



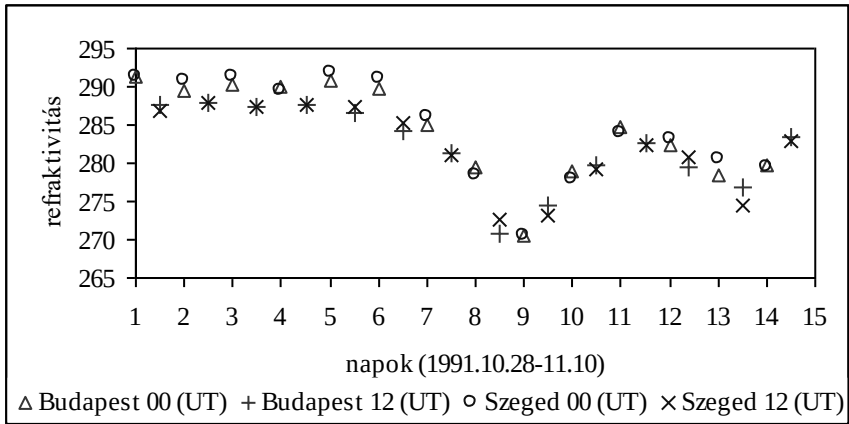
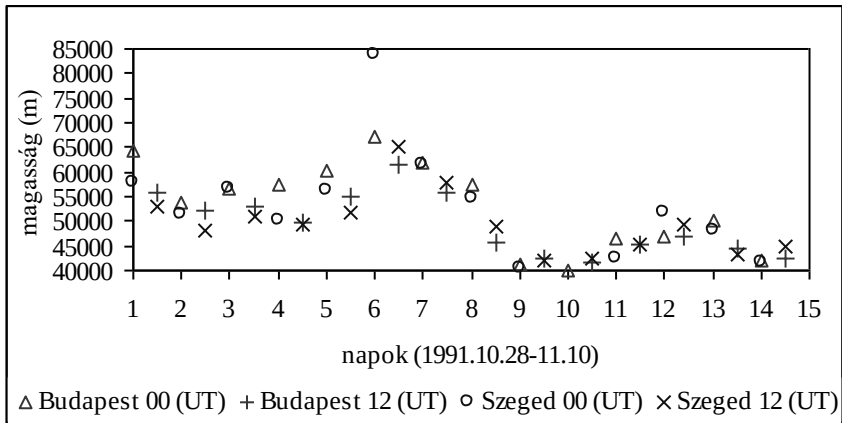
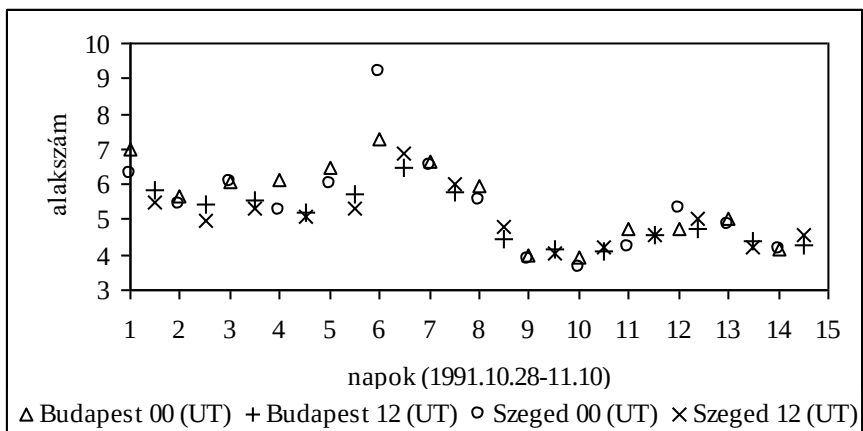
5.3 ábra. Ballonzondázásból származó parciális párányomás értékek

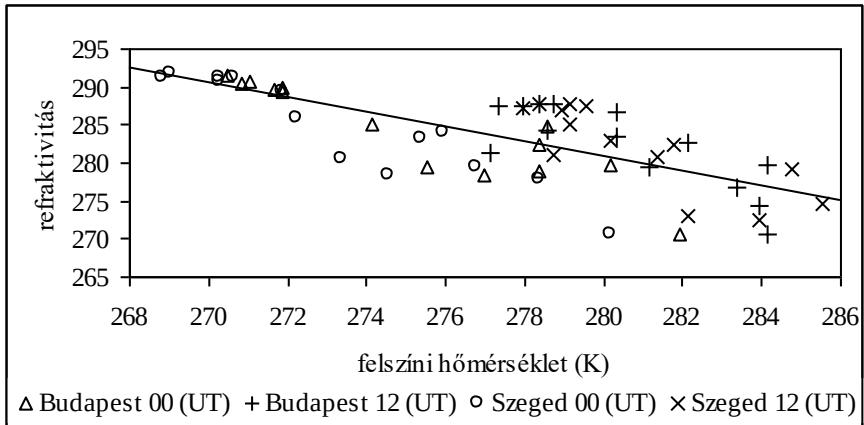
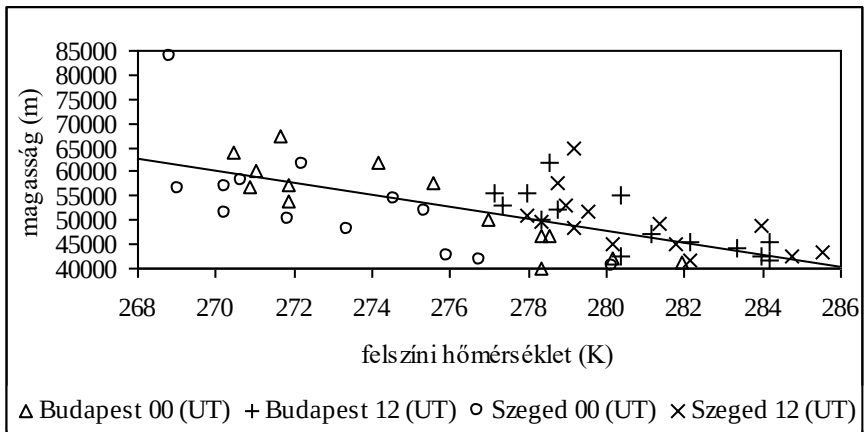
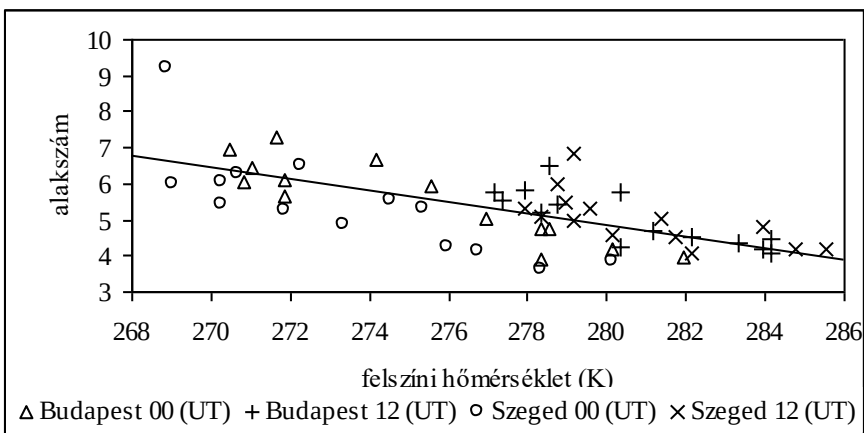


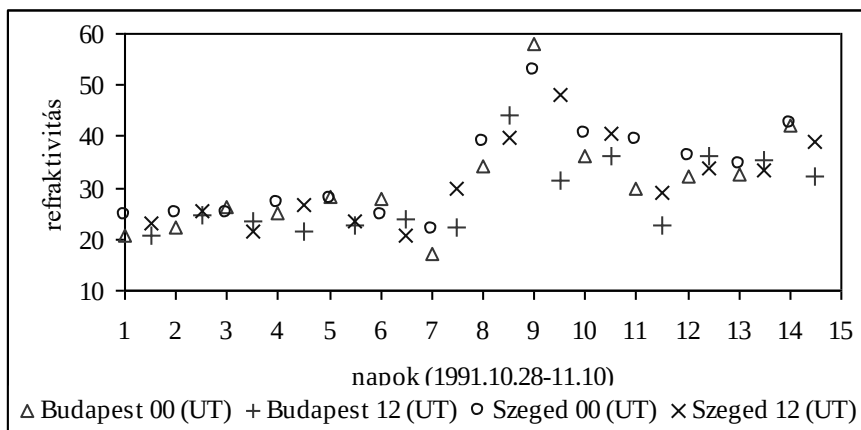
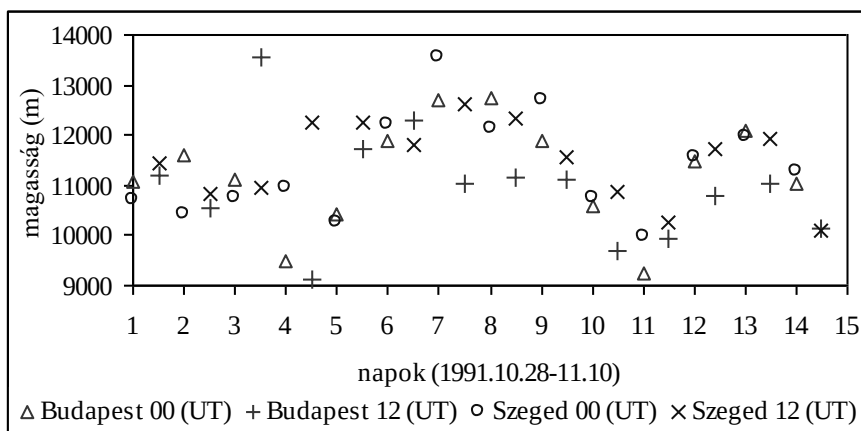
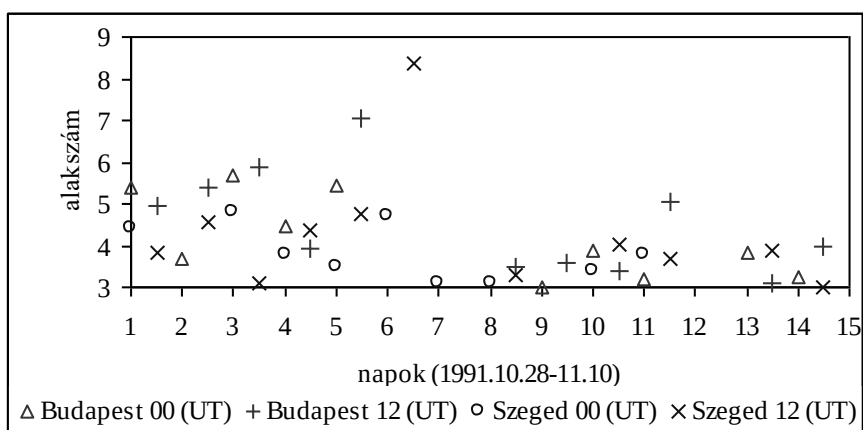
5.4 ábra. Száras refraktivitási görbe (Budapest, 00 UT, 1991.10.28)

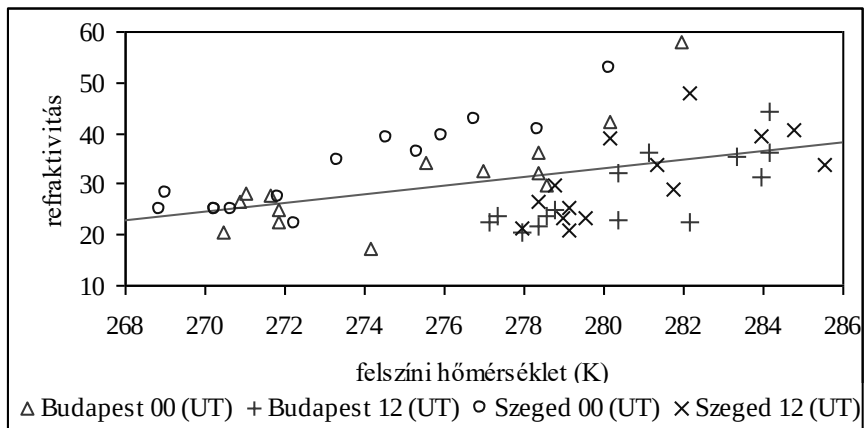
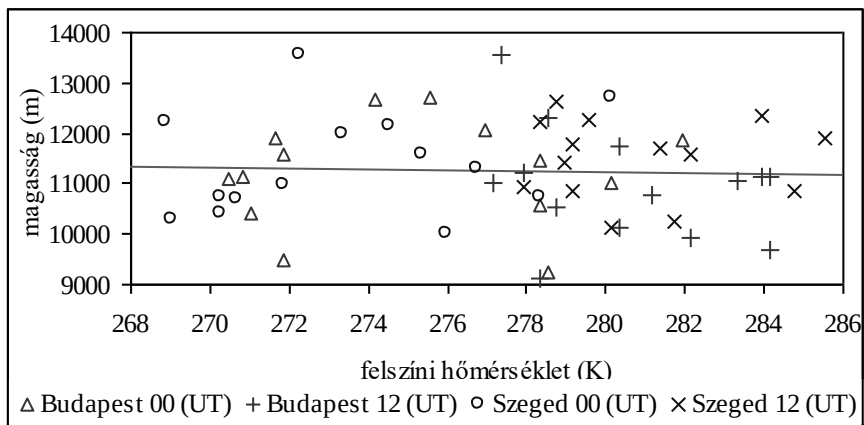
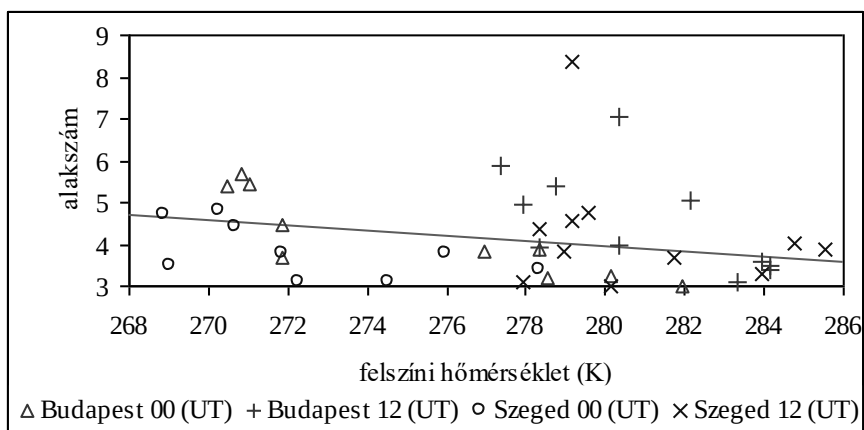


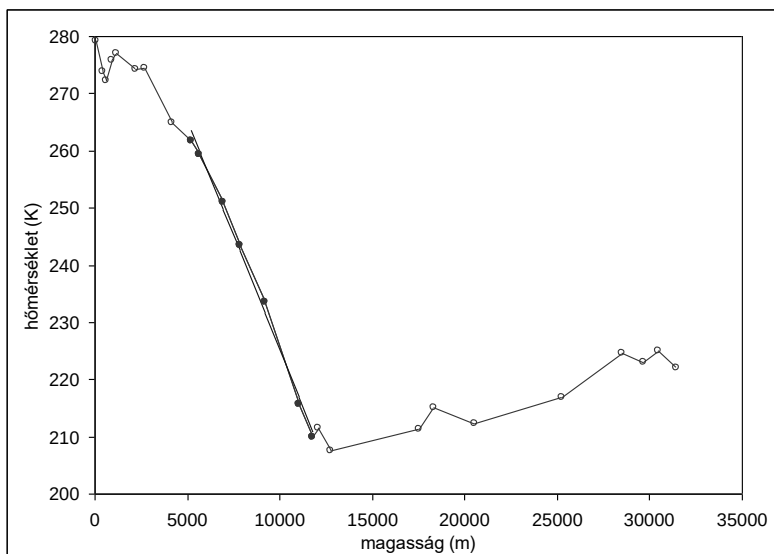
5.5 ábra. Nedves refraktivitási görbe (Budapest, 00 UT, 1991.10.29)

5.6a ábra. Az N_{h0} száraz refraktivitás értékek5.6b ábra. A h_d száraz effektív magasságok5.6c ábra. Az a_d száraz alakszámok

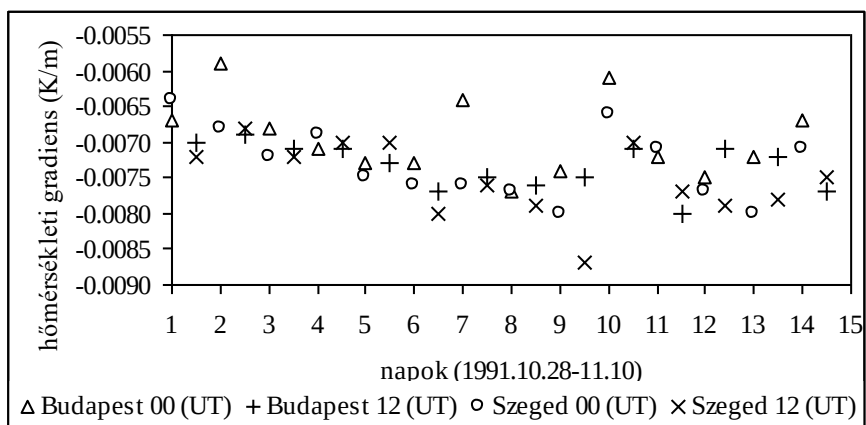
5.7a ábra. Az N_{h0} száraz refraktivitás értékek5.7b ábra. A h_d száraz effektív magasságok5.7c ábra. Az a_d száraz alakszámok

5.8a ábra. Az N_{w0} nedves refraktivitás értékek5.8b ábra. A h_w nedves effektív magasságok5.8c ábra. Az a_w nedves alakszámok

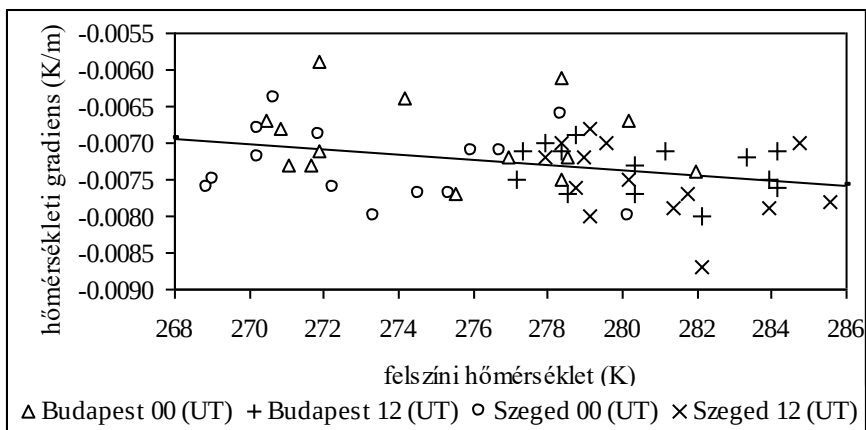
5.9a ábra. Az N_{w0} nedves refraktivitás értékek5.9b ábra. A h_w nedves effektív magasságok5.9c ábra. Az a_w nedves alakszámok



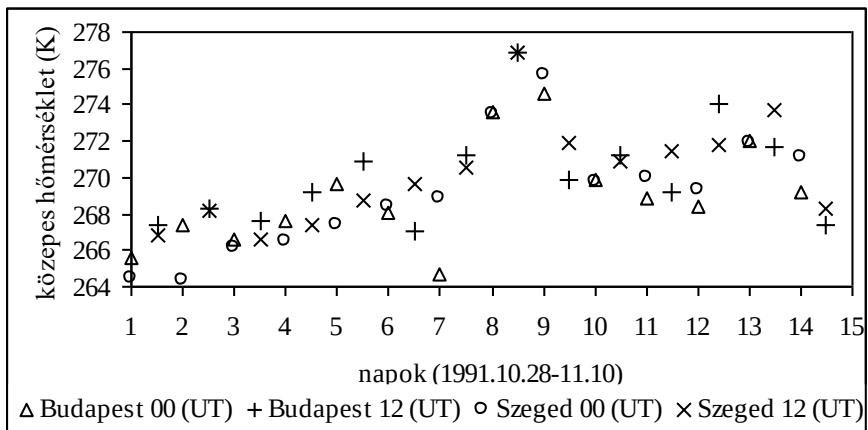
5.10 ábra. Hőmérsékleti gradiens illesztése (Szeged, 12 UT 1991.11.02)



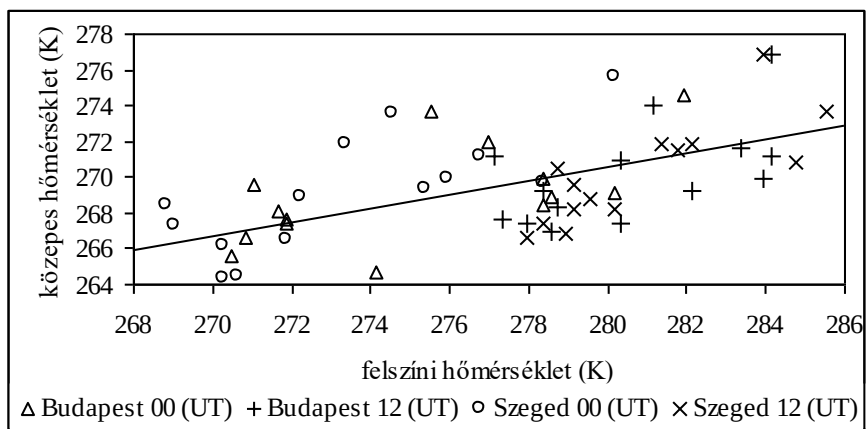
5.11a ábra. Hőmérsékleti gradiens változása



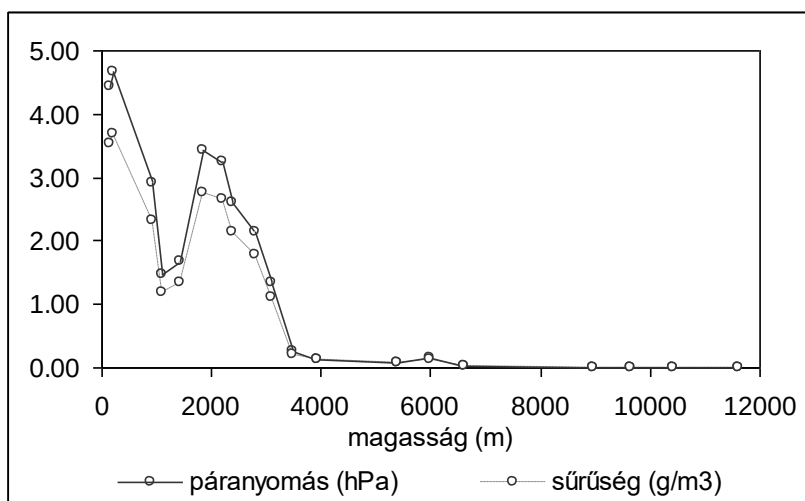
5.11b ábra. Hőmérsékleti gradiens változása



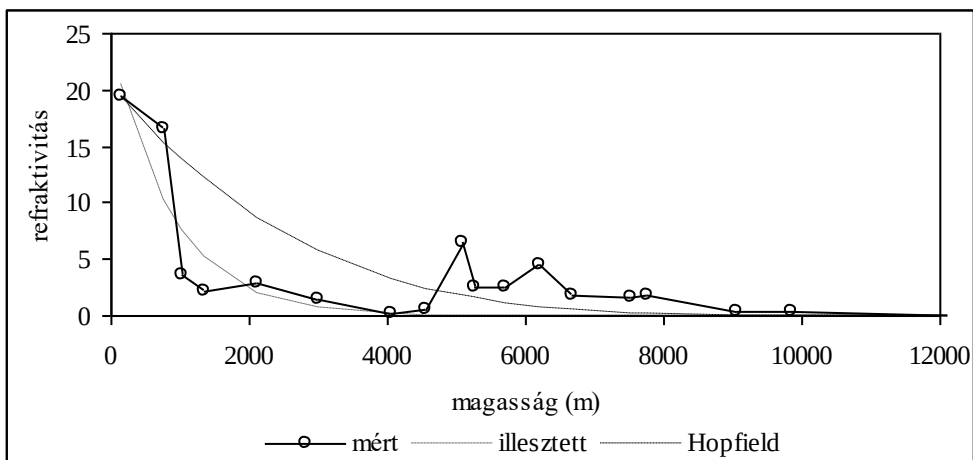
5.12a ábra. A közepes hőmérséklet változása



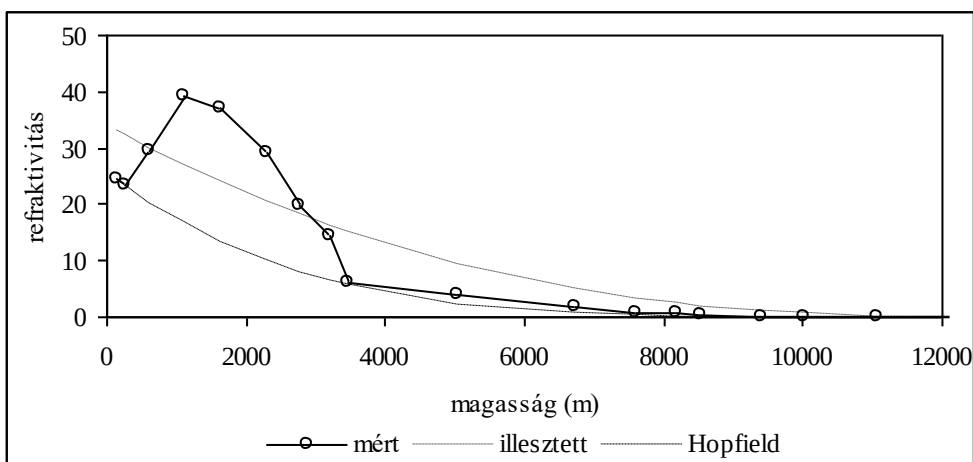
5.12b ábra. A közepes hőmérséklet változása



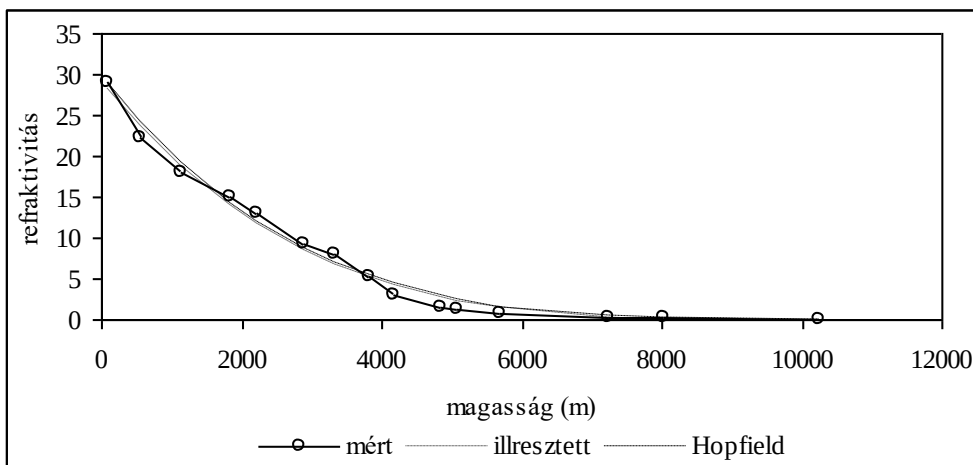
5.13 ábra. Páryomás és sűrűség görbe (Budapest, 00 UT, 1991.10.29)



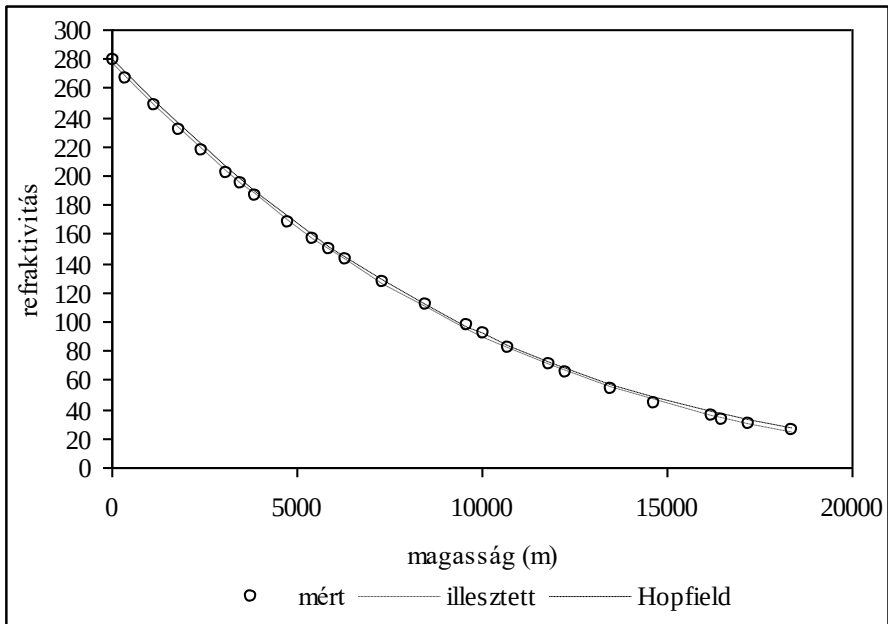
5.14 ábra. Nedves refraktivitási görbe (Budapest, 12 UT, 1991.11.02)



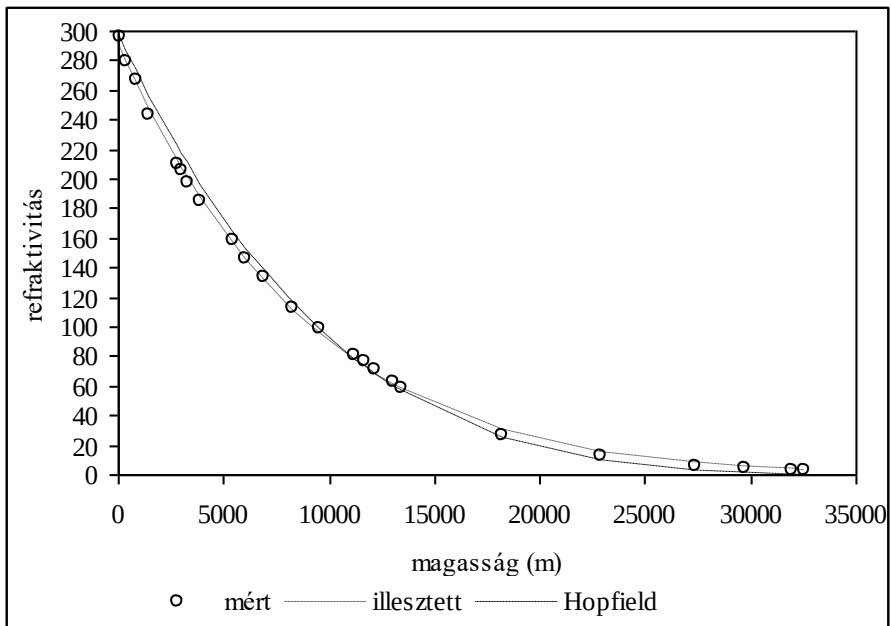
5.15 ábra. Nedves refraktivitási görbe (Budapest, 00 UT, 1991.11.04)



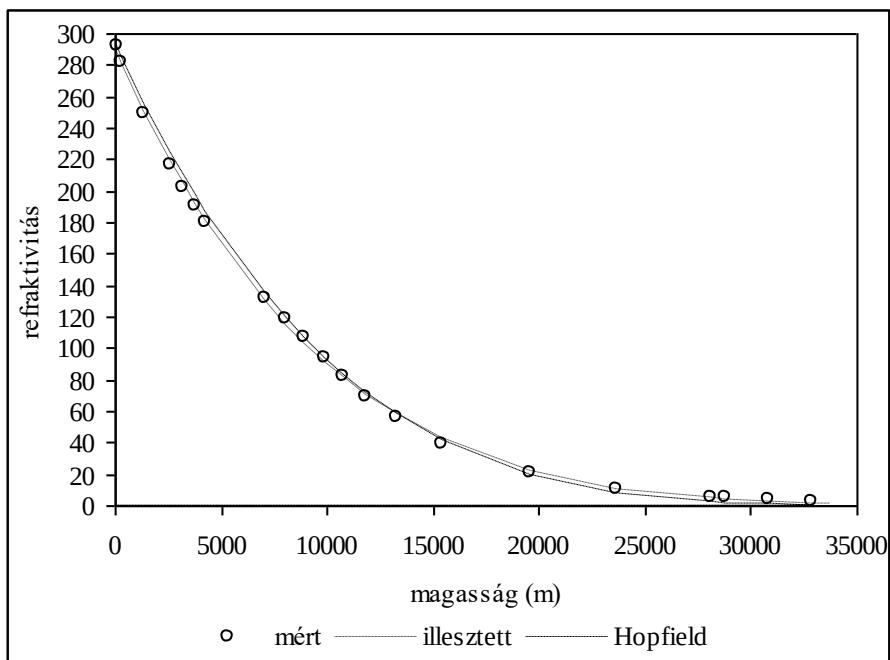
5.16 ábra. Nedves refraktivitási görbe (Szeged, 12 UT, 1991.11.07)



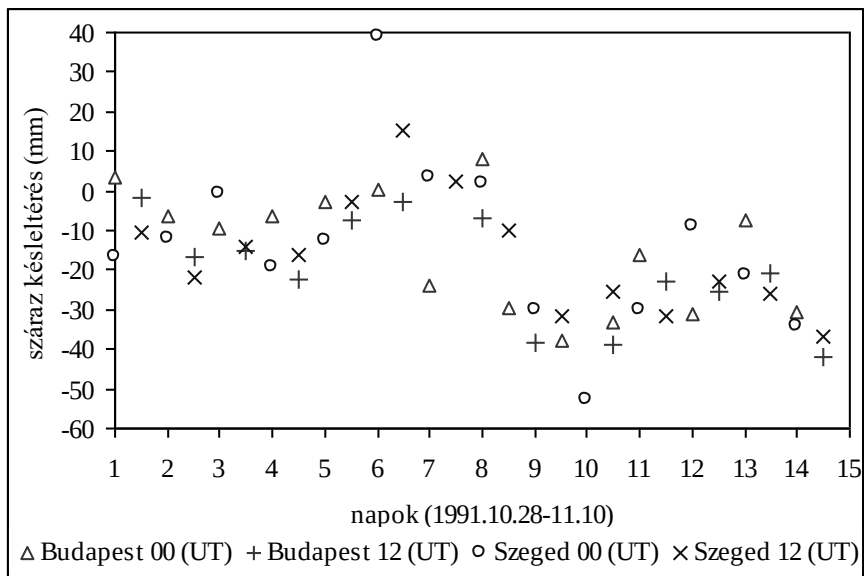
5.17 ábra. Száraz refraktivitási görbe (Szeged, 00 UT, 1991.11.06)



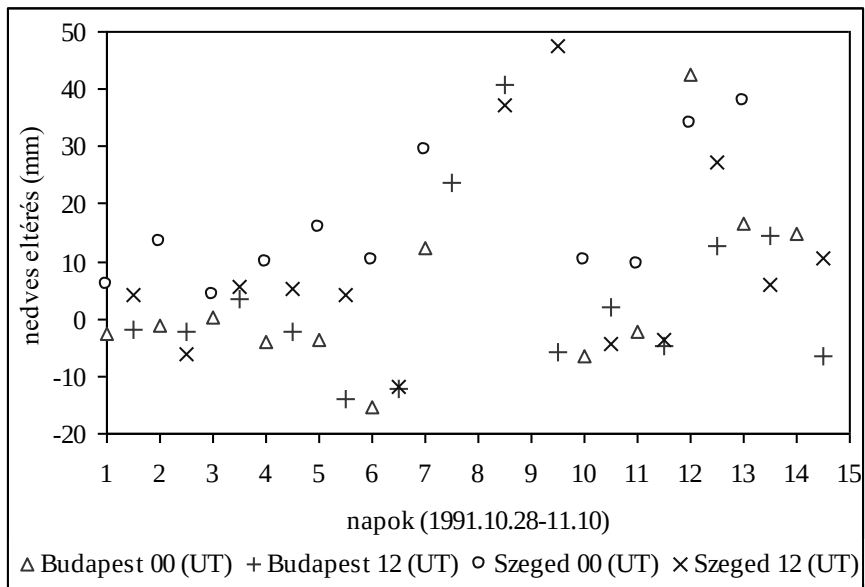
5.18 ábra. Száraz refraktivitási görbe (Szeged, 00 UT, 1991.11.02)



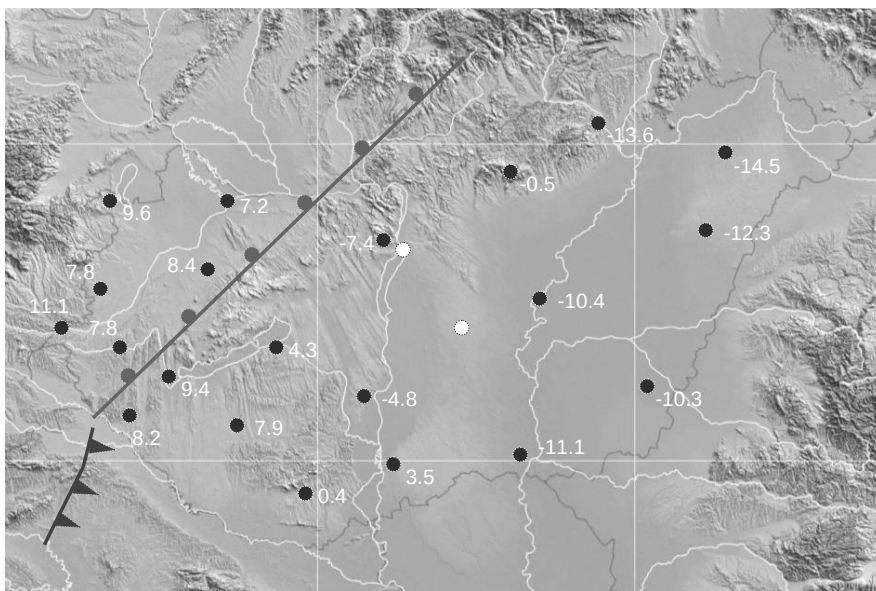
5.19 ábra. Száraz refraktivációs görbe (Szeged, 00 UT, 1991.10.30)



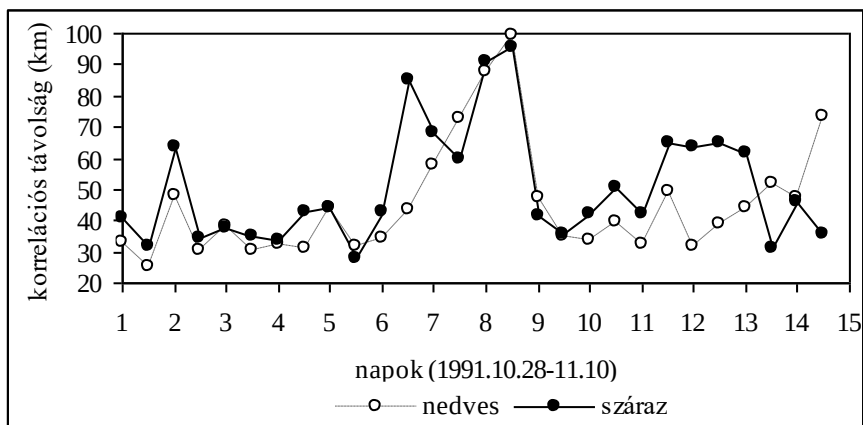
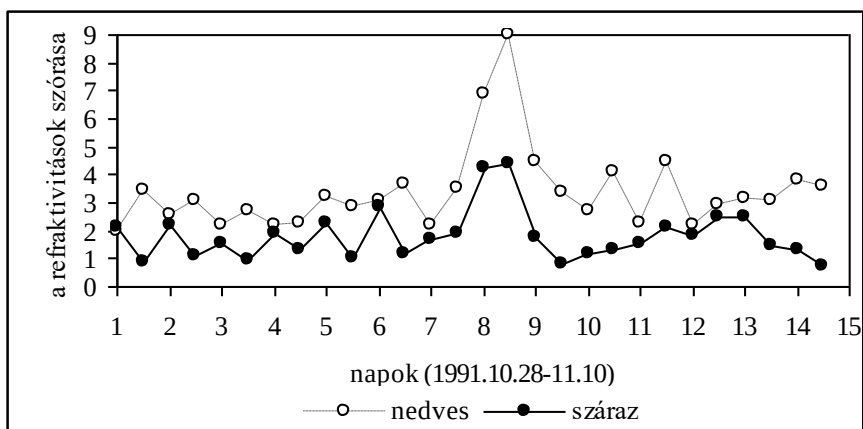
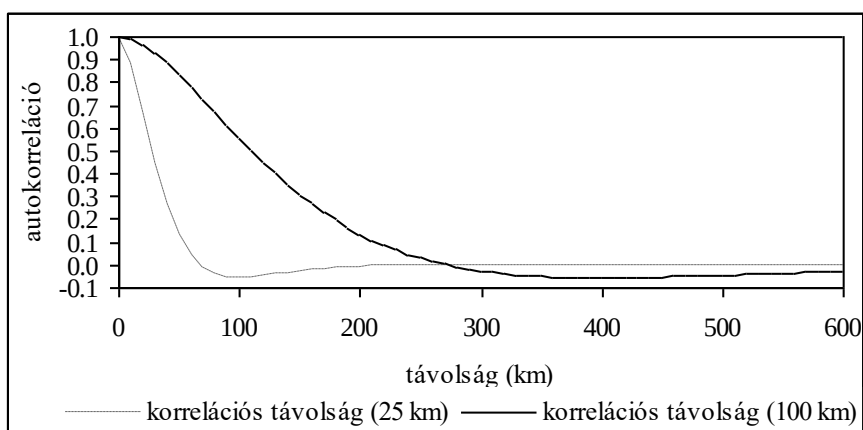
5.20 ábra. Az egyedi és a Saastamoinen modell száraz késleltetéseinek eltérései



5.21 ábra. Az egyedi és a Saastamoinen modell nedves késleltetéseinek eltérései



5.22 ábra. A felszíni vizsálatban szereplő meteorológiai állomások és az 1991.11.05 napi meteorológia meleg front vázlata (a számok az 1991.11.04 12 UT nedves refraktivitási anomáliák)

5.23 ábra. Az ACF függvények korrelációs távolságai (α)5.24 ábra. Az ACF függvények szórásai (σ)

5.25 ábra. Két jellegzetes autokorrelációs függvény

5.2 Ionoszférikus vizsgálatok és kalibráció

A 4.3 fejezet röviden összefoglalja a GPS rendszer jelenlegi hozzájárulását az aeronómiai vizsgálatokhoz. Bemutatta az alapvető összefüggéseket és a hálózati szolgáltatások jelenlegi eljárásait. Ez a fejezet azokat a módszereket és vizsgálatokat mutatja be, amelyeket intézetünk Geodéziai és Geofizikai Főosztályai közösen, OTKA kutatás, Európai Unió pályázat és Német-Magyar Tét együttműködés keretében végeztek el.

A Geodéziai Főosztály egy regionális OTKA műszerpályázat során, az akkor legkorszerűbbnek számító TurboRogue SNR 8000 GPS műholdas vevőberendezés használati jogához jutott. A Geofizikai Főosztály nagycenki Széchenyi István Geofizikai Observatóriumában ekkor állították üzembe a KEL Aerospace IPS-42 ionosondát, amit korábban a Meteorológia Szolgálat Békéscsabán üzemeltetett.

Hasonló kutatások indultak a Belga Királyi Observatóriumban (Royal Observatory of Belgium), ahol hálózatlanban üzemelő TurboRogue GPS vevőket vásároltak, de már korszerű digitális ionosonda állt a rendelkezésükre a folyamatos megfigyelésekhez. Az egyeztetett kutatások a CEE-CIPA CT93-0130 program keretében folytak.

Intézetünkben a műholdas ionoszféra vizsgálatok már az NNSS Doppler rendszer idejében elkezdődtek (Bencze et al. 1986). A hasonlóság ellenére a két rendszer lényeges eltérést is mutat. A Doppler rendszer kisebb frekvenciái jóval érzékenyebbek voltak az ionoszférikus hatásokra, és a gyors poláris pályán haladó műholdak kedvező, műholdankénti meridián irányú V_{TEC} profilok meghatározását tették lehetővé. Közél azonos meridián mentén elhelyezkedő megfigyelő állomások méréseiből tomografikus módszerrel az elektronsűrűség profilok is meghatározhatóvá váltak.

A GPS mérések nagyobb pontossága ellenére az ionoszférikus hatások közel azonos pontossággal jellemezhetők, és mind a két rendszer egy defektussal is rendelkezik (a Doppler alapvetően a kezdő fázis többértelműséggel, a GPS pedig a kódképlettel). A GPS esetében ugyan több műhold is megfigyelhető egy időben, de a műholdak konfigurációja csak nagyon lassan változik, ezért ionoszférikus vizsgálatok céljára kevésbé optimális, és az adatok értelmezése és feldolgozása is más megközelítést igényel.

A GPS és az ionosonda megfigyelések kollokált (egymáshoz közel elhelyezett) observatóriumi alkalmazásával kapcsolatos alapvizsgálatokat és elképzeléseket Bányai és Kovács (1992), Bányai et al. (1994) tanulmányokban mutattuk be. A vizsgálatok során levezettem egy optimális mérési kombinációt és egy új módszert, amely egy GPS állomás és egy műhold méréseit egy lépésben dolgozza fel. Megvizsgáltam a TurboRogue vevő pontosságát, amely az A-S korlátozás hatását elsőként, keresztkorrelációs módszer segítségével küszöbölte ki. Összehasonlítottam a TurboRogue és Trimble SSI vevőberendezéseket. Megvizsgáltam az IRI ionoszféra modell és a hozzá kapcsolt plazmaszférikus diffúzív egyensúlyi modell jellegzetességeit, és alkalmazásának lehetőségeit a GPS mérések ionoszférikus célú feldolgozásában. A V_{TEC} értékek ionosonda állomás helyére történő interpolálásához peremérték problémán alapuló interpolációs módszert alkalmaztam.

A 4.3 fejezet (4.3) és (4.4) összefüggései csak annyiban térnek el Bányai (1997, 1997b) alapösszefüggéseitől, hogy a Wanninger (1994) modellje alapján a kódképlettelések fázismérésre gyakorolt hatását fázis szinkronizációs hibaként értelmezte. Azonban mind a két megközelítés azonos eredményre vezet. A (4.3) és (4.4) összefüggések összege

$$\Phi_{i,GF}^j(t) + P_{i,GF}^j(t) = 2c(\tau_i - \tau^j) + (\lambda_{L2} N_{i,L2}^j - \lambda_{L1} N_{i,L1}^j) + v_{P,GF} + v_{\Phi,GF} \quad (5.14)$$

csak konstans paramétereket és véletlen jellegű mérési hibákat tartalmaz, ahol a kódérések hibája a domináns. Ha a műhold teljes pályáivére vonatkozó (5.14) kombinációk átlaga:

$$A_0 = (\sum \Phi_{i,GF}^j(t) + P_{i,GF}^j(t)) / n, \quad (5.15)$$

ahol n a mérések száma, jól megközelíti a konstans paramétereket, akkor a (4.3) összefüggésből kivonva a

$$\Phi_{i,GF}^j(t) - A_0 = -c(\tau_i - \tau^j) - \alpha \cdot TEC(t) + v_{\Phi,GF}, \quad (5.16)$$

optimális kifejezést kapjuk, amely már csak az ionoszférikus hatásokat és a kódképlettetéseket tartalmazza. A kombinációk belső összhangját a fázismérések véletlen jellegű hibái terhelik. A kódképlettetések és TEC értékek becslésének pontossága azonban az A_0 pontosságának a függvénye, amit a kódérések pontossága határoz meg. A geometriamentes kombinációk az ionoszférikus hatások mellett a műszerek pontossági vizsgálatára is felhasználhatók.

A kutatások kezdeti fázisában a TurboRogue GPS vevő pontossági vizsgálatát helyeztem az előtérbe, mivel az A-S korlátozás a kódérések és következőképpen az ionoszférikus vizsgálatok pontosságának csökkenését is eredményezte. A vevőberendezés kézikönyve ugyan nem javasolta, de lehetővé tette a felhasználóknak a megfigyelési folyamatba történő beavatkozást, amit eredetileg hibakeresés céljára alkalmaztak. A vizsgálatok kezdetén még üzemelt egy elsőgenerációs műhold, ahol az A-S korlátozást nem lehetett érvényesíteni (Block I, PRN 12).

A mérési programot úgy alakítottam ki, hogy a vevő négy csatornáján P-kódú (PCD), másik négy csatornán keresztkorrelációs (XCR) üzemmódban figyelte meg a műholdat. A vizsgálatokról részletesen a Bányai és Eper-Pápai (1995, 1996) tanulmányokban számoltunk be. Az 5.12 táblázatban három eltérő mérési sorozat főbb jellemzőit adtam meg. Azért ilyen kicsik a méterben adott számértékek, mert az egész hullámhosszak számlálása nulla értékről indul, $\Phi_{i,GF}^j$ csak a mérés kezdetétől jelentkező ionoszférikus változások átlagát és a kódképlettetés hatását tükrözi. A $\Phi_{i,GF}^j$ és A_0 átlagértékek sorozaton belüli eltérései abból adódnak, hogy a mérések a különböző csatornákon nem mindig ugyanabban az időpontban indultak. A szórások és a különbségek azonban egységes képet mutatnak. A PCD esetében az (5.15) mennyiségek 10 cm, az XCR esetében 20 cm szórással jellemezhetők. A PCD és XCR mérések különbségeinek elvileg azonosnak kellene lenni. Az első esetben ugyan csak 2 cm, a másik két esetben már 55 és 60 cm adódott, ami a szórások háromszorosának felel meg. Ez jelzi a különböző típusok közötti szabályos hiba jelenlétét. Az 1. és 5. csatornára vonatkozó különböző kombinációkat grafikusan az 5.26–5.28 ábrák is szemléltetik. Amíg az $\Phi_{i,GF}^j$ fázisgörbék nagyon hasonlóak, a $P_{i,GF}^j$ kódgörbék nagyobb eltérést mutatnak és az XCR mérések is zajosabbak. A $(\Phi_{i,GF}^j + P_{i,GF}^j)$ görbék az első sorozat PCD méréseitől eltekintve nagy lineáris trendet mutatnak, amely azonban közel van a kulminációhoz tartozó értékhez.

Az azonos üzemmódban (PCD vagy XCR) mért csatornákon a kódérések pontosan ugyanazt az értéket szolgáltatották. A fázismérés esetében is csak az eltérő kezdő időpontból adódó konstans eltérés tapasztalható. A két mérési típus különbségeit az 1. és 5. csatornák méréseinek a segítségével az 5.13 táblázat foglalja össze. A fázismérések eltéréseinek szórásai az L1 vivőn 0.5 mm, az L2 vivőn 1 mm alatti értékek. A kódéréseknél a szórások 15–20 cm értékkel jellemezhetők és az átlagos eltérések a 0.5 m-t is elérhetik. Ezért a $(\Phi_{i,GF}^j + P_{i,GF}^j)$ kombinációk lineáris trendjét is a kódérések okozzák.

A lineáris trendet ezért a

$$\Phi_{i,GF}^j(t) + P_{i,GF}^j(t) = A_0 + A_1(t - t_0) \quad (5.17)$$

függvény legkisebb négyzetes illesztésével célszerű meghatározni, ahol t_0 a kulmináció időpontja és A_1 az egyenes meredeksége. Ekkor az A_0 értéket is pontosabban tudjuk megbecsülni.

A bemutatott példánál a lineáris trend illesztése utáni maradékok szórását az 5.14 táblázat foglalja össze. Az 5.28 ábrán a II. mérés XCR méréseiből származó optimális ionoszférikus kombinációit együtt ábrázoltuk az invertált $P_{i,GF}^j(t)$ görbével, ahol az utóbbit a meredekséggel is korrigáltuk (az ábra alsó része). Az ábra jól szemlélteti a kódérések fázismérésekhez viszonyított aszimmetriáját.

A PCD mérések illeszkedése 5 cm, az XCR méréseké 15 cm szórással jellemezhető. Mivel a megfigyelések elején és végén (a kisebb magassági szögekben) a kódérések jóval zajosabbak, az XCR feldolgozás pontosságát növelhetjük, ha a trendet a görbe középső szakaszán illesztjük.

5.12 táblázat. A különböző megfigyelési típusok összehasonlítása
($\hat{\Phi}_{i,GF}^j$ és A_0 átlagérték, σ az A_0 átlagtól való eltérés szórása – méterben)

	Csatornák	$\hat{\Phi}_{i,GF}^j$	A_0	σ	$\hat{\Phi}_{i,GF}^j - A_0$
I. mérés 1994.05.23.	1 PCD	1.3945	3.4174	0.0668	-2.0229
	2 PCD	1.5721	3.5950	0.0668	-2.0229
	3 PCD	1.5721	3.5949	0.0668	-2.0228
	4 PCD	1.5721	3.5949	0.0668	-2.0228
	5 XCR	1.6224	3.6290	0.2112	-2.0066
	6 XCR	1.5875	3.5941	0.2110	-2.0066
	7 XCR	1.6161	3.6226	0.2111	-2.0065
	8 XCR	1.6161	3.6226	0.2111	-2.0065
II. mérés 1994.10.10.	1 PCD	1.6373	1.7394	0.0955	-0.1021
	2 PCD	1.6373	1.7394	0.0955	-0.1021
	3 PCD	1.6373	1.7394	0.0955	-0.1021
	4 PCD	1.6373	1.7394	0.0955	-0.1021
	5 XCR	1.8815	1.4254	0.2143	0.4561
	6 XCR	1.8815	1.4254	0.2143	0.4561
	7 XCR	1.8815	1.4254	0.2143	0.4561
	8 XCR	1.8815	1.4254	0.2143	0.4561
III. mérés 1994.10.16.	1 PCD	1.5950	1.8149	0.0993	-0.2199
	2 PCD	1.3381	1.5580	0.0993	-0.2199
	3 PCD	1.5379	1.7579	0.0993	-0.2199
	4 PCD	1.1827	1.4026	0.0993	-0.2199
	5 XCR	1.5948	1.3071	0.1958	0.2877
	6 XCR	1.5378	1.2500	0.1958	0.2878
	7 XCR	1.4014	1.1135	0.1958	0.2879
	8 XCR	1.3792	1.0914	0.1958	0.2878

5.13 táblázat. A PCD és XCR mérések összehasonlítása (1-5 csatorna – méterben)
(ΔP_1 és $\Delta \Phi_1$ az L1 vivőre vonatkozó kód és fázismérések különbsége,
 ΔP_2 és $\Delta \Phi_2$ az L2 vivőre vonatkozó kód és fázismérések különbsége)

mérés	ΔP_1	σ	ΔP_2	σ	$\Delta \Phi_1$	σ	$\Delta \Phi_2$	σ
I.	0.19	0.21	0.21	0.18	-566684.8682	0.0004	-56685.0962	0.0008
II.	-0.49	0.14	0.07	0.19	0.0005	0.0003	-0.2437	0.0005
III.	-0.44	0.14	0.07	0.16	0.0008	0.0004	0.0009	0.0006

5.14 táblázat. A trend illesztés szórása (méter)

mérés	PCD	XCR
I.	0.0513	0.1717
II.	0.0613	0.1540
III.	0.0626	0.1647

A GPS műszer pontossági vizsgálata után összehasonlítottam a méréseket az IRI modellből levezethető értékekkel, és megvizsgáltam a modell használhatóságát a GPS adatok feldolgozásában (Bányai 1997). A modell szerkezetét az 5.30 ábra mutatja be (Lincoln és Conkright 1981). A modell bemenő paraméterei a vizsgált pont földrajzi (vagy geomágneses) hosszúsága és szélessége, a felszín feletti magassága, a dátum és a helyi (vagy világ) idő, valamint az aktuális napfoltszám. A modell aktuális paraméterei és szubrutinjai segítségével, az adott pontban számos paraméter, köztük az elektronsűrűség is megbecsülhető. Az általunk használt modell a paramétereket csak 1000 km

magasságig határozza meg, ezért a GPS mérések esetében további plazmaszférikus elektronsűrűség modellre is szükség van (Kobluchar és Leitinger 1993). Kedvezőbb megközelítés hiányában Bauer (1973) diffúziv egyensúlyi modellje választható:

$$N = N_0 \left(\frac{\sum_j N_{j0} \exp \left(-\frac{z}{k T_j / M_j g} \right)}{\sum_j N_{j0}} \right)^{(1+e)}, \quad (5.18)$$

ahol k a Boltzman állandó, M a móltömeg, T az ionhőmérséklet, g a nehézségi gyorsulás, e az elektron- és az ionhőmérséklet hányadosa, N_0 az 1000 km magasságra vonatkozó elektron sűrűség, z az 1000 km feletti magasság, $j=3$ (O^+ , H^+ , He^+) és N_{j0} az egyes elemek százalékos aránya. Az (5.18) összefüggés bemenő adatait szintén az IRI modell szolgáltatja.

Az IRI rutinokat beépítettem egy programrendszerbe, amely a Ronberg integrál segítségével kiszámítja két tetszőleges pont között a teljes elektrontartalmat. A műholdak fedélzeti efemeridáinak segítségével meghatározhatók a vevő és műhold közötti egyenesek és a méréshez tartozó ionoszférikus pontok paraméterei is (4.8 ábra). Az integrált elektrontartalom meghatározható a vevő műhold egyenes mentén (TEC) és az ionoszférikus pont zenitiránya mentén is a műhold felszín feletti magasságáig (V_{TEC}).

Az 5.15 táblázat a különböző ionoszféra régiók V_{TEC} értékeit mutatják be, egy a napkeltét megelőző és követő, két időpontban. Ha a magasságot olyan valószínűségi változónak tekintjük, amelynek a sűrűségfüggvénye arányos az elektronsűrűséggel, akkor az egyszerű rétegmodell magasságát a mediánnal (M), a várható értékkel (E) és a legsűrűbb F2 réteg magasságával is jellemezhetjük, amely felhasználható a rétegmodell magasságának a vizsgálatára is. A táblázat az M és E tartományig terjedő értékeket is tartalmazza.

Az 5.31 és 5.32 ábrákon összehasonlítottam a PRN 12 műhold egy reggeli és egy éjszakai PCD megfigyelésének optimális ionoszférikus megfigyeléseit az IRI modellből származó értékekkel. Az ábrák felső része az ionoszférikus pontokra vonatkozó magassági szögeket ábrázolja az M , E és $F2$ magasságoknak megfelelően. A középső ábrák az IRI modell vertikális késleltetéseit ábrázolják az ionoszférikus pontok helyi idejének függvényében. Az alsó ábrák a vevő-műhold ferde irányú transzformáltját és a közvetlenül integrált értékeket (amelyeket nem terhel az egyszerű rétegmodell magassága) együtt ábrázolja a közvetlenül mért optimális ionoszférikus kombinációkkal.

Az 5.31 ábra éjszakai méréseinél az IRI modell eredményei jó összhangot mutatnak a mért értékekkel, amelyek hasonló lefutásúak. A kisebb ionoszférikus hatás és kód késleltetések jelenlétét mutatja, hogy a mért kombinációk a pozitív intervallumba is átcúsztak.

Az 5.32 ábra reggeli méréseinél a plazmaszférikus modellből adódóan a napkelténél jelentkező szakadás is jól felismerhető, amit a három elem változása okoz (5.15 táblázat). A nagyobb ionoszférikus hatások miatt a kis magassági szögeknél már jelentős eltérések adódtak. Az IRI modell a napkelte időszakában a mértől jóval kisebb értékeket szolgáltatott.

Az ábrák alapján az M magasságok látszanak a legkedvezőbb választásnak, amelyek a közepes szélességeken 350-400 km körüli értéknek választhatók. A kis magasságoknál jelentkező eltérések az egyszerű lemezmodellel csökkenthetők (4.3 fejezet).

Az optimális ionoszférikus kombinációkat a műhold teljes megfigyelése alapján vezettem le, ezért olyan módszert választottam, ahol a kód késleltetések becslését is egyetlen műhold megfigyelésére alapoztam (Bányai 1997b). Ehhez az (5.15) összefüggést a

$$\Phi_{i,GF}^j(t) - A_0 = -c \tau_i^j - \frac{1}{\sin E'} I_v(\vartheta) + v_{\Phi,GF} \quad (5.19)$$

alakban írtam fel, ahol a TEC értékekről áttértem a $I_v(\vartheta)$ zenitirányú késleltetésre, amit a

$$I_v(\vartheta) = \sum_{i=0}^{i=n} a_i P_i(\sin \vartheta) \quad (5.20)$$

Legendre polinom segítségével modelleztem, ahol n a polinom fokszáma, a_i az együttható és a gömbi távolság analógiájára

$$\cos \vartheta = \sin \varphi \cdot \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cdot \sin \varphi_0 \cdot \cos(t - t_0) , \quad (5.21)$$

ahol φ_0 és t_0 a műhold kulminációjához tartozó ionoszférikus pont szélessége és helyi ideje szög egységben (a helyi idő a Nap óraszögével arányos).

5.15 táblázat. V_{TEC} értékek és kódképleteltesek az L1, L2 vivőkön
(47.7° szélesség, 16.6° hosszúság, 1994. május 23, napfoltszám 19)

Régiók	V_{TEC} (TECU)	magasság (km)		L1 (m)	L2 (m)	helyi idő
E/D	0.0199	80	105	0.00	0.01	4:33:00 napkelte előtt
E valley	0.0578	105	146	0.01	0.02	
Intermed.	0.5503	146	243	0.09	0.15	
F1	0.0000	243	243	0.00	0.00	
F2	0.7473	243	291	0.12	0.20	
Topside	3.3236	291	1000	0.54	0.89	O ⁺ 7% H ⁺ 83% He ⁺ 9%
Plasmasp.	0.8972	1000	20200	0.15	0.24	
teljes	5.5962	80	20200	0.91	1.50	
M tart.	2.7991	80	383	0.45	0.75	
E tart.	4.2279	80	650	0.69	1.13	
E/D	0.0200	80	105	0.00	0.01	4:33:30 napkelte előtt
E valley	0.0584	105	146	0.01	0.02	
Intermed.	0.5533	146	243	0.09	0.15	
F1	0.0000	243	243	0.00	0.00	
F2	0.7479	243	291	0.12	0.20	
Topside	3.3301	291	1000	0.54	0.89	O ⁺ 7% H ⁺ 83% He ⁺ 9%
Plasmasp.	0.9001	1000	20200	0.15	0.24	
teljes	5.6098	80	20200	0.91	1.50	
M tart.	2.8059	80	383	0.46	0.75	
E tart.	4.2390	80	651	0.69	1.13	
E/D	0.0203	65	105	0.00	0.01	4:34:00 napkelte után
E valley	0.0598	105	146	0.01	0.02	
Intermed.	0.5563	146	243	0.09	0.15	
F1	0.0000	243	243	0.00	0.00	
F2	0.7484	243	291	0.12	0.20	
Topside	3.3366	291	1000	0.54	0.89	O ⁺ 49% H ⁺ 46% He ⁺ 5%
Plasmasp.	0.3451	1000	20200	0.06	0.09	
teljes	5.0665	65	20200	0.82	1.35	
M tart.	2.5343	65	361	0.41	0.68	
E tart.	3.7291	65	490	0.61	1.00	
E/D	0.0205	65	105	0.00	0.01	4:34:30 napkelte után
E valley	0.0603	105	146	0.01	0.02	
Intermed.	0.5593	146	243	0.09	0.15	
F1	0.0000	243	243	0.00	0.00	
F2	0.7489	243	290	0.12	0.20	
Topside	3.3432	290	1000	0.54	0.89	O ⁺ 49% H ⁺ 46% He ⁺ 5%
Plasmasp.	0.3463	1000	20200	0.06	0.09	
teljes	5.0786	65	20200	0.82	1.36	
M tart.	2.5403	65	361	0.41	0.68	
E tart.	3.7393	65	490	0.61	1.00	

A legkisebb négyzetes kiegyenlítés során a kódkéselettetést és a polinom együtthatóit kezeltem ismeretlenként. Az 5.16 táblázat összefoglalja az egyik feldolgozás eredményeit, ahol a polinom fokszámát lépésenként ötig emeltem, és a feldolgozást a páros fokú tagok elhagyásával is megismételtem. A táblázat a súlyegység (σ_0) és a becslült értékek (σ) középpontját, valamint a kódkéselettetés és a polinom együtthatói közötti (k) korrelációt is tartalmazza.

A táblázat alapján megállapítható, hogy a kódkéselettetés és a polinom nulladfokú tagja között nagy negatív korreláció tapasztalható. A fokszaán növelésével a σ_0 ugyan csökkent, de a kódkéselettetés középpontja egyre romlik, és értéke már a másodfokú polinom esetében is irreálissá válik. A páros fokú tagok elhagyásával, amelyek nagy pozitív korrelációt mutatnak, valamelyest növelhető az illeszkedés pontossága. A páratlan fokszaámú tagok csak kis negatív korrelációt mutatnak. A kedvező megoldás feltétele a magassági szögek jelentős változása, és a kis ionoszférikus hatás, amely a magas kulminációjú és éjszakai mérések esetén várható.

Az új módszer ellenőrzésére egy három napos soproni megfigyelési program adatait a német távérzékelési intézet kollégái – E. Sardon és E. Engler – (DLR Remote Sensing Ground Station, Neustrelitz) IGS hálózati mérésekkel együtt is feldolgozták. Az általuk használt módszer (Engler et al. 1994) több állomás és több műhold megfigyeléseit együtt dolgozza fel. A kódkéselettetések meghatározásához másodfokú polinomot és a Kálmán szűrést alkalmaznak. Az eredmények összehasonlítását az 5.17 táblázat tartalmazza, ahol a vevő és a műhold együttes kódkéselettetései XCR megfigyelésekből származnak.

A két különböző módszer és a lényegesen eltérő adathalmaz ellenére a megoldások jó egyezést mutatnak. Az új módszer belső pontossága 1 ns, amely összhangban van a megoldások különbségével is. A DLR megoldás a három nap folyamán kis lineáris változást mutat, amely a Kálmán szűrés következménye. A soproni megoldás véletlenszerű eltérései jól tükrözik a módszer jellegzetességeit.

A soproni megoldás esetében is célszerű az egymástól függetlenül meghatározott késleltetések időbeli trendjét folyamatosan kiértékelni. Az éjszakai megoldásokat nagyobb súllyal kell figyelembe venni, mivel ekkor a kisebb ionoszférikus hatások miatt pontosabb megoldásokat kapunk. Az ionoszférikus pontokra vonatkozó V_{TEC} értékek meghatározásánál is ezeket a trend értékeket célszerű alkalmazni. Ugyan így kell eljárni azoknál a megfigyeléseknél is, ahol a kódkéselettetéseket nem lehet kellő pontossággal megbecsülni.

Az egyes megfigyelések V_{TEC} értékeit a

$$\Phi_{i,GF}^j(t) - A_0 + c \cdot \tau_i^j = -\alpha \frac{V_{TEC}(t)}{\sin E'} \quad , \quad (5.22)$$

összefüggésből lehet meghatározni, ahol A_0 most az (5.17) modellből származik és τ_i^j a vevő-műhold kódkéselettetés aktuális értéke.

A 4.3 fejezet globális és regionális polinomjai helyett a V_{TEC} értékek ionoszonda állomás helyére történő interpolálásához peremérték problémán alapuló interpolációs módszert alkalmaztam, amely egyetlen GPS állomás esetében is felhasználható. A Kálmán J. által kidolgozott módszer elméleti háttérét, amely a Dirichlet probléma Monte-Carlo módszer szerinti megoldásán alapszik, Bányaai et al. (1994) részletesen tárgyalja.

Ebben a dolgozatban csak a módszer alkalmazását mutatom be. A megfigyeléseket bontsuk fel rövidebb (10-30 perces) intervallumokra, amelyekben a V_{TEC} értékeket konstansnak tekinthetjük. A becslés helyéről indítsunk el egy vezérsugarat, amely a teljes horizontot lepásztazza. A sugarakhoz tartozó legközelebbi műholdak ionoszférikus pontjait felhasználva, az időintervallum középpontjára vonatkozó becslés a

$$\hat{V}(t) = \frac{\sum \frac{V_i}{r_i^2} \Delta \alpha_i}{\sum \frac{1}{r_i^2} \Delta \alpha_i} \quad (5.23)$$

összefüggéssel számítható, ahol r_i az ionoszférikus ponthoz tartozó sugár, $\Delta\alpha_i$ az ionoszférikus pontok közötti irányszög intervallum és V_i a vertikális TEC érték. Azokban az irányokban, ahol nincsen műhold $V_i = 0$ és $r_i = \infty$, ezért a módszer a teljes horizonton értelmezhető. A sugarat gömbi távolságként radiánban célszerű meghatározni.

Egy tipikus példát az 5.33 ábra mutat be. Minél több ionoszférikus pont található a becslési hely környezetében, és azok minél közelebb vannak ehhez a helyéhez, annál kedvezőbb eredményre számíthatunk. A pontosság tehát arányos az (5.21) kifejezés nevezőjével, amely az egyes adatok súlyosságát tartalmazza. Az intervallumot az ionoszféra időbeli változékonyságának és az ionoszonda mérések gyakoriságának megfelelően célszerű megválasztani, és időben folyamatosan léptetni.

Több GPS állomás egyidejű felhasználásával növelhető az adatok mennyisége is. Több állomás esetében a vevőberendezések működését és pontosságát is folyamatosan ellenőrizni kell, különösen akkor, ha különböző típusú vevőberendezéseket használnak.

Német Magyar Tét együttműködés keretében összehasonlítottuk a TurboRogue vevőt az akkor legkorszerűbb Trimble SSI vevővel, amely Magyarországon még nem üzemelt. Az adatfeldolgozást az új, egy állomásos és egy műhold adatait feldolgozó módszerrel végeztük el.

Darmstadtban az antennákat nagyon közel helyeztük el egymáshoz, amit közel-kalibrációs mérésnek neveztünk. Ebben az esetben az ionoszférikus pontok gyakorlatilag azonosnak tekinthetők, és a kódésleltetések különbsége a műholdaktól függetlenül csak a két vevő eltérését szolgáltatja. A becsült vertikális késleltetéseknek is elméletileg azonosnak kellene lenni. Az eltérések a két berendezés fázisméréseinek eltérését mutatják. A méréseket és a feldolgozást később a soproni és a darmstadti állomásokon is megismételtük.

5.16 táblázat. A kódésleltetések becslése különböző fokú Legendre-polinommal
(Sopron, 1994. május 23. PRN 12, PCD mérések)

σ_0	$c \tau_i^j$ (m)	a_0 (m)	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0.115	-0.241	1.815					
σ	0.028	0.022					
k		-0.979					
0.043	-0.311	1.870	0.331				
σ	0.011	0.008	0.005				
k		-0.979	-0.105				
0.027	1.156	1.295	0.291	1.620			
σ	0.047	0.019	0.004	0.052			
k		-0.990	-0.369	0.990			
0.025	0.712	1.469	0.093	1.131	-0.207		
σ	0.060	0.024	0.018	0.060	0.019		
k		-0.995	-0.629	0.995	0.689		
0.013	6.085	-1.876	0.960	2.927	0.814	-2.419	
σ	0.129	0.079	0.022	0.054	0.026	0.056	
k		-0.996	0.946	0.908	0.963	0.971	
0.011	14.79	-7.252	-0.819	5.978	-1.581	-6.234	-1.730
σ	0.70	0.429	0.143	0.245	0.192	0.305	0.137
k		0.999	-0.955	0.997	-0.960	-0.999	-0.986
0.028	-0.306	1.864	-0.129			-0.451	
σ	0.007	0.006	0.016			0.016	
k		-0.980	-0.055			-0.026	
0.019	-0.324	1.879	2.127			2.395	1.196
σ	0.005	0.004	0.078			0.098	0.041
k		-0.980	-0.040			-0.041	-0.050

5.17 táblázat. A kódkésleltetések összehasonlítása
(Sopron, 1995. szeptember 22-24. XCR mérések)

PRN	DLR τ_i^j (ns)	Sopron τ_i^j (ns) σ (ns)	PRN	DLR τ_i^j (ns)	Sopron τ_i^j (ns) σ (ns)
1	-7.14	-6.30 2.00	17	-5.98	-6.99 0.83
	-7.40	-7.12 1.41		-6.48	-7.13 0.66
	-7.38	-7.12 1.10		-6.38	-7.69 0.65
4	-8.78	-9.37 1.49	19	-6.73	-7.22 1.02
	-9.04	-7.95 1.20		-6.98	-8.87 0.76
	-9.06	-9.65 0.96		-7.16	-6.46 0.78
6	-8.23	-10.4 0.66	20	-6.38	-6.86 0.43
	-8.56	-10.7 0.58		-6.60	-7.03 0.40
	-8.58	-9.94 0.65		-6.68	-5.97 0.38
7	-5.92	-4.09 1.05	22	-7.59	-7.54 0.90
	-6.19	-6.26 0.96		-8.04	-7.57 0.80
	-6.31	-4.48 1.00		-7.79	-8.60 0.81
14	-6.60	-7.14 1.23	25	-10.1	-9.16 0.91
	-6.86	-7.40 0.67		-10.4	-8.43 0.95
	-6.85	-9.12 0.73		-10.3	-7.81 0.88
15	-6.31	-6.97 1.30	26	-8.85	-8.13 0.68
	-6.55	-8.10 0.93		-9.09	-8.66 0.70
	-6.50	-7.02 0.94		-9.23	-8.68 0.79
16	-5.19	-5.15 1.12	31	-8.67	-7.50 1.45
	-5.43	-5.00 0.91		-8.98	-7.79 0.90
	-5.45	-4.89 0.99		-9.08	-7.23 0.76

Mivel ez a két állomás 630 km távolságra helyezkedik el egymástól, a jelek az azonos műholdak ellenére az ionoszféra eltérő tartományában terjednek, ezért az ionoszférikus pontok is jelentősen eltérnek. A vizsgálatokhoz azokat a megfigyeléseket választottuk ki, amelyek hasonló geometriai paramétereket mutattak. Ezt a megközelítést távol-kalibrációnak neveztük. A fontosabb eredményeket az 5.18 táblázat foglalja össze, ahol a kódkésleltetések mellett a közel-kalibrációs méréseknél az átlagos vertikális késleltetések különbségei is megtalálhatók.

A közel kalibrációs mérésnél az XCR mérések ellenére a kódkésleltetések különbsége 0.2 ns pontossággal jellemezhető. A távol kalibrációnál ez 1 ns értékre romlik, de a két átlagérték statisztikailag azonosnak tekinthető.

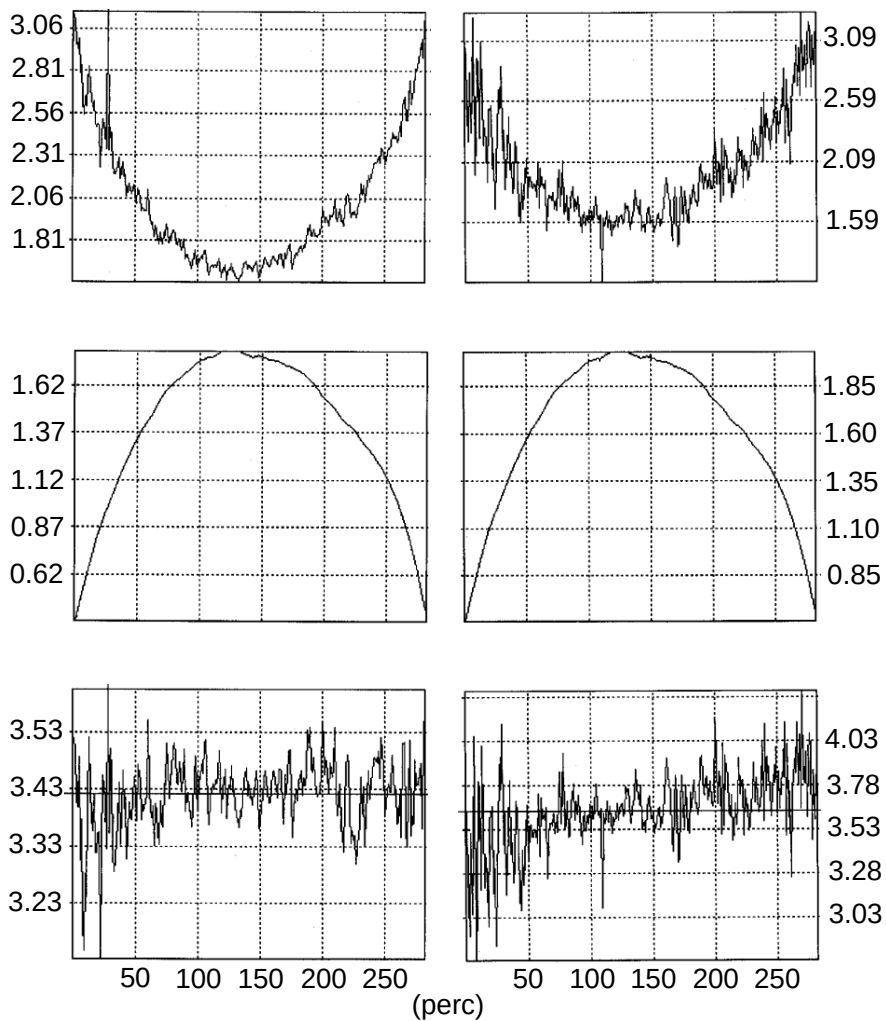
A vertikális késleltetések szabályos jellege további vizsgálatokat igényelt. Az 5.34 ábra felső része két egymásnak megfelelő vertikális késleltetési görbét mutat be. Az ábra alsó része a két görbe különbségét mutatja. Megállapítottuk, hogy az átlagos és a szabályos periodikus késleltetés az antennák korrigálatlan átlagos fáziscentrum-eltéréseit és a fáziscentrum PCV változásait tükrözik. Ezek a kis eltérések az ionoszférikus célú vizsgálatoknál ugyan nem jelentősek, de a fáziscentrum-korrekciókat itt is célszerű alkalmazni.

A Trimble berendezés valamelyest zajosabb méréseket szolgáltatott, ami az 5.34 ábrán is jól látható. A részletes vizsgálatokat Bányai és Gianniou (1997) tanulmánya tartalmazza.

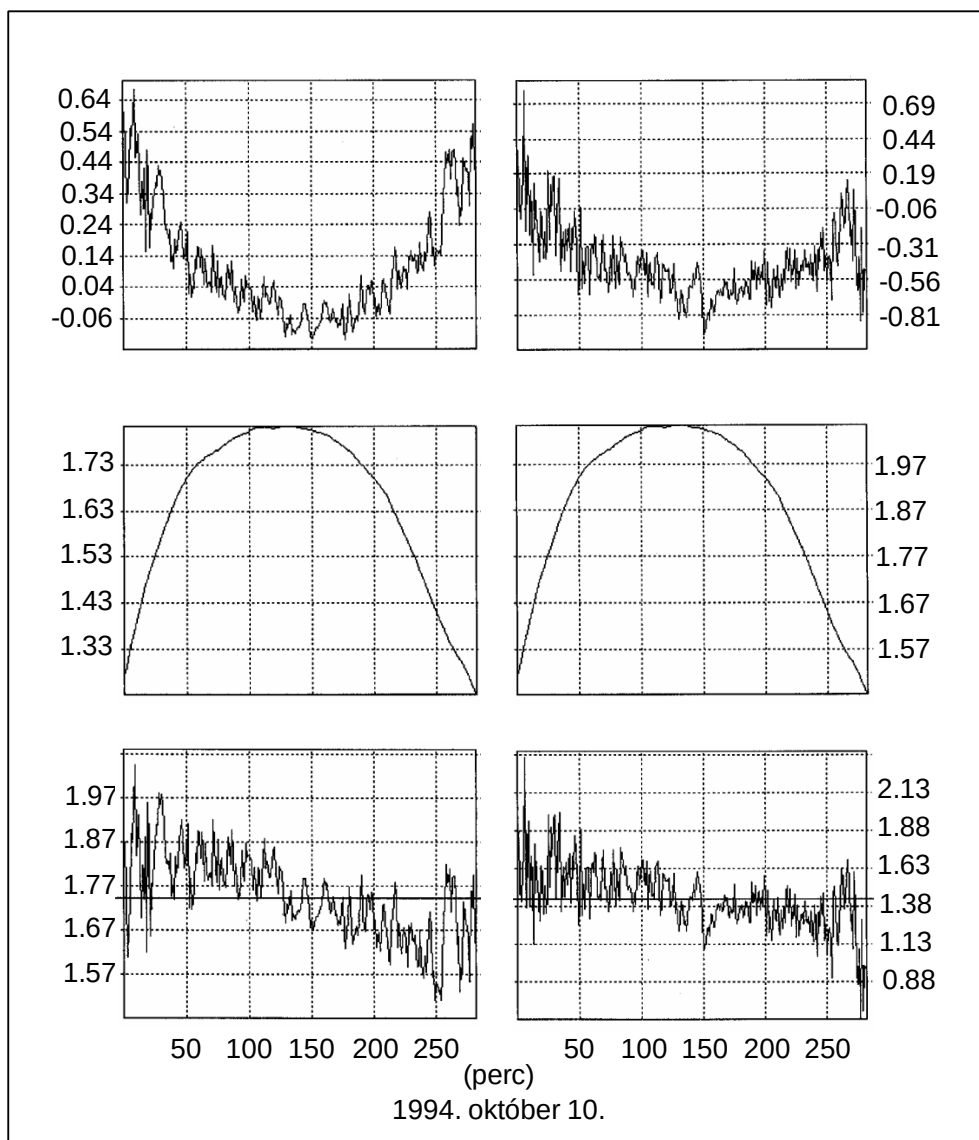
A kidolgozott eljárások ellenére a folyamatos obszervatóriumi alkalmazás még nem indult meg, mivel az elavult analóg ionoszonda nem bizonyult alkalmasnak megbízható folyamatos üzemeltetésre, és időközben a TurboRogue GPS vevő is elromlott. A tervezett digitális ionoszonda üzembe állításával és az új soproni permanens GPS állomás segítségével ez a probléma remélhetőleg hamarosan megoldódik.

5.18 táblázat. A kalibráció eredményei
(ΔI átlagos vertikális késleltetés)

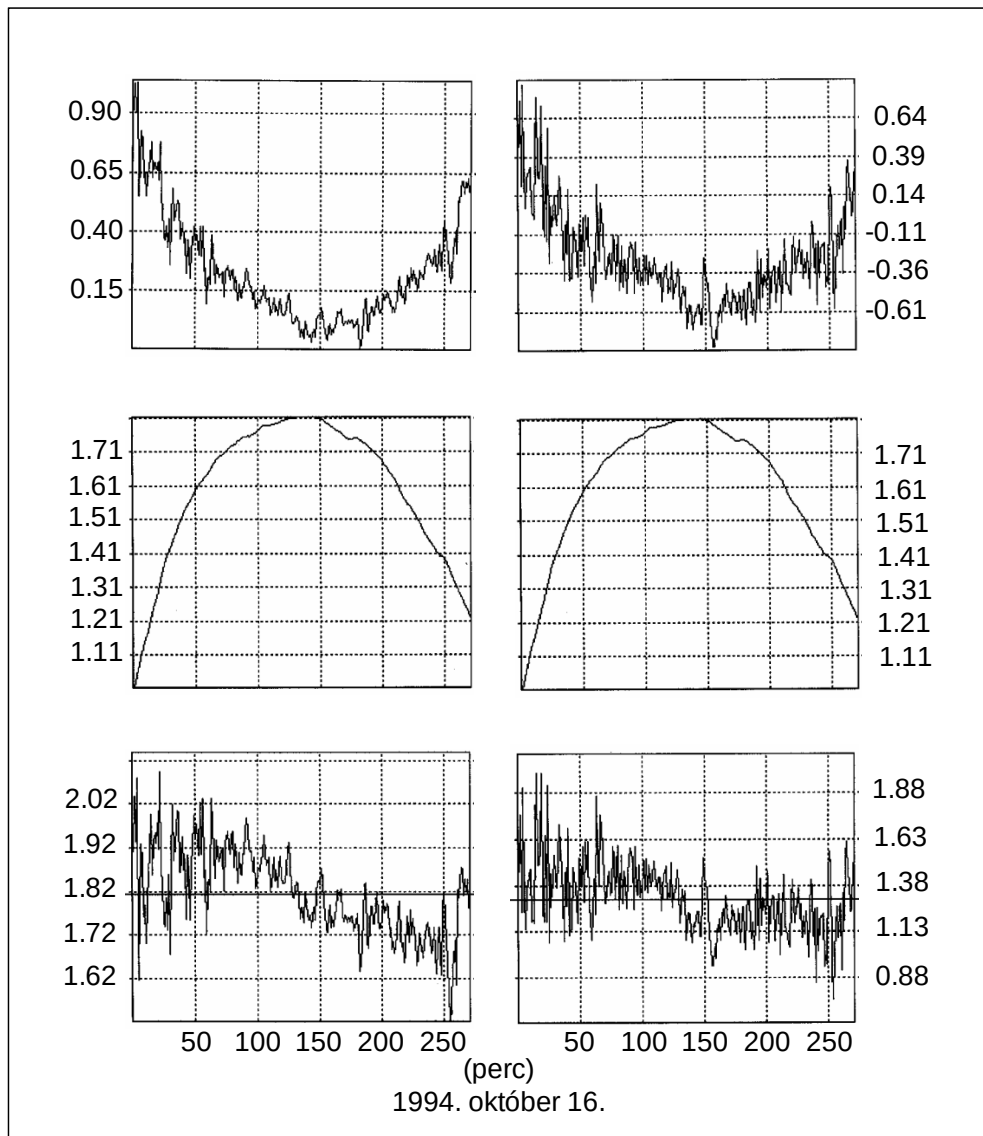
	közel kalibráció		távol k.
	$\Delta\tau_{R-T}$ (ns)	ΔI_{R-T} (m)	$\Delta\tau_{R-T}$ (ns)
át- lag	-8.39	-	-9.06
sz	0.24	0.0183	0.94
órás		0.0045	
mi	-8.80	-	-10.51
n.		0.0290	
m	-8.13	-	-7.72
ax.		0.0170	



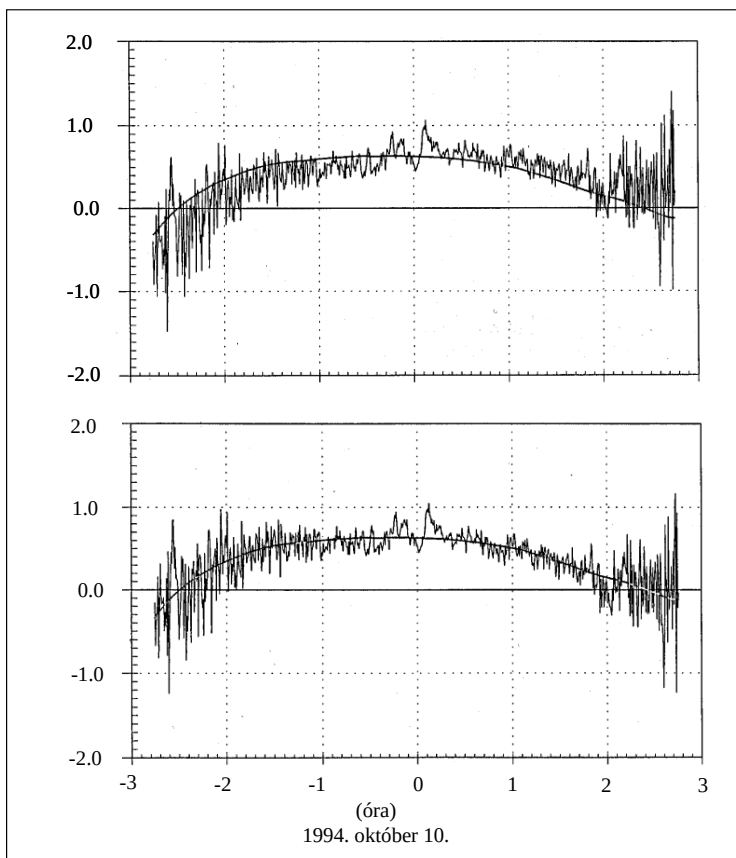
5.26 ábra. A különböző ionoszférikus kombinációk grafikus ábrázolása (baloldalt az 1. csatorna PCD, jobboldalt az 5. csatorna XCR mérései láthatók, felül a $P_{i,GF}^j$, középen a $\Phi_{i,GF}^j$ és az alul a $(\Phi_{i,GF}^j + P_{i,GF}^j)$ kombinációk találhatók)



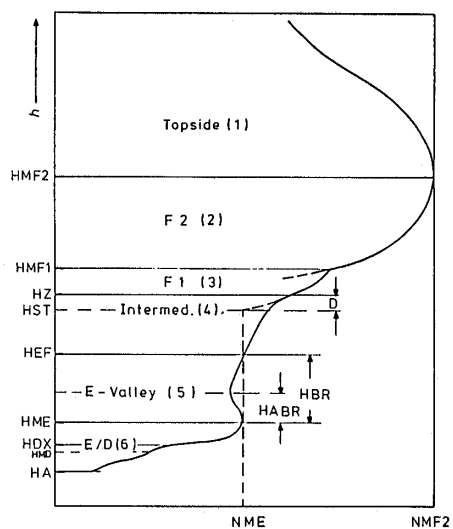
5.27 ábra. A különböző ionoszférikus kombinációk grafikus ábrázolása (baloldalt az 1. csatorna PCD, jobboldalt az 5. csatorna XCR mérései láthatók, felül a $P_{i,GF}^j$, középen a $\Phi_{i,GF}^j$ és az alul a $(\Phi_{i,GF}^j + P_{i,GF}^j)$ kombinációk találhatók)



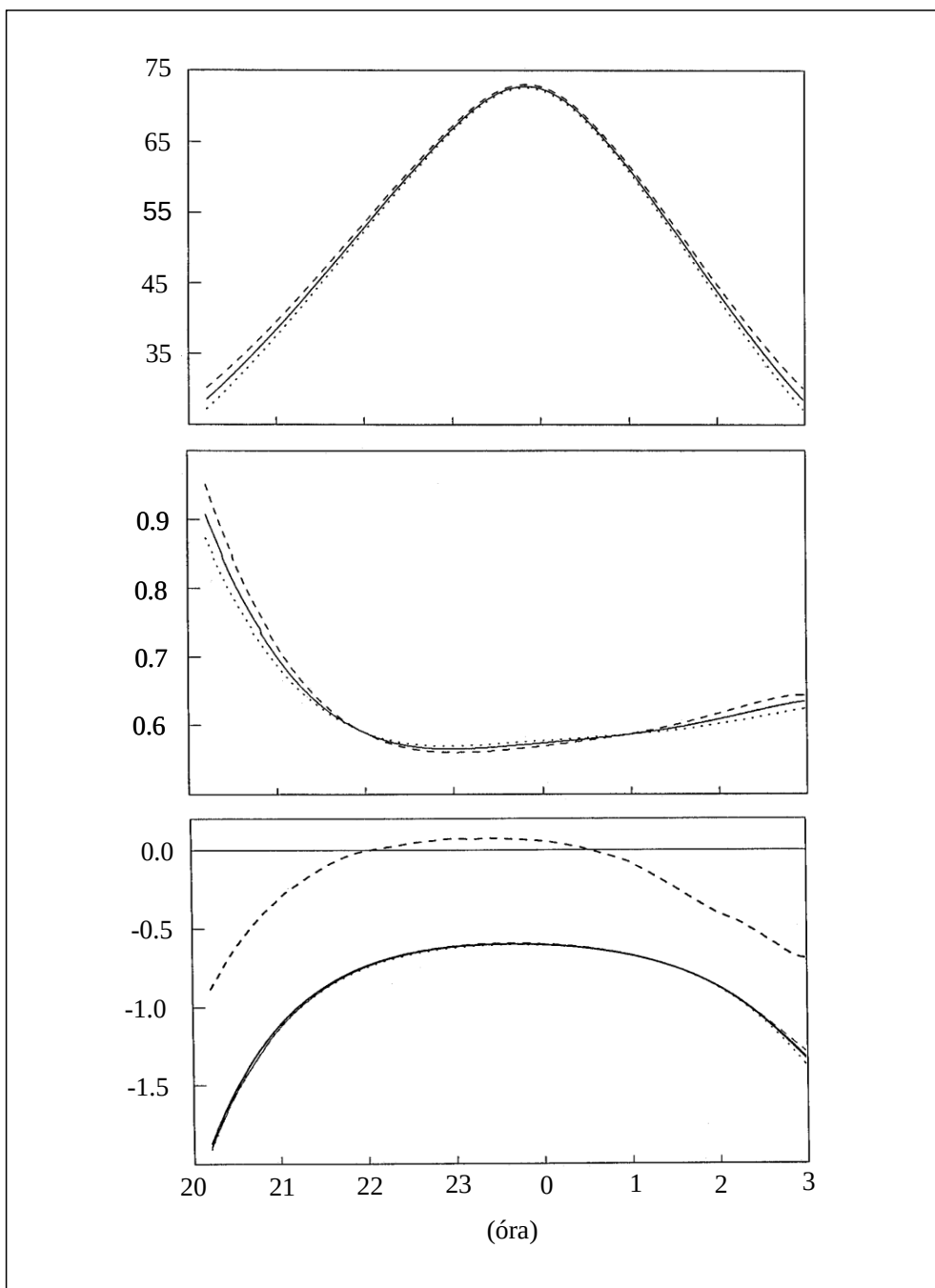
5.28 ábra. A különböző ionoszférikus kombinációk grafikus ábrázolása
 (baloldalt az 1. csatorna PCD, jobboldalt az 5. csatorna XCR mérései láthatók,
 felül a $P_{i,GF}^j$, középen a $\Phi_{i,GF}^j$ és az alul a $(\Phi_{i,GF}^j + P_{i,GF}^j)$ kombinációk találhatók)



5.29 ábra. Optimális ionoszférikus kombinációk (m) a kulminációs idő függvényében (a felső ábra az invertált kódéréseket is ábrázolja, az alsó ábrán a lineáris trend nélkül)

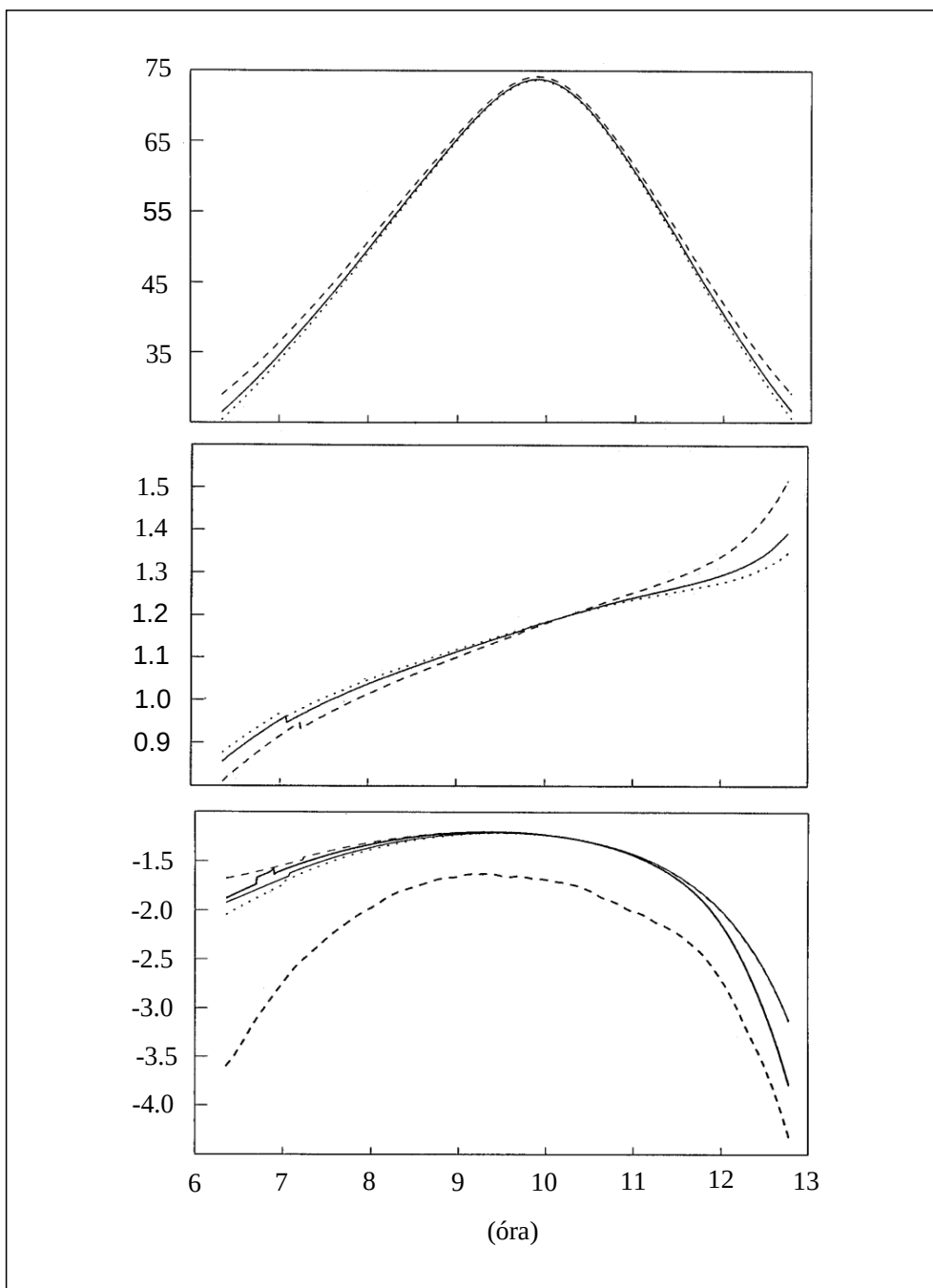


5.30 ábra. Az IRI modell szerkezete



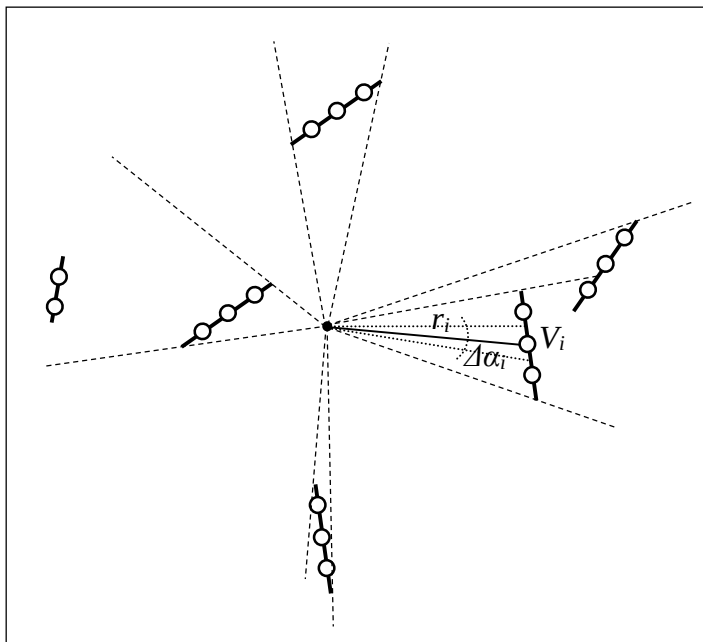
5.31 ábra. Az IRI modell és a mért optimális ionoszférikus kombinációk összehasonlítása 1994. október 10. napfóltszám 49

(A felső ábra a magassági szögeket (fok), a középső ábra az IRI vertikális késleltetéseket, az alsó ábra a ferde késleltetéseket ábrázolja a helyi idő függvényében. Az M görbéket vékony folyamatos, az E görbéket vékony szaggatott, az F2 görbéket pontozott vonal jelöli. Az alsó ábrán a vastag folytonos vonal a ferde integrált, a vastag szaggatott vonal a mért késleltetéseket ábrázolja (m).)

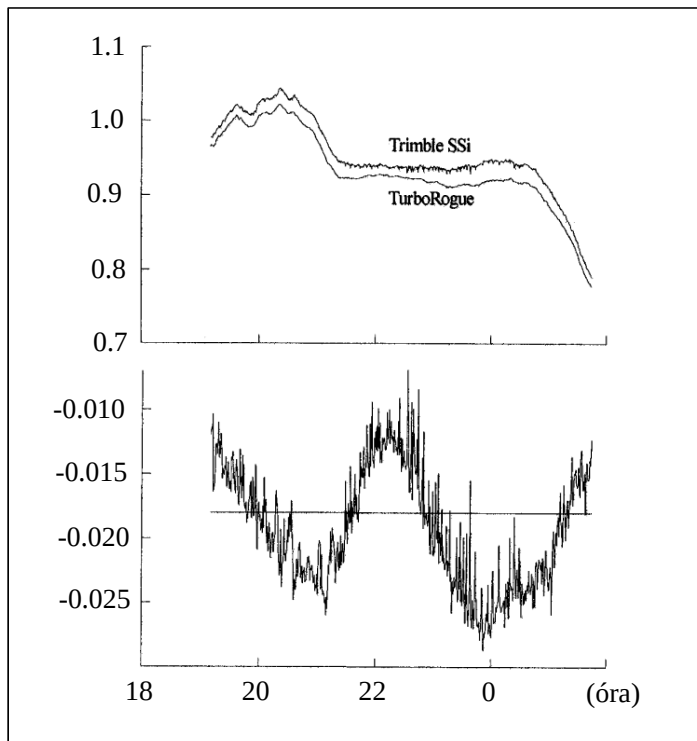


5.32 ábra. Az IRI modell és a mért optimális ionoszférikus kombinációk összehasonlítása 1994. május 23. napfólszám 19

(A felső ábra a magassági szögeket (fok), a középső ábra az IRI vertikális késleltetéseket, alsó ábra a ferde késleltetéseket ábrázolja a helyi idő függvényében. Az M görbéket vékony folyamatos, az E görbéket vékony szaggatott, az F2 görbéket pontozott vonal jelöli. Az alsó ábrán a vastag folytonos vonal a ferde integrált, a vastag szaggatott vonal a mért késleltetéseket ábrázolja (m).)



5.33 ábra. A V_{TEC} értékek interpolálásának geometriai vázlata
(A folyamatos vonal a pályaszakaszt, a körök az adathelyeket jelölik.)



5.34 ábra. A vertikális ionoszférikus késleltetések összehasonlítása (m)
(Darmstadt, 1995. október 29. PRN 5, az alsó ábra a különbséget ábrázolja)

5.3 A GPS mérések relatív feldolgozása és hálózati kiegyenlítése

A GPS mérések geodéziai és geodinamikai célú feldolgozásához számos ingyenes (és költségtérítéses) tudományos, valamint olcsónak nem mondható kereskedelmi adatfeldolgozó rendszer is megvásárolható. Hasonló programrendszer önálló kifejlesztése azonban indokolt lehet, ha az adatfeldolgozás feltételeit valóban el akarjuk sajátítani, és a gyakorlatban kipróbálni az irodalomban található eljárásokat. A nyílt forráskódú programokba is veszélyes belenyúlni, mivel nem ismerhetjük kellő mélységben a program felépítését. Ebben a fejezetben az adatfeldolgozás két különböző részterületére vonatkozó vizsgálatok és kísérleti számítások eredményeit foglaltam össze.

A fentiek figyelembevételével RETRO GPS (Rigorous Evaluation of TRiple-differenced Observation) néven kidolgoztam egy eljárást és elkészítettem egy több ezer soros kísérleti programrendszert, amely a fázismérések hármaskülönbségeinek szabatos feldolgozását hajtja végre, és lehetővé teszi a 3. részben bemutatott összefüggések és kiegyenlítési eljárások többségének kipróbálását és alkalmazását is.

A gyakorlatban használt megbízható szoftvereknél, az n egy időben üzemeltetett vevő $(n-1)$ független bázisvonalának együttes kiegyenlítésével olyan hálózatot hoznak létre, amely nagyon jó egyezést mutat a minden kombinációban kiegyenlített $(n(n-1)/2)$ bázisvonallal, ha a külső körülmények is ideálisak. A többutas terjedés, vagy a kitakarást okozó tereptárgyak jelenléte miatt azonban indokolt lehet a minden kombinációban meghatározott bázisvonalak hálózati kiegyenlítése is, és az ellentmondások okainak feltárása. A bázisvonalak közvetett hálózati kiegyenlítése viszont elkerülhetetlen, ha a hálózat egyes részeit ugyan minimális számú vektor segítségével dolgozzuk fel, de a teljes hálózat több, egymáshoz kapcsolódó részből áll össze. A kidolgozott GPS-NET program a hiba keresések mellett a szabadhálózat elvét is alkalmazza, ezért lokális deformáció vizsgálati célra is felhasználható.

A 3. részben az írtam, hogy a hármas különbségeket többnyire a ciklusugrások kiküszöbölésére használják, vagy a nagy és bonyolult súlymátrix miatt csak az előzetes koordináták javításához, közelítő megoldásként alkalmazzák. A feladat optimális megoldásánál a következő módszert alkalmaztam. Az egyszeres különbségeknél a súlykoefficiens mátrix még diagonális, ezért a második lépésben most műholdanként, időben egymást követő kettőskülönbségeket állítom elő. Ekkor a Gauss-Markov modell szerinti megoldás

$$\hat{x} = (A^t Q^{-1} A)^{-1} (A^t Q^{-1} b) \quad (5.24)$$

$$\text{ahol} \quad Q = \begin{bmatrix} 2Q_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2Q_i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2Q_m \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad Q_i = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$(k-1, k-1)$

A Q_i partíciók i indexe a műholdak sorszámát jelenti, és k az adott műholdra vonatkozó folyamatos mérések száma. A partíciók inverze a saját érték és sajátvektor felbontás segítségével közvetlenül is felítható (Závoti 1999b):

$$Q_i^{-1} = D D^t, \quad (5.25)$$

$$\text{ahol} \quad D(i, j) = \frac{\sqrt{\frac{2}{n+1} \cdot \sin\left(\frac{i \cdot j \cdot \pi}{n+1}\right)}}{\sqrt{2 \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{j \cdot \pi}{n+1}\right)\right)}}, \quad (5.26)$$

és n a négyzetes $\mathbf{D}$ mátrix mérete, i és j az elemek sor- és oszlop száma. A (5.24) egyenletbe behelyettesítve az

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^t \mathbf{D}) \mathbf{I} (\mathbf{D}^t \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{D}) \mathbf{I} (\mathbf{D}^t \mathbf{b}) \quad (5.27)$$

eredmény kapjuk, amely azt mutatja, hogy a $\mathbf{b}_D = \mathbf{D}^t \mathbf{b}$ mérési kombinációk dekorrelált mennyiségek, tehát a súlymátrixuk továbbra is az $\mathbf{I}$ egységmátrix. A műholdankéti, most harmadik különbségképzés továbbra is a (3.77) összefüggésnek megfelelő korrelált súlymátrixot eredményezi, ami a (3.78) összefüggés segítségével szintén közvetlenül invertálható.

A dekorreláció alap gondolatát később Strang és Borre (1997) könyvében is megtaláltam, de ott a Cholesky felbontáson alapuló általános megoldást javasolják, ahol a nagy mátrixok dekopozíciós lépései szintén elcsordulást eredményezhetnek.

Az új módszer abból a szempontból előnyös, hogy a $\mathbf{D}$ dekorrelációs mátrix elemei közvetlenül felírhatók, és gyakorlatilag a nagyméretű mátrix felbontására és tárolására sincs szükség.

Az egyetlen vektor feldolgozását végző RETRO GPS program működési elve a következő.

Az első lépésben a bázis és a szabadon változó állomás (a továbbiakban szabadállomás) paramétereit és a méréseket a RINEX adatfájlokból beolvasom. A méréseket műholdanként (különbségképzés nélküli) „egyedi” ideiglenes bináris fájlokba alakítom át. A fájl neve a négybetűs RINEX állomásazonosító, és a kiterjesztése a műhold száma.

Az adatfájl sorainak szerkezete:

```
typedef struct { unsigned long gs; // GPS time [second]
                 char er; // error indicator
                 double ft; // fractional time
                 double l1; // l1 phase in meter
                 double l2; // l2 phase in meter
                 double l4; // l1-l2 ionosp. effect in meter
                 double x; // sat. posidon or deifferential
                 double y; // sat. posidon or deifferential
                 double z; // sat. posidon or deifferential
                 double ce; // sat. clock error [microsecond]
               } obsdat;
```

Az első lépésben az egész időpontok (gs) és a fázismérések (l1, l2 és l4) kerülnek feltöltésre. A töredék időeltérésre (ft) a régebbi műszerek esetében lehet szükség (pl. Trimble 4000SST).

Az SP3 formátumú pontos efemeridák alapján, vagy a fedélzeti efemeridák segítségével műholdanként szintén bináris adatfájlokat állítok elő, amely 15 percenként az SP3 tartalmának megfelelően tartalmazza a következő adatokat:

```
typedef struct { unsigned long gs; // GPS time [second]
                 double x; // satellite posidon [m]
                 double y; // satellite posidon [m]
                 double z; // satellite posidon [m]
                 double ce; // sat. clock error [microsecond]
               } satdat;
```

A feldolgozás „nulladik” iterációjában 17 fokú szimmetrikus Lagrange interpolációval feltöltöm a bináris adatfájlokban az egyes mérésekhez tartozó műholdpozíciókat és órahibákat.

A következő lépésben a feldolgozási opcióknak megfelelően az „l1” helyen tárolom a korrigált méréseket. A korrekciók az előzetes műhold és vevő távolságok mellett, a troposzférikus hatásokat, a műhold órahibáit és a pályainterpoláció mellékeredményeként adódó sebességek alapján a relativisztikus korrekciókat is figyelembe veszi. A földforgási korrekciót a pályainterpoláláskor veszem figyelembe. Az egyéb hatásokat a hármas különbségek korrigálják. A feldolgozandó mennyiségek a közvetlenül mért „L1”, az ionoszféramentes „L3”, vagy az „L4” geometriamentes kombináció alapján ionoszférikusan korrigált „LC” mérések is lehetnek.

Az utóbbi esetben az „L4” mérések az ionoszférikus hatások mellett csak konstans paramétereket tartalmaznak. A szomszédos időpontokénti különbségek kiejtik a konstans paramétereket, az ionoszférikus hatásokat is csökkentik (differenciálják), és a ciklusugrások helyei is kiemelkednek a mérési sorozatból. Ekkor a differenciák felhasználhatók a ciklus ugrások detektálására és a zajos adatok szűrésére. A differenciákhoz illesztett Chebisev polinommal írom le az ionoszférikus hatásokat, így az elvileg véletlen jellegű mérési hibákat is kiszűrhetem. A polinomok fokszáma a folyamatos adatsorok függvényében automatikusan változik.

A mérések korrekciója után az „x, y és z” helyekre a vevő és műhold távolságok vevő koordináták szerinti differenciáljai kerülnek.

A következő lépésben az alkalmasnak bizonyult mérésekből vevők szerinti ideiglenes „kettős” bináris fájlokat állítok elő, amelyeknek a szerkezete azonos az „egyedi” fájlokéval. Nevük a bázis és a szabad állomás négy-négy betűjéből, kiterjesztésük a műhold számából áll.

A kettős fájlokban először a vevők szerinti egyszeres különbségeket, majd ezekből az időszerinti második különbségeket számítom ki. Az (i) -edik időpontbeli egyszeres különbségekből folyamatosan kivonok az $(i+1)$ -edik időpontbeli értéket, és a koordináták szerinti differenciálokat is folyamatosan módosítom. Adathiányoknál és szakadásoknál újraindul a különbségképzés.

A vevő és időpontok szerinti kettős különbségek fájljai alapján előállítok egy bináris összegző mátrixot (Score board):

```
typedef struct { unsigned long gs; // GPS time [second]
char s0;char s1;char s2;char s3;char s4;char s5;char s6;
char s7;char s8;char s9;char s10;char s11;char s12;char s13;
char s14;char s15;char s16;char s17;char s18;char s19;char s20;
char s21;char s22;char s23;char s24;char s25;char s26;char s27;
char s28;char s29;char s30;char s31; } scbdat;
```

amely ez egyes időintervallumokban folyamatosan jelenlévő alkalmas műholdankénti megfigyeléseket jelzi.

A folyamatos intervallumok alapján most kiszámítom a hármas különbségeket. Ehhez praktikusági okokból a legkisebb számú műholdat választom bázisműholdnak. Ennek a holdnak a kettős különbségeit vonom ki a többi műhold kettőskülönbségeiből. A hármas különbségeket továbbra is a „kettős” bináris fájlokban tárolom. A koordináták szerinti differenciálokat továbbra is az x, y, z helyek tartalmazzák. Ezek a folyamatos hármas különbségek önmagukban csak időszerinti korrelációkat tartalmaznak (két vevő, két műhold, szomszédos időpontok között kivonva). (Az (5.24) összefüggés Q_i mátrixát tehát négygyel kell szorozni, és az (5.26) képlet $D(i, j)$ értékeit, pedig kettővel osztani.)

Ezt követi a dekorreláció, amely visszaállítja az egységnyi súlyt. Az azonos időpontra vonatkozó dekorrelált hármas különbségek azonban már korrelált mennyiségek. Ezért a normálegyenletek időpontokénti blokkokban történő összegzésénél, ahol $(m-1)$ számú mérés található (m az időpontokénti folyamatos műholdak száma) a súlymátrix (3.77) alakú lesz. Ebben a lépésben a $\mathbf{b}^t \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}$ norma is kiszámítható, amely a további iterációs lépésekben már jól megközelíti a $\hat{\mathbf{v}}^t \mathbf{Q}^{-1} \hat{\mathbf{v}}$ normát, és a súlyegység középhibája ($\hat{\sigma}_0$) is becsülhető. A programban a különbségképzés nélküli L1 vagy L3 kombinációt tekintjük egységnyi súlyú mérésnek.

Az összegzett normálmátrix csak három koordináta ismeretlent tartalmaz, és a Gauss-Markov modell szerint is kiegyenlíthető.

A következő iterációkban a szabadállomás koordinátáinak változásai miatt újra kell aktualizálni a bináris fájlokat. A dekorrelációt megelőzően a hármas különbségek ekkor már hatásosan alkalmazhatók a ciklusugrások korrekciójára, és a σ_0 is felhasználható a kiugró eloszlású értékek közelítő módszer szerinti szűrésére. Az iterációt addig folytatom, amíg a σ_0 változása már elhanyagolhatóvá válik.

A hármaskülönbségek képzésének és a dekorrelációnak a sorrendjét azért cserélhettük fel, mert az utóbbi művelet csak az azonos adatszám függvénye. A ciklusugrások korrekciója és a szűrés a

dekorrelált adatokon nem végezhető el, mivel a dekorrelált mérések az eredeti mérések lineáris kombinációi.

A II. mellékletben példaképpen négy feldolgozás eredményeit mutatom be. Az első három a Graz és Wettzell IGS álmások TurboRogue méréseit dolgozza fel L1, L3 és LC méréseket alkalmazva. Az 5.20 táblázat a fontosabb eredményeket foglalja össze. Ahogy az várható volt, a nagy távolság (D) miatt a hármaskülönbségek nem redukáltak kellőképpen az ionoszférikus hatásokat. A másik két megoldás, ugyan hasonló eredményt szolgáltat, de az ionoszféra eltérő kezelése kismértékben elforgatta a vektort. Elméletileg az LC megoldásnak kellett volna pontosabb eredményeket szolgáltatni, de a nagyobb ionoszférikus hatásoknál ez a polinomos módszer sajnos nem alkalmazható hatásosan.

Egy másik lehetőség a zaj és a ciklusugrások sztochasztikus folyamként történő szűrése (3.5 fejezet), vagy az ionoszférikus hatásoknak az 5.2 fejezetben bemutatott módszer szerinti folyamatos megfigyelése és a véletlen hibák szűrése.

5.20 táblázat. A Graz-Wettzell vektor komponensei és középhibái (m)

Retro GPS	$\hat{\sigma}_0$	$\Delta X / \hat{\sigma}$	$\Delta Y / \hat{\sigma}$	$\Delta Z / \hat{\sigma}$	$D / \hat{\sigma}$
L1	0.0234	-118843.0955 0.0112	-230848.5552 0.0137	154322.4931 0.0066	302043.3225 0.0098
L3	0.0029	-118843.2733 0.0020	-230848.9536 0.0029	154322.7081 0.0012	302043.8068 0.0021
LC	0.0040	-118843.2383 0.0023	-230848.9431 0.0032	154322.7056 0.0015	302043.7837 0.0023

A negyedik RETRO GPS alkalmazás két közeli Leica 1200 műszer adatait dolgozza fel. Mivel közeli pontokról van szó, csak L1 méréseket használtam. Itt is azonos karakterisztikájú antennákat választottam, mivel fáziscentrum modellt a program jelenlegi verziója még nem tartalmaz. Az 5.21 táblázatban az eredményeket a Leica LGO feldolgozó program L1 rögzített fázistöbbértelműségű megoldásával hasonlítottam össze. A távolságok (D) azonossága csak a véletlen műve. A vektor komponensek milliméter nagyságrendű eltérései szintén a vektor elfordulására utalnak. A Graz-Wettzell L3 megoldás nagy becsült pontossága (2-3 mm) a 24 órás megfigyelés, és az IGS archívumból letöltött szűrt adatfájl következménye. A rövid vektor 16 órás megfigyelése is közel azonos fölös mérést szolgáltatott, de az LGO megoldással gyakorlatilag azonos vektor ellenére is a pontossága egy nagyságrenddel rosszabb.

Ennek két oka van, egyrészt a RETRO GPS hibaszűrése még nincs megfelelően behangolva, amivel a súlyegység közhibája csökkenthető, másrészt a hármaskülönbségek szabatos kiegyenlítésének geometriai kondíciója azonos a kettős különbségek kiegyenlítésének geometriai kondíciójával, ha a fázistöbbértelműségeket is ismeretlenként kezeljük. (A harmadik különbség éppen ezeket ejtette ki.) A fázistöbbértelműségek rögzítése egy nagyságrenddel növeli a geometriai kondíciót. Az LGO is felülbecsült 0.1 mm pontosságot szolgáltatott. A $\hat{\sigma}_0$ értékeket nem tudjuk összehasonlítani, mivel nem ismerjük az LGO előzetes értékét.

5.21 táblázat. Rövid vektor komponensei és középhibái (m)

L1	$\hat{\sigma}_0$	$\Delta X / \hat{\sigma}$	$\Delta Y / \hat{\sigma}$	$\Delta Z / \hat{\sigma}$	$D / \hat{\sigma}$
RETRO GPS	0.0134	-1.3093 0.0106	-0.3779 0.0133	1.2366 0.0067	1.8401 0.0074
Leica LGO	0.1763	-1.3078 0.0001	-0.3714 0.0000	1.2401 0.0001	1.8401 0.0001

A GPS mérésekből levezetett, egymáshoz kapcsolódó hálózatok (illetve az azokat kifesztítő vektorok) együttes kiegyenlítése, a hálózat összekapcsolása mellett az ellentmondásokon keresztül a mérések külső pontosságának a vizsgálatát is lehetővé teszik. A SINEX formátumú adatok geodinamikai célú globális és regionális feldolgozásának elvét a 4.2 fejezet ismertette.

A GPS-NET program az egy lépésben kiegyenlített minimális számú bázisvonal rögzített ponthoz viszonyított koordinátakülönbségeit, azok variancia-kovariancia (vagy súlykoefficiens) mátrixát, a feldolgozás szabadságfokát és a súlyegység középhibáját kezeli bemenő adatként, a vektorok közvetett kiegyenlítésénél. A különböző megoldások közötti ellentmondások elfordulásként történő kezelésnek különböző lehetőségeit (Bányai 1991) részletesen megvizsgálta. A véletlen jellegű elfordulási hibák kiegyenlítésbe történő bevonása kedvező megoldásnak bizonyult. Ezt egészítette ki a koordináta ismeretlenek mellett a méretarány és fáziscentrum-külpontosság ismeretlenként történő járulékos bevezetése.

Ez utóbbi két ismeretlentípus csak bizonyos feltételek mellett becsülhető, amit a konkrét feladatnak megfelelően kell alkalmazni.

A GPS mérésekből csak a bázisvonalak hosszai határozhatók meg feltevésmenyesen, ezek függetlenek a koordinátarendszer kezdőpontjától és a tengelyek irányítottságától. A koordináta különbségek csak a tengelyek irányítottságának függvényei. A véletlen jellegű elfordulási hibák bevezetésével ez a kapcsolat sztochasztikus módszerrel lazítható.

A bázisvonalak közvetett szabatos kiegyenlítésére a Gauss-Markov modellnek megfelelően a

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v} \\ (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b}) \\ \mathbf{C} \mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \quad (5.28)$$

egyenleteket alkalmaztam (3.3 fejezet). A kényszerfeltételek az alkalmasan választott pontok koordinátaváltozásainak négyzetösszegét minimalizálva oldják fel a normálegyenletek három defektusát, amely a koordinátarendszer eltolására vonatkozik. Ez a módszer a szabadhálózatos megközelítés általánosított megoldásának tekinthető.

Az $\mathbf{A}$ együttható mátrix ugyan csak 1, 0, -1 elemeket tartalmaz de a

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_x^{-1} \quad (5.29)$$

súlymátrix tartalmazza az elsődleges vektor meghatározás eredeti normálegyenleteit. A statisztikai vizsgálatokhoz a kiegyenlítésbe bevont vektorok súlyegység középhibáira is szükség van. A közvetett kiegyenlítés a priori értéke a következő képlettel becsülhető:

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum \hat{\sigma}_{0i}^2 f_i}{\sum f_i}}, \quad (5.30)$$

ahol i a közvetett kiegyenlítésbe bevont vektorcsoportok sorszáma és f a szabadságfoka. A véletlen elfordulási hibák a

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (5.31)$$

kiterjesztett (vagy Gauss-Helmert) modellel vehetők figyelembe, ahol a bővítmény egyetlen bázisvonal és differenciálisan kicsi elfordulások esetében a

$$\mathbf{B}_i \mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta Z_i & \Delta Y_i \\ 0 & 1 & 0 & \Delta Z_i & 0 & -\Delta X_i \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta Y_i & \Delta X_i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \sigma_0^2 Q_x & 0 \\ 0 & \sigma_a^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

lineáris modellel vehető figyelembe, ahol az $\mathbf{M}_i$ variancia-kovariancia mátrix két nem korrelált összetevőből, az elsődleges kiegyenlítésből származó (tengelyirányú) hibák, és a járulékos elfordulási hibák diagonális variancia-kovariancia mátrixából áll. Ez utóbbi esetben az elfordulások szórását

(σ_α) járulékos információként visszük be a rendszerbe. Tapasztalataink szerint ez egy ívmásodperc körüli értéknek választható.

Ha a súlyegység apriori középhibáját egységnek választjuk ($Q = M$), a bővített modell a

$$\begin{aligned}\bar{v} &= Bv \\ \bar{Q} &= BQB^t\end{aligned}\quad (5.33)$$

összefüggések segítségével visszavezethető a Gauss-Markov modellre. A kiegyenlítést követően a következő összefüggések is érvényesek:

$$\begin{aligned}v &= QB^t \bar{Q}^{-1} \bar{v} \\ \bar{v}^t \bar{P} \bar{v} &= v^t P v\end{aligned}\quad (5.34)$$

Az alapösszefüggéseket Mikhail (1976) tartalmazza. A mérések száma azonban a v méretével azonos, mivel járulékos információkat vittünk be a rendszerbe.

Az (5.33) és (5.34) összefüggések formailag azonosak a 3.4 fejezet (3.71) és (3.72) összefüggéseivel, de ott az elsődleges mérések kombinációt dolgoztuk fel, itt járulékos információkat vittünk be a rendszerbe. Sztochasztikus szempontból a Gauss-Markov és a BLE modell keverékének tekinthető, mivel az elfordulásokat (az ismeretlenek egy részét) a mérési hibákkal együtt minimalizáljuk.

Azokat a vektorkomponenseket, amelyekről feltételezzük, hogy a többiekől eltérő méretarány-nal rendelkeznek, megszorozzuk az

$$(1+10^{-6} \Delta m) \quad (5.35)$$

kifejezéssel, és a Δm mennyiséget is ismeretlenként kezeljük, amely ppm (part per million), vagy az annak megfelelő mm/km egységben adja meg a méretarány eltérését.

Ha feltételezzük, hogy a bázisvonalak valamely végpontjában az antenna koordináta-rendszerében a fáziscentrum külpontosságára utaló eltéréseket tapasztaltunk, pl. rossz antenna magasságot használtuk, helytelen fáziscentrum modellt alkalmaztunk, vagy a külső körülmények hatása miatt hibás eredmény kaptunk, akkor a vektorkomponensekhez a következő korrekciókat rendelhetjük:

$$\begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cdot \cos\lambda & -\sin\lambda & \cos\varphi \cdot \cos\lambda \\ -\sin\varphi \cdot \sin\lambda & \cos\lambda & \cos\varphi \cdot \sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta X_i \\ \Delta Y_i \\ \Delta Z_i \end{bmatrix} + R_i \cdot \begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ U_i \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

ahol φ és λ az állomás (előzetes) ellipszoidi koordinátái, N az északi, E a keleti és U a magassági irányú fáziscentrum-külpontosság. Az adatfeldolgozás során csak a magassági, csak a két vízszintes, vagy mind a három komponens tekintethetjük ismeretlennek.

Azonban csak megfelelő számú fölös mérés esetében becsülhetjük meg az egyes külpontosságokat. Ezeknél a vektoroknál a mérési javítások nulla értéket vesznek fel, és az ellentmondások külpontosságként jelentkeznek. Helytelenül felvett modell szinguláris megoldáshoz vezet, amit program alkalmazójának kell elkerülni.

A hibakeresést különböző statisztikai tesztek támogatják. A súlyegység előzetes és becsült középhibáinak azonosságát χ^2 teszttel, az egyes mérési javítások nullától való szignifikáns eltérését τ teszttel ellenőrizzük (3.6 fejezet). Az eredmények között a statisztikákat is megadjuk, és jelezzük, hogy melyek nagyobbak a 95% valószínűségekre vonatkozó küszöbértékeknél.

Az adatfeldolgozást célszerű az egyszerű vektorkiegyenlítéssel kezdeni. A szignifikáns hibákat a modell bővítésével vizsgálhatjuk. Elméletileg mindig csak egy, a legnagyobb statisztikát mutató méréshez szabad valamely hibaparamétert hozzárendelni, vagy kihagyni a következő kiegyenlítésből.

A feldolgozás paraméterei részben az adatfájlban részben a program inicializáló részében adhatók meg. Példaként egy lokális geodinamikai hálózat feldolgozását mutatja be a III. melléklet.

Az L1 és L3 vektorokat minden kombinációban a FÖMI KGO munkatársai határozták meg a Bernese program segítségével.

Az adatfájl első rekordjai kötelezően a pontok előzetes koordinátáit tartalmazzák 3D térbeli koordináta rendszerben. A pontszám előtti kód 0 vagy 1 értékű lehet. Az „1” kódok vagy a rögzítendő, vagy a minimum normában szereplő állomásokat jelölik, amennyiben nem az összes pont koordinátaváltozásait kívánjuk minimalizálni.

Az adatblokkok a következő alakúak lehetnek:

```
2 0.0022 15481 OFALU_00t_11
    4366 2 2052 3 1547.4070 1218.9141 -1690.4445 0 0 1 0.0
0.1127327705E-01
0.3689722903E-02 0.1623032049E-02
0.1170798054E-01 0.3980913651E-02 0.1351238003E-01
```

Az első szám azt mutatja, hogy két pont közötti egyetlen vektor adatai következnek. A következő adatok a súlyegység középpontja és a szabadságfok, valamint a feldolgozás azonosítója.

A következő rekord a bázisállomás száma és az antenna (vevő) azonosítója, a szabadállomás száma és antenna (vevő) azonosítója, továbbá a vektor komponensei ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$). A következő négy szám sorrendben azt jelenti, hogy a bázis- és szabad állomásokhoz sem rendeltünk fáziscentrum külpontosságot, a vektorhoz 1. sorszámu méretarány eltérést kapcsoltunk, az elfordulási hiba szórása $0.0''$, azaz elfordulási hibát sem keresünk. Ha n számú vevő ($n-1$) független vektorát visszük be a másodlagos kiegyenlítésbe, akkor az adatrekordok száma is ($n-1$). A fáziscentrum-külpontosság negatív előjelű is lehet (ez a sorrendet nem befolyásolja), ami azt jelzi, hogy az antennát 180 fokkal elforgattuk (lásd 5.4 fejezet).

A következő sorok a vektorok sorrendjének megfelelően a súlykoefficiens, vagy a variancia-kovariancia mátrix alsó háromszög partícióját tartalmazzák.

A méretarányhibákat és a fáziscentrum-külpontosságokat egytől kezdődően növekvő sorrendben adhatjuk meg.

A mellékelt példánál feltételeztük, hogy az L1 megoldások az L3 megoldásokhoz viszonyítva (ionoszférikus) méretarányhibával rendelkeznek, az L3 megoldások az L1 megoldáshoz viszonyítva elfordultak ($\sigma_\alpha = 1.0''$), és három fáziscentrum külpontosság is kellett ahhoz, hogy a súlyegység előzetes és kiegyenlítés utáni középpontjai statisztikailag is azonosak legyenek. Gyakran ez az állapot nem érhető el, ami azt jelenti, hogy a vektorok ellentmondásai nincsenek összhangban az eredeti megoldások becsült belső pontosságával.

Ez az eljárás a nagyon nehezen automatizálható hibakeresést is lehetővé teszi, amely a tudományos szoftverekhez hasonlóan a szakterületen nagyobb jártasságot igényel.

A GPS hálózat dátumdefektusait, az általánosított szabadhálózat elvének megfelelően, tetszőlegesen definiált állomások előzetes, illetve valamely előző időpontbeli koordinátáihoz viszonyított változások négyzetösszegének minimalizálásával is fel lehet oldani, amely térbeli deformáció-vizsgálatok esetében alkalmazható eljárás (Bányai 1992).

Az ófalui geodinamikai mérések feldolgozását Bányai (2003), a paksi geodinamikai mérések feldolgozásánál alkalmazott eljárást Bányai és Mentés (2006) részletesen bemutatja.

A programrendszer és a fáziscentrum-külpontosságok becslésére kidolgozott speciális mérési és adatfeldolgozási módszert a következő fejezetben ismertetem.

5.4 Az átlagos fáziscentrum-külpontosságok vizsgálata

A különböző antennatípusok együttes alkalmazásánál szükségessé vált az eltérő antennakarakterisztikák meghatározása is (Beutler et al. 1994). Az L3 mérési kombinációk és a troposzférikus hatások együttes becslésénél is szükséges az antennák ismerete, még rövid bázisvonalak esetében is (Rocken 1992). Ahogy azt az 5.2 fejezet is bemutatta a GPS antennák ionoszférikus kalibrációjánál is kimutatható volt a különböző antenna típusok eltérése. Ezt a felismerést követően részletesen tanulmányoztam az antennakalibráció különböző módszereit, amit a 3.7 fejezetben foglaltam össze. A különböző antennák összehasonlítása több tanulmányban is megtalálható (Rothacher et al. 1995, Breuer et al. 1995, Gürtner et al. 1989).

Az abszolút és a relatív antennakalibráció mellett azonban egyszerűbb módszereket is kidolgoztak az azonos típusú antennák maradék fáziscentrum hibáinak ellenőrzésére (Braun et al. 1996). A módszereket teljes antennaforgatásnak (full rotation) és antennacserének (antenna swapping) nevezték. Ezek a vizsgálatok nem igénylik az alappontok relatív helyzetének pontos ismeretét sem. A módszerek vizsgálatát követően bevezettem azok általánosított modelljét, amit teljes helycserés módszernek neveztem. Ez a módszer nem csak az antennák vizsgálatára, de lokális deformáció vizsgálati célra is alkalmasnak bizonyult, mivel a hálózat koordinátáit és a fáziscentrum külpontosságok maradék hibáit is egy kiegyenlítési lépésben határozza meg. A módszert és alkalmazását több publikációban is ismertettem (Bányai 2005, Bányai 2006). A továbbiakban ezeknek a módszereknek az alapelvét és néhány alkalmazását mutatom be részletesebben.

Tételezzük fel, hogy egy három pontos lokális hálózat egyidejű méréséből, egymástól függetlenül meghatároztuk az állomások közötti vektorokat ($\mathbf{A}$). Másnap ismételjük meg a méréseket azonos műholdkonfiguráció alatt (azonos csillagidőben) úgy hogy, két antennát 180 fokkal forgassunk el. Ezt az elrendezést az 5.35 ábra mutatja be, amely az antennák koordináta rendszerét is feltünteti. Az ábra baloldali része a horizontális, a jobboldali része a magassági viszonyokat ábrázolja. A lokális hálózat miatt feltételezhetjük, hogy az antennák koordináta-rendszerének tengelyei párhuzamosak. Az antennák referencia pontjainak térbeli helyzetét az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$, az antennák feltételezett fáziscentrum külpontosságait az $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ és $\mathbf{f}_3$ vektorok jelölik. A vektorok alsó indexében a zárójelbe tett számok az antenna elforgatott helyzetére utalnak. Az 5.35 ábra bal oldala alapján a következő vektoregyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{12} &= (\mathbf{b} + \mathbf{f}_2) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1) \\
 \mathbf{A}_{13} &= (\mathbf{c} + \mathbf{f}_3) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_1) \\
 \mathbf{A}_{23} &= (\mathbf{b} + \mathbf{f}_2) - (\mathbf{c} + \mathbf{f}_3) = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\
 \mathbf{A}_{1(2)} &= (\mathbf{b} - \mathbf{f}_2) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - (\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_1) \\
 \mathbf{A}_{1(3)} &= (\mathbf{c} - \mathbf{f}_3) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{c} - \mathbf{a}) - (\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1) \\
 \mathbf{A}_{(2)(3)} &= (\mathbf{b} - \mathbf{f}_2) - (\mathbf{c} - \mathbf{f}_3) = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) - (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)
 \end{aligned} \tag{5.37}$$

Az egyenletek alapján a következő kombinációk állíthatók elő:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}_{12} - \mathbf{A}_{1(2)})/2 &= \mathbf{f}_2 \\
 (\mathbf{A}_{13} - \mathbf{A}_{1(3)})/2 &= \mathbf{f}_3 \\
 (\mathbf{A}_{23} - \mathbf{A}_{2(3)})/2 &= (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\
 (\mathbf{A}_{23} + \mathbf{A}_{2(3)})/2 &= (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \\
 (\mathbf{A}_{13} + \mathbf{A}_{1(3)})/2 &= (\mathbf{c} - \mathbf{a}) - \mathbf{f}_1 \\
 (\mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{1(2)})/2 &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{f}_1
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

Az elforgatott antennáknál a fázis külpontosság abszolút értékei is meghatározhatók (f_2 és f_3), míg a mozdulatlan antenna fázis külpontossága (f_1) nem választható szét a helyzetvektoroktól.

Az elforgatott antennák vektoraiból csak a fáziscentrum külpontosságok ($f_2 - f_3$) és a helyzetvektorok ($b - c$) különbségei határozhatók meg. A forgatás csak abból a szempontból tekinthető „teljesnek”, hogy az eltérések ekkor lesznek a legnagyobbak.

Ha mind a három antennát elforgatjuk (5.36 ábra), a vektoregyenletek:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12} &= (b + f_2) - (a + f_1) = (b - a) + (f_2 - f_1) \\
 \Delta_{13} &= (c + f_3) - (a + f_1) = (c - a) + (f_3 - f_1) \\
 \Delta_{23} &= (b + f_2) - (c + f_3) = (b - c) + (f_2 - f_3) \\
 \Delta_{(1)(2)} &= (b - f_2) - (a - f_1) = (b - a) - (f_2 - f_1) \\
 \Delta_{(1)(3)} &= (c - f_3) - (a - f_1) = (c - a) - (f_3 - f_1) \\
 \Delta_{(2)(3)} &= (b - f_2) - (c - f_3) = (b - c) - (f_2 - f_3)
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

és a hasznos kombinációk:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{12} - \Delta_{(1)(2)})/2 &= (f_2 - f_1) \\
 (\Delta_{13} - \Delta_{(1)(3)})/2 &= (f_3 - f_1) \\
 (\Delta_{23} - \Delta_{(2)(3)})/2 &= (f_2 - f_3) \\
 (\Delta_{23} + \Delta_{(2)(3)})/2 &= (b - c) \\
 (\Delta_{13} + \Delta_{(1)(3)})/2 &= (c - a) \\
 (\Delta_{12} + \Delta_{(1)(2)})/2 &= (b - a)
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ez azt mutatja, hogy a mérésekből csak a fáziscentrumok és a helyzetvektorok különbségei határozhatók meg feltevésmentesen. A szingularitások feloldásához tehát legalább egy helyzetvektort és egy fázis külpontosságot is ismerni kell.

Az antennák elforgatása azonban nem okoz változást a magassági komponensben (5.35 és 5.36 ábrák jobb oldala), ezért ezek a vektoregyenletek csak a horizontális komponensek esetében érvényesek.

Az 5.37 ábrán a méréseket úgy ismételtük meg, hogy két antennát most felcseréltünk:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12} &= (b + f_2) - (a + f_1) = (b - a) + (f_2 - f_1) \\
 \Delta_{13} &= (c + f_3) - (a + f_1) = (c - a) + (f_3 - f_1) \\
 \Delta_{23} &= (b + f_2) - (c + f_3) = (b - c) + (f_2 - f_3) \\
 \Delta_{1(2)} &= (c + f_2) - (a + f_1) = (c - a) + (f_2 - f_1) \\
 \Delta_{1(3)} &= (b + f_3) - (a + f_1) = (b - a) + (f_3 - f_1) \\
 \Delta_{(2)(3)} &= (c + f_2) - (b + f_3) = (c - b) + (f_2 - f_3)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

A két sorozat különbségeiből a referencia pontok helyzetvektorai most is kiejthetők. A további hasznos kombinációk:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{12} - \Delta_{1(3)}) &= (f_2 - f_3) \\
 (\Delta_{13} - \Delta_{1(2)}) &= (f_3 - f_2) \\
 (\Delta_{23} + \Delta_{(2)(3)})/2 &= (f_2 - f_3)
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Az (5.37) és (5.38) összefüggésekhez hasonlóan az f_1 külpontosság itt sem választható szét a helyzetvektoroktól. A felcserélt antennák fáziscentrum különbsége azonban itt is meghatározható. Ebben az esetben azonban már nem csak a vízszintes, de a magassági komponensek különbségei is meghatározhatók (5.37 ábra). Azt is megállapíthatjuk, hogy két antenna felcserélésakor harmadik vevőberendezésre tulajdonképpen nincs is szükségünk.

Az (5.41) és (5.42) tulajdonságainak vizsgálatával találtam egy általánosított megoldást, amelyvel több antenna együtt is vizsgálható. Az 5.38 ábrán a második mérési sorozatban minden antenna új helyre került. Ekkor a vektoregyenletek:

$$\begin{aligned}
 A_{12} &= (\mathbf{b} + \mathbf{f}_2) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1) \\
 A_{23} &= (\mathbf{c} + \mathbf{f}_3) - (\mathbf{b} + \mathbf{f}_2) = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2) \\
 A_{31} &= (\mathbf{a} + \mathbf{f}_1) - (\mathbf{c} + \mathbf{f}_3) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3) \\
 A_{(1)(2)} &= (\mathbf{c} + \mathbf{f}_2) - (\mathbf{b} + \mathbf{f}_1) = (\mathbf{c} - \mathbf{b}) + (\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1) \\
 A_{(2)(3)} &= (\mathbf{a} + \mathbf{f}_3) - (\mathbf{c} + \mathbf{f}_2) = (\mathbf{a} - \mathbf{c}) + (\mathbf{f}_3 - \mathbf{f}_2) \\
 A_{(3)(1)} &= (\mathbf{b} + \mathbf{f}_1) - (\mathbf{a} + \mathbf{f}_3) = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_3)
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

és a hasznos kombinációk:

$$\begin{aligned}
 (A_{12} - A_{(3)(1)}) &= (\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 - 2\mathbf{f}_1) \\
 (A_{23} - A_{(1)(2)}) &= (\mathbf{f}_3 + \mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2) \\
 (A_{31} - A_{(2)(3)}) &= (\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 2\mathbf{f}_3) \\
 (A_{12} - A_{(1)(2)}) &= (2\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{c}) \\
 (A_{23} - A_{(2)(3)}) &= (2\mathbf{c} - \mathbf{b} - \mathbf{a}) \\
 (A_{31} - A_{(3)(1)}) &= (2\mathbf{a} - \mathbf{c} - \mathbf{b})
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Az (5.40) modellhez hasonlóan a fázis külpontosságok és helyzetvektorok most is szétválaszthatók. Ezek a kombinációk azonban most nem kettő, hanem három ponton végzett mérésekből állnak össze. Előnyösek azonban abból a szempontból, hogy a magassági komponensek eltéréseit is tartalmazzzák (5.38 ábra jobb oldala). A feltevésmentes meghatározáshoz tehát itt is legalább egy helyzetvektort és egy fáziscentrum külpontosságot ismerni kell.

A hasonlóságok miatt a „teljes antennaforgatás” és az „antennacsere” általánosított megoldását „teljes helycserének” neveztem (full roving). A módszer a következőképpen általánosítható. A lokális GPS hálózat alappontjait kössük össze egy képzeletbeli zárt sokszögvonallal úgy, hogy a vonal (a szomszédos pontok közötti szakaszok) hossza minimális legyen. Azonos műholdkonfiguráció alatt ismételjük meg a méréseket úgy, hogy a vevők a sokszög mentén az óra járásával azonosan (vagy ellentétesen) a szomszédos pontra kerüljenek. Ekkor az állomás koordináták és a (maradék) fáziscentrum külpontosságok is meghatározhatók.

A két eljárást a kiegyenlítő számítás összefüggéseinek segítségével is megvizsgáltam. A Gauss-Markov modellnek megfelelően írjuk fel a közvetítő és normál egyenleteket a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{v} \\
 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{b}) &= (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

alakban, ahol az $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$ ismeretleneket két partícióra bontottam: $\mathbf{c}$ a koordináta és $\mathbf{f}$ a fázis külpontosság ismeretleneket jelöli. A teljes forgatás esetében az

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{rot} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{R} \\ \mathbf{D} & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_{rot} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_F \\ \mathbf{b}_B - \mathbf{b}_F \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.46)$$

particionált egyenleteket írhatjuk fel, ahol a $\mathbf{D}$ partíció elemei a koordináta ismeretleneknek megfelelően 1, 0 és -1 értékekből állnak. Az $\mathbf{R}$ linearizált partíció vektoronkénti elemeit már az 5.3 fejezet (5.36) összefüggésénél megadtam. Mivel az egyenletünk lineáris, $\mathbf{b}$ az első $\mathbf{b}_2$ a második mérési sorozat vektorait tartalmazza. Az egyenletek felírásánál figyelembe vettem, hogy a fáziscentrum külpontosságok a forgatás miatt ellentétes előjellel jelentkeznek.

Ha feltételezzük, hogy a normálmátrix is invertálható, a megoldás:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{rot} &= \begin{bmatrix} 2 \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D} & 0 \\ 0 & 2 \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_{rot} &= \begin{bmatrix} 2 \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B \\ 2 \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{x}}_{rot} &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} 2 \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B \\ (2 \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} 2 \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B \\ (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ez a megoldás csak akkor érvényes, ha a két sorozatot azonos műhold konfiguráció alatt mértük, vagyis a $\mathbf{P}$ súlymátrix mind a két mérési sorozatban azonos.

A koordináta és a fázis ismeretlenek tehát egymástól függetlenül határozhatók meg, előbbi csak a bázisvonal komponensek, utóbbi csak a fáziscentrum külpontosságok függvénye.

Ha a teljes helycsere esetében feltételezzük, hogy a két mérési sorozat között az $\mathbf{R}_i$ elemek, a szomszédos pontokon is azonosak, akkor az egyenletek felírásánál előállítható az a kedvező helyzet, hogy a fázis külpontosságok a második sorozatban ismét ellentétes előjellel jelentkeznek:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{rov} &= \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{R} \\ \mathbf{D}_2 & -\mathbf{R} \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_{rov} &= \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_B + \mathbf{b}_F \\ \mathbf{b}_{2B} - \mathbf{b}_F \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Ebben az esetben az ismeretlenek sorrendjének megtartása mellett, a mért vektorok sorrendjét meg kell változtatni, és szükség esetén az egyes egyenletek előjelét is meg kell fordítani. Ezt jelzi a $\mathbf{D}_2$ és $\mathbf{b}_{2B}$ jelölés. Ha továbbra is feltételezzük, hogy azonos műhold konfiguráció alatt mérünk, a mérések sorrendcsereje miatt a súlymátrixokat is meg kell különböztetni.

Mivel a mérések sorrendjének a felcserélése és az együttható mátrix egyes sorainak előjelváltása nem változtatja meg a végeredményt, érvényesek a

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2 \\ \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B &= \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_{2B} \end{aligned} \quad (5.49)$$

azonosságok, és a normál egyenletek is a következő alakban írhatók fel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{rov} &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D} & (\mathbf{D}^t \mathbf{P} - \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2) \mathbf{R} \\ \mathbf{R}^t (\mathbf{P} \mathbf{D} - \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2) & (\mathbf{R}^t \mathbf{P} + \mathbf{R}^t \mathbf{P}_2) \mathbf{R} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{u}_{rov} &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B + (\mathbf{D}^t \mathbf{P} - \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2) \mathbf{b}_F \\ \mathbf{R}^t (\mathbf{P} \mathbf{b}_B - \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_{2B}) + (\mathbf{R}^t \mathbf{P} + \mathbf{R}^t \mathbf{P}_2) \mathbf{b}_F \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (5.50)$$

A koordináta és a fázis ismeretlenek most geometriailag is korrelált mennyiségek, ezért az (5.47) összefüggéshez hasonló, közvetlen megoldás nem adható meg, ehhez a $\mathbf{N}_{rov}$ normálmátrixot invertálni kell.

A teljes forgatás eredményét a következőképpen is felírhatjuk:

$$\hat{\mathbf{x}}_{rot} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}} \\ \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B \\ (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_{2B} \\ (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

ahol a második megoldást akkor kapnánk, ha a második sorozat egyenleteit, a teljes helycserés modell második mérési sorozatának sorrendjében íránk fel. Állítsuk elő az $\mathbf{N}_{rov}$ normálmátrix és $\hat{\mathbf{x}}_{rot}$ megoldás szorzatát:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{rov} \hat{\mathbf{x}}_{rot} &= \\
 &= \begin{bmatrix} 2\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D} (\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B + (\mathbf{D}^t \mathbf{P} - \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2) \mathbf{R} (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \\ \mathbf{R}^t (\mathbf{P} \mathbf{D} (\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_B - \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2 (\mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{b}_{2B}) + (\mathbf{R}^t \mathbf{P} + \mathbf{R}^t \mathbf{P}_2) \mathbf{R} (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{b}_F \end{bmatrix}. \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Az

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} (\mathbf{R}^t \mathbf{P} \mathbf{R})^{-1} \mathbf{R}^t \mathbf{P} &= \mathbf{I} \\
 \mathbf{D} (\mathbf{D}^t \mathbf{P} \mathbf{D})^{-1} \mathbf{D}^t \mathbf{P} &= \mathbf{I} \\
 \mathbf{D}_2 (\mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{D}_2)^{-1} \mathbf{D}_2^t \mathbf{P}_2 &= \mathbf{I}
 \end{aligned} \quad (5.53)$$

azonosságok behelyettesítésével, ahol $\mathbf{I}$ az egységmátrix, könnyen bálátható, hogy

$$\mathbf{N}_{rov} \hat{\mathbf{x}}_{rot} = \mathbf{u}_{rov}. \quad (5.54)$$

Ha a szingularitásokat is azonos módon oldottuk fel, ez az eredmény azt bizonyítja, hogy a teljes forgatás és a teljes helycsere elméletileg azonos eredményt szolgáltat, azzal a különbséggel, hogy utóbbi esetben a magassági komponensek is becsülhetők.

A gyakorlati alkalmazások során az azonos műholdkonfigurációk sem garantálják a súlymátrixok azonosságát, az atmoszférikus és a véletlen jellegű hibák is eltérhetnek, és az $\mathbf{R}_i$ elemek is kis mértékben különböznek. Ezek a hatások járulékos korrelációként jelentkeznek, ezért mindkét esetben a teljes normálmátrixot kell invertálni.

Az előző fejezetben ismertetett GPS-NET programot a most bemutatott mérési módszerek kezelésére is felkészítettem. A teljes forgatás és a teljes helycsere esetében a fáziscentrum defektusok egy antenna nulla értéként történő rögzítésével, vagy az átlagtól való eltérések négyzetösszegének minimalizálásával (szabad hálózat) oldhatók fel. A teljes forgatásnál csak a horizontális komponensek becsülhetők, a magassági hibák a koordináta ismeretleneket torzítják.

A módszer tesztelésére és alkalmazására több mérési programot is végrehajtottam. A módszer alkalmazhatóságát először a FÖMI KGO kalibrációs hálózatán teszteltük, ahol jelentősen eltérő karakterisztikájú antennákat vizsgáltunk. Az 5.22 táblázatban megadtam a vizsgálatban szereplő antennák névleges fáziscentrum külpontosságait (N , E és U) és az átlagtól való eltéréseiket is (ΔN , ΔE és ΔU). Az antennák relatív (TurboRogue D&M antennához viszonyított) karakterisztikáját az 5.39 ábra mutatja be.

A vektorok minden kombinációban történő elsődleges feldolgozását a FÖMI KGO munkatársai végezték el a Bernese program segítségével. Az első feldolgozás nem tartalmazott antenna modelleket, a másiknál az antenna típus IGS modelljeit alkalmazták. Egymást követő két nap közel 24 órás tesztméréseit dolgoztam fel, csak az átállás idejére szakítottuk meg a méréseket egy rövid időre.

A teljes helycserés mérés első feldolgozásának eredményeit az 5.23 táblázat tartalmazza. Az abszolút értéket a TurboRogue D&M antenna névleges értékéhez viszonyítva adtam meg. A különböző antennák eltérő jellegzetességei ugyan jól felismerhetők, de az U komponensek IGS értékektől való eltérései (5.23 táblázat) a vártnál nagyobbak. A magassági eltéréseket a szabatos szintezés eredményeivel hasonlítottam össze (5.24 táblázat). Az eltéréseket valódi hibaként kezelve a szórásokat (σ) is megbecsültem.

A lokális hálózat esetében feltételezhetjük, hogy az ellipszoid feletti magasságkülönbségek azonosak a szintezett magasságkülönbségekkel (a geoid undulációk kiesnek és a függővonal elhajlások is elhanyagolhatók). Az 5.24 táblázat alapján megállapítható, hogy az antennamodell nélküli napos megoldások szabályos hibákkal terheltek, amit a teljes helycserés megoldás jelentősen kiküszöbölt.

A vizsgálatokat az IGS antenna modelljeivel is megismételtem. Az eredményeket az előző vizsgálatoknak megfelelően az 5.25 és 5.26 táblázatok tartalmazzák. Megállapíthatjuk, hogy a modellek megfelelően redukálták a fázis külpontosságokat. Az első nap $L1$ U komponensei a legkedvezőtlenebb értékek, amit a teljes helycsere a második nap rovására nagyrészt kiküszöbölt. Az $L2$ U komponenseinél ugyan egyértelmű a javulás, de ez pontatlanabb, mint az $L1$ esetében.

A kedvező eredmények és az 5.24 táblázat ΔU értékeinek látszólagos ellentmondása az 5.39 ábra alapján könnyen megérthető. A modellek átlagos külpontosságai a 0 zenitszögre vonatkoznak, az aktuális mérések átlagos zenitszöge azonban ennél jóval nagyobb érték.

A vizsgálatok alapján megállapíthatjuk hogy kalibrációs (mikró) hálózatok esetében a horizontális komponensek becslése az $L1$ és $L2$ esetében is 1 mm, a magassági komponens az $L1$ esetében 1.5 mm és az $L2$ esetében 2 mm körüli pontossággal jellemezhető. A hálózati kiegyenlítés során a belső pontosság egy nagyságrenddel nagyobb, de ez a GPS mérések feldolgozása során a felülbecsült középhibák következménye.

A kedvező eredmények alapján a GGKI épületének tetején, a liftfogadó szoba beton födémén elkészítettünk egy lokális kalibrációs hálózatot, amit szabatos távméréssel és szintezéssel is meghatároztunk. A szabályos centrális hálózat közepén (5.40 ábra) a permanens állomás antennája látható. A hat darab külső pontot az égtájaknak megfelelően tájékoztuk.

A teljes helycserés módszert a dunaföldvári magaspárt GPS mozgásvizsgálati hálózatánál alkalmaztuk. A hat darab Trimble 4000SST vevőt a terepi mérések előtt a soproni mikró hálózaton ellenőriztük. A teljes helycserét és a lokális hálózatot az 5.41 ábra mutatja be. A becslt fáziscentrum külpontosságokat az 5.27 és 5.28 táblázat tartalmazza. A mikró hálózat kalibrációs méréseinél az eltérések egy kivétellel (4. antenna) 1 mm alatti értékek. A kiugró értékű antenna később elromlott, ezért a 2006 évi méréseknél másikat kellett használni. A lokális hálózat nagyobb eltéréseit a szabatos pontraállítás hiánya és a külső körülmények indokolják. Azonban ezek az értékek is megfelelnek az antennák várható pontosságának.

5.22 táblázat. A vizsgált antennák névleges IAG fáziscentrum külpontosságai (m)

Antenna	IGS kód	<i>N</i>	<i>E</i>	<i>U</i>	ΔN	ΔE	ΔU
		L1			L1		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0000	-0.0030	0.0780	-0.0001	-0.0016	-0.0063
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0000	-0.0030	0.0780	-0.0001	-0.0016	-0.0063
Trimble Zephyr	TRM41249.00	0.0003	0.0005	0.0714	0.0002	0.0019	-0.0130
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.1100	-0.0001	0.0014	0.0257
		L2			L2		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0031	-0.0013	0.0744	-0.0015	-0.0007	-0.0119
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0031	-0.0013	0.0744	-0.0015	-0.0007	-0.0119
Trimble Zephyr	TRM41249.00	-0.0004	0.0001	0.0682	0.0013	0.0007	-0.0181
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.1280	0.0017	0.0006	0.0418

5.23 táblázat. A vizsgált antennák becsült fáziscentrum külpontosságai (m)

Antenna	IGS kód	<i>N</i>	<i>E</i>	<i>U</i>	ΔN	ΔE	ΔU
		L1			L1		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0011	-0.0038	0.0948	-0.0005	-0.0017	-0.0006
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0010	-0.0043	0.0946	-0.0004	-0.0022	-0.0008
Trimble Zephyr	TRM41249.00	-0.0003	-0.0003	0.0822	0.0003	0.0018	-0.0132
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.1100	0.0006	0.0021	0.0146
		L2			L2		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0046	-0.0019	0.0796	-0.0022	-0.0007	-0.0114
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	-0.0046	-0.0022	0.0801	-0.0022	-0.0010	-0.0109
Trimble Zephyr	TRM41249.00	-0.0005	-0.0008	0.0763	0.0019	0.0004	-0.0147
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.1280	0.0024	0.0012	0.0370

5.24 táblázat. A vizsgált antennák becsült fáziscentrum külpontosság eltérései (m)

Antenna	IGS kód	<i>N</i>	<i>E</i>	<i>U</i>	ΔN	ΔE	ΔU
		L1			L1		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0011	0.0008	-0.0168	0.0004	0.0001	-0.0057
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0010	0.0013	-0.0166	0.0003	0.0006	-0.0055
Trimble Zephyr	TRM41249.00	0.0006	0.0008	-0.0108	-0.0001	0.0001	0.0003
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0007	-0.0007	0.0111
		L2			L2		
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0015	0.0006	-0.0052	0.0008	0.0000	-0.0004
4000ST L/1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0015	0.0009	-0.0057	0.0008	0.0003	-0.0009
Trimble Zephyr	TRM41249.00	0.0001	0.0009	-0.0081	-0.0007	0.0003	-0.0034
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0008	-0.0006	0.0048

5.24 táblázat. A szintezett és a GPS magasságok eltérései (m) (1. feldolgozás)

Alappontok	szintezett ΔH	első nap		második nap		teljes helycsere	
		ΔH	hiba	ΔH	hiba	ΔH	hiba
		L1		L1		L1	
2003-2004	-0.0055	-0.0062	0.0007	0.0088	-0.0143	-0.0063	0.0008
2004-2005	0.0356	0.0486	-0.0130	0.0364	-0.0008	0.0363	-0.0007
2005-2008	-0.0812	-0.1106	0.0294	-0.0709	-0.0103	-0.0832	0.0020
2008-2003	0.0511	0.0682	-0.0171	0.0257	0.0254	0.0532	-0.0021
	σ	0.0182		0.0155		0.0015	
		L2		L2		L2	
2003-2004	-0.0055	-0.0077	0.0022	0.0414	-0.0469	-0.0071	0.0016
2004-2005	0.0356	0.0417	-0.0061	0.0371	-0.0015	0.0377	-0.0021
2005-2008	-0.0812	-0.1358	0.0546	-0.0799	-0.0013	-0.0839	0.0027
2008-2003	0.0511	0.1018	-0.0507	0.0014	0.0497	0.0533	-0.0022
	σ	0.0374		0.0342		0.0022	

5.25 táblázat. A vizsgált antennák becsült maradék fáziscentrum eltérései (m)

Antenna	IGS kód	N	E	U	ΔN	ΔE	ΔU
		L1			L1		
4000ST L1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0014	0.0010	-0.0011	0.0005	0.0002	-0.0010
4000ST L1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0014	0.0014	-0.0012	0.0005	0.0006	-0.0011
Trimble Zephyr	TRM41249.00	0.0008	0.0008	0.0019	-0.0001	0.0000	0.0020
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0009	-0.0008	0.0001
		L2			L2		
4000ST L1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0016	0.0006	0.0017	0.0007	0.0000	0.0021
4000ST L1/L2 Geod	TRM14532.00	0.0017	0.0009	0.0010	0.0008	0.0003	0.0014
Trimble Zephyr	TRM41249.00	0.0002	0.0009	-0.0043	-0.0007	0.0003	-0.0039
TurboRogue D&M	AOAD/M_T	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0009	-0.0006	0.0004

5.26 táblázat. A szintezett és a GPS magasságok eltérései (m)(2. feldolgozás)

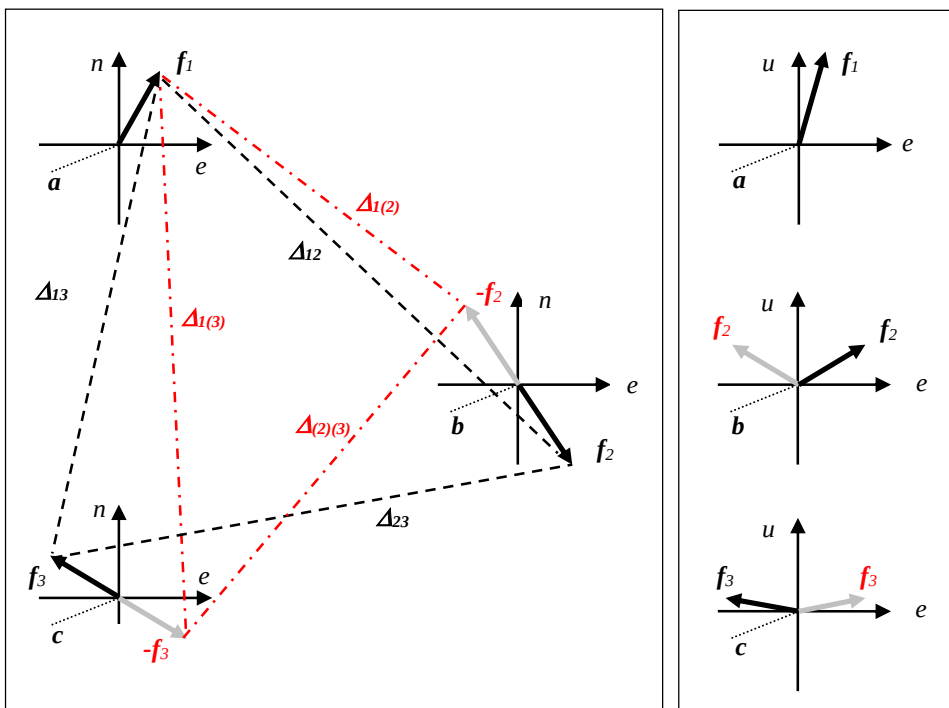
Alappontok	szintezett ΔH	első nap		második nap		teljes helycsere	
		ΔH	hiba	ΔH	hiba	ΔH	hiba
		L1		L1		L1	
2003-2004	-0.0055	-0.0062	0.0007	-0.0071	0.0016	-0.0061	0.0006
2004-2005	0.0356	0.0396	-0.0040	0.0364	-0.0008	0.0366	-0.0010
2005-2008	-0.0812	-0.0850	0.0038	-0.0800	-0.0012	-0.0832	0.0020
2008-2003	0.0511	0.0516	-0.0005	0.0507	0.0004	0.0527	-0.0016
	σ	0.0028		0.0011		0.0014	
		L2		L2		L2	
2003-2004	-0.0055	-0.0078	0.0023	-0.0054	-0.0001	-0.0071	0.0016
2004-2005	0.0356	0.0325	0.0031	0.0372	-0.0016	0.0378	-0.0022
2005-2008	-0.0812	-0.0795	-0.0017	-0.0893	0.0081	-0.0839	0.0027
2008-2003	0.0511	0.0548	-0.0037	0.0575	-0.0064	0.0532	-0.0021
	σ	0.0028		0.0052		0.0022	

5.27 táblázat. 2004 évi vizsgálatok

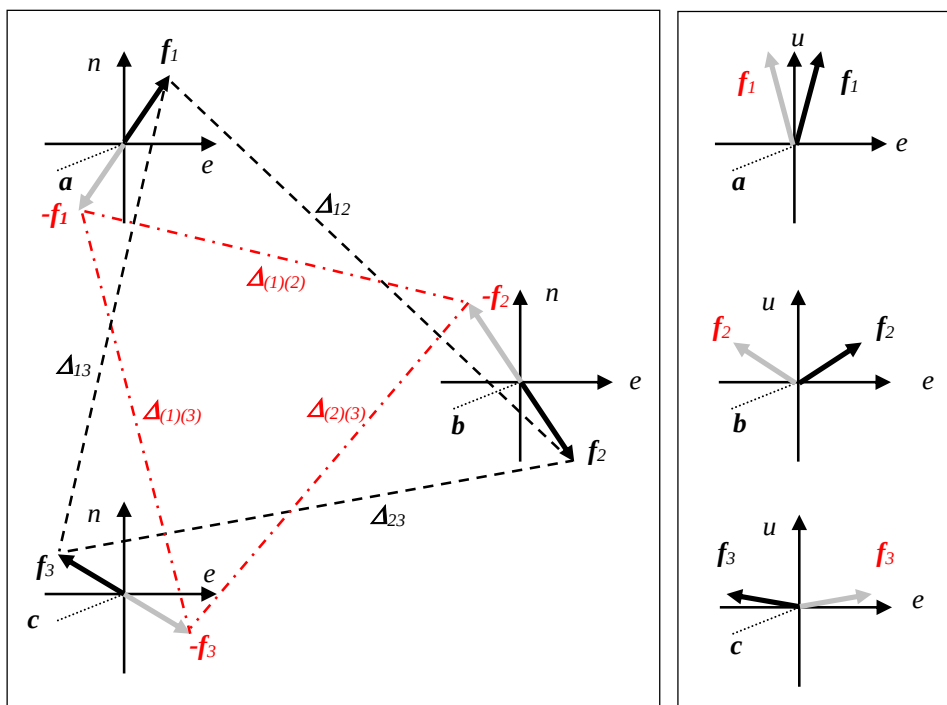
no.	Sopron (mikró hálózat)						Dunaföldvár (lokális hálózat)					
	fáziscentrum külpontosság [mm]						fáziscentrum külpontosság [mm]					
	North	σ	East	σ	Up	σ	North	σ	East	σ	Up	σ
1	0.4	0.0	-0.2	0.0	-0.1	0.1	0.9	0.1	0.5	0.1	-0.9	0.7
2	0.2		0.2		-0.2		1.0		0.1		-1.1	
3	-0.3		0.0		0.6		0.2		-0.8		0.7	
4	-1.5		-0.2		0.4		-1.1		0.9		0.3	
5	0.5		-0.2		-0.7		-1.7		0.0		-0.4	
6	0.8		0.4		0.1		0.8		-0.6		1.3	

5.28 táblázat. 2006 évi vizsgálatok

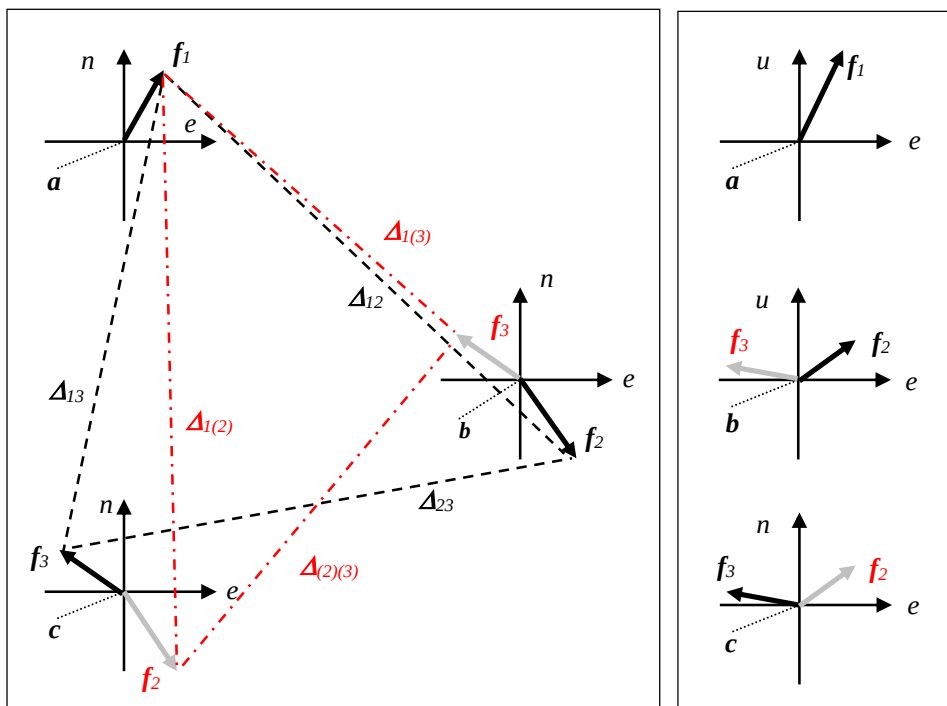
no.	Sopron (mikró hálózat)						Dunaföldvár (lokális hálózat)					
	fáziscentrum külpontosság [mm]						fáziscentrum külpontosság [mm]					
	North	σ	East	σ	Up	σ	North	σ	East	σ	Up	σ
1	0.2	0.0	0.3	0.0	-0.3	0.1	-0.2	0.0	-0.2	0.0	0.3	0.2
2	0.3		-0.6		-1.0		-0.8		0.1		-1.7	
3	0.2		0.5		0.4		-1.0		0.6		-1.2	
4	0.0		0.5		0.7		-0.4		0.2		2.9	
5	-0.9		-0.9		-0.1		0.1		-0.3		-0.7	
6	0.1		0.2		0.3		2.4		-0.4		0.3	



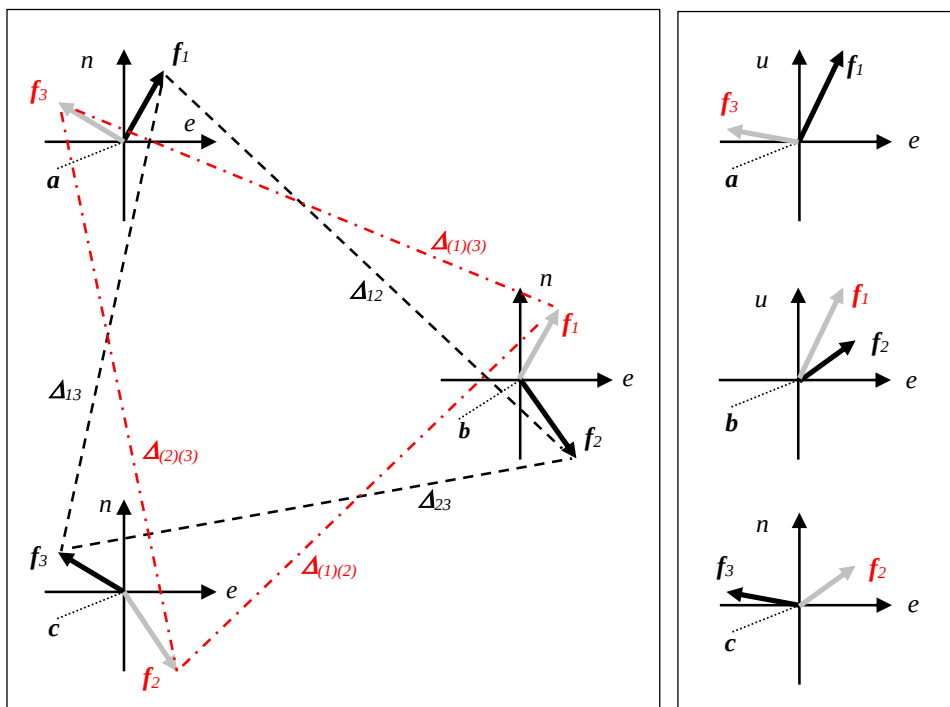
5.35 ábra. A teljes forgatás vázlata (két elforgatott antennával)
 (a, b és c a helyzetvektorok, f_1, f_2 és f_3 a fázis centrum külpontosságok, Δ a bázisvonal)



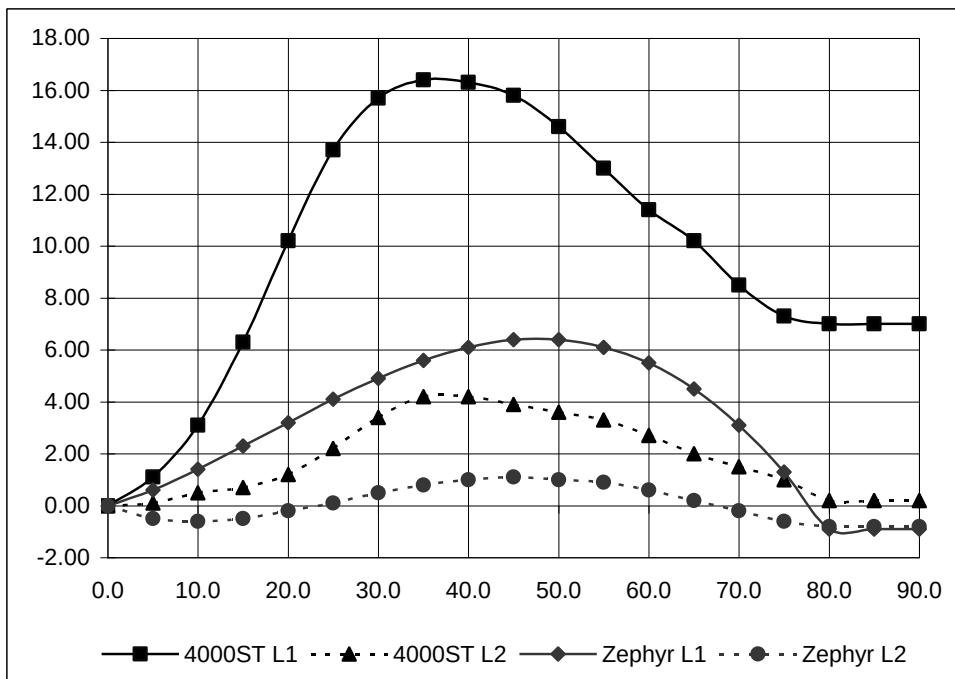
5.36 ábra. A teljes forgatás vázlata (mind a három elforgatott antennával)
(a, b és c a helyzetvektorok, f_1, f_2 és f_3 a fázis centrum külpontosságok, Δ a bázisvonal)



5.37 ábra. Az antenna csere vázlata (két antenna cseréje)
(a, b és c a helyzetvektorok, f_1, f_2 és f_3 a fázis centrum külpontosságok, Δ a bázisvonal)



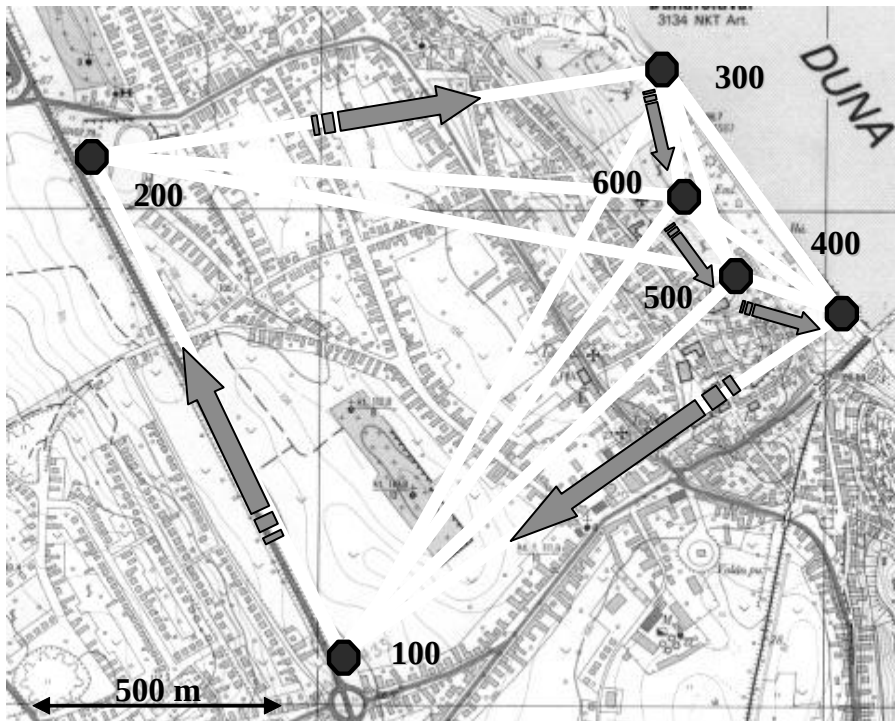
5.38 ábra. A teljes helycsere vázlata (minden antenna új helyen)
(a, b és c a helyzetvektorok, f_1, f_2 és f_3 a fázis centrum külpontosságok, Δ a bázisvonal)



5.39 ábra. A vizsgált antennák relatív karakterisztikája (mm) a zenitszög függvényében



5.40 ábra. A soproni mikro kalibrációs hálózat (középen a permanens állomás antennája)



5.41 ábra. A dunaföldvári lokális hálózat teljes helyesérés mérési vázlata

5.5 Koordinátatranszformáció geoidundulációk becslésével

A műholdas helymeghatározás globális vonatkoztatási rendszerei és a helyi geodéziai vonatkoztatási rendszerek közötti transzformáció kérdése már az NNSS Doppler műholdas rendszer megjelenésekor is előtérbe került (Ádám 1980, 1982, 1982b). Gyakorlati jelentősége azonban csak a GPS technika széleskörű elterjedésével vált hangsúlyossá, mivel a WGS-84 és az egyes országok által hivatalosan használt vonatkoztatási rendszerek közötti átszámítás mindennapos rutinfeladattá vált. A kereskedelmi feldolgozó szoftverek is szinte kivétel nélkül különböző megoldásokat ajánlottak a probléma megoldására. A Magyarországon alkalmazott EOV kettős vetítés kezdetben kisebb gondot jelentett a külföldi programterjesztőknek, ezért itthon is sokan foglalkoztak a probléma szigorú és közelítő megoldásaival. A transzformációkról számos hazai és nemzetközi publikáció is született (Völgyesi et al. 1994, Bácsatyai 1993). Magyar nyelven talán a legrészletesebb összefoglaló az Ádám et. al. (2004) könyvben található.

A szakirodalomban a geoidundulációk kezelése a különböző módszerek esetében csak zavaró, kiküszöbölendő mennyiségként szerepel. A helyi vonatkoztatási rendszerekhez tartozó kevésbé ismert geoidundulációkat legtöbbször elhanyagolják, pedig a pontos globális GPS hálózatok tartalmaznak minden olyan információt, ami elvileg a helyi geoidundulációk meghatározását is lehetővé tenné. OTKA közreműködőként részletesen megvizsgáltam ezt a lehetőségét és kísérleti számításokat végeztem a rendelkezésemre álló adatok segítségével (Bányai 2005).

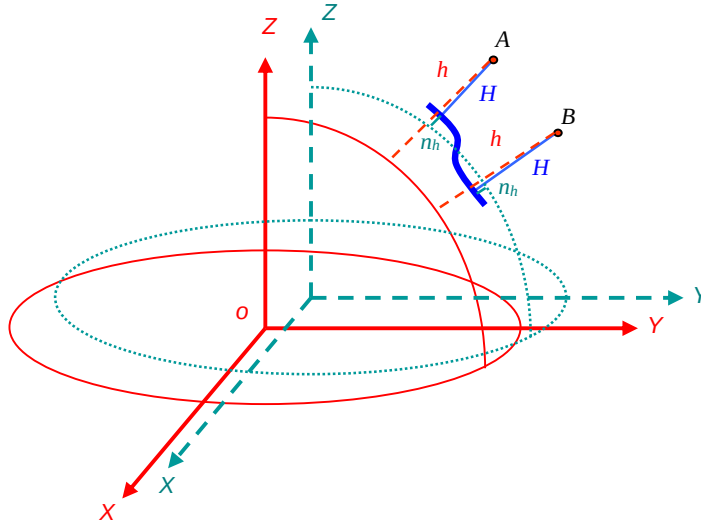
A földi geocentrikus és valamely helyi vonatkoztatási rendszer közötti átszámításhoz olyan közös pontokra van szükség, amelyeknek mind a két rendszerben ismertek az ellipszoidi koordinátái (φ, λ, h) . Az alappontok földi geocentrikus koordinátái legegyszerűbben GPS mérések segítségével határozhatók meg. A pontoknak a helyi rendszerre vonatkozó ellipszoidi koordinátáit a hagyományos és az elkülönülten kezelt vízszintes és magassági hálózati mérések segítségével vezethetjük le (Bíró 1972, 1985).

A Magyarországon használt két rendszer geometriai viszonyát az 5.42 ábra mutatja, ahol vastag vonal jelöli a globális (WGS-84) és szakadozott vonallal a helyi (IUGG-67) forgási ellipszoid koordinátatengelyeit. Az egyenlítői köröket és az egymásnak megfelelő meridián vonalakat szintén ábrázolja. A meridián feletti vastag vonal a geoidot jelképezi. A WGS-84 globálisan illeszkedik a földi geoidhoz, a helyi elhelyezésű IUGG-67 lokálisan illeszkedik a geoid magyarországi felületdarabjához. Az „A” és „B” pontok geoid feletti magasságát H , a geoidra vonatkozó vetületük helyi ellipszoid feletti magasságát (az ún. helyi geoidundulációt) n_h jelöli. A helyi rendszerre vonatkozó ellipszoid feletti magasságot a

$$h_h = n_h + H \quad (5.55)$$

közelítő összefüggéssel lehet megadni. A H magasságot az erőter normálisa mentén értelmezzük, amely nem azonos az ellipszoidi normálissal. A vetítésből származó eltérések a tesztszámítások alapján azonban elhanyagolhatók (Papp és Benedek 1998, 2000). A magasságot elméletileg szabados szintezéssel, a helyi geoidundulációkat közvetve csillagászati geodéziai mérések eredményeire támaszkodva, csillagászati szintezéssel határozhatjuk meg. Magyarországon erre a célra 138 alappont áll a rendelkezésre, amely azonban nem biztosít megfelelő felbontást a geoidkép meghatározásához. A gravimetriai geoidot általában globális rendszerben határozzák meg. A helyi rendszerre vonatkozó geoidkép előállításához éppen a keresett transzformációs paraméterek ismeretére lenne szükség.

Az n_h értékek elhagyásának az a következménye, hogy az így számított transzformációs paraméterek nem a földi és az eredeti helyi rendszer közötti átszámítást eredményezik. Az 5.42 ábra alapján az elhanyagolás miatt az „A” pont közelebb, a „B” pont távolabb kerül az ellipszoidtól, mint a valóságban. Az elhanyagolt geoidundulációk a számított transzformációs paraméterek nagyobb középhibájában és számszerűen a valóságostól eltérő (hibás) eltolási értékekben jelentkeznek. Kisebb lokális területeken az elhanyagolások is közel azonos nagyságúak, ezért a transzformáció során a H magasságok viszonylag jól becsülhetők, ezért ez a megközelítés gyakorlati szempontból megfelelőnek bizonyult. A térbeli transzformációs paraméterek kiszámításához elvileg elegendő három (nem egy-egyenes, vagy annak közelében elhelyezkedő) közös pont.



5.42. ábra. A koordinátatranszformáció geometriai vázlata
(h – geocentrikus ellipszoid feletti magasság, H – geoid (tengerszint) feletti magasság,
 n_h – helyi geoid-unduláció)

A gyakorlatban azonban mindig nagyszámú fölő alappont alkalmazására kell törekedni, ezért felmerült a hiányzó n_h geoid-undulációk transzformációs paraméterekkel együtt történő meghatározásának a vizsgálata.

A helyi rendszer a földihez viszonyítva eltolt helyzetben van. A helyi rendszer elhelyezésekor ugyan törekedtek arra, hogy a koordinátatengelyek párhuzamosak legyenek a földi rendszer tengelyeivel, de a mérési hibák miatt feltételezhetjük, hogy azok kis mértékben elfordulhattak. A két rendszer eltérő méretarányát feltételezve eljuthatunk a szokásos térbeli hétparaméteres hasonlósági transzformációhoz, amit derékszögű koordináták között értelmezhetünk. A derékszögű (X, Y, Z) és az ellipszoidi (φ, λ, h) koordináták közötti ismert összefüggés:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \quad , \\ Z &= ((1 - e^2)N + h) \sin \varphi \end{aligned} \quad (5.56)$$

ahol, N a harántirányú görbületi sugár és e^2 az első excentricitás négyzete. Az összefüggéseket értelemszerűen alkalmazzuk mind a földi, mind a helyi ellipszoid esetében. A földi rendszerben a h ellipszoidi magasságot közvetlenül a GPS mérésekből határozhatjuk meg.

A helyiből a geocentrikus rendszerbe történő áttérés az

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_h/10^6 & 0 & -Z_h/\rho & +Y_h/\rho \\ 0 & 1 & 0 & Y_h/10^6 & +Z_h/\rho & 0 & -X_h/\rho \\ 0 & 0 & 1 & Y_h/10^6 & -Y_h/\rho & +X_h/\rho & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

a geocentrikusból a helyi rendszerbe történő áttérés az

$$\begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_g/10^6 & 0 & -Z_g/\rho & +Y_g/\rho \\ 0 & 1 & 0 & Y_g/10^6 & +Z_g/\rho & 0 & -X_g/\rho \\ 0 & 0 & 1 & Y_g/10^6 & -Y_g/\rho & +X_g/\rho & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

linearizált közvetítő egyenletek segítségével végezhető el, ahol $_h$ a helyi $_g$ a geocentrikus rendszerre utal, $\rho = 206264,8''$, t_x , t_y , t_z a térbeli eltolásokat, R_x , R_y , R_z a tengelyek körüli elfordulásokat és Δm a méretarány egységtől való eltérését jelenti. A koordinátákat méterben megadva az eltolásokat szintén méterben, az elfordulásokat ívmásodperben, az Δm paramétert ppm (part per million, mm/km) egységben kapjuk.

Látszólag a két egyenlet csak annyiban tér el egymástól, hogy a baloldalukon azonos, de ellentétes előjelű értékek találhatók, ezért az eltérő módon becsült értékek szintén ellentétes előjelűek lesznek. Az egyenletek jobb oldalán azonban az egyes derékszögű koordináták is 100 m nagyságrendben eltérhetnek egymástól, ezért a paraméterek is eltérőek lesznek. Szabatos transzformációnál ezért mindig a számítás irányának megfelelő értékeket kell felhasználni. Ez a probléma különösen a rosszul kondicionált lokális transzformációk esetében okozhat nagyobb eltéréseket.

Ha a transzformáció során a helyi rendszerre vonatkozó pontonkénti n_h értékeket is ismeretlennek tekintjük, a következő linearizált közvetítő egyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_h/10^6 & 0 & -Z_h/\rho & +Y_h/\rho & \cdots & \cos\varphi_h \cos\lambda_h \\ 0 & 1 & 0 & Y_h/10^6 & +Z_h/\rho & 0 & -X_h/\rho & \cdots & \cos\varphi_h \sin\lambda_h \\ 0 & 0 & 1 & Y_h/10^6 & -Y_h/\rho & +X_h/\rho & 0 & \cdots & \sin\varphi_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ \vdots \\ n_h \end{bmatrix}, \quad (5.59)$$

$$\begin{bmatrix} X_h \\ Y_h \\ Z_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_g \\ Y_g \\ Z_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_g/10^6 & 0 & -Z_g/\rho & +Y_g/\rho & \cdots & -\cos\varphi_h \cos\lambda_h \\ 0 & 1 & 0 & Y_g/10^6 & +Z_g/\rho & 0 & -X_g/\rho & \cdots & -\cos\varphi_h \sin\lambda_h \\ 0 & 0 & 1 & Y_g/10^6 & -Y_g/\rho & +X_g/\rho & 0 & \cdots & -\sin\varphi_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \\ \Delta m \\ R_x \\ R_y \\ R_z \\ \vdots \\ n_h \end{bmatrix}. \quad (5.60)$$

Ennél a bővített egyenletrendszerénél n darab mindkét rendszerben ismert pont esetén $3 \times n$ egyenlet írható fel, ahol az ismeretlenek száma $(7+n)$. Négy, vagy annál több pont esetében az egyenletek száma nagyobb az ismeretlenek számánál, ezért elméletileg az ismeretlen geoidundulációk is becsülhetővé válnak. Az új ismeretlenek bevezetésével az egyenletrendszerünk (legalább) egy járulékos dátum defektussal is bővül, mivel a magassági irányú változás a három eltolással is biztosítható.

Ez a defektus egy n_h érték rögzítésével, vagy a nulla átlagot előíró kényszerfeltételi egyenlettel is kezelhető. A teljes együttható mátrix a

$$\mathbf{b} = [\mathbf{AG}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix} + \mathbf{v} \quad (5.61)$$

particionált alakba írható, ahol $\mathbf{x}_p$ a transzformációs és $\mathbf{x}_n$ a geoidunduláció-ismeretlenek vektora. A normál egyenletek a járulékos kényszer feltétellel a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b} \\ \mathbf{G}^t \mathbf{P} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{G} & 0 \\ \mathbf{G}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{G}^t \mathbf{P} \mathbf{G} & \mathbf{C} \\ 0 & \mathbf{C}^t & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_p \\ \hat{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11} & \hat{\mathbf{N}}_{12} \\ \hat{\mathbf{N}}_{21} & \hat{\mathbf{N}}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_p \\ \hat{\mathbf{x}}_n \end{bmatrix}$$

alakban is felírhatók, ahol a $\mathbf{C}$ nulla átlagot előíró kényszerfeltételi vektor csupa egyes értékeket tartalmaz. A két részre bontott partíciónál az $\mathbf{x}_n$ ismeretlenek és a kényszer egyenlethez tartozó járulékos $\mathbf{k}$ korreláta ismeretlen összevontan szerepel.

A vizsgálatok során azonban további numerikus problémák is felmerültek. A dátum és konfigurációs defektussal rendelkező egyenletrendszer szingulárisak lesznek, amely azt jelenti, hogy nulla sajátértékű vektorok is találhatóak a rendszerben, ezért nem invertálhatók. A rosszul kondicionált egyenletek is közel szingularitást eredményeznek, amit nehéz megkülönböztetni a valódi defektusoktól. Az ilyen rendszerek a normálegyenletek sajátértékeinek és sajátvektorainak a meghatározásával vizsgálhatók. A normálmátrix kondícióját a

$$c = |\lambda_{\max}| / |\lambda_{\min}| \quad (5.63)$$

számmal mérhetjük, amely a maximális és minimális nem nulla sajátértékek abszolút értékének a hányadosa. Minél kisebb a c annál kedvezőbb a kondíció. Ideális esetben 1.

A vizsgálatokhoz a 24 pontos OGPSH kerethálózatot használtam fel. A különböző megoldások jellemzőit az 5.29 táblázat foglalja össze. A hagyományos hálózat elhelyezésénél és tájékozásánál a Szőlőhegy (vagy Pilis (PILI)) nevű alappont, a hálózati kezdőpont szerepét töltötte be, ezért ebben a pontban a függővonal elhajlások és az n_h érték is ismert dátumparaméterek. A pontok magasságát, a magassági alapponthálózatra támaszkodva, általában trigonometriai magasságméréssel határozták meg, ezért többnyire csak 3-5 cm pontossággal jellemezhetők.

Az 1. megoldásnál csak a méretarány eltérését, a 2.-nál csak a három eltolást, a 3.-nál csak a három elfordulást, a 4.-nél csak a geoidundulációkat kezeltem ismeretlenként. Az elfordulásoktól eltekintve az egyes ismeretlenek lineárisan függetlenek, ezért ideális a kondíciójuk is. (Az 1-4. megoldásokat azért mutattam be, hogy a sajátértékek változásain keresztül nyomon követhessük a bővített modellek paraméterei közötti összefüggéseket és a torzító hatásokat.)

Az 5. megoldásnál a három eltolás és a méretarány együttes, a 6.-nál a hétparaméteres, a 7.-nél a bővített rendszer jellemzőit mutatom be. A sajátértékek változása jól mutatja az egyes ismeretlenek közötti korreláció torzító hatását, amely az egyre romló kondícióban is jelentkezik. A 7. megoldás kondíciója ugyan nem sokkal rosszabb, mint a 6. megoldásé, de az egyenletrendszer itt mégis elcsordult, ráadásul igazi zero sajátértékek sem találhatók.

A 8. megoldásnál az első négy paraméter mellett a 24 db n_h értéket is ismeretlenként kezeltem, ahol az első valódi nulla sajátértéket is megtalálható. A 9. megoldásnál a geoidundulációk nulla átlagértékének a kényszerével, a 10.-nél a PILI n_h ismeretlenének elhagyásával szüntettem meg a szingularitást. Ez a két megoldás is lényegében azonos, de az elsőnek valamivel jobb a kondíciója.

Az eredetileg várt szingularitást tehát megtaláltam, de még további szingularitásokkal is kell számolnunk. Az eddig bemutatott eredmények alapján ezeknek a forgatási paraméterekhez kell kapcsolódniuk. Könnyű belátni, hogy a Z tengely körüli elfordulásnak nincs hatása az ellipszoid

feletti magasságokra, tehát az X és Y tengelyek körüli elfordulások okozzák a további numerikus problémákat.

A 11.-13. megoldások csak annyiban különböznek a 8.-10. megoldásoktól, hogy most a Z tengely körüli elfordulást is megengedtem. Az eredmények is hasonló értékekkel jellemezhetők.

Az eredeti rendszer tehát az új ismeretlenek bevezetésével három defektussal is gyarapodott. A 14. megoldásban ezért a SOPR, TARP és TISZ pontoknak, a 15.-nél a kedvezőbb eloszlású SOPR, TARP és OTTO pontoknak kezeltem ismertként a geoidundulációit. Az utóbbi megoldás kondíciója is jóval kedvezőbb, mint az előző megoldásé, de ez is jól mutatja az alapfeladat eredendően rossz kondícióját.

Az 5.30 táblázat a 24 pontos GPS kerethálózat feldolgozásából származó kétirányú hétparaméteres (6.) és az egyik ötparaméteres geoid-undulációt is becsülő megoldás (12.) eredményeit összegzi.

Az 5.31 táblázat a 6. és a 12. megoldásokból származó javításokat és a becsült geoid-undulációkat is bemutatja. Érdekes módon a javítások északi (v_n) és keleti (v_e) irányú komponensei csak kissé térnek el egymástól, de a hétparaméteres megoldás magassági komponensei (v_u) jelentősen eltérnek a becsült geoid-undulációktól. A bővített megoldás magassági javításai értelemszerűen nullának adódnak.

Külső ellenőrzésként a becsült értékekből szerkesztett geoidképet is összehasonlítottam a 138 pontból csillagászati szintezéssel meghatározott csillagászati geodéziai geoidképpel. Az eredmények bemutatásához a hálózati kezdőpont geoidundulációját mind a két esetben nullának választottam (5.43 és 5.44 ábra). A két geoidképen a nagyobb jellegzetességek jól felismerhetők, de néhány pont esetében nagyobb ellentmondások is tapasztalhatók.

Nagyszámú (≈ 1000) közös pont esetén a normálmátrix mérete is megnő, ezért számítástechnikai szempontból célszerű optimális megoldást alkalmazni. Ha egységnyi súlyozást választunk:

$$G^t I G = I, \quad (5.59)$$

és az összevont $(n+1)$ méretű $\hat{N}_{22}$ partíció inverze is közvetlenül felírható. Az inverz mátrix utolsó sorának és az utolsó oszlopának az elemei, kivéve a főátlóban lévő elemet $(1/n)$, a további főátló elemek $(1-1/n)$, valamint a további elemek, a kivételt képező főátló elemmel együtt $(-1/n)$ értéket vesznek fel. Ekkor csak az $\hat{N}_{12}$ járulékos mátrixot kell tárolni, és a két ismeretlen csoport a normál egyenlet két részre bontásával is meghatározható:

$$\begin{aligned} \hat{x}_p &= (N_{11} - \hat{N}_{12} \hat{N}_{22}^{-1} \hat{N}_{21})^{-1} (\mathbf{b}_p - \hat{N}_{12} \hat{N}_{22}^{-1} \mathbf{b}_n) \\ \hat{x}_n &= \hat{N}_{22}^{-1} (\mathbf{b}_n - \hat{N}_{21} \hat{x}_p) \\ Q_{\hat{x}_p} &= (N_{11} - \hat{N}_{12} \hat{N}_{22}^{-1} \hat{N}_{21})^{-1} \\ Q_{\hat{x}_n} &= (\hat{N}_{22} - \hat{N}_{21} \hat{N}_{11}^{-1} \hat{N}_{12})^{-1} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Az a tény, hogy a súlyegység középpontja csak 30% javulást eredményezett és a vízszintes javítások gyakorlatilag változatlanok maradtak, azt jelzi, hogy a hálózatunk vízszintes koordinátái nem sokkal pontosabbak, mint a magassági adatok, az elhanyagolt geoidundulációkkal együtt. A Virág (1999) munkájában bemutatott részletesebb horizontális hibaeloszlás szabályos regionális hatások jelenlétét is mutatja, ezért a hagyományos hálózat pontossági vizsgálatánál és a helyi geoidundulációk becslésénél is jelentős szerepe lehet az I. rendű hálózat szabatos ismételt kiegyenlítésének.

Az eddigi eredmények alapján megállapíthatjuk, hogy a koordinátatranszformációk során az elhanyagolt helyi geoidundulációk bizonyos feltételek mellett becsülhetők, de a bővített egyenletrendszer rosszul kondicionált problémához vezet. Ezt a későbbiekben a súlyponti rendszer alkalmazásával és a hálózati kezdőpont körüli elfordulás lehetővé tételével tervezem megvizsgálni. A megoldást a teljes OGPSH hálózatra kiterjesztve megvizsgálhatjuk az egyes pontok hibáit, és a csillagászati szintezés alternatív módszereként a geoidundulációk vizsgálatára is egy új, alternatív lehetőséggel rendelkezünk.

5.29 táblázat. Az egyes megoldások sajátértékei és kondíciója (c)

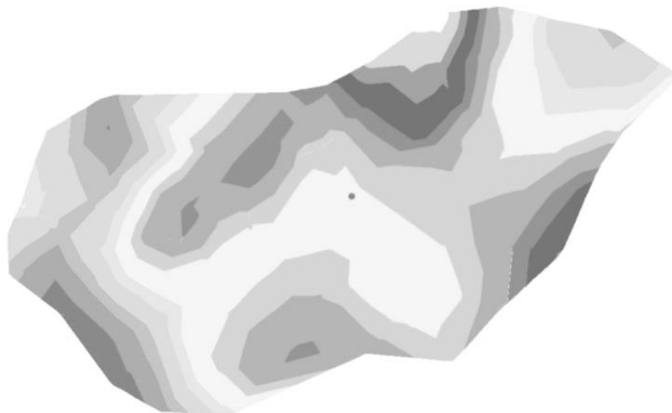
megoldás	t _x	t _y	t _z	m	R _x	R _y	R _z	n	c
1. 1P				972.9					1.E+00
2. 3P	24.000	24.000	24.000						1.E+00
3. 3P					22865	22857	13.17		2.E+03
4. 24n								24 db. 1.0	1.E+00
5. 4P	24.000	24.000	0.0135	996.9					7.E+04
6. 7P	0.0135	0.0109	0.0029	996.9	22889	22881	13.17		8.E+06
7. 7P+24n	18.6961	-0.0023	0.0068	990.4	22886	22873	12.39	0.08 15054 -15052	1.E+07
8. 4P+24n	24.000	24.000	0.0135	997.9				0.0000	7.E+04
9. 4P+24n+1k	24.000	24.000	0.0135	997.9				16.65 26.33	7.E+04
10. 4P+23n	24.000	24.000	0.0135	997.8				0.04	7.E+04
11. 5P+24n	24.000	0.0159	0.0135	997.9			10635	23 db. 1.0	8.E+05
12. 5P+24n+1k	24.008	0.0159	0.0135	997.9			10635	23 db. 1.0	8.E+05
13. 5P+23n	24.000	0.0197	0.0135	997.8			10635	0.76 -0.72 -0.0004 -0.00001	9.E+08
14. 7P+21n	0.0135	0.0001	0.0025	997.8	22889	22881	13.17	0.13	3.E+08
15. 7P+21n	0.0135	0.00015	0.0025	997.8	22889	22881	13.17	0.13	4.E+07

5.30 táblázat. A 24 pontos GPS kerethálózatból számított transzformációs paraméterek

Paraméterek	GPS $\Rightarrow$ EOVS (7P)	EOVS $\Rightarrow$ GPS (7P)	EOVS $\Rightarrow$ GPS (5P+24n)
σ_0	0.3169	0.3169	0.1948
t_x – eltolás [m]	-47.867104 $\pm$ 3.96	47.867120 $\pm$ 3.96	47.278652 $\pm$ 1.18
t_y – eltolás [m]	69.201921 $\pm$ 4.11	-69.202202 $\pm$ 4.11	-57.439884 $\pm$ 1.50
t_z – eltolás [m]	11.469304 $\pm$ 4.31	-11.469147 $\pm$ 4.31	-14.760535 $\pm$ 1.21
Δm [mm/km]	-2.195284 $\pm$ 0.42	2.195270 $\pm$ 0.42	2.208823 $\pm$ 0.26
R_x – elfordulás [ivmp]	-0.301374 $\pm$ 0.13	0.301375 $\pm$ 0.13	-
R_y – elfordulás [ivmp]	0.053115 $\pm$ 0.16	-0.053115 $\pm$ 0.16	-
R_z – elfordulás [ivmp]	-0.471874 $\pm$ 0.10	0.471876 $\pm$ 0.10	0.722205 $\pm$ 0.07

5.31 táblázat. A 24 pontos kerethálózatból számított mérési javítások és geoid-undulációk.

pont	Mérési javítások (7P)			Mérési javítások (5P+24n)			
	v_n	v_e	v_u	v_n	v_e	v_u	n
AGGT	-0.1940	-0.3218	0.5674	-0.2004	-0.3211	0.0000	0.4931
BALL	0.1467	0.0125	-0.0109	0.1457	0.0112	0.0000	-0.0948
BUDA	0.1531	0.0491	0.3083	0.1521	0.0466	0.0000	0.3519
CSAN	0.1726	0.0860	0.2901	0.1727	0.0839	0.0000	0.0154
CSAR	0.3455	-0.1581	-0.1811	0.3438	-0.1566	0.0000	-0.1548
CSER	0.2074	-0.0868	0.0245	0.2065	-0.0855	0.0000	0.0769
DISZ	-0.1301	0.0033	0.2505	-0.1274	0.0029	0.0000	0.4537
GYOR	0.1030	0.2496	-0.6966	0.1047	0.2447	0.0000	-0.4633
HAJD	-0.1345	-0.0120	-0.5998	-0.1365	-0.0078	0.0000	-0.8575
HOLL	0.2077	-0.0845	0.5251	0.2045	-0.0869	0.0000	0.5348
IHAR	-0.1654	-0.2376	-0.6442	-0.1624	-0.2347	0.0000	-0.4250
KOND	-0.3618	0.1031	-0.2979	-0.3541	0.1041	0.0000	0.0556
KOSZ	-0.3434	0.3203	0.2110	-0.3348	0.3171	0.0000	0.5889
MEZO	0.0777	0.0066	0.1856	0.0790	0.0087	0.0000	-0.1450
MISK	-0.1022	-0.2876	0.8636	-0.1055	-0.2873	0.0000	0.7595
NADA	0.1720	0.0413	0.2415	0.1719	0.0390	0.0000	0.3205
OTTO	0.1434	0.0267	0.4690	0.1421	0.0253	0.0000	0.3332
PENC	0.1651	0.0142	0.5006	0.1628	0.0115	0.0000	0.5336
PILI	0.1141	0.0484	-0.0842	0.1128	0.0469	0.0000	-0.1342
REGO	0.1323	-0.0872	-0.0830	0.1323	-0.0874	0.0000	-0.0214
SATO	-0.3060	-0.1274	-0.6657	-0.3114	-0.1212	0.0000	-0.8924
SOPR	-0.1435	0.3854	-0.1825	-0.1362	0.3803	0.0000	0.1982
TARP	-0.3683	0.1389	-0.8691	-0.3693	0.1488	0.0000	-1.2364
TISZ	0.0771	-0.0821	-0.1223	0.0756	-0.0818	0.0000	-0.2907



5.43. ábra. Az IUGG-67 ellipszoidra (HD72 dátumra) vonatkozó 138 pontból levezetett csillagászati geodéziai geoidkép (Papp és Benedek 2005)



5.44 ábra. A 24 pontos OGPSH kerethálózatból és a 12. megoldásból származó helyi geoidkép

6

Összefoglalás, az eredmények hasznosítása

Magyarországon elsőként részletesen megvizsgáltam a meteorológiai szolgálat által mért felszíni és ballonszondázási adatok alkalmazást a GSP mérések feldolgozásában és meteorológiai célú alkalmazásában (Bányai et al. 1994, Bányai 1995). A szakirodalomban általában többéves adathalmaz segítségével levezetett globális és regionális modellekkel találkozhatunk. A rendelkezésemre álló hazai adatok ugyan csak két hét időintervallumra vonatkoznak, de az adatok részletes vizsgálata több olyan jelenségre is felhívta a figyelmet, amely a több éves adathalmaz statisztikai vizsgálatában nem jelentkezik ilyen egyértelműen.

A ballonadatok magassági eloszlásának vizsgálatánál bevezettem egy, a Hopfield megközelítésének alapelvét felhasználó, új, egyedileg illesztett modellt. A ballonadatokból levezetett száraz és nedves refraktivitás összetevőit az (5.3) és az (5.5) modellek paramétereinek legkisebb négyzetes kiegyenlítésével határoztam meg. A modellek tengerszintre vonatkozó refraktivitása, effektív magassága és alakszáma megfelelően biztosítja a mért adatokhoz viszonyított legkisebb négyzetes illeszkedést.

A száraz összetevő esetében a modell alkalmas az adathiányok kezelésére, és a száraz légkör effektív magasságának a meghatározására, azokban a magasságokban is, ahol ballonmérések nem állnak a rendelkezésünkre.

A modell a nedves összetevő esetében, ahol az effektív magasságot a ballonadatok alapján az első nulla parciális párányomás magasságában célszerű felvenni, néhány zavart esettől eltekintve szintén kedvezően megközelítésnek bizonyult.

A Hopfield és a Saastamoinen modellek elméleti összehasonlításával megállapítottam, hogy bizonyos feltételek mellett a két modell az eltérő formalizmus ellenére is gyakorlatilag azonos eredményt szolgáltat, ha a légkör hidrosztatikai egyensúlyi állapotban van. Ekkor a Hopfield modell önkényesen választott alakszáma ($a_{d/w} = 4$) közel van a konstansok alapján levezethető ($a_{d/w} = 4.3\text{--}4.5$) alakszámhoz, és az effektív magasság is összhangban van a felszíni adatokból és a Saastamoinen modellből levezethető effektív magasságokkal.

Hidrosztatikai egyensúlyi állapotban mind a három modell (Hopfield, Saastamoinen és az egyedileg illesztett) gyakorlatilag kedvező eredményt ad. A meteorológiai frontok azonban felborítják ezt a kényes egyensúlyi állapotot, és a Hopfield és a Saastamoinen modellek is egyaránt kedvezőtlen eredményeket szolgáltatnak. Ha az egyedi modellek paramétereit a meteorológiai frontok jól elkülöníthető intervallumaiban, időben lineáris függvényekkel írjuk le, akkor jóval kedvezőbb eredményeket kapunk: a zenit irányú száraz késleltetéseket 1 cm, a nedves késleltetések 2 cm pontossággal modellezhetők. A nedves tagnál azonban alkalmanként nagyobb hibák is előfordulhatnak.

Az új modellnek a gyakorlati jelentősége a GPS mérések meteorológia alkalmazásánál jelentkezik, ahol a GPS mérések feldolgozása során pontosan becsülhető zenitirányú késleltetésekből le kell vonni, a modell által becsült száraz késleltetéseket. Ehhez legalább egy GPS állomást ballonszondázási állomás közelébe célszerű elhelyezni. A ballonadatok alapján a meteorológiai frontok a Saastamoinen és az egyedi modell összehasonlításával azonosíthatók, a jellegzetes intervallumok kijelölhetők, és az állomáson a száraz és a nedves késleltetések is pontosabban megbecsülhetők. A permanens GPS hálózatok felhasználhatók a kihullható vízmennyiség térben és időben is nagyobb felbontású becslésére.

A felszíni refraktivitások a legkisebb négyzetes kollokáció alkalmazásával a ballon adatokkal közel azonos pontossággal becsülhetők, de a meteorológiai frontok esetében nagyobb kiugró értékek is adódhatnak, ezért a permanens állomásokat is célszerű saját meteorológia szenzorokkal felszerelni.

A FÖMI KGO tevékenységének köszönhetően a magyarországi permanens állomások is egyre kedvezőbb lefedést biztosítanak (4.2 ábra), ezért a kihullható vízmennyiség meghatározása is bővíthetné a szolgáltatások körét. A Budapesti Műszaki és Közgazdasági Egyetem permanens állomása ugyan közel van a Marczell György Főobszervatóriumhoz, de meteorológia szenzort nem üzemeltetnek. A KGO területén a meteorológiai szolgálat telepített szenzorokat, de távolabb található a

főobszervatóriumtól, és a földrajzi adottságai is eltérőek. Hasonlón jellemezhető a soproni permanens állomás és a bécsi ballonszondázási állomás kapcsolata is.

Az aktív GPS hálózatban rejlő lehetőségek jövőbeli kihasználása a különböző szakterületek szorosabb gyakorlati összefogását is igényelné. A meteorológiai frontok folyamatos vizsgálata is továbbra is hasznos eredményekhez vezethet, amely meteorológus szakértő együttműködését is igényelné.

Hazai és nemzetközi tudományos együttműködési programok keretében megvizsgáltam a rendelkezésünkre álló műholdas helymeghatározás hozzájárulását az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézetben folyó areonómiai vizsgálatokhoz és obszervatóriumi megfigyelésekhez (Bányai és Kovács 1992).

A technikai adottságok kiaknázásával megvizsgáltam a GPS rendszer A-S korlátozását kiküszöbölő keresztkorrelációs (XCR) megfigyelési módszer ionoszféra vizsgálatokra gyakorolt hatását. A TurboRogue vevő P kódú (PCD) és keresztkorrelációs (XCR) méréseinek összehasonlítására egy speciális mérési elrendezést alkalmaztam és megvizsgáltam a két mérési típus pontosságát (Bányai és Eper-Pápai 1996).

A GPS mérések ionoszféra vizsgálati alkalmazásánál bevezettem egy olyan optimális ionoszférikus mérési kombinációt, amely a geometriamentes kód- és fázismérések gyakorlatban előforduló aszimmetriáját lineáris modell segítségével kompenzálja. Az illeszkedés a PCD méréseknél 5 cm (0.2 ns) az XCR méréseknél 15 cm (0.5 ns) pontossággal jellemezhető.

Az optimális mérési kombinációt az ionoszféra IRI és a plazmaszféra diffúzív egyensúlyi modelljével becsülhető mennyiségekkel hasonlítottam össze. A TEC értékek jelterjedés menti ferde integráljait összehasonlítottam az ionoszférikus pontok vertikális integráljaiból levezetett és GPS vevővel közvetlenül mért értékekkel. Megállapítottam, hogy a medián becslésből származó magasságokat célszerű az egyszerű ionoszférikus rétegmodell magasságaként felhasználni. Az éjszakai méréseknél a mért és becsült értékek jó egyezést mutatnak. A nappali méréseknél az alacsonyabb magasságokban nagyobb eltérések tapasztalhatók, amely az egyszerű lemezmodellel javítható. Az IRI modell a napkelte (és napnyugta) tartományában általában kisebb TEC értékeket szolgáltat, mint a GPS megfigyelések (Bányai 1997).

Bevezettem egy új módszert, amely egy állomás és egyetlen műhold megfigyelése alapján határozza meg a vevő és a műhold együttes kódkeletkezéseit. Vertikális TEC függvényként Legendre polinomokat alkalmaztam, amely a páros tagok elhanyagolásával növeli a becslés pontosságát. Az új módszert összehasonlítottam a Németországban (DLR Remote Sensing Ground Station, Neustrelitz) hálózati mérések feldolgozó, Kálmán szűrést alkalmazó eljárással. Az eredmények az eltérő módszer és a jóval nagyobb hálózati adathalmaz ellenére is kiváló egyezést mutattak (Bányai 1997).

Az obszervatóriumi megfigyeléseknél első lépésben az alkalmas műholdátvonulások segítségével folyamatosan megbecsüljük az egyedi kódkeletkezéseket. Az aktuális értékeket lineáris trend illesztésével határozzuk meg, ahol az egyedi éjszakai megfigyelések nagyobb súllyal szerepelnek. A GPS mérések műholdankénti feldolgozásánál ezeket az értékeket alkalmazzuk az ionoszférikus pontokhoz tartozó vertikális TEC értékek meghatározására.

Az ionoszonda állomás helyére vonatkozó vertikális TEC értékek becslésére a Dirichlet probléma Monte-Carlo módszer szerinti megoldásán alapuló interpolációs módszert alkalmaztam (Bányai et al. 1994).

A több állomás és a több műhold együttes feldolgozása az új alternatív módszerhez viszonyítva kedvező és kedvezőtlen tulajdonsággal is rendelkezik. Az új módszer annyiban előnyös, hogy a vonal menti illeszkedés kedvezőbb eredményt ad, és független a többi műhold és vevő mérési hibáitól, valamint a vevőnkénti egyedi adatfeldolgozás egyszerűbben kezelhető feladatot jelent. A több állomásra és több műholdra vonatkozó kódkeletkezések utólagos feldolgozása is lehetővé teszi a műhold és vevő késleltetéseinek szétválasztását, ha a szingularitást megfelelően kezeljük. A módszer tehát több állomásra is kiterjeszthető, amely a TEC értékek interpolációját is jelentősen javíthatja.

A soproni permanens GPS állomás beindításával ismét korszerű GPS berendezéssel (Leica 1200 Pro) rendelkezünk, és a hamarosan üzembe helyezendő új digitális ionoszonda lehetővé teszi a folyamatos obszervatóriumi megfigyelések beindítását is.

A Magyarországon egyre bővülő aktív permanens GPS állomások hálózata (4.2 ábra) egyre nagyobb potenciált jelent a kihullható vízmennyiség és az aeronómiai vizsgálatok területén, amely az állomáshálózat földtudományi hasznosítását is jelentősen kiterjesztheti.

A GPS mérések hálózati feldolgozásának területén bevezettem egy új eljárást a hármaskülönbségek szabatos kiegyenlítésének végrehajtására. A sajátérték és sajátvektor felbontás elvén alapuló dekorrelációs módszer előnye abban rejlik, hogy az inverz mátrix elemei közvetlenül felírhatók, ezért dekopozíciós algoritmusra, invertálásra és a nagyméretű mátrix tárolására sincs szükség. A műholdanként bináris fájlokban tárolt mérések, ellentmondás vektorok és kapcsolódó differenciálok (együttható mátrix elemek) hatékony memória kihasználást és algoritmust biztosítanak.

A hármaskülönbségek szabatos kiegyenlítése a kettős különbségek és fázis-többértelműségek becslésével azonos geometriai kondícióval rendelkezik. Az ionoszférikus hatások pontosabb figyelembevételével és a hibaszűrés javításával hatékonyabb előfeldolgozó algoritmusként használható.

A GPS-NET program hatékonyan alkalmazható a különböző tudományos és kereskedelmi szoftverekkel elsődlegesen meghatározott bázisvonalak szabatos kiegyenlítésére. A kibővített egyenletrendszer lehetővé teszi a különböző hibahatások (elfordulási hibák, méretarány eltérések, és egyedi fáziscentrum-külpontosságok) detektálását. Az általánosított szabadhálózat elve szerinti kiegyenlítés lehetővé teszi a lokális deformációvizsgálati mérések feldolgozását is. A módszert sikeresen alkalmaztam a paksi és ófalui geodinamikai, valamint a dunaföldvári partmozgás-vizsgálati hálózat méréseinek feldolgozásában (Bányai 2003, 2003b).

A GPS technika szélső pontosságú geodéziai és geodinamikai alkalmazásánál és a troposzférikus hatások becslésénél a fáziscentrum modellek ismerete is nélkülözhetetlen. Amíg az ionoszférikus hatások a két frekvencián történő mérések segítségével meghatározhatók, addig az irányfüggő antenna-külpontosságok és troposzférikus hatások csak nehezen szétválasztható mennyiségek. Mivel a fáziscentrumok eltérései az ionoszférikus közelkalibrációs méréseknél is jelentkeztek (Bányai és Gianniou 1997), tanulmányoztam az antenna kalibrációs módszereket is. A visszhangmentes csarnokban és a kültéri robotkar segítségével történő kalibráció még költséges és bonyolult eljárást igényel, ezért a geodéziai gyakorlatban többnyire az antenna típustól függő modelleket alkalmaznak. Az egyedi antennák ellenőrzésére egyszerűbb eljárások is alkalmazhatók. A teljes antennaforgatás és antennacseré általánosításaként bevezettem egy új teljes helycserés módszert, amit tesztmérésekkel ellenőriztem (Bányai 2005, 2006). Mikro kalibrációs hálózat alkalmazásával az átlagos fáziscentrum-külpontosságok horizontális értelemben 1 mm, magassági értelemben 1.5 mm (L1) és 2.0 mm (L2) pontossággal becsülhetők.

A nemzetközi hálózatok esetében hamarosan áttérnek a relatív antenna modellekről az abszolút modellekre, amelynek a nagyobb regionális hálózatoknál van nagy jelentősége. Az egyedileg kalibrált antennák bevezetése csak a jelentősebb nemzetközi geodinamikai hálózatok esetében lehet indokolt.

A teljes helycserés eljárással a relatív és az abszolút modellekhez viszonyított maradék eltérések is ellenőrizhetők. A módszert lokális hálózatok esetében is alkalmazhatjuk, amely ezeket a maradék hibákat is hatásosan eltávolítja.

A GPS technika segítségével ugyan pontos geodéziai hálózatok hozhatók létre, de még a fejlett geodéziai kultúrával rendelkező országokban is a geodéziai alaptérképeket a pontatlanabb helyi rendszerekben készítik el. A földnyilvántartásokban a pontosabb rendszerre történő átállás azonban nagyon sok problémát vetne fel, amely nincs összhangban a pontosság várható növekedésével. A gyakorlatban ezért a két rendszer közötti transzformációval kapcsolják be a GPS méréseket a korábban létrehozott helyi geodéziai alapponthálózatokba. A transzformációk során a helyi geoid-undulációkat általában elhanyagolják.

A vizsgálataim alapján bemutattam, hogy bizonyos feltételek mellett a transzformációs paraméterekkel együtt az elhanyagolt helyi geoidundulációk is egy kiegyenlítési lépésben becsülhetők. Az új ismeretlenek egy az eltolással, és kettő az X és Y tengelyek körüli forgatással kapcsolatos defektusokat, illetve rosszul kondicionáltságot is eredményeznek. A három eltolás, a méretarányok eltérése, a Z tengely körüli elfordulás továbbá az undulációk együttes becslésének kondíciója gyakorlatilag azonos a hétparaméteres megoldás kondíciójával. A becsült geoidkép ugyan jó egyezést mutat a

csillagászati szintezésből származó geoidképpel, de a becslés pontossága csak 30% javulást eredményezett, és a horizontális javítások sem lettek kedvezőbbek (Bányai 2005).

Ennek az új módszernek tulajdonképpen csak elméleti jelentősége van, de hozzájárulhat a hagyományos hálózat hibáinak szisztematikus feltárásához is, továbbá egy alternatív lehetőséget szolgáltat a magyarországi geoidkép geometriai módszerrel történő ellenőrzéséhez. A helyi geoidundulációk becslésével azonban meghatározhatjuk a helyi IUGG-67 rendszer pontosabb tájékozási paramétereit is. A vetületi kezdőpontra történő áttérés, és a kezdőpont körüli elforgatás bevezetése azonban további vizsgálatokat, és a teljes OGPSH hálózat pontjainak bevonást is igényli.

Összességében megállapíthatjuk, hogy a műholdas helymeghatározás jelentősen hozzájárul a földtudományi vizsgálatokhoz, mind globális, mind regionális értelemben is. Magyarországon is egyre több eszköz áll a rendelkezésünkre, hogy fokozottabban bekapcsolódjunk a nemzetközi vizsgálatokba, és az eredményeket Magyarországon is hasznosítani tudjuk.

Reményeim szerint ezzel a dolgozattal magam is hozzájárultam a műholdas helymeghatározó rendszerek földtudományi alkalmazásához, és az intézetek közötti együttműködés keretében a közeljövő további sikeres munkákban is részt vehetek.

Irodalomjegyzék

- Ádám J** (1980): Megfigyelőállomások koordinátáinak meghatározása Kozmikus Geodéziai Módszerekkel. Kandidátusi értekezés.
- Ádám J** (1982): A Doppler és a geodéziai alaphálózatunk közötti transzformáció vizsgálata. *Geodézia és Kartográfia* 34, 89-94.
- Ádám J** (1982b): On the Determination of Similarity Coordinate Transformation Parameters. *Bollettino di Geodesica e Scienze Affini* 41. 283-290.
- Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B** (2004): Műholdas helymeghatározás. Műegyetem Kiadó. 558.
- Akrour B, Santerre R, Geiger A** (2005): Calibrating Antenna Phase Centers. A Tale of two Methods. Feb 1, 2005. GPS World.
- Almár I, Horváth A** (1981): Űrhajózási lexikon. Akadémia Kiadó. 999.
- Bácsatyai L** (1993): Magyarországi vetületek. Mezőgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest., 196.
- Baltink H K, van der Marel H, van der Hoeven A G A** (2002): Integrated Atmospheric Water Vapor estimates from a regional GPS network. *Journal of Geophysical Research*, 107; D3, 3-8.
- Bánya L, Kovács K** (1992): The GPS Technique and Ionospheric Research in the GGRI. In *Refraction of Transatmospheric Signals in Geodesy*. J C de Munck, T A Th Spoelstra eds., Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy 36, 99-102.
- Bányai L** (1991): Expanded error model for the network adjustment of GPS Baseline components. *Int. Sem. on GPS in Central Europe*. Penc 124.
- Bányai L** (1991b): Treatment of rotation errors in the final adjustment of GPS baseline components. *Bull. Geod.* 65,102.
- Bányai L** (1992): The role of the elastic rebound theory in design and evaluation of deformation survey. *Tectonophysics* 202, 107-110.
- Bányai L** (1995): Climatology of tropospheric effects on GPS measurements in Hungary between 28th October and 10th November, 1991. In *Reports on Geodesy*, Warsaw University of Technology, N. (3)16, 385-396.
- Bányai L** (1997): Investigation of the single layer model of GPS ionospheric data processing using IRI-90 and attached diffusive equilibrium model of plasmaspheric electron density. *Annali di Geofisica*, XL; 6,
- Bányai L** (1997b): Single Station and Single Satellite Method of GPS Ionospheric Data Processing. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 32;3-4, 407-416.
- Bányai L** (2003): Geodynamic investigations along the Mecsek-fault in Hungary using precise geodetic devices. *Proceedings. 11th International Symposium on Deformation Measurements*. Publication No 2. Geodesy and Geodetic Applications Lab. Dept of Civil Engineering, Patras University. Pp 65-70.
- Bányai L** (2003b): Stability investigations of the high bank of river Danube in the area of Duna-földvár. *Proceedings. 11th International Symposium on Deformation Measurements*. Publication No 2. Geodesy and Geodetic Applications Lab. Dept of Civil Engineering, Patras University. Pp 65-70.
- Bányai L** (2005): Investigation of GPS antenna mean phase centre offsets using a full roving observation strategy. *Journal of Geodesy* 79 222-230.
- Bányai L** (2005): Koordinátatranszformáció geoidundulációk becslésével. *Geomatikai Közlemények VIII.* 69-76.
- Bányai L** (2006): Application of full roving GPS observation strategy for monitoring local movements. *CD-ROM Proceedings of the 3rd IAG Symposium on Geodesy for Geotechnical and Structural Engineering and 12th Fig Symposium on Deformation Measurement*. Baden, Austria, Vienna University of Technology, ISBN:3-9501492-3-6

- Bányai L, Eper-Pápai I** (1995): Comparison of cross-correlation and P-code tracking modes of TurboRogue receivers for ionospheric applications. In Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, N. (3)16, 289-300.
- Bányai L, Eper-Pápai I** (1996): Comparison of cross-correlation and P-code tracking of TurboRogue GPS receivers. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini. Anno Lv - N.1, 9-24.
- Bányai L, Gianniou M** (1997): Comparison of TurboRogue and Trimble SSI GPS receivers for ionospheric investigation under anti-spoofing. Zeitschrift für Vermessungswesen. 122 Jahrgang, Heft 3, 136-142.
- Bányai L, Kalmár J, Bencze P** (1994): On the Possibilities of Coordinated Ionospheric Soundings and GPS Measurements. Annali di Geofisica, XXXVII, 233-240.
- Bányai L, Mentés Gy** (2006): Deformáció vizsgálatok geodéziai módszerei. Geomatikai Közlemények IX. 71-87.
- Bányai L, Papp G, Tóth L** (1994): A GPS mérések troposzférikus korrekciója. Geodézia és Kartográfia 46. évf. 2. szám, 79-84.
- Baróthy B, Hetényi M** (1981): Remarks on unbiased free net adjustment. Acta Geodaet., Geophys. et Momtanist 16 (2-4), 179-190.
- Bauer S J** (1973): Diffusive Equilibrium in the Topside Ionosphere. IEEE Proc., 57, 1114-1118.
- Bencze P, Veró J, Bányai L** (1986): Space Research Activity in the Geodetic and geophysycal Research Institute of the Hungarian Academy of Sciences between 1981-1985. Intercosmos Council, Hungarian Academy of sciences. 1-13.
- Beutler G** (1996): The GPS as a Tool in Global Geodynamics. Lecture Notes in Earth Sciences, GPS for Geodesy, Kleusberg A, Teunissen P J G Eds. Springer, 379-407.
- Beutler G** (1996b): GPS Satellite Orbits. Lecture Notes in Earth Sciences, GPS for Geodesy, Kleusberg A, Teunissen P J G Eds. Springer, 37-102.
- Beutler G, Mueller I, Neilan R** (1994): The International GPS Service for Geodynamics (IGS): Developments and Start of Official Service on 1 January 1994. Bulletin Géodésique 68(1): 43-51
- Bevis M, Businger S, Herring T A, Rocken C, Anthes R A, Ware R H** (1991): GPS Meteorology: Remote Sensing of Atmospheric Water Vapor Using the Global Positioning System. Journal of Geophysical Research, 97; D14, 787-801.
- Bíró P** (1972): A geodéziai alapfelületek. Geodézia és Kartográfia 6, 401-412.
- Bíró P** (1985): Felsőgeodézia. Tankönyvkiasó, Budapest. 196.
- Bock Y** (1982): The use of baseline measurements and geophysical models for the estimation of crustal deformations and the terrestrial reference system. The Ohio State University Report 337, 208.
- Bock Y** (1996): Reference Systems. Lecture Notes in Earth Sciences, GPS for Geodesy, Kleusberg A, Teunissen P J G Eds. Springer, 3-36.
- Borbás É** (1997): An Application of GPS Data to Meteorology: Precipitable Water Comparison for Penc Site. In Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, N. (4) 27, 461-368.
- Borza T** (1998): Elkészült az országos GPS-hálózat. Geodézia és Kartográfia 1. 8-13.
- Borza T** (2000): A hazai aktív GPS hálózat kiépítésének és fenntartásának aktuális kérdései. Geodézia és Kartográfia 9, 21.
- Braun J, Stephens B, Ruud O, Meertens C** (1996): Trimble Choke Ring Antenna Mean Phase Center Calibration. University NAVSTAR Consortium, Boulder, CO, 21 August 1996.
- Breuer B, Campbell J, Görres B, Hawig J, Wohlleben R** (1995) Kalibrierung von GPS-Antennen für hochgenaue geodätische Anwendungen. Zeitschrift für Satellitengestützte Positionierung, Navigation und Kommunikation. 2: 49-59
- Davis J L, Herring T A, Sharpio II, Rogers A E E, Elgered G** (1985): Geodesy by Radio Interferometry – Effects of Atmospheric Modelling Errors on Estimates of Baseline Length. Radio Science 20 (6), 1593-1607.
- de Jonge P J** (1998): A processing strategy for the application of the GPS in networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy 46. 225.
- Detrekői Á** (1991): Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó Budapest, 400.

- Engler E, Jankowski N, Jungstand I, Klahn D, Sardon E, Schlüter S** (1997): On the Implementation of a GPS Based Method for the Real-Time Measurement of the Total Electron Content of the Ionosphere. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, Vol 32 (3-4), 439-449.
- Grenerczy Gy** (2000): Present-day tectonics of the Pannonian basin and its surroundings inferred from space geodesy. PhD Dissertation, Loránd Eötvös University, Budapest, 122
- Grenerczy Gy, Kenyeres A, Fejes I** (2000): Present crustal movement and strain distribution in Central Europe inferred from GPS measurements. *Journal of Geophysical Research* 105; B9, 21,835-21,846.
- Gürtner W, Beutler G, Rothacher M** (1989) Combination of GPS Observables Made with Different Receiver Types. *Proceedings of the 5th International Geodetic Symposium on Satellite Positioning*, Las Cruces, New Mexico, 1, 362-374.
- Hajj G A, Romans L J** (1998): Ionospheric electron density profiles obtained with the Global Positioning System: Results from the GPS/MET experiment, *Radio Science* 33(1), 175-190.
- Hoffmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Collins J** (1997): *GPS Theory and Practice*. Fourth, revised edition. Springer Wien New York. 389.
- Hopfield H S** (1969): Two-Quartic Tropospheric Refractivity Profile for Correcting Satellite Data. *Journal of Geophysical Research*, 74; 18, 4487-4499.
- Horváth T** (2005): Javított valósidejű helymeghatározás interneten keresztül. *Geomatikai Közlemények VIII*. 123-133.
- Husti Gy, Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Krauter A** (2000): Globális hely-meghatározó rendszer (bevezetés). *Nyugat-Magyarországi Egyetem, Lövért Print Sopron*, ISBN 9637180 95 8, pp.
- Kenyeres A** (1998): Permanens állomás(ok) a hazai geodéziai gyakorlatban. *Geomatikai Közlemények I*. 43-48.
- Kobluchar J A, Leitinger R** (1993): On the Potential for Improving Topside Electron Density Profiles using Measurements of Total Electron Content. In *PRIME Studies with Emphasis on TEC and Topside Modelling*. *Wissenschaftlicher Bericht No. 2, Teil 1*, pp.13-20.
- Lanyi G E, Roth T** (1988): A comparison of mapped and measured total ionospheric electron content using global positioning system and beacon satellite observations. *Radio Sci.* 23. 483-492.
- Leick A** (1995): *GPS Satellite Surveying*. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, Chichester, Toronto, Brisbane, Singapore. 560.
- Lincoln J V, Conkright R O** (1981): Report UAG-82 – International Reference Ionosphere. World Data Center A for Solar-terrestrial Physics. 243.
- Mader G, Czopek F** (2002): Calibrating Antenna Phase Centers. May 1, 2002. *GPS World*.
- Meskó A** (1984): Digital Filtering: Application in Geophysical Exploration for Oil. *Akadémia Kiadó*, 636.
- Mikhail E M** (1976) *Observations and Least Squares*. IEP-A Dun-Donnelly New York, 497.
- Moldover M R, Trusler J P M, Edwards T J, Mehl J B, Davis R S** (1988): Measurement of the Universal Gas Constant R Using a Spherical Acoustic Resonator. *Phys. Rev. Lett.* 60, 249-252.
- Moritz H** (1973): Least-squares Collocation. *Reihe A* 75. 921
- Papp G, Benedek J** (1998): A függővonal modellezése a tömeg-vonzási erőterben. *Geomatikai közlemények I*. 1998, 55–70.
- Papp G, Benedek J** (2000): Numerical modelling of gravitational field lines – the effect of mass attraction on horizontal coordinates. *Journal of Geodesy*, 73/12, 648–659.
- Papp G, Benedek J** (2005): Nem publikált vizsgálatok.
- Patterson R C** (1985) Outlier Detection: Some Distribution Theory. *Aust. J. Geod. Photo. Surv.* 43
- Rocken C** (1992): GPS Antenna Mixing Problems, UNAVCO Memo, November 12, Boulder Colorado.
- Rothacher M, Schaer S, Mervart L, Beutler G** (1995): Determination of Antenna Phase Center Variations using GPS Data. *IGS Special Topics and New Directions. Workshop Proceedings*. Potsdam. 205-220.

- Saastamoinen J** (1972) Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio ranging of satellites. In *The Use of Artifical Satellites for Geodesy, Geophys. Monogr. Ser.*, Vol 15. 247-251.
- Schaffrin B, Grafarend E** (1986): Generating classes of equivalent linear models by nuisance parameter elimination. *Applications to GPS observations. Manuscripta Geodaetica* 11, 262-271.
- Schupler B R, Clark T A** (1991): How Different Antennas Affects the GPS Observable. Nov/Dec, 1991. *GPS World*. 32-36.
- Sebeer G** (2003): *Satellite Geodesy*. 2nd Edition. De Gruyter, 589.
- Smith E K, Weintraub S** (1953): The constants in the equation for atmospheric refractive index at radio frequencies. *Proc IRE* 41, 1035-1037.
- Strang G, Borre K** (1997): *Linear Algebra, Geodesy, and GPS*. Wellesley-Cambridge Press, UK. 624.
- Takács B** (2003): Lokális ionoszféra-modellek Magyarország területére. *Geodézia és Kartográfia* 6, 19-25.
- Teunissen P J G** (2001): *Dynamic data processing. Recursive least-squares. Series on Mathematical Geodesy and Positioning*. Delft University Press, The Netherlands. 241.
- Thayer D** (1974): An Improved Equation for the Radio Refractive index of Air. *Radio Science* 9, 803-807.
- van Mierlo J** (1980): Free network adjustment and S-transzformations. *DGK Reihe B* 252 41.
- Virág G** (1999): Az Egységes Országos Vízsíntes Alaphálózat vizsgálata az OGPSH tükrében. *Geodézia és Kartográfia* 5. 8-13.
- Völgyesi L, Tóth Gy, Varga J** (1994): Magyarországi vetületi rendszerek közötti átszámítások. *Geodézia és Kartográfia* 1984/5-6.
- Wanninger L** (1994): *Der Einfluss der Ionospäre auf die Positionierung mit GPS. Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, No. 201.
- Warnant R** (1997): Reliability of the TEC Computed using GPS measurements – The problem of Hardware Biases. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, Vol 32 (3-4), 451-459.
- Wu J T, Wu S, Hajj G A, Bertiger W I, Lichten S M** (1993): Effects of antenna orientation on GPS carrier phase. *Manuscripta Geodaetica* 18, pp 91-98.
- Wübbena G, Menge F, Schmitz M, Seeber G, Völksen C** (1996): A New Approach for Field Calibration of Absolute Antenna Phase Center Variations. *IONGPS-96*, Kancass City, Missouri.
- Závoti J** (1977): Ideas ont he Practical application of collocation. *Acta Geodaet., Geophys. et Momtanist* 14 (1-2), 111-124.
- Závoti J** (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. *Doktori értekezés. MTA GGKI Könyvtára*, 149.
- Závoti J** (1999b): Nem publikált levezetés és bizonyítás.

I. Melléklet

A troposzférikus hatások elméleti háttere

Az N refraktivitás laboratóriumi körülmények között a

$$N = k_1 \frac{P_d}{T} Z_d^{-1} + k_2 \frac{e}{T} Z_w^{-1} + k_3 \frac{e}{T^2} Z_w^{-1} \quad (1.1)$$

tapasztalati összefüggéssel írható le (Thayer 1974), ahol

$$Z_d^{-1} = 1 + P_d \left(57.9 \cdot 10^{-8} - \frac{9.325 \cdot 10^{-4}}{T} + \frac{0.25844}{T^2} \right), \quad (1.2)$$

$$Z_w^{-1} = 1 + e \left(1 + 3.7 \cdot 10^{-4} e \right) \left(-2.37321 \cdot 10^{-3} + \frac{2.23366}{T} - \frac{710.792}{T^2} + \frac{7.75141 \cdot 10^4}{T^3} \right). \quad (1.3)$$

Az (1.1) - (1.3) képletekben P_d a száraz levegő nyomása (hPa), e a parciális párányomás (hPa) és T a hőmérséklet (K). A Z_d^{-1} száraz és Z_w^{-1} nedves inverz kompresszibilitás az ideális gáztól való eltérést adja meg. Normál körülmények között $Z_d^{-1} \cong Z_w^{-1} \cong 1$, ezért gyakorlati célra az

$$N = k_1 \frac{P_d}{T} + k_2 \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \quad (1.4)$$

alapösszefüggést célszerű alkalmazni. A k_1 , k_2 és k_3 tapasztalati konstansokat is többen meghatározták:

	k_1 (K/hPa)	k_2 (K/hPa)	k_3 (K ² /hPa)
Smith and Weintraub (1953)	77.607	71.6	$3.747 \cdot 10^5$
Essen and Frome (IAG 1963)	77.624	64.7	$3.719 \cdot 10^5$
Thayer (1974)	77.604	64.8	$3.776 \cdot 10^5$

A légnyomás hagyományos milibar (mb) mértékegységét az SI rendszerben a hektó Pascal (hPa) váltotta fel, amely az SI mértékegységeknek megfelelően:

$$1 \text{ hPa} (= 1 \text{ mb}) = 10^2 \text{ Nm}^{-2} = 10^2 \text{ kgm}^{-1} \text{ s}^{-2}, \quad (1.5)$$

ahol N most a Newton mértékegységet jelöli. A hétköznapi életben szokásos Celsius (°C) és az SI alap mértékegység Kelvin (K) között csak konstans eltérés van:

$$T(\text{K}) = 273.15 + T(^{\circ}\text{C}). \quad (1.6)$$

A természetben csak a száraz levegő és a vízpára együttes nyomását ($P = P_d + e$) lehet közvetlenül és pontosan megmérni ($\pm(0.1-0.3)$ hPa). A vízpára esetében legegyszerűbben a relatív páratartalom H , vagy a száraz és nedves hőmérséklet mérhető, amelyből a parciális párányomás szintén csak tapasztalati összefüggések segítségével számítható. Az automatikus berendezésekkel mérhető $H(\%)$ értékekből a Magnus-Tetens képletnek megfelelően

$$e = 0.06107 \cdot H \cdot 10^{\frac{7.5(T-273.15)}{T-35.85}}, \quad (1.7)$$

ahol T a hőmérséklet (K) és e (hPa). A páratartalom 1-5% pontossággal mérhető, amely 10 °C és 50% relatív páratartalom mellett $\pm(0.4-0.6)$ hPa értéknek felel meg. Az átszámítás összefüggései elméletileg a nyílt vízfelszín fölött érvényesek. A hőmérséklet $\pm(0.1-0.3)$ K pontosan mérhető.

A természetben a száraz levegő és a vízpára együtt is jól megközelíti a hidrosztatikai egyensúlyi állapotot, ezért a $(P_d = P - e)$ helyettesítéssel a következő összefüggést kapjuk:

$$N = k_1 \frac{P}{T} + \left((k_2 - k_1) \frac{e}{T} + k_3 \frac{e}{T^2} \right) = N_d + N_w . \quad (1.8)$$

Mivel a törésmutatót vertikális irányban egyébként is integrálni kell, a

$$T_m = \frac{\int \frac{e}{T} dh}{\int \frac{e}{T^2} dh} \quad (1.9)$$

átlagos hőmérséklet bevezetésével az

$$N = k_1 \frac{P}{T} + (k_3 + T_m(k_2 - k_1)) \frac{e}{T^2} = N_d + N_w \quad (1.10)$$

egyszerűsített alak adódik. Mivel a meteorológiai ballonszondázási adatok segítségével meghatározható T_m érték helyi és szezonális változásokat is mutatnak, a Smith és Weintraub (1953) által javasolt $T_m = 273$ K konstans érték elvileg pontosabb összefüggéshez vezet.

Mivel a P_d és a P mennyiségek is jól megközelítik a hidrosztatikai egyensúlyi állapotot, ezért az N_d tagot hidrosztatikai, az N_w tagot nedves refraktivitásnak is nevezik. (Az 5.1 fejezet bizonyítja, hogy ez az N_d esetében sem mindig teljesül, és az N_w esetében is jelentkezhet a hidrosztatikai egyensúlyi állapot, ezért a továbbiakban a domináns összetevőnek megfelelően a száraz és nedves megkülönböztetést és jelölést célszerű alkalmazni.)

A légnyomás és a parciális párányomás magassági változása a

$$P(h) = P_s \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha}}, \quad (1.11)$$

$$e(h) = e_s \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d \alpha}} \quad (1.12)$$

modellel írható le, ahol az s index a felszínen mért adatokra vonatkozik, h a felszín feletti magasság, g_m alkalmasan megválasztott közepes nehézségi gyorsulás, R_d a száraz levegő gázállandója és α a közepes lineáris hőmérsékleti gradiens. A képletekben szereplő paraméterek is tapasztalati konstansok.

A száraz levegő és a vízpára gázállandói (R_d, R_w) és móltömegei (M_d, M_w) között az

$$R_d = \frac{R}{M_d} \quad \text{és} \quad R_w = \frac{R}{M_w} \quad (1.13)$$

összefüggések érvényesek, ahol R az univerzális gázállandó.

Az univerzális gázállandó legújabb értéke (Moldover et al. 1988):

$$R = 8.314\,472\,(15) \quad (\text{J K}^{-1} \text{ mol}^{-1} = \text{m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1} \text{ mol}^{-1}),$$

amely az első négy számjegyében azonos a korábban használt értékekkel, továbbá J az energia Joule egységben. A móltömegek (Davis et al. 1985) alapján:

$$M_d = 28.9644 \cdot 10^{-3} \text{ (kg mol}^{-1}\text{)},$$

$$M_w = 18.0152 \cdot 10^{-3} \text{ (kg mol}^{-1}\text{)}$$

konstans értékek. A levezethető speciális gázállandók:

$$R_d = 287.0583 \text{ (287.0562) (J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}\text{)},$$

$$R_w = 461.5254 \text{ (461.5219) (J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} = \text{m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}\text{)},$$

ahol a zárójelben lévő értékek az R első négy értékes számjegyére vonatkoznak.

A közepes hőmérsékleti gradiens szintén meteorológiai ballonszondázási adatok segítségével becsülhető. A gyakorlatban többnyire az

$$\alpha = -dT/dh = -0.0062 \text{ , vagy } -0.0065 \text{ (K m}^{-1}\text{)}$$

értéket használják, amely azonban csak ~ 11 km magasságig tekinthető érvényesnek. Az ennél nagyobb magasságokban az inverzió következtében a hőmérséklet növekszik. A gyakorlatnak megfelelően a további képletekben a gradiens pozitív számként szerepel.

Az (1.11) és (1.12) modellek a (1.8) egyenletnek megfelelően a

$$\frac{P(h)}{T(h)} = \frac{P_s}{T_s} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d} - 1}, \quad (1.14)$$

$$\frac{e(h)}{T(h)} = \frac{e_s}{T_s} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d} - 1}, \quad (1.15)$$

$$\frac{e(h)}{T^2(h)} = \frac{e_s}{T_s^2} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d} - 2}, \quad (1.16)$$

alakba is átírhatók, amelyek csak konstans szorzójukban különböznek a refraktivitástól.

Ideális gázok esetében a gáztörvény alapján a következő összefüggések írhatók fel:

$$\frac{P_d}{T} = R_d \cdot (\rho - \rho_w), \quad (1.17)$$

$$\frac{e}{T} = R_w \cdot \rho_w, \quad (1.18)$$

ahol ρ a száraz levegő és a vízpára együttes, ρ_w a vízpára sűrűsége (kg m^{-3}).

Helyettesítsük be a (1.17) és (1.18) összefüggést a (1.4) alapösszefüggésbe és ismét alkalmazzuk a (1.9) átlagos hőmérsékletet. Ekkor a refraktivitás

$$N = k_1 \cdot R_d \cdot \rho + \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w \cdot \rho_w = N_d + N_w \quad (1.19)$$

alternatív összefüggését kapjuk. A refraktivitás összetevői most is csak konstans szorzójukban térnek el a sűrűségektől.

Amíg a száraz összetevő a (1.11) és az (1.17) összefüggéssel is jól modellezhető, addig a (1.12) és különösen a (1.18) összefüggés, a térben és időben is gyorsan változó vízpára inhomogenitások miatt, amely nem tekinthető ideális gáznak, csak közelítő összefüggésnek tekinthetők. Ilyen látható inhomogenitások például a különböző felhőtípusok, amelyek fizikai tulajdonságainak megfelelően eltérő refraktivitással jellemezhetők.

A gyakorlatban a zenitirányú (vertikális) troposzférikus késleltetés meghatározására a Hopfield és a Saastamoinen modelleket, illetve ezek különböző változatait használják.

A Hopfield modell alapelve

Hopfield a modelljét az (1.10) és (1.11) összefüggésekre alapozta. A lineáris hőmérsékleti gradiens segítségével a földfelszínre és egy általános h magasságra vonatkozó hőmérséklet a

$$T_s = \frac{h_d - h_s}{\alpha} \quad \text{és} \quad T(h) = \frac{h_d - h}{\alpha} \quad (1.20)$$

lineáris összefüggésekkel adta meg, ahol h_d a száraz légkör 0 K hőmérsékletéhez tartozó magassága. Az (1.20) összefüggéseknek az (1.14) összefüggésbe történő behelyettesítésével és a vertikális irányú integrál meghatározásával a

$$\frac{P_s}{T_s} \int_{T_s}^0 \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1} dT = \frac{P_s}{T_s} \int_{h_s}^{h_d} \left(\frac{h_d - h}{h_d - h_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1} dh = \frac{P_s}{T_s} \frac{(h_d - h_s)}{\frac{g_m}{R_d \alpha}} \quad (1.21)$$

összefüggést kapjuk. Hopfield számos meteorológiai ballonszondázási adat vizsgálatából arra a gyakorlati következtetésre jutott, hogy az (1.14) és (1.16) összefüggések kitevői egységesen és ön-kényesen 4-es értéknek választhatók, és meghatározta az ezekhez tartozó h_d és h_w tapasztalati magasságokat. A zenit irányú száraz (ZHD) és nedves (ZWD) késleltetés tehát Hopfield szerint a következőképpen számítható:

$$\boxed{ZHD = 10^{-6} k_1 \frac{P_s}{T_s} \frac{(h_d - h_s)}{5}} \quad (1.22)$$

$$\boxed{ZWD = 10^{-6} (k_3 + T_m (k_2 - k_1)) \frac{e_s}{T_s^2} \frac{(h_w - h_s)}{5}} \quad (1.23)$$

A h_w magasság 9-13 km, a h_d magasság 35-50 km közötti érték. A száraz légkör felszínfeletti magassága a $(h_d - h_s = a + bT_s)$ polinommal pontosabban becsülhető, ahol a és b szintén tapasztalati konstansok. Az átlagos hőmérséklet elhagyásával a

$$\boxed{ZWD = 10^{-6} \left(\frac{k_3}{T_s} + (k_2 - k_1) \right) \frac{e_s}{T_s} \frac{(h_w - h_s)}{5}} \quad (1.24)$$

nedves késleltetés elvileg pontosabbnak tekinthető.

A modell egyik gyakorlati változatában

$$T_m = 273 \text{ K}, \quad h_d - h_s = 40136 + 148.72(T_s - 273.15) \quad \text{és} \quad h_w - h_s = 11000 \text{ m}.$$

A Saastamoinen modell alapelve

Saastamoinen a modelljét részben az (1.19) összefüggésre alapozta, ahol a magassági változást a sűrűség értékek hordozzák. Hidrosztatikai egyensúlyban lévő ideális gázoknál a felszínen mérhető nyomást a sűrűség és a gravitációs gyorsulás szorzatának vertikális integrálja adja:

$$P_s = g_m \int_{h_s}^{\infty} \rho \cdot dh \quad \text{és} \quad e_s = g_m \int_{h_s}^{\infty} \rho_w \cdot dh = g_m \cdot IWV, \quad (1.25)$$

ahol IWV az integrált páratartalom (kg m^{-2}). Ha g_m (m s^{-2}) és a ρ (m s^{-3}) mértékegységben adottak a P_s és e_s nyomásokat ($\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-2} = \text{Pa}$) egységben kapjuk meg.

A késleltetések tehát a

$$\boxed{ZHD = 10^{-6} \frac{k_1 \cdot R_d}{g_m} P_s}, \quad (1.26)$$

$$ZWD = 10^{-6} \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) \frac{R_w}{g_m} \cdot e_s \quad (1.27)$$

alakban is felírhatók. Az e_s felszíni értékek azonban a magassági eloszlás szempontjából nem tekinthetők reprezentatívnak, ezért a nedves összetevő meghatározására másik utat választott. Az (1.8) képlet nedves összetevőjébe helyettesítettük be az (1.15) és (1.16) összefüggéseket:

$$N_w = \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 \right) \frac{e_s}{T_s} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 1} + k_3 \frac{e_s}{T_s^2} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 2}, \quad (1.28)$$

majd a magasságtól függő tagok integráljánál a lineáris hőmérsékleti gradiens segítségével térjünk át a hőmérséklet szerinti integrálra:

$$\int_{h_s}^{\infty} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 1} dh = \int_{T_s}^0 \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 1} \frac{dT}{-\alpha} = T_s \frac{R_d}{4g_m}, \quad (1.29)$$

$$\int_{h_s}^{\infty} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 2} dh = \int_{T_s}^0 \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{4g_m}{R_d\alpha} - 2} \frac{dT}{-\alpha} = T_s \frac{R_d}{4g_m - R_d\alpha}. \quad (1.30)$$

Az eredmények behelyettesítésével a

$$\boxed{ZWD = 10^{-6} \left(\left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 \right) \frac{R_d}{4g_m} e_s + \left(\frac{k_3 \cdot R_d}{4g_m - R_d\alpha} \right) \frac{e_s}{T_s} \right)} \quad (1.31)$$

összefüggés adódik. Ha az (1.30) integrált a (1.10) összefüggésbe helyettesítjük a

$$\boxed{ZWD = 10^{-6} (k_3 + T_m (k_2 - k_1)) \left(\frac{R_d}{4g_m - R_d\alpha} \right) \frac{e_s}{T_s}} \quad (1.32)$$

egyszerűsített összefüggést kapjuk. Az (1.31) elméletileg pontosabb az (1.32) összefüggésnél.

Ennél a modellnél a g_m gyorsulást is kellő pontossággal kell ismerni. Saastamoinen a

$$g_m = \frac{g_0}{(1 - 0.0026 \cos 2\varphi - 0.00000028 h_s)} \quad (1.33)$$

$$\cong g_0 (1 + 0.0026 \cos 2\varphi + 0.00000028 h_s)$$

összefüggést adta meg, ahol a normál gyorsulás $g_0 = 9.784$ (m s^{-2}) és h_s (m).

A Hopfield és a Saastamoinen modell összehasonlítása

A $T_s=288.15$ K (= 15 °C), $P_s=1000$ hPa és $e_s=10$ hPa átlagos felszíni adatokkal, továbbá a $T_m = 273$ K, $\alpha = -0.0062$ (K m⁻¹) és $g_m = 9.784$ (m s⁻²) ($\varphi = 45^\circ$, $h_s = 0$) konstansokkal meghatározott különböző zenit irányú késleltetéseket az 1.1 táblázat foglalja össze.

Annak ellenére, hogy a Hopfield modell kevesebb illesztett paramétert használ, csak néhány mm eltérést mutat az elméletileg helyesebb Saastamoinen modellhez képest. Az utóbbi modell több tapasztalati konstansra támaszkodik, ezért érzékenyebb azok konkrét értékeire is.

Az ideális gázként kezelt vízpára (1.27) lényegesen pontatlanabb eredményt szolgáltat, ezért korrekcióként nem szabad figyelembe venni.

Ha az (1.8) képlet száraz összetevőjébe az (1.14) képletet helyettesítjük és az integrált most is kiszámítjuk:

$$N_d = k_1 \frac{P_s}{T_s} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1}, \quad (1.34)$$

$$\int_{h_s}^{\infty} \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1} dh = \int_{T_s}^0 \left(\frac{T(h)}{T_s} \right)^{\frac{g_m}{R_d \alpha} - 1} \frac{dT}{-\alpha} = T_s \frac{R_d}{g_m}, \quad (1.35)$$

akkor az (1.26) összefüggéssel azonos eredményt kapunk.

Ha az (1.34) kitevőjét, az alakszámot, a Hopfield modellben az alkalmazott értékek alapján határoznánk meg:

$$\alpha = \frac{g_m}{R_d} - 1 (\cong 4.2 - 4.5) \quad (1.36)$$

és a magasságokat az (1.22) és (1.26), valamint az (1.23) és (1.32) összefüggések felhasználásával vezetnénk le:

$$h_d - h_s = \frac{(a+1)R_d}{g_m} T_s \quad \text{és} \quad h_w - h_s = \frac{(a+1)R_d}{(4g_m - R_d \alpha)} T_s, \quad (1.37)$$

akkor a formai eltérések ellenére a két modell gyakorlatilag azonos lenne, és mind a kettő összhangban lenne a gáztörvénnyel.

Az 1.1 táblázat csak a modellparaméterek bizonytalanságát tükrözi, a pontosság becsléséhez a mérési bizonytalanságokat is figyelembe kell venni. Az átlagos adatok és a korábban becsült pontosságoknak megfelelően a száraz összetevő 1-2 mm a nedves 4-6 mm értékkel becsülhető.

Leképezési függvények

A zenit irányban modellezhető késleltetéseket a jelterjedés irányába kell leképezni. A troposzféra azonban nem tekinthető egy vékony rétegnek, ezért a refraktivitás térbeli eloszlását is figyelembe kell venni. A leképezési függvényeknek két nagy csoportját különböztetjük meg. Vannak olyan modellek, melyek a száraz és a nedves összetevők esetében is használhatók, míg a pontosabb modelleknek eltérő függvényeket alkalmaznak:

$$\begin{aligned} T_{dw}(E) &= F(E) \cdot ZTD \\ T_{dw}(E) &= F_d(E) \cdot ZHD + F_w(E) \cdot ZWD \end{aligned} \quad (1.38)$$

ahol $ZTD = (ZHD + ZWD)$ a teljes vertikális troposzférikus késleltetés, T_{dw} a 3. résznek megfelelően most az E magassági szögre vonatkozó troposzférikus korrekciót jelölő és F a leképezési függvény.

1.1 táblázat. A Hopfield és a Saastamoinen modell összehasonlítása.

k_1, k_2, k_3	Hopfield modell		
	ZHD (m)	ZWD (m)	képlet
Smith and Weintraub (1953)	2.282		(1.22)
		0.099	(1.23)
		0.099	(1.24)
Essen and Frome (IAG 1963)	2.283		(1.22)
		0.098	(1.23)
		0.098	(1.24)
Thayer (1974)	2.282		(1.22)
		0.099	(1.23)
		0.099	(1.24)
	Saastamoinen modell		
	ZHD (m)	ZWD (m)	képlet
Smith and Weintraub (1953)	2.277		(1.26)
		0.102	(1.31)
		0.099	(1.32)
		(0.066)	(1.27)
Essen and Frome (IAG 1963)	2.277		(1.26)
		0.100	(1.31)
		0.098	(1.32)
		(0.065)	(1.27)
Thayer (1974)	2.277		(1.26)
		0.102	(1.31)
		0.100	(1.32)
		(0.066)	(1.27)

Hopfield negyedrendű modellje alapján levezetett egyszerű leképezési függvények:

$$F_d(E) = \frac{1}{\sin \sqrt{E^2 + 6.25}} \quad \text{és} \quad F_w(E) = \frac{1}{\sin \sqrt{E^2 + 2.25}}. \quad (1.39)$$

Saastamoinen egyszerű leképezési függvénye a Snellius törvényét alkalmazza:

$$F(E) = \frac{1}{\sin E} \quad \text{és} \quad \delta T_{dw}(E) = -0.002277 \frac{\cot^2 E}{\sin E}, \quad (1.40)$$

ahol $\delta T_{dw}(E)$ a járulékos korrekciós tag (m).

Ezek az alapmodellek különösen kis magasságokban nagyon pontatlanok, ezért számos javított változatuk létezik. Saastamoinen modelljét táblázatos korrekciókkal javították.

Jelenleg az un. lánctörtekkel leírható leképezési függvényeket tekintik a legpontosabbaknak, amelyek alacsony magassági szögek (5-15 fok) esetében is használhatók. Példaképpen az egyik leggyakrabban alkalmazott Marini-Herrig modell:

$$F_{d/w}(E) \cong \frac{1 + \frac{a_{d/w}}{1 + \frac{b_{d/w}}{1 + c_{d/w}}}}{\sin E + \frac{a_{d/w}}{\sin E + \frac{b_{d/w}}{\sin E + c_{d/w}}}}, \quad (1.41)$$

ahol a száraz és nedves leképezés formailag azonos, de az a , b és c paraméterek eltérőek. A paramétereket a földrajzi szélesség, a tengerszint feletti magasság és a felszíni hőmérséklet függvényében tapasztalati úton határozták meg. Az együththatók Hoffman-Wellenhorf et al. (2001) alapján:

$$\begin{aligned} a_d &= (1.2320 + 0.0139 \cos \varphi - 0.0209 h_s + 0.00215(T_s - 238)) \cdot 10^{-3} \\ b_d &= (3.1612 + 0.1600 \cos \varphi - 0.0331 h_s + 0.00206(T_s - 238)) \cdot 10^{-3}, \\ c_d &= (71.244 + 4.2930 \cos \varphi - 0.1490 h_s - 0.00210(T_s - 238)) \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} a_w &= (0.583 + 0.0111 \cos \varphi - 0.052 h_s + 0.0014(T_s - 238)) \cdot 10^{-3} \\ b_w &= (1.402 + 0.1020 \cos \varphi - 0.010 h_s + 0.0020(T_s - 238)) \cdot 10^{-3}, \\ c_w &= (45.85 + 1.9100 \cos \varphi - 1.290 h_s - 0.0150(T_s - 238)) \cdot 10^{-3} \end{aligned} \quad (1.43)$$

ahol φ a földrajzi szélesség ($^\circ$), h_s a tengerszintfeletti magasság (km) és T_s (K).

A leképezési függvények összehasonlításához a 1.2 táblázat az előző számításokból származó $ZHD = 2.277$ (m) és a $ZWD = 0.102$ (m) értékekhez tartozó $T_{dw}(E)$ késleltetéseket különböző magassági szögek függvényében mutatja be. Megállapítható, hogy 20° felett a pontatlanabb modellek is mm szinten azonosak, míg a kisebb magasságok esetén jelentős eltérések tapasztalhatók. A korrekciók pontosságánál tehát a leképezési függvényeket is figyelembe kell venni. A pontosságot legjobban az elméleti modellek és a felszíni paraméterek reprezentativitása jellemzi.

1.2 táblázat. A $T_{dw}(E)$ (m) értékek összehasonlítása.

E	5°	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
(1.39)	24.50	13.31	9.073	6.906	4.744	3.695	3.103	2.746	2.531	2.415	2.379
(1.40)	23.88	13.28	9.069	6.905	4.744	3.696	3.103	2.746	2.531	2.416	2.379
(1.41)	23.98	13.19	9.034	6.889	4.740	3.694	3.103	2.746	2.531	2.416	2.379

A száraz összetevő 1 cm alatti, a nedves összetevő néhány cm pontossággal jellemezhető. Ha a kettős különbségek nem ejtik ki a hibahatásokat, a szélső pontosságú feldolgozásnál a zenitirányú késleltetésekhez is ismeretlen javításokat kell rendelni. A görbült és a geometriai út hosszából adódó eltérést általában elhanyagolják.

A kihullható vízmennyiség meghatározása

Az 1.1. táblázat alapján az (1.27) képletet nem használható fel a nedves késleltetés meghatározására. Ha azonban a nedves késleltetést a GPS mérések feldolgozása során a modell értékekhez rendelt javításokkal pontosabban megbecsüljük, levezethetnénk azt az e_s értéket, amit akkor mérnénk, ha a vízpára ideális gázként viselkedne.

Helyettesítsük be az (1.27) képletbe a parciális párányomás (1.25) összefüggését, és vegyük figyelembe, hogy a nyomást hPa mértékegységben adtuk meg, ekkor:

$$ZWD = 10^{-8} \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w \cdot IWV, \quad (1.44)$$

amely megadja a vertikális irányú nedves késleltetés és az integrált vízpáratartalom közötti összefüggést:

$$Q(T_m) = 10^{-8} \left(k_2 - \frac{R_d}{R_w} k_1 + \frac{k_3}{T_m} \right) R_w = \frac{ZWD}{IWV}. \quad (1.45)$$

Az integrált páratartalom meghatározásához az átlagos hőmérséklet ismerete is szükséges. Ekkor a $T_m = a + b \cdot T_s$ tapasztalati függvényt célszerű a vizsgált régió ballonszondázási adatainak segítségével meghatározni. Bevis et al. (1992) a $T_m = 70.2 + 0.72 \cdot T_s$ tapasztalati értékeket vezette le, ahol a T_s hőmérséklet Kelvinben adott. Az integrált páratartalom az

$$IWV = \frac{ZWD}{Q(T_m)} \quad (1.46)$$

képletnek megfelelően kg/m^2 dimenziójú. Ha ez a páratömeg eső formájában kihullna, a víz $\approx 1000 \text{ kg/m}^3$ sűrűségének megfelelően az IWV számértéke mm dimenzióban adja meg az egységnyi (1 m^2) területre kihullható vízmennyiséget (PWV - Precipitation Water Vapor).

A korábbi példának megfelelően a $T_s = 288.15 \text{ K}$ hőmérsékletnek és a $ZWD = 0.102 \text{ (m)}$ késleltetésnek az $IWV = 16 \text{ kg m}^{-2}$ integrált páratartalom, illetve a $PWV = 16 \text{ mm}$ kihullható vízmennyiség felel meg.

A GPS mérések segítségével meghatározott (pontosított) ZWD értékekből az integrált páratartalom ($\pm 1\text{-}2 \text{ kg/m}^2$), a kihullható vízmennyiség ($\pm 1\text{-}2 \text{ mm/m}^2$) pontosan határozható meg.

II. Melléklet

A RETRO GPS program négy alkalmazása

1. SUMMARY OF RESULTS

BASE station: c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
 FREE station: c:\retrogps\data\WTZR0460.000
 ORBIT DATA : c:\retrogps\data\IGP10492.SP3

Options of the solution:

 No ionospheric corrections
 Standard tropospheric corrections (Goad)
 Degree of Lagrange orbit interpolation: 17
 Minimum satellite elevation angle: 15.
 Minimum number of continuous intervals: 3

BASE station:

GRAZ		MARKER NAME
11001M002		MARKER NUMBER
PETER PESEC	ISR GRAZ	OBSERVER / AGENCY
T 351	ROGUE SNR-8000	3.2.32.9
457	AOAD/M_T	NONE
		REC # / TYPE / VERS
		ANT # / TYPE
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393
1.9640	0.0000	0.0000
30		
		APPROX POSITION XYZ
		ANTENNA: DELTA H/E/N
		INTERVAL

first epoch: 2000 2 15 0 0 0 634608000
 last epoch: 2000 2 15 23 59 30 634694370
 number of epoch: 2878

PRN	DATA	L1	L2
1	778	778	749
2	857	857	768
3	752	752	698
4	805	805	668
5	812	812	686
6	807	807	730
7	793	793	686
8	786	786	680
9	773	773	679
10	769	769	646
11	747	747	744
12	0	0	0
13	804	804	740
14	789	789	784
15	796	796	769
16	802	802	788
17	789	789	666
18	805	805	783
19	719	719	700
20	0	0	0

21	892	892	796
22	643	643	612
23	919	919	850
24	601	601	436
25	935	935	847
26	706	706	610
27	770	770	710
28	0	0	0
29	936	936	849
30	793	793	713
31	694	694	668
32	0	0	0

FREE station:

```

-----
WTZR                                     MARKER NAME
14201M010                             MARKER NUMBER
Automatic                             OBSERVER / AGENCY
                                     BKG-Wettzell

T318-U                                AOA SNR-8000 ACT      3.3.32.2 REC # / TYPE / VERS
400                                  AOAD/M_T          NONE      ANT # / TYPE

4075580.6496  931853.7173  4801568.0633      APPROX POSITION XYZ
0.0710        0.0000        0.0000      ANTENNA: DELTA H/E/N
30                                           INTERVAL

first epoch: 2000  2 15   0 0 0  634608000
last  epoch: 2000  2 15  23 59 30  634694370
number of epoch: 2880

```

PRN	DATA	L1	L2
1	913	913	913
2	1028	1028	1028
3	765	765	765
4	1060	1060	1060
5	817	817	817
6	807	807	807
7	1083	1083	1083
8	782	782	782
9	796	796	796
10	1043	1043	1043
11	0	0	0
12	0	0	0
13	816	816	816
14	824	824	824
15	810	810	810
16	823	823	823
17	995	995	995
18	805	805	805
19	945	945	945
20	0	0	0
21	1032	1032	1032
22	1003	1003	1003
23	1080	1080	1080
24	1076	1076	1076
25	1067	1067	1067
26	960	960	960
27	0	0	0

28	0	0	0
29	1066	1066	1066
30	810	810	810
31	955	955	955
32	0	0	0

ORBIT DATA:

```
-----
first epoch: 2000  2 15  0 0 0 634608000
last  epoch: 2000  2 15 23 45 0 634693500
```

```
No common observations for Satellite: 11
No ephemeris for Satellite: 14
No ephemeris for Satellite: 15
No ephemeris for Satellite: 23
No common observations for Satellite: 27
```

Options of the solution:

```
-----
No ionospheric corrections
Standard tropospheric corrections (Goad)
Degree of Lagrange orbit interpolation:      17
Minimum satellite elevation angle:          15.
Minimum number of continuous intervals:      3
```

Summary of baseline estimation:

```
-----
BASE   station:  c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
FREE   station:  c:\retrogps\data\WTZR0460.000
```

```
first epoch: 2000  2 15  0 0 0 634608000
last  epoch: 2000  2 15 23 59 30 634694370
```

Used satellites:

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 13 16 17 18 19 21 22 24 25 26 29 30 31
```

```
Number of iterations:      4
Degrees of freedom:        62553
Deleted short intervals:    245
Deleted outliers:          88
Corrected cycle sleeps:     39
Weighted norm of residuals: 34.051266
Std. of unit weight:       0.023331
```

X	Y	Z
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393
4075580.6496	931853.7173	4801568.0633
0.1760	0.3381	-0.2309
4075580.8256	931854.0554	4801567.8324
0.0112	0.0137	0.0066

```
-----
BASE Station
fixed coordinates
```

```
FREE Station
approximate coordinates
corrections
estimated coordinates
standard deviations
-----
```

Latitude	Longitude	Height	(WGS-84)
47- 4- 1.66443	15-29-36.52382	538.2891	BASE station
49- 8-39.11105	12-52-44.07023	666.0229	FREE station approximate
49- 8-39.10011	12-52-44.08456	666.0098	FREE station estimated

Slant baseline length:

302043.7681	approximate
-0.4456	correction
302043.3225	estimated
0.0098	standard deviation

X	Y	Z	Baseline components
-118843.0955	-230848.5552	154322.4931	FREE - BASE
0.0112	0.0137	0.0066	standard deviations
1.247316E-04			Variance
-4.623559E-05	1.855142E-04		covariance
1.553814E-05	1.159126E-05	4.294298E-05	matrix

2. SUMMARY OF RESULTS

BASE station: c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
 FREE station: c:\retrogps\data\WTZR0460.000
 ORBIT DATA : c:\retrogps\data\IGP10492.SP3

Options of the solution:

 L3 ionosphere free combinations
 Standard tropospheric corrections (Goad)
 Degree of Lagrange orbit interpolation: 17
 Minimum satellite elevation angle: 15.
 Minimum number of continuous intervals: 3

BASE station:

GRAZ			MARKER NAME
11001M002			MARKER NUMBER
PETER PESEC	ISR GRAZ		OBSERVER / AGENCY
T 351	ROGUE SNR-8000	3.2.32.9	REC # / TYPE / VERS
457	AOAD/M_T	NONE	ANT # / TYPE
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393	APPROX POSITION XYZ
1.9640	0.0000	0.0000	ANTENNA: DELTA H/E/N
30			INTERVAL

first epoch: 2000 2 15 0 0 0 634608000
 last epoch: 2000 2 15 23 59 30 634694370
 number of epoch: 2878

PRN	DATA	L1	L2
1	778	778	749
2	857	857	768
3	752	752	698
4	805	805	668
5	812	812	686
6	807	807	730
7	793	793	686
8	786	786	680
9	773	773	679
10	769	769	646
11	747	747	744
12	0	0	0
13	804	804	740
14	789	789	784
15	796	796	769
16	802	802	788
17	789	789	666
18	805	805	783
19	719	719	700
20	0	0	0
21	892	892	796
22	643	643	612
23	919	919	850
24	601	601	436
25	935	935	847
26	706	706	610

27	770	770	710
28	0	0	0
29	936	936	849
30	793	793	713
31	694	694	668
32	0	0	0

FREE station:

```

-----
WTZR                                     MARKER NAME
14201M010                             MARKER NUMBER
Automatic                             OBSERVER / AGENCY
                                     BKG-Wettzell

T318-U                                AOA SNR-8000 ACT      3.3.32.2 REC # / TYPE / VERS
400                                  AOAD/M_T          NONE      ANT # / TYPE

4075580.6496  931853.7173  4801568.0633      APPROX POSITION XYZ
0.0710        0.0000      0.0000      ANTENNA: DELTA H/E/N
30                                INTERVAL

first epoch: 2000  2 15   0  0  0  634608000
last  epoch: 2000  2 15  23 59 30 634694370
number of epoch: 2880

```

PRN	DATA	L1	L2
1	913	913	913
2	1028	1028	1028
3	765	765	765
4	1060	1060	1060
5	817	817	817
6	807	807	807
7	1083	1083	1083
8	782	782	782
9	796	796	796
10	1043	1043	1043
11	0	0	0
12	0	0	0
13	816	816	816
14	824	824	824
15	810	810	810
16	823	823	823
17	995	995	995
18	805	805	805
19	945	945	945
20	0	0	0
21	1032	1032	1032
22	1003	1003	1003
23	1080	1080	1080
24	1076	1076	1076
25	1067	1067	1067
26	960	960	960
27	0	0	0
28	0	0	0
29	1066	1066	1066
30	810	810	810
31	955	955	955
32	0	0	0

ORBIT DATA:

```
-----
first epoch: 2000  2 15   0  0  0  634608000
last  epoch: 2000  2 15  23 45  0  634693500
```

```
No common observations for Satellite: 11
No ephemeris for Satellite: 14
No ephemeris for Satellite: 15
No ephemeris for Satellite: 23
No common observations for Satellite: 27
```

Options of the solution:

```
-----
L3 ionosphere free combinations
Standard tropospheric corrections (Goad)
Degree of Lagrange orbit interpolation:      17
Minimum satellite elevation angle:          15.
Minimum number of continuous intervals:      3
```

Summary of baseline estimation:

```
-----
BASE   station:  c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
FREE   station:  c:\retrogps\data\WTZR0460.000
```

```
first epoch: 2000  2 15   0  0  0  634608000
last  epoch: 2000  2 15  23 59 30  634694370
```

Used satellites:

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 13 16 17 18 19 21 22 24 25 26 29 30 31
```

```
Number of iterations:      4
Degrees of freedom:        64133
Deleted short intervals:    861
Deleted outliers:          98
Corrected cycle sleeps:     1
Weighted norm of residuals: 0.533446
Std. of unit weight:       0.002884
```

X	Y	Z	
-----			BASE Station
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393	fixed coordinates
			FREE Station
4075580.6496	931853.7173	4801568.0633	approximate coordinates
-0.0018	-0.0603	-0.0159	corrections
4075580.6478	931853.6570	4801568.0474	estimated coordinates
0.0020	0.0029	0.0012	standard deviations

Latitude	Longitude	Height	(WGS-84)

47- 4- 1.66443	15-29-36.52382	538.2891	BASE station
49- 8-39.11105	12-52-44.07023	666.0229	FREE station approximate
49- 8-39.11108	12-52-44.06735	666.0009	FREE station estimated

Slant baseline length:

302043.7681		approximate	
0.0387		correction	
302043.8068		estimated	
0.0021		standard deviation	

X	Y	Z	
-----			Baseline components
-118843.2733	-230848.9536	154322.7081	FREE - BASE
0.0020	0.0029	0.0012	standard deviations

3.861054E-06			Variance
-1.715382E-06	8.041636E-06		covariance
6.765906E-07	1.898556E-07	1.495605E-06	matrix

3.

S U M M A R Y O F R E S U L T S

BASE station: c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
 FREE station: c:\retrogps\data\WTZR0460.000
 ORBIT DATA : c:\retrogps\data\IGP10492.SP3

Options of the solution:

 Estimated ionospheric corrections (L4)
 Maximum degree of ionospheric polynomials: 60
 Maximum gap in ionospheric investigations: 600 s
 Standard tropospheric corrections (Goad)
 Degree of Lagrange orbit interpolation: 17
 Minimum satellite elevation angle: 15.
 Minimum number of continuous intervals: 3

BASE station:

GRAZ			MARKER NAME
11001M002			MARKER NUMBER
PETER PESEC	ISR GRAZ		OBSERVER / AGENCY
T 351	ROGUE SNR-8000	3.2.32.9	REC # / TYPE / VERS
457	AOAD/M_T	NONE	ANT # / TYPE
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393	APPROX POSITION XYZ
1.9640	0.0000	0.0000	ANTENNA: DELTA H/E/N
30			INTERVAL

first epoch: 2000 2 15 0 0 0 634608000
 last epoch: 2000 2 15 23 59 30 634694370
 number of epoch: 2878

PRN	DATA	L1	L2
1	778	778	749
2	857	857	768
3	752	752	698
4	805	805	668
5	812	812	686
6	807	807	730
7	793	793	686
8	786	786	680
9	773	773	679
10	769	769	646
11	747	747	744
12	0	0	0
13	804	804	740
14	789	789	784
15	796	796	769
16	802	802	788
17	789	789	666
18	805	805	783
19	719	719	700
20	0	0	0
21	892	892	796
22	643	643	612
23	919	919	850
24	601	601	436

25	935	935	847
26	706	706	610
27	770	770	710
28	0	0	0
29	936	936	849
30	793	793	713
31	694	694	668
32	0	0	0

FREE station:

```

-----
WTZR                                     MARKER NAME
14201M010                             MARKER NUMBER
Automatic                             BKG-Wettzell      OBSERVER / AGENCY

T318-U                                AOA SNR-8000 ACT    3.3.32.2 REC # / TYPE / VERS
400                                  AOAD/M_T          NONE      ANT # / TYPE

4075580.6496    931853.7173    4801568.0633    APPROX POSITION XYZ
0.0710          0.0000          0.0000        ANTENNA: DELTA H/E/N
30                                     INTERVAL

first epoch: 2000  2 15   0 0 0  634608000
last  epoch: 2000  2 15  23 59 30 634694370
number of epoch:  2880

```

PRN	DATA	L1	L2
1	913	913	913
2	1028	1028	1028
3	765	765	765
4	1060	1060	1060
5	817	817	817
6	807	807	807
7	1083	1083	1083
8	782	782	782
9	796	796	796
10	1043	1043	1043
11	0	0	0
12	0	0	0
13	816	816	816
14	824	824	824
15	810	810	810
16	823	823	823
17	995	995	995
18	805	805	805
19	945	945	945
20	0	0	0
21	1032	1032	1032
22	1003	1003	1003
23	1080	1080	1080
24	1076	1076	1076
25	1067	1067	1067
26	960	960	960
27	0	0	0
28	0	0	0
29	1066	1066	1066
30	810	810	810
31	955	955	955
32	0	0	0

ORBIT DATA:

```
-----
first epoch: 2000  2 15  0 0 0 634608000
last  epoch: 2000  2 15 23 45 0 634693500
```

```
No common observations for Satellite: 11
No ephemeris for Satellite: 14
No ephemeris for Satellite: 15
No ephemeris for Satellite: 23
No common observations for Satellite: 27
```

Ionospheric processing & Quality control:

BASE station

```
-----
PRN      records      mu0    obs. slip poli.

  1        0 - 372    0.0019  332    0    60
  1    470 - 777    0.0024  291    0    60
  2     23 - 631    0.0010  490    3    60
  3     29 - 691    0.0015  554    1    60
  4        0 - 245    0.0016  219    0    60
  4    280 - 573    0.0030  210    4    60
  4    685 - 804    0.0043  117    0    39
  5     24 - 743    0.0012  537    0    60
  6     23 - 728    0.0014  578    0    60
  7        0 - 17    0.0050   17    0    5
  7     60 - 522    0.0019  378    0    60
  7    628 - 633    0.0036    5    0    2
  7    634 - 713    0.0030   77    0    26
  7    714 - 792    0.0040   76    0    26
  8     24 - 703    0.0014  568    0    60
  9     28 - 710    0.0013  553    0    60
 10     8 - 139    0.0040  128    0    43
 10    140 - 406    0.0013  245    0    60
 10    407 - 411    0.0017    4    0    2
 10    453 - 672    0.0027  158    0    53
 13     27 - 742    0.0016  598    4    60
 16        0 - 405    0.0015  345    0    60
 16    490 - 801    0.0025  291    0    60
 17    110 - 727    0.0011  461    0    60
 18        0 - 557    0.0015  459    0    60
 18    650 - 804    0.0026  146    0    51
 19     24 - 662    0.0014  527    0    60
 21    202 - 810    0.0014  501    1    60
 22     25 - 593    0.0014  484    0    60
 24     26 - 67    0.0049   41    0    13
 24     68 - 90    0.0054   22    0    7
 24    119 - 537    0.0017  287    1    60
 25        0 - 25    0.0049   25    0    8
 25    123 - 596    0.0016  408    0    60
 25    658 - 934    0.0024  249    4    60
 26     28 - 651    0.0011  499    0    60
 29     28 - 413    0.0023  322    2    60
 29    488 - 885    0.0016  355    0    60
 30     28 - 731    0.0014  589    0    60
 31     26 - 632    0.0016  520    0    60
```

Ionospheric processing & Quality control:

FREE station

PRN	records	mu0	obs.	slip	poli.
1	0 - 362	0.0010	356	0	60
1	613 - 912	0.0013	274	0	60
2	32 - 628	0.0011	534	0	60
3	56 - 716	0.0014	594	0	60
4	0 - 392	0.0011	346	0	60
4	510 - 793	0.0016	277	0	60
4	926 - 1059	0.0033	125	0	44
5	49 - 756	0.0014	655	0	60
6	43 - 731	0.0015	650	0	60
7	0 - 33	0.0078	33	0	11
7	161 - 613	0.0016	442	0	60
7	728 - 1082	0.0022	338	0	60
8	43 - 707	0.0011	610	0	60
9	54 - 733	0.0014	600	0	60
10	52 - 600	0.0014	494	0	60
10	739 - 950	0.0018	209	0	60
13	49 - 754	0.0015	641	0	60
16	0 - 391	0.0014	361	0	60
16	506 - 822	0.0013	281	0	60
17	329 - 930	0.0011	546	0	60
18	0 - 543	0.0010	509	0	60
18	653 - 804	0.0050	150	0	50
19	33 - 654	0.0011	564	0	60
21	99 - 194	0.0027	94	0	31
21	378 - 970	0.0010	536	0	60
22	121 - 177	0.0018	55	0	18
22	365 - 938	0.0014	523	0	60
24	51 - 488	0.0018	393	0	60
24	606 - 1012	0.0017	400	0	60
25	0 - 28	0.0041	28	0	9
25	151 - 637	0.0013	424	0	60
25	764 - 1066	0.0018	297	0	60
26	53 - 682	0.0016	585	0	60
29	54 - 458	0.0022	377	0	60
29	577 - 1007	0.0015	416	0	60
30	52 - 747	0.0014	626	0	60
31	296 - 905	0.0015	563	0	60

Options of the solution:

 Estimated ionospheric corrections (L4)
 Maximum degree of ionospheric polynomials: 60
 Maximum gap in ionospheric investigations: 600 s
 Standard tropospheric corrections (Goad)
 Degree of Lagrange orbit interpolation: 17
 Minimum satellite elevation angle: 15.
 Minimum number of continuous intervals: 3

Summary of baseline estimation:

 BASE station: c:\retrogps\data\GRAZ0460.000
 FREE station: c:\retrogps\data\WTZR0460.000

first epoch: 2000 2 15 0 0 0 634608000

last epoch: 2000 2 15 23 59 30 634694370

Used satellites:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 13 16 17 18 19 21 22 24 25 26 29 30 31

Number of iterations: 4

Degrees of freedom: 62357

Deleted short intervals: 533

Deleted outliers: 83

Corrected cycle sleeps: 2

Weighted norm of residuals: 0.974904

Std. of unit weight: 0.003954

X	Y	Z	
4194423.9211	1162702.6106	4647245.3393	BASE Station fixed coordinates
4075580.6496	931853.7173	4801568.0633	FREE Station approximate coordinates
0.0332	-0.0498	-0.0184	corrections
4075580.6828	931853.6675	4801568.0449	estimated coordinates
0.0023	0.0032	0.0015	standard deviations

Latitude	Longitude	Height	(WGS-84)
47- 4- 1.66443	15-29-36.52382	538.2891	BASE station
49- 8-39.11105	12-52-44.07023	666.0229	FREE station approximate
49- 8-39.11014	12-52-44.06747	666.0229	FREE station estimated

Slant baseline length:

302043.7681	approximate
0.0156	correction
302043.7837	estimated
0.0023	standard deviation

X	Y	Z	
-118843.2383	-230848.9431	154322.7056	Baseline components
0.0023	0.0032	0.0015	FREE - BASE standard deviations
5.337056E-06			Variance
-2.354493E-06	1.033528E-05		covariance
8.585915E-07	6.286108E-07	2.144562E-06	matrix

4.

S U M M A R Y O F R E S U L T S

BASE station: c:\retrogps\data\G2403030.060
 FREE station: c:\retrogps\data\G3003030.060
 ORBIT DATA : c:\retrogps\data\IGR13991.SP3

Options of the solution:

 No ionospheric corrections
 Standard tropospheric corrections (Goad)
 Degree of Lagrange orbit interpolation: 17
 Minimum satellite elevation angle: 15.
 Minimum number of continuous intervals: 3

BASE station:

MTA GGKI			OBSERVER / AGENCY
G240			MARKER NAME
G240			MARKER NUMBER
459849	LEICA GX1230	2.12	REC # / TYPE / VERS
05290182	UNKNOWN		ANT # / TYPE
4123046.8151	1227804.7734	4693472.6279	APPROX POSITION XYZ
0.4050	0.0000	0.0000	ANTENNA: DELTA H/E/N

first epoch: 2006 10 30 12 12 0 846245520
 last epoch: 2006 10 31 4 30 0 846304200
 number of epoch: 1957

PRN	DATA	L1	L2
1	779	779	779
2	675	675	675
3	694	694	694
4	610	610	610
5	267	267	267
6	611	611	611
7	770	770	770
8	321	321	321
9	41	41	41
10	536	536	536
11	712	712	712
12	0	0	0
13	654	654	654
14	613	613	613
15	0	0	0
16	871	871	871
17	422	422	422
18	572	572	572
19	676	676	676
20	767	767	767
21	699	699	699
22	636	636	636
23	723	723	723
24	662	662	662
25	928	928	928
26	93	93	93
27	448	448	448

ORBIT DATA:

```
-----
first epoch: 2006 10 30   0   0   0  846201600
last  epoch: 2006 10 31  23 45   0  846373500
```

No common observations for Satellite: 15

Options of the solution:

```
-----
No ionospheric corrections
Standard tropospheric corrections (Goad)
Degree of Lagrange orbit interpolation:      17
Minimum satellite elevation angle:          15.
Minimum number of continuous intervals:      3
```

Summary of baseline estimation:

```
-----
BASE  station: c:\retrogps\data\G2403030.060
FREE  station: c:\retrogps\data\G3003030.060
```

```
first epoch: 2006 10 30  12 12   0  846245520
last  epoch: 2006 10 31   4 30   0  846304200
```

Used satellites:

```
1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 13 14 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 27
28 29 30 31
```

```
Number of iterations:      4
Degrees of freedom:        64745
Deleted short intervals:    674
Deleted outliers:          102
Corrected cycle sleeps:     2
Weighted norm of residuals: 11.535961
Std. of unit weight:       0.013348
```

X	Y	Z	
4123046.8151	1227804.7734	4693472.6279	BASE Station fixed coordinates
4123045.4466	1227804.3954	4693473.8251	FREE Station approximate coordinates
0.0592	0.0001	0.0394	corrections
4123045.5058	1227804.3955	4693473.8645	estimated coordinates
0.0106	0.0133	0.0067	standard deviations

Latitude	Longitude	Height	(WGS-84)
47-41- 1.13187	16-34-58.94100	276.6497	BASE station
47-41- 1.19195	16-34-58.94236	276.5793	FREE station approximate
47-41- 1.19145	16-34-58.94155	276.6466	FREE station estimated

Slant baseline length:

	1.8571	approximate		
	-0.0170	correction		
	1.8401	estimated		
	0.0073	standard deviation		

	X	Y	Z	

	-1.3093	-0.3779	1.2366	Baseline components
	0.0105	0.0132	0.0066	FREE - BASE
				standard deviations
	1.105750E-04			Variance
	-4.881124E-05	1.750543E-04		covariance
	1.496799E-05	3.254369E-06	4.384738E-05	matrix

III.

Melléklet

A GPS-NET program egy alkalmazása

Adatfájl:

```

0 4446 4191876.1649 1407166.6222 4581622.9515
0 2052 4193100.0468 1406798.1248 4580640.2760
0 4366 4191552.6326 1405579.2092 4582330.7147
0 4371 4192221.6459 1404950.9203 4581965.3193

2 0.0022 15481 OFALU_00t_11
  4366 2 2052 3 1547.4070 1218.9141 -1690.4445 0 0 1 0.0
0.1127327705E-01
0.3689722903E-02 0.1623032049E-02
0.1170798054E-01 0.3980913651E-02 0.1351238003E-01

2 0.0015 15056 OFALU_00t_11
  4366 2 4371 4 669.0114 -628.2906 -365.3983 0 0 1 0.0
0.1160110087E-01
0.3766938063E-02 0.1643255194E-02
0.1208200549E-01 0.4074226283E-02 0.1400344023E-01

2 0.0021 14950 OFALU_00t_11
  4371 4 2052 2 878.3956 1847.2047 -1325.0463 0 0 1 0.0
0.1177911866E-01
0.3831170643E-02 0.1668560605E-02
0.1226509869E-01 0.4140064514E-02 0.1420148281E-01

2 0.0020 14901 OFALU_00t_11
  4446 5 2052 2 1223.8778 -368.4982 -982.6771 0 0 1 0.0
0.1178105445E-01
0.3846128546E-02 0.1679650972E-02
0.1226956607E-01 0.4157349651E-02 0.1421290581E-01

2 0.0017 15013 OFALU_00t_11
  4446 5 4366 3 -323.5293 -1587.4123 707.7674 0 0 1 0.0
0.1160878094E-01
0.3779022811E-02 0.1651644768E-02
0.1208893752E-01 0.4087227359E-02 0.1401234025E-01

2 0.0018 15278 OFALU_00t_11
  4446 5 4371 4 345.4822 -2215.7028 342.3692 0 0 1 0.0
0.1118271861E-01
0.3609591330E-02 0.1571846460E-02
0.1160946163E-01 0.3876905498E-02 0.1342802472E-01

2 0.0014 15481 OFALU_00t_13
  4366 2 2052 3 1547.4100 1218.9152 -1690.4467 0 1 0 1.0
0.9998037892E-01
0.3272290246E-01 0.1439438820E-01
0.1038341400E+00 0.3530500738E-01 0.1198367161E+00

2 0.0011 15056 OFALU_00t_13
  4366 3 4371 4 669.0101 -628.2913 -365.4011 0 0 0 1.0
0.1028881651E+00
0.3340796311E-01 0.1457389657E-01
0.1071515932E+00 0.3613282067E-01 0.1241920707E+00

```

```

2  0.0014 14950 OFALU_00t_13
    4371 4  2052 2   878.3997  1847.2065 -1325.0459  0 0 0 1.0
    0.1044667888E+00
    0.3397756391E-01 0.1479830189E-01
    0.1087751921E+00 0.3671665047E-01 0.1259482187E+00

2  0.0014 14901 OFALU_00t_13
    4446 5  2052 2  1223.8823  -368.4975  -982.6744  0 0 0 1.0
    0.1044839829E+00
    0.3411022112E-01 0.1489665656E-01
    0.1088148407E+00 0.3686994540E-01 0.1260495620E+00

2  0.0012 15013 OFALU_00t_13
    4446 5  4366 5  -323.5276 -1587.4128  707.7724  0 2 0 1.0
    0.1029563251E+00
    0.3351514498E-01 0.1464830069E-01
    0.1072131257E+00 0.3624812824E-01 0.1242710678E+00

2  0.0011 15278 OFALU_00t_13
    4446 5  4371 4  345.4828 -2215.7040  342.3716  0 3 0 1.0
    0.9918108918E-01
    0.3201397559E-01 0.1394121749E-01
    0.1029649548E+00 0.3438463075E-01 0.1190939922E+00

```

Eredményfájl:

Input data file: ofa00t.dat
 Results output file: ofa00t.out
 Additional results: ofa00t.arf

SESSION: OFALU_00t_11
 Stations = 2 Std of unit weight = 0.0022 Degrees of freedom = 15481

vector		dx	dy misclosure	dz	phase-c. bias		scale bias	rot. error std(s)
fixed rec/ant	free ide.				fixed	free		
4366 2	2052 3	1547.4070 -0.0072	1218.9141 -0.0015	-1690.4445 -0.0058	0	0	1	0.0

SESSION: OFALU_00t_11
 Stations = 2 Std of unit weight = 0.0015 Degrees of freedom = 15056

vector		dx	dy misclosure	dz	phase-c. bias		scale bias	rot. error std(s)
fixed rec/ant	free ide.				fixed	free		
4366 2	4371 4	669.0114 -0.0019	-628.2906 -0.0017	-365.3983 -0.0029	0	0	1	0.0

SESSION: OFALU_00t_11
 Stations = 2 Std of unit weight = 0.0021 Degrees of freedom = 14950

vector		dx	dy misclosure	dz	phase-c. bias		scale bias	rot. error std(s)
fixed rec/ant	free ide.				fixed	free		
4371 4	2052 2	878.3956 -0.0053	1847.2047 0.0002	-1325.0463 -0.0030	0	0	1	0.0

SESSION: OFALU_00t_11

Stations = 2		Std of unit weight = 0.0020			Degrees of freedom = 14901			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4446	2052	1223.8778	-368.4982	-982.6771	0	0	1	0.0
5	2	-0.0041	-0.0008	-0.0016				
SESSION: OFALU_00t_11								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0017			Degrees of freedom = 15013			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4446	4366	-323.5293	-1587.4123	707.7674	0	0	1	0.0
5	3	0.0030	0.0007	0.0042				
SESSION: OFALU_00t_11								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0018			Degrees of freedom = 15278			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4446	4371	345.4822	-2215.7028	342.3692	0	0	1	0.0
5	4	0.0012	-0.0009	0.0014				
SESSION: OFALU_00t_13								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0014			Degrees of freedom = 15481			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4366	2052	1547.4100	1218.9152	-1690.4467	0	1	0	1.0
2	3	-0.0042	-0.0004	-0.0080				
SESSION: OFALU_00t_13								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0011			Degrees of freedom = 15056			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4366	4371	669.0101	-628.2913	-365.4011	0	0	0	1.0
3	4	-0.0032	-0.0024	-0.0057				
SESSION: OFALU_00t_13								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0014			Degrees of freedom = 14950			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4371	2052	878.3997	1847.2065	-1325.0459	0	0	0	1.0
4	2	-0.0012	0.0020	-0.0026				
SESSION: OFALU_00t_13								
Stations = 2		Std of unit weight = 0.0014			Degrees of freedom = 14901			

vector					phase-c.		scale	rot.
fixed	free	dx	dy	dz	bias	bias	bias	error
rec/ant	ide.		misclosure		fixed	free		std(s)
4446	2052	1223.8823	-368.4975	-982.6744	0	0	0	1.0
5	2	0.0004	-0.0001	0.0011				

SESSION: OFALU_00t_13

Stations = 2 Std of unit weight = 0.0012 Degrees of freedom = 15013

vector		dx	dy	dz	phase-c.		scale	rot.
fixed	free				bias	bias		
rec/ant	ide.	misclosure			fixed	free		error
								std(s)
4446	4366	-323.5276	-1587.4128	707.7724	0	2	0	1.0
5	5	0.0047	0.0002	0.0092				

SESSION: OFALU_00t_13

Stations = 2 Std of unit weight = 0.0011 Degrees of freedom = 15278

vector		dx	dy misclosure	dz	phase-c. bias		scale bias	rot. error std(s)
fixed rec/ant	free ide.				fixed	free		
4446	4371	345.4828	-2215.7040	342.3716	0	3	0	1.0
5	4	0.0018	-0.0021	0.0038				

Summary of results

SESSION: OFALU_00t_11 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias
fixed	free				
4366	2052	1547.4070	1218.9141	-1690.4445	
scale bias		0.0016	0.0012	-0.0017	1
residual		0.0000	0.0000	-0.0000	
		1547.4086	1218.9153	-1690.4463	
residual std [m] tau outlier					
0.0000		0.0001	0.079		
0.0000		0.0000	0.074		
-0.0000		0.0001	0.226		

SESSION: OFALU_00t_11 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias
fixed	free				
4366	4371	669.0114	-628.2906	-365.3983	
scale bias		0.0007	-0.0006	-0.0004	1
residual		-0.0000	0.0000	0.0000	
		669.0121	-628.2912	-365.3986	
residual std [m] tau outlier					
-0.0000		0.0001	0.137		
0.0000		0.0001	0.440		
0.0000		0.0001	0.243		

SESSION: OFALU_00t_11 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias
fixed	free				
4371	2052	878.3956	1847.2047	-1325.0463	
scale bias		0.0009	0.0019	-0.0013	1
residual		0.0000	-0.0000	0.0000	
		878.3965	1847.2066	-1325.0476	

residual	std [m]	tau	outlier
0.0000	0.0001	0.212	
-0.0000	0.0001	0.362	
0.0000	0.0001	0.219	

SESSION: OFALU_00t_l1 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias no
fixed	free				
4446	2052	1223.8778	-368.4982	-982.6771	
scale bias		0.0012	-0.0004	-0.0010	1
residual		-0.0000	0.0000	0.0000	
		1223.8790	-368.4985	-982.6781	

residual	std [m]	tau	outlier
-0.0000	0.0001	0.135	
0.0000	0.0001	0.584	
0.0000	0.0001	0.023	

SESSION: OFALU_00t_l1 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias no
fixed	free				
4446	4366	-323.5293	-1587.4123	707.7674	
scale bias		-0.0003	-0.0016	0.0007	1
residual		0.0001	0.0000	0.0000	
		-323.5296	-1587.4139	707.7682	

residual	std [m]	tau	outlier
0.0001	0.0001	0.537	
0.0000	0.0001	0.518	
0.0000	0.0001	0.241	

SESSION: OFALU_00t_l1 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias no
fixed	free				
4446	4371	345.4822	-2215.7028	342.3692	
scale bias		0.0004	-0.0023	0.0003	1
residual		-0.0000	-0.0001	-0.0000	
		345.4825	-2215.7051	342.3695	

residual	std [m]	tau	outlier
-0.0000	0.0001	0.363	
-0.0001	0.0000	1.080	
-0.0000	0.0001	0.206	

SESSION: OFALU_00t_l3 Stations = 2

vector		dx	dy	dz	bias no
fixed	free				
4366	2052	1547.4100	1218.9152	-1690.4467	
phase-c. bias		-0.0014	0.0001	0.0004	1
rotation term		0.0000	-0.0000	-0.0000	
residual		0.0000	0.0000	0.0000	
		1547.4086	1218.9153	-1690.4463	

residual	std [m]	tau	outlier
0.0000	0.0000	0.000	
0.0000	0.0000	0.000	
0.0000	0.0000	0.000	
rotation	std [s]	tau	outlier
-0.0000	0.0000	0.000	
-0.0000	0.0000	0.000	
-0.0000	0.0000	0.000	

SESSION: OFALU_00t_13 Stations = 2

vector					bias
fixed	free	dx	dy	dz	no
4366	4371	669.0101	-628.2913	-365.4011	
rotation	term	0.0012	0.0001	-0.0004	
residual		0.0007	0.0000	0.0003	
		669.0121	-628.2912	-365.3986	

residual	std [m]	tau	outlier
0.0007	0.0002	3.350	?!
0.0000	0.0000	0.275	
0.0003	0.0001	2.893	?!
rotation	std [s]	tau	outlier
-0.2801	1.1621	0.241	
-0.4010	1.2143	0.330	
0.1767	1.4667	0.120	

SESSION: OFALU_00t_13 Stations = 2

vector					bias
fixed	free	dx	dy	dz	no
4371	2052	878.3997	1847.2065	-1325.0459	
rotation	term	-0.0030	0.0002	-0.0027	
residual		-0.0001	-0.0001	0.0000	
		878.3965	1847.2066	-1325.0476	

residual	std [m]	tau	outlier
-0.0001	0.0001	2.127	?!
-0.0001	0.0001	2.271	?!
0.0000	0.0000	0.979	
rotation	std [s]	tau	outlier
-0.1044	1.1586	0.090	
0.1930	0.8097	0.238	
0.1998	1.0429	0.192	

SESSION: OFALU_00t_13 Stations = 2

vector					bias
fixed	free	dx	dy	dz	no
4446	2052	1223.8823	-368.4975	-982.6744	
rotation	term	-0.0033	-0.0010	0.0010	
residual		-0.0000	-0.0000	-0.0000	
		1223.8790	-368.4985	-982.6781	

residual	std	[m]	tau	outlier
-0.0000	0.0001		0.148	
-0.0000	0.0000		0.514	
-0.0000	0.0001		0.422	
rotation	std	[s]	tau	outlier
0.0263	0.8092		0.033	
0.6098	1.2057		0.506	
-0.1959	0.9849		0.199	

SESSION: OFALU_00t_13 Stations = 2

vector					bias
fixed	free	dx	dy	dz	no
4446	4366	-323.5276	-1587.4128	707.7724	
phase-c.	bias	-0.0020	-0.0011	-0.0042	2
rotation	term	-0.0000	-0.0000	-0.0000	
residual		0.0000	0.0000	0.0000	
		-323.5296	-1587.4139	707.7682	

residual	std	[m]	tau	outlier
0.0000	0.0000		1.035	
0.0000	0.0000		1.403	
0.0000	0.0000		0.447	
rotation	std	[s]	tau	outlier
0.0000	0.0000		0.007	
-0.0000	0.0000		0.000	
-0.0000	0.0000		0.000	

SESSION: OFALU_00t_13 Stations = 2

vector					bias
fixed	free	dx	dy	dz	no
4446	4371	345.4828	-2215.7040	342.3716	
phase-c.	bias	-0.0003	-0.0011	-0.0021	3
rotation	term	-0.0000	-0.0000	-0.0000	
residual		0.0000	0.0000	-0.0000	
		345.4825	-2215.7051	342.3695	

residual	std	[m]	tau	outlier
0.0000	0.0000		0.000	
0.0000	0.0000		2.826	
-0.0000	0.0000		0.000	
rotation	std	[s]	tau	outlier
0.0000	0.0000		0.000	
0.0000	0.0000		0.000	
-0.0000	0.0000		0.000	

Statistical results:	degrees of freedom	vPv norm	std. of unit weight
vector adjustment :	181358	4.7440e-01	0.00162
network adjustment :	17	5.1496e-05	0.00174

tau stat. value at 95 p.c. probability level : 1.649

chi-square value at 95 p.c. probability level : 27.590

chi-square test on standard deviations:

19.686 < 27.590 the standard deviations are equal

Station no.	X dx	Y dy	Z dz	Latitude dn (m)	Longitude de (m)	Height du
4446	4191876.1649	1407166.6222	4581622.9515	46-12-34.24440	18-33-22.80407	317.0501
min.	-0.0003	0.0013	-0.0010	-0.0008	0.0014	-0.0007
Std	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
2052	4193100.0468	1406798.1248	4580640.2760	46-11-47.83659	18-32-48.34776	329.6545
min.	-0.0032	0.0002	-0.0036	-0.0003	0.0012	-0.0047
Std	0.0001	0.0000	0.0001	0.0001	0.0000	0.0001
4366	4191552.6326	1405579.2092	4582330.7147	46-13-09.08197	18-32-17.39548	266.3676
min.	0.0024	0.0004	0.0039	0.0010	-0.0004	0.0045
Std	0.0001	0.0000	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
4371	4192221.6459	1404950.9203	4581965.3193	46-12-50.73208	18-31-39.68264	303.2928
min.	0.0012	-0.0019	0.0007	0.0001	-0.0022	0.0009
Std	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001

Phase center offsets:

(absolute values are estimated)

number	dn	std.	de	std.	du	std.
1	0.0012	0.0040	0.0006	0.0151	-0.0006	0.0157
2	-0.0013	0.0099	-0.0004	0.0076	-0.0046	0.0125
3	-0.0010	0.0170	-0.0010	0.0039	-0.0019	0.0174

Scale corrections

number	mm/km	std.
1	1.018090	0.041513

Kiegészítő eredményfájl:

Additional Results:

slant distances, coordinate changes and variances:

0	4366	2052	2595.7343	0.00011
0	4366	4371	987.8477	0.00005
0	4371	2052	2437.1097	0.00010

0	4446	2052	1612.2429	0.00007
0	4446	4366	1767.9055	0.00008
0	4446	4371	2268.4630	0.00010
0	4366	2052	2595.7343	0.00011
0	4366	4371	987.8477	0.00005
0	4371	2052	2437.1097	0.00010
0	4446	2052	1612.2429	0.00007
0	4446	4366	1767.9055	0.00008
0	4446	4371	2268.4630	0.00010

no.	dx	dy	dz	dn	de	du	
0	4446	-0.0003	0.0013	-0.0010	-0.0008	0.0014	-0.0007