

ÉVFOLYAM  
*Volume*

**XVIII/2**

**2015**

---

**G E O M A T I K A I  
K Ö Z L E M É N Y E K**

*Publications in Geomatics*

**FŐSZERKESZTŐ**  
*Editor in Chief*

**PAPP G**

**TANÁCSADÓ TESTÜLET**  
*Advisory board*

**ÁDÁM J** (*elnök/chair*)  
**BIRÓ P**  
**BOZÓ L**  
**MÁRTON P**

HU ISSN 1419-6492



---

*MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZET  
SOPRON*

# **Geomatikai Közlemények**

*Publications in Geomatics*

kiadja az

**MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZETE**

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.

tel.: 99 / 508-340 fax.: 99 / 508-355

e-mail: [geomatika@ggki.hu](mailto:geomatika@ggki.hu)

web: [www.geomatika.ggki.hu](http://www.geomatika.ggki.hu)

web programozó: Lovranits Tamás

felelős kiadó:

***Szarka László Csaba***  
*főigazgató*

főszerkesztő:

***Papp Gábor***

angol nyelvi szerkesztő:

***Eperné Pápai Ildikó***

technikai szerkesztő:

***Bischof Annamária***

készült a

**LŐVÉR PRINT Kft.** nyomdájában

9400 Sopron, Ady Endre u. 5.

tel.: 99 / 329-977

megjelent 150 példányban

Sopron, 2015

HU ISSN 1419-6492

**GEOMATIKAI  
KÖZLEMÉNYEK  
XVIII/2.**

"Minden nemzet a maga  
nyelvén lett tudós,  
de idegenen sohasem."

(Bessenyei György)

# ÁLTALÁNOS INFORMÁCIÓK ÉS ÚTMUTATÓ

A Geomatikai Közlemények 1998 óta rendszeresen, általában évenként egy alkalommal megjelenő folyóirat. A kiadvány célja, hogy elsősorban magyar és esetenként angol nyelvű fórumot biztosítson a hazai ill. külföldi kutatóknak és szakembereknek, akik a geodézia, fotogrammetria, térinformatika, fizikai geodézia, geodinamika, tágabb értelemben véve a geomatika szakterületén elért tudományos eredményeiket szeretnék közzétenni. A kiadványban megjelenő cikkek és tanulmányok a mai normáknak megfelelő lektorálási folyamaton mennek keresztül, azaz mielőtt publikálásra kerülnek legalább kettő független bíráló véleményt alkot a közlésre benyújtott kéziratról. A bírálók nevét alaphelyzetben csak a szerkesztőbizottság ismeri, de a bírálók kérhetik anonimitásuk felfüggesztését. A bírálatok alapján a szerkesztőbizottság eldönti, hogy az adott kézirat megfelel-e a Geomatikai Közlemények formai és tartalmi követelmény-rendszerének, illetve, hogy az esetlegesen felmerülő hibák és hiányosságok kijavíthatók- és pótolhatók-e a kézirat kisebb-nagyobb átdolgozásával.

A Geomatikai Közlemények szerkesztését – amelyet 2011-től már egy, az Interneten keresztül elérhető és működtethető web felület is támogat ([www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek](http://www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek)) ©Lovranits Tamás és Papp Gábor – társadalmi munkában végző szerkesztőség nagy hangsúlyt fektet a lehető leggyorsabb minőségi munkára. Ez mind a szerzőktől, mind a bírálóktól erőfeszítéseket és fegyelmet kíván, amit a szerkesztőség előre is tisztelettel megköszön. Ennek biztosításához javasoljuk áttanulmányozni a következő anyagokat:

Geomatikai\_Közlemények\_instrukciók\_szerzőknek.doc,  
Geomatikai\_Közlemények\_instrukciók\_bírálóknak.pdf,

amelyek a már fent megadott címre belépve letölthetők. A regisztrált felhasználók ugyanezen a címen keresztül végezhetik el a rendszer által koordinált aktuális feladataikat, akár szerzői, akár bírálói szerepkörben. Az új felhasználók ugyanitt regisztrálhatnak, felhasználói név és e-mail cím megadásával.

A feltöltött kéziratokat a szerkesztőség előbírálja, elsősorban az instrukciókban megfogalmazott formai szempontok szerint. Ha a kézirat formailag kielégítőnek bizonyul, akkor elindul a bírálati folyamat, amely általában több ciklust is képez, és egészen addig tart, ameddig a bírálók ill. a szerkesztőség ezt tartalmi-formai indokok miatt szükségesnek tartják. A bírálati fázisokról és az aktuális teendőkről mind a szerzők mind a bírálók automatikus üzenetekben értesülnek.

A Geomatikai Közleményeket az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete adja ki. A kiadás anyagi háttérét egyrészt a két évente Sopronban megrendezésre kerülő Geomatika Szeminárium, másrészt különböző pályázatok és tudományos szervezetek (pl. Soproni Tudós Társaság) támogatásai biztosítják.

A Geomatikai Közlemények jelen kötetének felelős szerkesztői:

Bányai László, Benedek Judit, Kalmár János, Papp Gábor, Szűcs Eszter, Újvári Gábor, Závoti József.

## A KÖTETBEN MEGJELENT CIKKEK BÍRÁLÓI

Bácsatyai László  
Bányai László  
Bartha Gábor  
Battha László  
Benedek Judit  
Brolly Gábor  
Dobróka Mihály  
Gribovszki Zoltán  
Jancsó Tamás  
Kis Márta  
Papp Gábor  
Siki Zoltán  
Szűcs Eszter  
Tóth Gyula  
Völgyesi Lajos  
Závoti József

# TARTALOMJEGYZÉK

## CONTENTS

<b>Busics György</b> .....	7
A kiegyenlítő számítás alkalmazásának szükségességéről az alappontsűrítésben <i>About the necessity of the application of adjustment in control point densification</i>	
<b>Somogyi Árpád, Molnár Bence</b> .....	15
Pontfelhő illesztési módszerek összehasonlítása <i>Analysis of point cloud registration methods</i>	
<b>Papp Erik</b> .....	23
Kvaternió alapú geodéziai dátumtranszformáció iterációval <i>Quaternion-based geodetic datum transformation by iteration</i>	
<b>Mentes Gyula, Bán Dóra, Eperné Pápai Ildikó</b> .....	35
A Föld közel napos periódusú nutációjának kimutatása a sopronbánfalvi extenzométeres adatok alapján – Előzetes eredmények <i>Detection of the near-diurnal period of the nutation of the Earth on the basis of the Sopronbánfalva extensometric data – Preliminary results</i>	
<b>Kiss Annamária, Földvály Lóránt</b> .....	43
Éves hidrológiai változások meghatározása GRACE geopotenciális modellek segítségével <i>Annual hydrologic variations from GRACE gravity models</i>	
<b>Kemény Márton, Földvály Lóránt</b> .....	53
Számítástechnikai fejlesztés műholdas gravimetriai adatok feldolgozására <i>Computational development for large satellite gravimetric datasets</i>	
<b>Tóth Gyula, Földvály Lóránt</b> .....	63
Új magyarországi geoidmeghatározás az ötödik generációs GOCE nehézségi erőtér modellek segítségével <i>Updated Hungarian gravity field solution based on fifth-generation GOCE gravity field models</i>	
<b>Völgyesi Lajos, Tóth Gyula</b> .....	75
A függővonal-elhajlás meghatározásának lehetőségei <i>Possibilities of determination of the vertical deflections</i>	
<b>Dobosi Gábor, Harangi Szabolcs</b> .....	85
Hungarian National Report on IAVCEI 2011-2014 – An addendum	
<b>Pethő Gábor</b> .....	87
Activity of the Department of Geophysics, University of Miskolc – IAGA Division 1. Internal magnetic fields	

# A KIEGYENLÍTŐ SZÁMÍTÁS ALKALMAZÁSÁNAK SZÜKSÉGESSÉGÉRŐL AZ ALAPPONTSŰRÍTÉSBN

Busics György\*



*About the necessity of the application of adjustment in control point densification – Although all conditions are given to use adjustment theory for the processing of surveying control points, unfortunately, in practice this discipline does not work. In this paper it is outlined, that the adjustment is the state-of-the-art solution method for computing the levelling lines, for densification of horizontal surveying control points and also for finalizing the coordinates coming from static or RTK GNSS measurements. The professional regulation should also take into account this trend.*

**Keywords:** adjustment, levelling network, horizontal surveying network, GNSS measurement

---

*Bár elvileg minden feltétel adott ahhoz, hogy az alappont sűrítést szolgáló méréseink feldolgozását a kiegyenlítő számítás alkalmazásával oldjuk meg, ez a gyakorlatban még sincs így. Arra szeretnék rámutatni, hogy mind a szintezéssel történő pontpótlás, mind az irány- és távmérésen alapuló felmérési alappont sűrítés, mind a statikus vagy RTK pontmeghatározás esetén ez lenne a korszerű megoldás. A szakmai szabályozásnak is ezt az irányzatot kellene figyelembe vennie.*

**Kulcsszavak:** kiegyenlítés, szintezési hálózat, felmérési alappont hálózat, GNSS mérés

## 1 A téma időszerűsége

A geodéziai mérések legkisebb négyzetek elvén történő kiegyenlítését már Gauss (1777-1855) kidolgozta, de az csak lassan került át a gyakorlatba. Ennek legfőbb oka a korabeli számítástechnika elégtelensége volt. A szögfüggvény- és logaritmus táblázatokban való keresés, a mechanikus számológépek használata időigényes és embert próbáló volt. Gyökeres változást hozott a nagyszámítógépek, majd a személyi számítógépek megjelenése, amelyek mintegy társadalmasították, széles körűvé tették a gépi számítást a geodéziában is.

Az 1990-es évek elején Csepregi Szabolcs munkatársammal írt közös cikkeinkben erre kívántuk felhívni kollégáink figyelmét (Csepregi és Busics 1991, Busics és Csepregi 1992a, 1992b). Napjainkban mégis azt tapasztaljuk, hogy nem használjuk ki eléggé a számítástechnika adta lehetőségeket. Különösen feltűnő ez a GNSS technika esetében, amelyben maga a mérés és a vektorfeldolgozás automatizált ugyan, de a további feldolgozás kevésbé. Írásomban erre az ellentmondásra szeretném felhívni a figyelmet, és azt indítványozom, hogy fölös mérések esetén a kiegyenlítéssel kapott végeredményt követeljük meg, mert az a korszerű megoldás.

A kérdés időszerűségét a szakmai szabályozás megújítása is indokolja. Az alappontsűrítést szabályozó korábbi szakmai szabályzatokat (A3, A4, A5) 2010-től kezdődően magasabb szintű jogszabályok váltották fel. Általánosságban az állapítható meg, hogy a kiegyenlítést nem preferálják eléggé az új előírások, ezért gondolom, hogy érdemes ezt a témát előtérbe helyezni.

## 2 A felmérési alappontokról

Tisztázzuk először is, mi a cikk tárgya. Írásom az alappontsűrítésről szól, vagyis feltételezi, hogy létrejöttek az országos geodéziai alapponthálózatok, és azokon belül van szükség további alappontokra. Ilyenek a negyedrendű szintezési alappontok, a vízszintes felmérési alappontok (korábban: ötödrendű alappontok), valamint a GNSS-technikával létrehozott felmérési alappontok. Nem foglalkozom tehát az országos alappontok létrehozásával, pótlásával (ahol egyébként mindig is szerepe volt a kiegyenlítő számításnak), és nem érintem a részletmérést sem (amely egy külön cikk témája lehetne, tekintettel arra, hogy ma a GNSS részletmérés alappontsűrítés nélkül is végezhető).



A klasszikus technika szerint azért hozunk létre a részletes felmérést vagy kitűzést közvetlen szolgáló felmérési alappontokat, mert az országos hálózat nem megfelelő sűrűségű.

A felmérési alappontok is alappontok, így meg kell felelniük az alappontokkal szemben támasztott követelményeknek. Korábban 10 ilyen fontos kritériumot soroltam fel (Busics 2005), de témánk szempontjából most csak négy követelményt emelek ki az alapponttal kapcsolatban:

- 1) Az alappont állandósított legyen. A klasszikus felfogás szerint az alappont jövőbeni célokat is szolgál, ezért állandó módon, tartósan, a terepen is meg kell jelölni. Az állandósítás módját a jelenlegi szakmai leírások pontosan megadják. Vannak azonban esetek, amikor (különböző méltányolható okokból) nem állandósítjuk az alappontot. Ezt nevezük vesztett pontnak, mert a nyilvántartás, a későbbi felhasználás számára elveszik. Fontos azonban, hogy minden más szempontból a vesztett pontot is alappontként kell kezelni. Néhányan arra hivatkozva nem adnak le alappont-sűrítési munkarészeket, mert nincsenek állandósított pontjaik. Ez az érvelés nem fogadható el.
- 2) Az alappont fölös mérésekkel legyen meghatározott. Alappontot fölös mérés nélkül nem szabad meghatározni, többek között ez a követelmény különbözteti meg a részletponttól. Tilos létrehozni pl. egy magassági alappontot szárnyvonallal, vagy vízszintes alappontot egyetlen polárisként, vagy térbeli alappontot egyetlen vektorra alapozva. A kiegyenlítő számítás ennek a betartására is segítséget ad, mivel a fölös méréshányad megadásával ez a feltétel ellenőrizhető.
- 3) Az alappont feleljen meg az összes hibahatárnak. Klasszikusan a mérési eredményekre vonatkoznak a hibahatárok. Minden hibahatárral szabályozott értéknek az elfogadási küszöb alatt kell lennie. A kiegyenlítő számítás lehetőséget adna arra, hogy a végeredményre (az új pont magasságára, vízszintes koordinátáira vagy térbeli koordinátáira) is megadjunk küszöbértékeket. Ilyen küszöbértékek kidolgozására is szükség lenne.
- 4) Az alappont-meghatározás folyamata dokumentált legyen. A dokumentáltság itt azt jelenti, hogy rendelkezésre állnak az ún. nyers mérési adatok, és azokból a számítás újra elvégezhető, ellenőrizhető. Nem fogadható el tehát, ha csak a végeredményt látjuk, és a számítási folyamat nem rekonstruálható.

Fontos még kiemelni, hogy minden pontsűrítésnél hálózati szemléletre kell törekedni. Példákat említve: 1D-ben nem szintezési vonalakat mérünk csak, hanem szintezési szakaszokból felépülő szintezési hálózatot hozunk létre; 2D-ben nem sokszögvonalakat mérünk, hanem iránymérésen és távmérésen alapuló hálózatot, optimális számú fölös adatra törekedve; 3D-ben pedig nem egyetlen vektort, hanem térbeli vektorokból álló hálózatot építünk.

Mi az előnye annak, ha nemcsak a kitűzést és a mérést végezzük hálózati szemlélettel, hanem a számítást is, vagyis, ha kiegyenlítjük a hálózatot? Négy ilyen előnyt említhetünk:

- 1) A mai kor elvárásainak, lehetőségeinek megfelelően, automatizált lesz a megoldás.
- 2) Egyértelmű lesz a végeredmény, vagyis az eredmény nem függ a számító személy döntésétől és az új pontok számításának sorrendjétől – függ viszont az apriori középhibáktól, a súlyozástól (Csepregi 2000).
- 3) Pontossági mérőszámokat (középhibákat) kapunk a végeredményre vonatkozóan. (Megjegyzendő, hogy a középhibák csak akkor lesznek valós értékek, ha megfelelő számú fölös mérésünk volt. Továbbá a középhibák az adott pontok kerethibáitól is függnek!)
- 4) Minden egyes mérési eredmény felhasználásra kerül, azaz nemcsak ellenőrzésre szolgál.

Az utóbbi mondathoz szükségesnek tartom megjegyezni, hogy a szakmai szabályozásban „ellenőrzés” címen előfordul további kiegészítő mérések, ún. ellenőrző mérések előírása a felmérő számára. Véleményem szerint, ha megfelelő számú fölös mérése volt a felmérőnek, és azokat mind bevonta a számításba, továbbá a hibahatárokat betartotta, akkor az ő részéről nincs szükség további „ellenőrzésre”. Éppen azért született meg a kiegyenlítő számítás elmélete, hogy a mérések közötti ellentmondásokat megszüntesse. Más kérdés, ha egy elkészült munka külső vizsgálatára kerülne sor, abban az esetben hogyan szabályozzuk ennek végrehajtását (kell-e például további terepi méréseket végezni, mit kell újramérni stb.).

### 3 Magassági alappontsűrítés szintezéssel

A magassági alappontsűrítés az országos szintezési hálózaton (nálunk az EOMA-n) belüli új negyedrendű magassági alappontok létesítését jelenti valamilyen helyi cél érdekében. Mérési módszerre a negyedrendű vonalszintezés, amikor is a szomszédos alappontok közötti magasságkülönbségeket mérjük meg oda-vissza irányban, optikai vagy digitális mérnöki szintezővel. A korábbi, szokásos számítási eljárás szerint az új pontokat két adott országos alappont között szintezési vonalba foglaltuk, számítottuk a magassági záróhibát, s azt a szakaszok hossza arányában elosztva képeztük az új pontok magasságát. Másik számítási lehetőség, hogy szintezési csomópontot alakítottunk ki (ahova legalább három szintezési vonal fut be), előbb a csomópont magasságát képeztük az előzetes értékekből, majd vonalba foglalva a többi új pont magasságát.

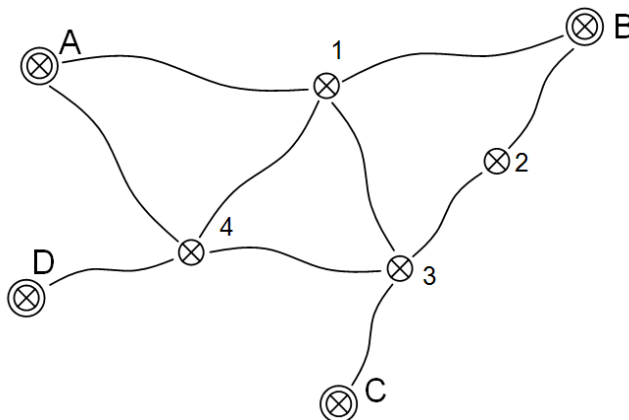
De miért is nem használunk hálózatkiegyenlítést (feltéve, hogy rendelkezünk megfelelő szoftverrel) erre a célra, hiszen ma már többnyire digitális szintezőkkal mérünk, a nyers adatok eleve digitális formában keletkeznek? Hálózatkiegyenlítés esetén egyértelmű lenne a végeredmény (nem függne attól, hogyan alakítunk ki fő- és mellékvonalakat), továbbá minden pont magasságának középhibáját is megkapnánk, ami a minősítés alapja lehetne (Gyenes és Kulcsár 2006).

Kiegyenlítés esetén nincs értelme szintezési vonalokról beszélni (1. ábra), noha természetesen ki lehet alakítani két adott pont közötti vonalat, ki lehet mutatni ennek magassági záróhibáját, de ez csak előzetes számításnak tekinthető, a záróhiba csak tájékoztató adatnak minősül. Ugyanilyen okból idejélmúlt felfogás, ha a korábban szokásos munkarészeket, például a vonal-összeállítás elkészítését írjuk elő akkor, amikor kiegyenlítéssel történik a számítás.

Egyetlen új pont magasságának számítása (két adott pont közé illetve) is végezhető kiegyenlítéssel, még ha ez esetben hálózatról nem beszélhetünk.

Felmerül még az a kérdés, mit tekintünk a kiegyenlítés bemenő adatainak: az oda-vissza mérés számtani közepét (ahogyan azt hagyományosan tekintjük), vagy külön az oda-mérés és külön a vissza-mérés magasságkülönbségét (figyelembe véve a súlyozást is)? Véleményem szerint ez utóbbi lenne a célszerű, mivel így minden egyes mérés javítását külön-külön látnánk.

Megjegyzendő még, hogy szintezésnél is van értelme vesztett pontot említeni, kitűzni. Lehetnek ugyanis túlságosan hosszú szintezési szakaszok, amelyeket praktikus okokból rövidíteni szükséges. Ilyenkor két állandósított szintezési pont közé beiktathatunk egy ideiglenes pontjelet: például megülepedett áteresztbe, kerítéslábazatba bevert Hilti-szeget, ami egy-két napig, amíg a mérés tart, mozdulatlanak tekinthető, de nem kap végleges pontszámot és nem kerül be a nyilvántartásba.



1. ábra. Szintezési vázlat. Nincsenek vonalak, csak a mért útvonalat és a magasságkülönbséget jelző szakaszok

#### 4 Felmérési alappontsűrítés irány- és távméréssel

Ezt a módszert a múltban rövidoldalú sokszögelésnek nevezték, illetve abban az esetben, ha csak iránymérést alkalmaztak, ötödrendű háromszögelésnek. Ma mérőállomással oldjuk meg a feladatot, törekedve a hálózati szemléletre, vagyis arra, hogy az új és adott pontokat megfelelő számú irányméréssel és távméréssel kapcsoljuk egybe egyetlen hálózatba (Busics és Csepregi 1992b). A számítás egyértelmű és korszerű módszere ez esetben is a vízszintes hálózat kiegyenlítése lenne. Nemcsak egyértelmű megoldást kapunk így (szemben az ún. pontonkénti számítással), hanem olyan alakzatok számítását is elvégezhetjük, amire hagyományos pontkapcsolásokkal nem lenne lehetőségünk (Busics és Csepregi 1992a). Tipikus példa az olyan sokszögvonala, amelynek majdnem minden pontjáról további adott vagy új pontokat tudunk mérni: a klasszikus sokszögvonala-számítással ezeket a méréseket nem tudjuk figyelembe venni, nincsenek hatással a végeredményre, csak ellenőrző adatként használhatjuk fel.

Vízszintes hálózat kiegyenlítésekor nincs értelme sokszögvonala-ról beszélni (ezért is lett a klasszikus sokszögpontra elnevezés helyett az ilyen pont neve felmérési alappont). A 2. ábrán szematikusan egy, a hallgatók által mért pákozdi felmérési hálózatot mutatok be. Természetesen kialakíthatunk különböző sokszögvonala-kat, és számíthatjuk ezen vonala-k vonalaz záróhiba-ját, de ezek előzetes számításoknak, tájékoztató adatoknak minősülnek. Korábbi szabályzataink a zárt idomok szög-záró hiba-jának vagy vonalaz záróhiba-jának számítását is előírták, de ezen számítások eredménye is csak tájékoztató jellegű, és nem tekinthető elfogadási feltételnek.

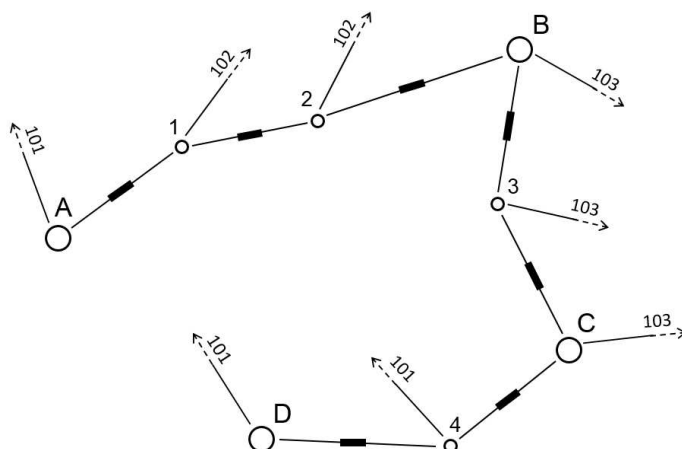
A vízszintes hálózat kiegyenlítésének végeredményét tekintve háromféle adat érdemes különös figyelmünkre, mivel ezekre ez idő szerint nem vonatkozik, vagy nem megfelelő a szabályozás:

- 1) A kiegyenlítés végén megkapjuk a kiinduló mérési eredmények, jelen esetben az irányértékek és a vetületi távolságok javításait. Ezek a múltban is hibahatárral szabályozott értékek voltak, nevezetesen: iránymérés esetén az irányeltérésre, távmérés esetén a távolságtérésre vonatkozik hibahatár. A hibahatárokat azonban a múltból örököltük (abból az időszakból, amikor például 6 másodperces és 20 másodperces leolvasóképeségű teodolitokat használtak), így a vonatkozó hibahatárok tágak, nincsenek összhangban a mai mérőállomásokkal elérhető pontossággal. Előfordulhat ezért, hogy durva hibával terhelt mérést is befogadunk, ami szigorúbb hibahatárnál fennakadna a szűrőn. A hibahatárok változtatásának szükségességére korábban Csepregi Szabolcs kollégám is figyelmeztetett (Csepregi 2000).
- 2) A kiegyenlítés eredményeként számítható a fölös mérés-hányad is. Ez fontos mérés-zám arra nézve, hogy valóban fölös adatokkal történt-e a meghatározás? Azonban jelenleg erre a mérés-zámra sem vonatkozik elfogadási küszöb-érték.
- 3) A kiegyenlítés végeredménye a kiegyenlített koordináták mellett azok középhiba-já is. Ez is lényeges minőségi mutatója a pontnak, de nem tudható, megfelelő-e az eredmény, mert erre sem találunk útmutatást a jelenlegi rendeletekben.

A vízszintes alappontoknál szükségesnek látok még két fogalmat tisztázni: a szabad álláspont, illetve a kisalappont mibenlétét.

A földi szabad álláspont fogalmán a tisztán belső irányokkal (vagyis az új pontra adott pontokra mért irányokkal) és távolságokkal meghatározott alappontot értjük. Állandósítás szempontjából többnyire vesztett pontra van szó, de ez most közömbös. A szabad álláspont elnevezés arra is utal, hogy a műszert szabadon, a felmérési célnak leginkább megfelelő helyen állítjuk fel. A számítás a mérőállomások beépített programjával többnyire a helyszínen végezzük, de ez természetesen utólag is történhet. Hangsúlyozni szükséges, hogy az ilyen vesztett pont esetében is az alapponttal szembeni általános követelményeknek meg kell felelni, azaz dokumentálni kell a mérési-számítási folyamatot.

A kisalappont elnevezés abból a korszakból származik, amikor a derékszögű koordinátamérés volt a fő részletmérési eljárás és a sokszögpontra közé – rendszerint vonalpontraként – további pontokat kellett beiktatni, hogy a továbbiakban innen lehessen újabb mérési vonala-kat indítani.



2. ábra. Vízszintes hálózat meghatározási vázlat. Nincsenek sokszögvonalak, csak mért irányok és távolságok

Napjainkban a kisalappont elnevezés sokaknál a vesztett pont szinonimája lett. A „kisalappont” elnevezés másoknál arra szolgál, hogy kibújjanak az alappontsűrítés munkarészeinek elkészítése alól, mondván, alappontot nem hoztunk létre, nincs leadandó munkarészünk.

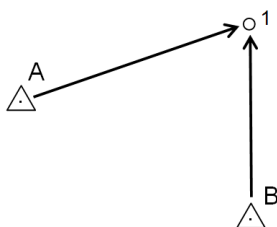
Csak azt tudom ismételni, hogy ha az országos, hivatalos alappontokon kívül a saját magunk által meghatározott pontokra támaszkodunk a részletmérésnél vagy kitűzésnél, akkor azoknak a létrehozását követhető módon dokumentálni kell, függetlenül az elnevezéstől. A mérésnek fölös adatokat kell tartalmaznia, a számításnak pedig a kiegyenlítő számításra kellene alapulnia.

## 5 GNSS technikán alapuló felmérési alappontsűrítés

Az 1990-es évek közepétől a gyors statikus GPS mérési módszer alapvetően megváltoztatta a felmérési alappontsűrítést. A GPS-technológia szakmai szabályozása azonban sokáig váratott magára; 2006-ban jelent meg erről ajánlás, majd 2010-ben rendelet. Időközben meghonosodott a hagyományosnak nevezett RTK-technológia, majd a hálózatos RTK. Felmerült a kérdés, lehet-e RTK-val alappontot meghatározni? Korábban már megadtam a magam választát erre a kérdésre (Busics 2005). Mivel jelenleg a hálózatos RTK használata vált széleskörűvé – sőt, szinte kizárólagossá – adódik a kérdés, hogy használható-e a hálózatos RTK az alappontsűrítésben is?

Itt is az alapponttal szembeni általános követelményekből érdemes kiindulni. Legfőképpen a fölös adat értelmezését kellene megadnunk erre az esetre.

A választ azzal kezdem, hogy ez idő szerint minden geodéziai GNSS pontmeghatározás relatív; vagyis minden, a geodéziai pontosságot megcélzó esetben térbeli vektor-összetevőket határozunk meg a GNSS-mérés során valamely referenciaponthoz képest. Ha alappontot mérünk, legalább két térbeli vektort kell meghatározni, lehetőleg különböző adott pontokkal (3. ábra).



3. ábra. A GNSS alappont-meghatározásnál nem elégedhetünk meg egyetlen vektor mérésével

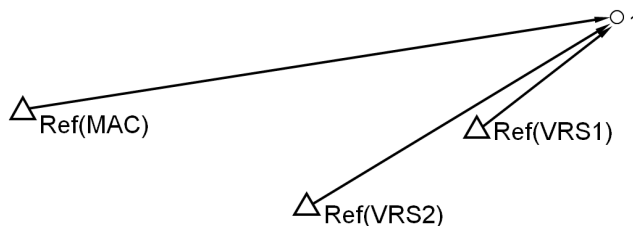
A hálózatos RTK-val nagyon rövid idő alatt (néhányszor tíz másodperces inicializálást követően) tudunk néhány cm-es pontosságú koordinátákat meghatározni a terepen, akár helyi rendszerben is. Egy mérés azonban csak egyetlen vektor meghatározását jelenti, akármilyen hosszú ideig is tart, vagyis egy térbeli polárisról van szó, ami nem tartalmaz fölös adatot. A mért pont alappontként történő kezeléséhez további vektor-mérések szükségesek.

Ezek a fölös adatok a hálózatos RTK technológiát kihasználva a következő módokon biztosíthatók:

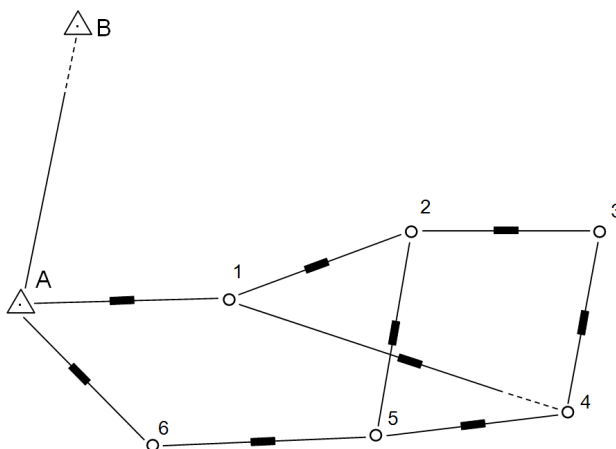
- 1) Ugyanolyan beállítási (konfigurációs) paraméterek mellett, de más időpontban és független felállással megismételjük a mérést. Vagyis kétszer állítjuk fel az antennát (természetesen kitámasztással, igazított libellát vagy dőlésérzékelőt használva) ugyanazon a ponton. A munkaterület nagyságától a pontok elhelyezkedésétől, a feladat céljától és a munkaszervezéstől függően ez a megoldás a gyakorlatban is működőképes lehet.
- 2) Ugyanabban a felállásban, de az előzőtől eltérő mérési paraméterek mellett ismételjük meg a mérést. Eltérő mérési paramétereket jelent például, ha a jelenlegi VRS, MAC és FKP koncepciókat (Busics és Horváth 2006) váltva használjuk. Ha a pontot előbb VRS-módszerrel, majd pedig MAC-módszerrel vagy FKP-módszerrel mérjük újra, s eredményül néhány cm-re azonos értékeket kapunk, megbízhatunk az eredményben. Eltérő beállítási paramétereket jelent az is, ha a VRS-nek egyszer 2 km-re eltolt referenciát eredményező változatát használjuk, azt követően pedig 4 km-re eltolt változatát. A Glonass-holdak bevétele vagy kihagyása a mérésből szintén eltérő konfigurációs paramétereket jelent. Ezeket a beállítási lehetőségeket előre meg lehet fontolni és érvényesíteni (előre beállítani a vezérlő egységben), a méréskor csupán ki kell választani a megfelelő konfigurációt, így az nem vesz el időt. Ilyen hálózatos RTK mérés meghatározási vázlatát mutatja sematikusan a 4. ábra.

A fölös adat birtokában, a továbbiakban az a kérdés merül fel, melyik eredményt tekintjük véglegesnek? Itt is, természetesen, a kiegyenlítő számítás alkalmazása az ajánlott. Igaz, hogy a terepi szoftverekben ez a lehetőség ma még nincs beépítve, de a jövőben ilyen szoftver-modulokat lehetne fejleszteni. Utófeldolgozással pedig ma is lehetséges a hálózati RTK-val mért pont kiegyenlítése, mert itt is térbeli vektorhálózat számításáról van szó. Az utóbbi években több ilyen, a hálózatos RTK-val, eltérő paraméterekkel mért pont kiegyenlítését végeztük el a fehérvári GEO gyakorlatában. Ilyenkor a kiegyenlítés kiinduló adata nemcsak a térbeli vektor három összetevője, hanem annak variancia-kovariancia mátrixa is. Ez utóbbi biztosítja azt, hogy a végeredményben a különböző módszerrel és eltérő pontossággal mért vektorok megfelelő súlyozással szerepeljenek, és alakítsák is a végleges koordinátákat. Fontos arról gondoskodnunk a számítás előtt, hogy egyazon pontnak ugyanaz a pontszáma legyen (akárhányszor mértük is), valamint, hogy a referenciapont adott (fix) pont legyen, amelynek koordinátái nem változhatnak (ez az LGO feldolgozó szoftvernél lényeges formai beállítás).

Végül egy példát említek a hálózati RTK és az irány-távmeréses hálózat együttes alkalmazására. Egy erdővel fedett területen a felmérési feladat elvégzéséhez a körülmények csak egy zárt sokszög-vonal vezetését tették lehetővé, bár az egyes pontok összemérésére is volt mód (5. ábra). A sokszög-vonal kezdőpontja hálózatos RTK-val került meghatározásra, miként az egyetlen tájékozó pont is.



4. ábra. A hálózatos RTK különböző módszerei szerint, rövid idő alatt mért térbeli vektorok is kiegyenlíthetők



5. ábra. Felmérési hálózat, RTK-val, többszörös ismétléssel mért és kiegyenlített két alappontra támaszkodva

Kérdés, hogy az így kialakított hálózatot megfelelőnek ítéljük-e? Így nem fogadható el a mérés, mert ha hibás lenne akár az A vagy a B pont, ezt nem lehetne kimutatni, s egy eltolt vagy elforgatott rendszert hoznánk létre. Ha viszont az A és B pont fölős adatairól gondoskodunk (vagyis többször mérjük azokat), valamint a mérést (a térbeli vektor-összetevőket) kiegyenlítéssel számítjuk, akkor véleményem szerint elfogadható módon járunk el. Ha a B-jelű tájékoztató ponton kívül egy további C pontot is meghatározunk hálózatos RTK-val, akkor a tájékoztató irányok tekintetében is biztosítunk fölős adatot.

## 6 Összefoglalás

A kiegyenlítő számítás a geodéziában régóta kidolgozott elmélet, amit a gyakorlatban az országos hálózatok számításánál hosszú ideje alkalmaznak. A mai számítástechnikai és szoftveres környezet lehetővé tenné, hogy az alsórendű alappont-sűrítésben is kiegyenlítéssel számítsuk a felmérési alappontok végleges koordinátáit, bármilyen módszerrel (de fölős adattal!) hoztuk is létre azokat. Természetesen a kiegyenlítő számítás nem „csodaszer”, hiszen csak akkor vagyunk „jogosultak” használni, ha hálózatunk mentes a durva és a szabályos hibáktól, és valóban hálózati szemlélettel, megfelelő számú fölős mérésre törekedve alakítottuk azt ki.

Példákat mutattam a kiegyenlítésre a kisebb területre kiterjedő negyedrendű szintezési hálózatra valamint az irány- és távmérési felmérési hálózatra.

Mivel napjainkban egyre kiterjedtebb a GNSS-technika alkalmazása, írásomban rámutattam arra, hogy a statikus GNSS-módszerrel létrehozott térbeli vektor-hálózatokat, de a hálózatos RTK-val mért alappontokat is érdemes kiegyenlítéssel számítani.

Külön vizsgálendő kérdés lehetne, hogy a mérnökeodéziái feladatoknál mikor, hol, milyen feltételekkel indokolt és szükséges a kiegyenlítő számítás alkalmazása. Ez a téma azonban továbbvezet a szakmánk minden területét érintő technológiai változásokhoz, a modernizációs folyamatok jogszabályi követéséhez. Ezt a nagy témát nem kívántam felvállalni ebben a cikkben, csak felhívni a figyelmet arra, hogy amit a kiegyenlítő számítás alkalmazása terén a számítástechnikai lehetőségek szintjén ma megtehetünk, azt tegyük is meg.

## Hivatkozások

**Busics Gy** (2005): Alappontmeghatározás RTK-val. Geomatikai Közlemények, 8, 107-114.

**Busics Gy, Csepregi Sz** (1992a): Hálózati szemlélet a vízszintes alappontsűrítésben. Geodézia és Kartográfia, 1992(3), 157-166.

**Busics Gy, Csepregi Sz** (1992b): Alsógeodéziái pontmeghatározások megoldása hálózatkiegyenlítéssel. Geodézia és Kartográfia, 1992(6), 402-407.

- Busics Gy, Horváth T** (2006): Az aktív hálózatok adottságainak kihasználása a műholdas helymeghatározásban. *Geodézia és Kartográfia*, 2006(4), 9-16.
- Csepregi Sz, Busics Gy** (1991): Vízzintes hálózat kiegyenlítése személyi számítógéppel. *Geodézia és Kartográfia*, 1991(2), 55-62.
- Csepregi Sz** (2000): Vízzintes hálózatok pontosságai mérőszámainak néhány problémája. *Geomatikai Közlemények*, 3, 81-88.
- Gyenes R, Kulcsár A** (2006): Digitális szintezőműszerrel végzett mérések feldolgozása. *Geodézia és Kartográfia*, 2006(1), 17-22.

# PONTFELHŐ ILLESZTÉSI MÓDSZEREK ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Somogyi Árpád\*, Molnár Bence\*



**Analysis of point cloud registration methods** – *This paper discusses the different types of registrations of laser scanned point clouds. The goal of the investigation is the accuracy assessment of different tie- and control point constellations and the feasibility analysis of the Iterative Closest Point (ICP) method for indoor measurements. Error analysis has been carried out for conventional registration by increasing the number of involved laser scanning stations (from 2 to 6). Therefore the accuracy planning of multiple measurements, traverses and geodetic networks can be supported using different parameters, such as number, distribution and type of control points. Reference measurements have been carried out by total station. The obtained statistical quality parameters can be used in practice.*

**Keywords:** terrestrial laser scanning, point cloud, registration, ICP, accuracy assessment

A cikkben lézerszkennelt pontfelhők eltérő módszerekkel történő illesztését mutatjuk be. A vizsgálat célja a különböző kapcsoló-, és illesztőpont konstellációk pontossági mérőszámok alapján történő összevetésén túl a dedikált kapcsolópontokat nem igénylő iteratív legközelebbi pontok (Iterative Closest Points – ICP) algoritmus alkalmazhatóságának tanulmányozása beltéri mérésekre. A hagyományos illesztésnél a bevonandó álláspontok számát növelve (2-től 6-ig) többféle elrendezés mellett elemezzük a hibákat. Így lehetővé válik mérőssorozatok, sokszögvonalak, hálózatok pontossági tervezése is, az alkalmazott illesztőpontok számának, eloszlásának vagy éppen azok anyagának megválasztása mellett. Referenciaként mérőállomással végrehajtott mérések szolgálnak. A levezetett statisztikai mérőszámok a gyakorlati alkalmazás során felhasználhatóak.

**Kulcsszavak:** földi lézerszkennelés, pontfelhő, illesztés, ICP, pontosságvizsgálat

## 1 Bevezetés

A távérzékelés és geodézia világában az elmúlt időszakban lezajlott egy olyan paradigmaváltás, melynek következtében számos mérési technológia jellemzően nagyfelbontású pontfelhőket szolgáltat eredményül. A vizsgálat során az egyre szélesebb körben használt lézerszkennelt állományok egymáshoz illesztésével foglalkoztunk. A felmérések során előálló pontfelhők jellemezően a műszer saját koordináta-rendszerében állnak rendelkezésre. Amennyiben a felmérendő objektum méreteire vagy kitarásra való tekintettel több álláspontból kell végrehajtani méréseket, akkor meghatározandók azok a transzformációs paraméterek, amelyek a pontfelhők közötti kapcsolatokat biztosítják. Ezt a feladatot relatív illesztésnek nevezzük. A mérés vagy mérések valamely már létező hálózatba való kapcsolására az abszolút illesztés megnevezést célszerű használni (Lovas et al. 2012). A lézerszkennelés technológiák kapcsán gyakran vizsgált terület az anyagminőség valamint a beesési szögek hatása a létrejövő pontfelhőre, azonban a hazai gyakorlatban az egyes lézerszkennelt állományok összeillesztéseinek lehetőségei és pontossági elemzése nem volt kiemelten vizsgált téma. Ennek kapcsán olyan érezt hajtottunk végre, amelyen keresztül a transzformációs paraméterek pontossága különböző eseteket figyelembe véve válik vizsgálhatóvá. Ezáltal eldönthető, hogy szükséges-e a nagyobb pontosság elérése érdekében a lézerszkennelés mérések hálózatát a plusz költségek és időigény ellenére geodéziai módszerekkel is támogatni. A gyakorlatban alagút (Clini et al. 2013) illetve bányamérések kapcsán merülhetnek fel ilyen feladatok, a cikkben ismertetett vizsgálatot e munkák motiválták. A lézerszkennelés méréseink során a geodéziában megszokott alacsony fölősmérés hányaddal ellentétben nagyarányú fölősméréssel rendelkezünk, ezek nagymértékben javíthatják a pontosságot. A cikk további részében szó lesz a mérésről, valamint a felvett esetekről és az azokból levonható konklúziókról.

\*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék,  
1111, Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
Email: somogyi.arpad@epito.bme.hu



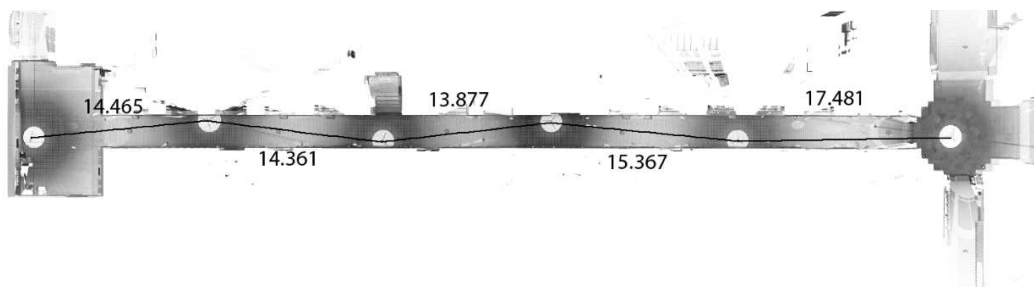
## 2 A vizsgálathoz szükséges mérésről

A BME K épületének egy földszinti folyosós szakaszán (1. ábra) hoztuk létre a 6 álláspontból álló kétszeresen csatlakozó sokszögelési vonalat. A mérés során a pontfelhő előállítására Faro Focus 3D 120 típusú szkennert, míg a referencia mérésekhez Leica TS 15i mérőállomást alkalmaztunk. A minősítéshez használt geodéziai hálózat kétszeresen csatlakozó és kétszeresen tájékozott sokszögvonal volt.

Minden álláspontban 2 különböző felbontású szkennelést hajtottunk végre (10 méteren 3 illetve 6 mm-es pontsűrűség mellett), valamint ezek után mérőállomással folytattuk a sokszögvonal vezetését, ezzel biztosítva a mérések minősíthetőségét. A vizsgálat eredményeit a nagyobb felbontású szkennelésekből vezettük le. A különböző konstellációk kialakításának céljából 35 darab gömböt helyeztünk el 73 helyzetben (2. ábra), az egyes álláspontok között a már nem azonosítható gömböket áthelyeztük. Az egyes álláspontokból legalább 30 darab gömb volt látható, így lehetőség nyílt az illesztések nagy fölösmérés-hányad mellett történő végrehajtására is. A mérésben alkalmazott gömböket elkülöníthetjük típusok alapján:

- 1) Gyári gömbök (13 darab gömbhelyzet):
  - a) Faro által forgalmazott gömbök,
  - b) lézerszkennelt állományok illesztéséhez gyártott, jó reflektivitású gömbök.
- 2) Utángyártott gömbök (60 darab gömbhelyzet):
  - a) akril gömbök,
  - b) polisztirol hab gömbök.

A Faro-gömbök befogásuk révén alkalmasak kényszerközpontosítóban való rögzítésre, így azok helye prizmával is megmérhető; a geodéziai úton meghatározott koordináták lehetővé teszik az összehasonlítást és minősítést (2. és 3. ábra).



1. ábra. A felmért folyosós szakasz (BME K épület)



2. ábra. A méréshez alkalmazott gömbök



**3. ábra** A mérési konstelláció egy részlete a szkennert feldolgozó szoftverben

Az elemzéseink során használt konstellációkban változtattuk a vizsgált álláspontok számát, a ki-egyenlítésbe bevont gömbök számát, típusát és azok térbeli eloszlását. Ezáltal lehetőségünk volt a gyakorlatban is előforduló esetek elemzésére.

### 3 Alkalmazott transzformációs módszerek

A relatív illesztési eljárásokat az alapján, hogy milyen „eszközöket” használunk, 3 csoportba sorolhatjuk:

- 1) Jelölt kötőpontokkal (markerekkel) történő illesztés: A földi lézerszkenneres felmérések esetén általában nagy visszaverő képességű anyaggal bevont, legtöbb esetben műanyagból vagy fémből készült objektumok (pontok, síkok, hengerek, gömbök, téglatestek) alkalmazhatók, mint fóliák, tárcsák, hengerek vagy gömbök.
- 2) Természetes térelemekkel történő illesztés: A gyakorlatban előfordulnak olyan esetek, amikor nem lehetséges mesterséges kapcsolóobjektumokat alkalmazni, ekkor az álláspontok közötti kapcsolatot természetes térelemek megjelölésével lehet biztosítani. Az ilyen módon végrehajtott illesztés pontossága elmarad a jelölt objektumokkal végrehajtott esettől. Elsősorban beltéri környezetben szokás alkalmazni, ahol a jól azonosítható sarokpontokat illetve falsíkokat célszerű megjelölni.
- 3) Automatikus eljárás: Automatikus illesztésre leggyakrabban akkor kerül sor, amikor az egyes pontfelhők közötti kapcsolatot valós időben kell végrehajtani, így nincs lehetőség a két pontfelhő között objektumokat manuálisan megfeleltetni egymásnak. Utófeldolgozások esetén is alkalmazható ilyen típusú eljárás, ha nem volt lehetőség markerek kihelyezésére, vagy a felmért területből nem nyerhetők ki megfelelő pontossággal egyszerű geometriai elemek (síkok, pontok, gömbök).

A vizsgálat során mindhárom eljárást alkalmaztuk, így a különböző megoldásokat össze tudjuk hasonlítani. Az első két eljárás esetén 6 paraméteres transzformációt alkalmaztunk, mivel mindkét esetben rendelkezünk fölösmérésekkel, így a túlhatározott egyenletrendszerek esetében a legkisebb négyzetek módszerével élünk (Detrekői 1991). A harmadik esetben ICP algoritmust használtunk a transzformációs paraméterek meghatározására, amelyet szintén felfoghatunk úgy, mint egy merevtest-transzformációt (Besl et al. 1992, Chen és Medioni 1991, Hoppe et al. 1992).

A több pontból levezetett illesztőobjektumok előnye, hogy azok geometriai paraméterei több pontból kerülnek meghatározásra (magas fölösmérés hányad), ezért nagyobb pontossággal használhatók fel az illesztés során. Összességében tehát a megszokott pontonkénti szög- és távmérési középhiba megadása nem írja le megfelelően a lézerszkennerral történő illesztések apriori középhibáját.

### 3.1 Konstellációk

A vizsgálat jelentős számú konstelláció kialakítását és számítását tette szükségessé, ezek gördülékeny lebonyolítására hoztunk létre MATLAB környezetben egy grafikus felületet. Ennek köszönhetően megközelítőleg 150 esetet vizsgálhattunk meg. A konstellációk részletezése előtt fontos tisztázni azt a folyamatot, hogyan határoztuk meg a gömbök koordinátáit. A pontfelhők előfeldolgozására alkalmas, a szkener saját szoftvereiként forgalmazott FARO Scene programba töltöttük be a nyers mérési állományokat, majd annak beépített gömbmegjelölő eszközét alkalmaztuk a koordináták meghatározására. Az így meghatározott gömbközpontokat exportáltuk dxf formátumban, ilyen formában lehetővé vált az illesztések végrehajtása és azok minősítése a bemutatott módszerekkel. Ennek a konverziós folyamatnak a következménye, hogy bár 6 paraméteres transzformációt alkalmaztunk, X és Y tengely körüli elfordulást nem tapasztaltunk (1. táblázat), mivel a feldolgozó szoftver már az inklinométerrel (dőlésmérővel) megjavított adatokat szolgáltatja.

A gömbtípusokra és a gömbök térbeli eloszlására vonatkozó vizsgálatokat célszerű volt kezdetben a lehető legalacsonyabb álláspontszám mellett elvégezni, később a vizsgálatokat megnövelt álláspontszám mellett is végrehajtottuk. Egy illesztés során meghatároztuk a transzformációs paramétereket (1. táblázat), az egyes meghatározott álláspontokhoz viszonyított eltérést (2. és 3. táblázat), valamint azokat a statisztikai paramétereket, amelyek a szabadhálózat kiegyenlítést jellemzik (4. táblázat).

**1. táblázat.** Gyári gömbök alapján meghatározott transzformációs paraméterek

Transzformációs paraméterek [m] illetve [°]					
X	Y	Z	$\omega$	$\varphi$	$\kappa$
0.000	0.000	0.000	0	0	327.014
14.399	1.356	0.153	0	0	321.295
28.659	-0.318	0.084	0	0	321.100
42.446	1.255	0.042	0	0	316.203
57.731	-0.321	0.011	0	0	313.279
75.209	0.000	0.068	0	0	305.747

**2. táblázat.** Álláspontok koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése

Eltérések [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
-2	0	2
-5	1	2
-4	1	3
-5	2	4
-5	0	2

**3. táblázat.** Minősítő gömbök koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése

Minősítő gömbök eltérései [mm]		
X	Y	Z
0	1	-3
-2	0	2
-1	1	3
-6	-1	-1
-5	2	4
-6	2	4
-3	3	-2

**4. táblázat.** A szabadhálózat kiegyenlítést jellemző statisztikai paraméterek

Statisztikai paraméterek [m]		
X	Y	Z
0.003	0.004	0.004
0.002	0.002	0.001

Amennyiben összevetjük a közel azonos eloszlású gyári és utángyártott gömbök által meghatározott transzformációs paramétereket (1. és 7. táblázat), valamint a számított koordináta-eltéréseket (2. és 8. táblázat) azt tapasztaljuk, hogy a töredék áron beszerezhető kapcsolóobjektumokkal kiválthatjuk az erre a célra szánt gyári társaikat. Azonban ahogyan az a táblázatokból (2. és 8. táblázat) látszik, az utángyártott gömbök alkalmazása során az illesztés magassági értelemben valamilyen szabályos hibával terheltté válik. Ez a hiba a gömbök egységes sugárral történő detektálására vezethető vissza, ugyanis a gömbök mérete kis mértékben eltér a különböző gömbtípusok esetén.

Az egyes álláspontok illesztését különböző számú gömb felhasználásával is elvégeztük, a gömbök – és így a felhasznált fölös mérések – számának növelése az illesztés vízszintes pontosságát növelte (2., 5. és 8. táblázat).

Kialakítottunk olyan konstellációkat, ahol a gömbök az egyik álláspont közvetlen közelében helyezkedtek el, távol a másik állásponttól. Az ilyen gömbhelyzetek során azt tapasztaltuk, hogy amennyiben a gömbök detektálhatóak, az illesztés pontossága nem romlik (6. táblázat).

A természetes pontok alkalmazása során azt tapasztaltuk, hogy nem lehet elérni olyan pontos illesztést, mint az illesztőgömbök alkalmazása esetében. Ennek egyik oka, hogy a pontok helyes azonosítása bizonytalan (4. ábra). További hibaforrást jelent a gyakorlatban, ha csak pontszerű objektumokat kívánunk megjelölni, mivel nem mindenesetben tudjuk garantálni a pontok megfelelő térbeli eloszlását. Az illesztés pontatlanná válik, amit a pontok számának nagymértékű megemelésével sem lehet ellensúlyozni. 353 természetes ponttal történő illesztés során az álláspontok eltéréseiben az X és Y komponensek már a deciméteres értéket közelítik (9. és 10. táblázat). A magassági értelemben vett eloszlás kedvezőbb alakulásának vizsgálatára a folyosón található lámpaburákat is alkalmaztuk a jelölt kötőpontokkal történő illesztés során (3. ábra), azonban ez az illesztés pontosságán nem változtatott.

Közel kollineáris helyzetben lévő gömbök esetén matematikailag nem megoldható a 6 paraméteres transzformáció, így ilyen esetekben az illesztés nem kivitelezhető, azonban ezek a helyzetek jelölt pont (marker) bevonásával feloldhatóak.

A geodéziában a sokszögelés elkülönül a részletméréstől, míg a lézerszkennelés során a kettő egybeeshet, mely sűrűbb álláspontokat, így rövidebb sokszögoldalakat eredményez. A legenerált esetek azt mutatják, hogy a részletfelmérés által megkövetelt sűrű elhelyezkedésű álláspontok között nem mindig szükséges gömböket elhelyezni. Ugyanis a gömbök állásponthez képesti távolsága indifferens, a vizsgálat során felhasznált legtávolabbi gömb 35 m-re volt a szkennertől, ekkor a 95 pont esett a gömbre közel 3 mm-es ponttávolság mellett, adott állásponton a szomszédos sokszög-pontokon túli kapcsológömbök is felhasználhatóak.

**5. táblázat.** Álláspontok koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése az összes gömb felhasználásával

Differenciák [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
1	-1	3
-1	0	3
0	0	4
1	2	5
1	0	5

**6. táblázat.** Első két álláspont koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése a 2. állásponthez közeli gömbökkel

Differenciák [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
-1	0	2

**7. táblázat.** Utányártott és a gyári gömbök alapján meghatározott transzformációs paraméterek különbségei

Transzformációs paraméterek eltérése [mm] illetve ["]					
X	Y	Z	$\omega$	$\varphi$	$\kappa$
0	0	0	0	0	8.1
3	0	1	0	0	1.9
6	0	2	0	0	-13.3
8	1	2	0	0	4.4
10	2	2	0	0	-27.8
11	0	5	0	0	13.9

**8. táblázat.** Utányártott gömbök alapján meghatározott álláspontok koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése

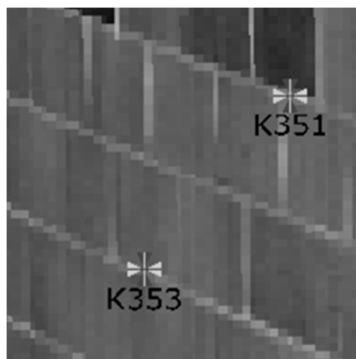
Differenciák [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
2	0	3
1	1	4
3	1	5
5	4	6
6	0	67

**9. táblázat.** Természetes kapcsolópontok és gyári gömbök alapján meghatározott transzformációs paraméterek különbsége

Transzformációs paraméterek eltérése [mm] illetve ["]					
X	Y	Z	$\omega$	$\varphi$	$\kappa$
0	0	0	0	0	0.1
21	-13	0	0	0	2.6
34	-43	-1	0	0	9.2
59	-65	0	0	0	3.3
59	-67	0	0	0	0.0
82	0	4	0	0	-27.1

**10. táblázat.** Természetes pontok alapján meghatározott álláspontok koordinátáinak referenciapontokhoz viszonyított eltérése

Differenciák [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
19	-13	2
30	-41	2
55	-64	2
54	-64	4
77	0	6

**4. ábra.** Megjelölt természetes illesztőpontok

### 3.2 Az ICP eredménye






Az ICP algoritmus alapjainak megfogalmazása az 1990-es évek elejére tehető (Besl et al. 1992, Chen és Medioni 1991, Hoppe et al. 1992), az elmúlt 20 év alatt a különböző igényeknek köszönhetően számos implementációt hoztak létre. Gyors elterjedése azzal magyarázható, hogy az algoritmus alkalmas két átfedéssel bíró pontfelhő között úgy meghatározni a transzformációs paramétereket az összetartozó pontpárok alapján, hogy az egyes iterációs lépésekkel azok távolságait minimalizálja, valamint automatizálható eljárás.

Ehhez a vizsgálathoz a Faro Scene program Cloud to cloud eljárását hívtuk segítségül, amely ICP alapokon nyugszik. Az illesztés végrehajtása előtt a pontfelhőket manuálisan úgy mozgattuk, hogy jó kezdőértéket kapjunk, ezzel meggyorsítva a transzformációs paraméterek meghatározásának folyamatát. A program egy referencia álláspontot választ ki a művelet végrehajtása során, és mindaddig ehhez illeszti a többi pontfelhőt, ameddig az átfedés biztosított. A transzformáció minősítésére különböző adatokat közöl: úgy mint álláspont pontjai közötti átlagos eltérés, átfedés nagysága, illesztésbe bevont pontok száma (5. ábra). A 11. és 12. táblázatokból is látható, hogy ily módon az illesztés vízszintes értelemben kevesebb, mint egy centiméter hiba mellett elvégezhető.

## 4 Összefoglalás

A vizsgálatok során rámutattunk arra, hogy a kollineáris kapcsolópontokat leszámítva az illesztések végrehajthatóak, valamint a gömbök állásponhoz viszonyított távolsága – a detektáláson túl – indifferens az illesztés során. A kialakított konstellációk alapján kijelenthető, hogy a gyári és utángyártott gömbök alkalmazása között számottevő különbség nem tapasztalható, egy geometriailag helytállóbb gömbelhelyezés többet javít az illesztés pontosságán, mint az anyagjellemzők.

A gömbök alapján végrehajtott illesztések során az alkalmazható konstellációk centiméteres pontosságot biztosítottak. Természetes térelemekkel történő illesztés a gyakorlatban csak olyan esetben hajtható végre, amikor a pontok megfelelő térbeli eloszlása mellett a pontpárok pontos azonosítása is biztosított. Az automatikus illesztések kapcsán kijelenthető, hogy amennyiben a pontfelhők átfedése, valamint kezdeti, közelítő pontosságú transzformációs paraméterei biztosított, úgy illesztések esetén pontos eredményt szolgáltat.

Álláspont 1	Álláspont 2	Átlag [mm]	< 4 mm [%]	Átfedés [%]	Pontok [db]	Részletek
New_Project_...	New_Project_S...	2.739	64.4	26.8	14904	
New_Project_...	New_Project_S...	1.164	89.8	80.0	58543	
New_Project_...	New_Project_S...	1.137	87.0	73.5	60005	
New_Project_...	New_Project_S...	1.118	87.8	67.1	56663	
New_Project_...	New_Project_S...	1.03	90.4	86.0	66484	

5. ábra. A Cloud to cloud illesztésének eredménye

11. táblázat. ICP-vel történő illesztés során a minősítő gömbök koordinátaiban tapasztalható koordináta-eltérések

Minősítőgömbök különbségei [mm]		
X	Y	Z
1	0	4
1	1	0
0	0	-3
0	1	-15
-4	-2	-25
-6	-2	-39
-8	1	-56

12. táblázat. ICP-vel történő illesztés során az álláspontokon tapasztalható koordináta-eltérések

Különbségek [mm]		
X	Y	Z
0	0	0
0	0	-3
0	-2	-11
-1	-2	-24
-6	4	-45
-6	0	-71

Az általunk végrehajtott vizsgálat eredménye a természetes pontok alkalmazását leszámítva minden esetben megfelelt a sokszögeléshez kapcsolódó – egyébként igen megengedő – szabályzatoknak (MÉM OFTH: A.4 (70 928/1979.) és MÉM OFTH: A.5 (36400/1980.)). A földi lézerszkennelssel sokszögvonalan gyűjtött pontfelhők illesztőgömbökkel történő transzformálása során az ismert geodéziai összefüggések alkalmazhatók (Krauter 2002). Amennyiben az adott alkalmazás lézerszkenneres felmérést követel meg, nem szükséges az álláspontokat geodéziai mérésekkel is meghatározni, így a hagyományos sokszögelés elhagyható.

### Hivatkozások

- Besl P, McKay H** (1992): A method for registration of 3-D shapes. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 14, 239-256.
- Chen Y, Medioni G** (1991): Object modeling by registration of multiple range images. *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3, 2724-2729.
- Clini P, Nespeca R, Bernetti A** (2013): All-In Laser Scanning Methods for Surveying, Representing and Sharing Information on Archaeology. Via Flaminia and the Furlo Tunnel Complex, *International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, Volume XL-5/W2, 2013 XXIV International CIPA Symposium.
- Detrekői Á** (1991): Kiegészítő számítások. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 688.
- Hoppe H, Deroose T, Duchamp T, McDonald J, Stuetzle W** (1992): Surface reconstruction from unorganized points. *ACM SIGGRAPH*, 71–78.
- Krauter A** (2002): Geodézia, Műegyetemi kiadó, Budapest. 514.
- Lovas T, Berényi A, Barsi Á** (2012): Lézerszkennelés. Terc kiadó, Budapest. 166.
- MÉM OFTH** (1979): A.4 (70 928/1979.) Szabályzat az egységes országos magassági alapponthálózat létesítési munkáiról. Budapest.
- MÉM OFTH** (1980): A.5 (36400/1980.) Szabályzat az országos vízszintes alappont hálózat sűrítésére. Budapest.

# KVATERNIÓ ALAPÚ GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ ITERÁCIÓVAL

Papp Erik\*



*Quaternion-based geodetic datum transformation by iteration – Datum transformation is the most frequent problem in geodesy, photogrammetry, geoinformatics, animation and computer vision. To overcome the drawback of traditional solution of the problem based on rotation angles – which depends strongly on initial values of the parameters, thus making the method ineffective in the case of super large rotation angles – the paper adopts unit quaternion to represent three dimensional rotation matrix. A quaternion-based iterative solution in terms of linearization in the Bursa-Wolf geodetic transformation model is described. The calculations show that the quaternion-based solution has no dependence on the initial values of the parameters. It provides reliable result with fast speed. As a result of the iteration the  $\mathbf{Q}$  quaternion elements  $q_0, q_1, q_2, q_3$  and the  $\lambda$  scale value are obtained. The main advantage of this algorithm is that it can be applied in the case of arbitrary size rotation.*

**Keywords:** Datum transformation, quaternion, rotation matrix, parameter adjustment with constraint

*A dátumtranszformáció az egyik leggyakrabban előforduló feladat a geodéziában, fotogrammetriában, térinformatikában, az animációban és a számítógépes megjelenítésben. A hagyományos módszer hátránya, hogy a forgásszögek meghatározása erősen függ a paraméterek kezdeti értékeitől, amely szuper nagy forgásszögek esetén nem ad megoldást. A dolgozatban ismertetett módszer egység kvaterniót alkalmaz a térbeli forgatási mátrix meghatározásához. Ismerteti a kvaternió alapú geodéziái dátumtranszformáció iterációs megoldását linearizálással a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. A számítások azt mutatják, hogy a kvaternió alapú iterációs megoldás független a paraméterek kezdeti értékeitől, gyors és megbízható eredményt ad. Az iteráció eredményeként a  $\mathbf{Q}$  kvaternió  $q_0, q_1, q_2, q_3$  elemeit és a  $\lambda$  méretarányt kapjuk. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához.*

**Kulcsszavak:** Dátumtranszformáció, kvaternió, forgatási mátrix, paraméter kiegyenlítés kényszerfeltétellel

## 1 Bevezetés

A térbeli (3D) koordináta transzformáció az egyik leggyakoribb feladat a geodéziában, fotogrammetriában, térinformatikában, a számítógépes animációban és más kutatási területeken. Ez magában foglalja a térbeli adatok (koordináták, képek, térképek, modellek, pontfelhők stb.) transzformálását a forrás koordináta rendszerből a cél koordináta rendszerbe. Jelenleg a legtöbbször alkalmazott modell a hétparaméteres hasonlósági transzformációs modell. Dátumtranszformáció esetén hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk, nevezetesen három eltolást, három elforgatást és a méretarány paramétert a mindkét rendszerben adott közös pontok koordinátáinak felhasználásával. Ebben a dolgozatban a Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modellt alkalmazzuk, amelyet klasszikus modellnek, hétparaméteres modellnek, térbeli Helmert modellnek vagy konform csoportnak C7(3) is neveznek. A geodéziában, mivel a forgásszögek általában nagyon kicsinyek, vagyis a két koordináta rendszer tengelyei közel párhuzamosak, lineáris egyszerűsített modellt alkalmaznak (pl. Detrekői 1991, Kleusberg és Teunissen 1996, Leick 2004, Hofmann-Wellenhof et al. 1994, Hofmann-Wellenhof et al. 2001), amely paraméterei egyszerűen számíthatók. Számos külföldi és hazai publikáció foglalkozik a geodéziái dátumtranszformációval, mint például Welsch (1993), Grafarend et al. (1995), Vanicek és Steeves (1996), Yung (1999), Závoti (1999), Závoti (2005), Závoti és Jancsó (2006), (2012), Csepregi (2001a), Csepregi (2001b), Bácsatyai (2005), Virág és Borza (2007), Papp et al.

\*SzIE, Ybl Miklós Építéstudományi Kar, 1146 Budapest, Thököly út.74.  
E-mail: papp.erik@ybl.szie.hu



(1997, 2002), Papp és Szűcs (2005). Grafarend és Awange (2003), Awange és Grafarend (2005), Gauss és Jacobi kombinatorikai és procrustes algoritmust javasolt a 3D dátumtranszformációs feladat megoldásához.

A transzformációs paraméterek számításához nemlineáris, túlhatározott egyenletrendszert használnak a legkisebb négyzetek módszere szerinti kiegyenlítéssel. A megoldások két csoportba sorolhatók: *iterációs* algoritmusok és *analitikus* algoritmusok. Ezen algoritmusok közötti fő különbség a forgatási mátrix eltérő értelmezésének köszönhető, amely különböző linearizációs modelleket eredményez. A forgatási paramétereket általában három forgásszöggel szokás megadni. A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül. Az iterációs algoritmusok alkalmazásakor linearizálás és a paraméterek számításához jól közelítő értékek szükségesek. Jelenleg az *analitikus* algoritmusok két fő típusa használatos, a *procrustes* algoritmus (Grafarend és Awange 2003, 2005) és a *kvaternió alapú* algoritmus (Horn 1987, Shen et al. 2006, Zeng és Yi 2011, Papp 2013, Závoti 2014).

Ebben a dolgozatban bemutatjuk a kvaternió alapú dátum transzformációs algoritmus iterációs megoldását.

## 2 A kvaternió és a 3D forgatási mátrix

Sir William Rowan Hamilton 1843-ban alkalmazta először a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására. A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egység sugarú gömbön történő leírására. Ezért széles körben alkalmazzák mozgó objektum helyzetének leírására, mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű, továbbá a robotok irányításában, az animációban, fizikában, mechanikában és más kutatási területeken.

A  $Q$  kvaternió komplex számokhoz hasonlóan a következőképpen definiálható:

$$Q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k = q_0 + \mathbf{q}, \quad (1)$$

ahol

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j,$$

és a képzetes rész

$$\mathbf{q} = q_1i + q_2j + q_3k$$

egy 3D vektort jelöl.

A  $Q$  kvaternió oszlopvektor formában is kifejezhető az  $(1 \ i \ j \ k)$  egységvektorok felhasználásával

$$Q = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3)^T = (q_0 \ \mathbf{q}^T)^T, \quad (2)$$

ahol  $q_0$  a valós rész,  $\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ q_3)^T$  képzetes rész egy 3D vektort és  $T$  a transzponálást jelöli.

Egy 3D  $\mathbf{p}$  vektor mindig megadható kvaterniókkal a következők szerint:

$$\mathbf{p} = 0 + p_1i + p_2j + p_3k = 0 + \mathbf{p}. \quad (3)$$

A kvaternió hossza

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (4)$$

Ha  $\|Q\| = 1$ , akkor a  $Q$  kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

Jól ismert módszer egy 3D  $\mathbf{p}$  vektor  $\mathbf{s}$  vektorba történő forgatására kvaternióval a következő:

$$S = QPQ^*, \quad (5)$$

ahol a  $\mathbf{p}$  és  $\mathbf{s}$  vektorokból képzett kvaterniók a  $P$  és  $S$ ,  $Q$  pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható:

$$\mathbf{Q} = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{e}_n \sin \frac{\theta}{2}, \quad (6)$$

ahol  $\mathbf{e}_n = e_1 \mathbf{i} + e_2 \mathbf{j} + e_3 \mathbf{k}$  és  $e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1$ , egy 3D egységvektor,  $\theta$  a forgásszög az  $\mathbf{e}_n$  egységvektor körül és  $\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{e}_n = -1$ . Összehasonlítva a (6) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, \quad q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2}, \quad q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7)$$

A (5) egyenletből megfelelő átalakítások után (a részletes levezetés megtalálható Zeng és Yi (2011) cikkében) az alábbi számításra alkalmas összefüggést kapjuk:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \mathbf{P}. \quad (8)$$

Az  $\mathbf{R}$   $3 \times 3$  forgatási mátrix

$$\mathbf{R} = (q_0^2 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}) \mathbf{I} + 2(\mathbf{q} \mathbf{q}^T + q_0 \mathbf{C}(\mathbf{q})), \quad (9)$$

ahol a  $\mathbf{q}$  egy 3D vektort jelöl,  $\mathbf{I}$  egy  $3 \times 3$  egységmátrix és a  $\mathbf{C}(\mathbf{q})$   $3 \times 3$  mátrix a következő alakú:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek után a forgásszögek az  $\mathbf{R}$  forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}, \quad \alpha_X = \arctg \left( \frac{r_{23}}{r_{33}} \right), \quad \beta_Y = \arcsin(-r_{13}), \quad \gamma_Z = \arctg \left( \frac{r_{12}}{r_{11}} \right), \quad (10)$$

ahol  $\alpha$ ,  $\beta$  és  $\gamma$  az X, Y és Z tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

### 3 Kvaternió alapú dátumtranszformáció iterációs megoldásának modellje

A legtöbb dátumtranszformációs modell hétparaméteres, amelyek két különböző geodéziai dátumhoz tartozó közös pontok felhasználásával kerülnek kiszámításra. A jól ismert Bursa-Wolf hasonlósági transzformációs modell a következők szerint írható fel

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \mathbf{b}_i, \quad (11)$$

ahol  $\mathbf{a}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$  és  $\mathbf{b}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^T$  ( $i=1, \dots, n$ ) a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátái,  $\mathbf{t} = (t_X \ t_Y \ t_Z)^T$  jelöli a három eltolás paramétert,  $\lambda$  a méretarány tényező és a  $3 \times 3$ -as  $\mathbf{R}$  forgatási mátrix három forgásszöget tartalmaz. Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának nagyobbak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a súlypontra vonatkozó  $\Delta \mathbf{a}_i$ ,  $\Delta \mathbf{b}_i$  koordinátákat:

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_0, \quad \Delta \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i - \mathbf{b}_0, \quad (12)$$

ahol  $\mathbf{a}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{b}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_i$ . Behelyettesítve a (12) egyenletet a (11) egyenletbe a következőt kapjuk:

$$\Delta \mathbf{a}_i = \Delta \mathbf{t} + \lambda \mathbf{R} \Delta \mathbf{b}_i. \quad (13)$$

A (13) egyenlet linearizálása után a közvetítő egyenlet

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{l}_i, \quad (14)$$

ahol  $\mathbf{v}_i = (v_{xi} \ v_{yi} \ v_{zi})^T$  jelöli a  $\Delta \mathbf{a}_i$  változásait,  $\delta \mathbf{x} = (dq_0 \ dq_1 \ dq_2 \ dq_3 \ d\lambda)^T$  az ismeretlen  $\mathbf{x} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda)^T$  vektor javításai és  $\mathbf{B}_i$  egy  $3 \times 5$  koefficiens mátrix:

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & K_1 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & K_2 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & K_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$\mathbf{l}_i = (l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi})^T$  egy konstans vektor. A  $\mathbf{B}_i$  koefficiens mátrix és az  $\mathbf{l}_i$  tisztatag vektor elemei az alábbiak:

$$\begin{aligned} B_{11} &= 2\lambda(-q_3\Delta x + q_2\Delta z), & B_{12} &= 2\lambda(q_2\Delta y + q_3\Delta z) \\ B_{13} &= 2\lambda(-2q_2\Delta x + q_1\Delta y + q_0\Delta z), & B_{14} &= 2\lambda(-2q_3\Delta x - q_0\Delta y + q_1\Delta z) \\ B_{21} &= 2\lambda(q_3\Delta x - q_1\Delta z), & B_{22} &= 2\lambda(q_2\Delta x - 2q_1\Delta y - q_0\Delta z) \\ B_{23} &= 2\lambda(q_1\Delta x + q_3\Delta z), & B_{24} &= 2\lambda(q_0\Delta x - 2q_3\Delta y + q_2\Delta z) \\ B_{31} &= 2\lambda(-q_2\Delta x + q_1\Delta y), & B_{32} &= 2\lambda(q_3\Delta x + q_0\Delta y - 2q_1\Delta z) \\ B_{33} &= 2\lambda(-q_0\Delta x + q_3\Delta y - 2q_2\Delta z), & B_{34} &= 2\lambda(q_1\Delta x + q_2\Delta y) \\ K_1 &= [1 - 2(q_2^2 + q_3^2)]\Delta x + 2\Delta y(q_1q_2 - q_0q_3) + 2\Delta z(q_0q_2 + q_1q_3) \\ K_2 &= 2\Delta x(q_0q_3 + q_1q_2) + [1 - 2(q_1^2 + q_3^2)]\Delta y + 2\Delta z(q_2q_3 - q_0q_1) \\ K_3 &= 2\Delta x(q_1q_3 - q_0q_2) + 2\Delta y(q_0q_1 + q_2q_3) + [1 - 2(q_1^2 + q_2^2)]\Delta z \end{aligned}$$

$$l_{xi} = \Delta X_i - \lambda K_1$$

$$l_{yi} = \Delta Y_i - \lambda K_2$$

$$l_{zi} = \Delta Z_i - \lambda K_3$$

Mivel a  $\mathbf{Q}$  egység kvaternió, a következő kényszernek kell teljesülnie:

$$q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1. \quad (16)$$

A (16) egyenlet linearizálása után a

$$\mathbf{C} \delta \mathbf{x} - \mathbf{W}_x = 0 \quad (17)$$

alakot kapjuk, ahol

$$\mathbf{C} = [q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ 0] \text{ és } \mathbf{W}_x = \frac{1 - q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}{2}. \quad (18)$$

Amikor a közös pontok száma  $n \geq 3$ , akkor  $3n$  közvetítő egyenlet írható fel ld. a (13), az alábbiak szerint

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{B}_i \delta \mathbf{x} - \mathbf{l}_i, \quad (19)$$

ahol

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix}.$$

Ezek után kiegyenlítéssel (IV. kiegyenlítési csoport, Detrekői 1991) számíthatjuk a transzformációs paramétereket.

A  $\delta \mathbf{x}$  változások vektora a következő mátrix egyenlettel számítható:

$$\delta \mathbf{x} = (\mathbf{N}_b^{-1} - \mathbf{N}_b^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}_c^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}_b^{-1}) \mathbf{W} + \mathbf{N}_b^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{N}_c^{-1} \mathbf{W}_x, \quad (20)$$

ahol

$$\mathbf{N}_b = \mathbf{B}^T \mathbf{B}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{B}^T \mathbf{l}, \quad \mathbf{N}_c = \mathbf{C} \mathbf{N}_b^{-1} \mathbf{C}^T. \quad (21)$$

Mivel a (20) mátrixegyenlet mindkét oldalát balról szorozzuk az  $\mathbf{N}_b^{-1}$  mátrixszal, ezért az kiemelhet. Végül a  $\delta \mathbf{x}$  változások vektorát a következő mátrixegyenlettel számítjuk

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{N}_b^{-1} ((\mathbf{I} - \mathbf{C}^T \mathbf{N}_c^{-1} \mathbf{C} \mathbf{N}_b^{-1}) \mathbf{W} + \mathbf{C}^T \mathbf{N}_c^{-1} \mathbf{W}_x), \quad (22)$$

ahol  $\mathbf{I}$  egy  $5 \times 5$  egységmátrix.

A paraméterek számítását a klasszikus Gauss-Newton iterációs módszerrel végeztük. Először jó közelítő értékeket vettünk föl az ismeretlen  $\mathbf{x}$  vektor elemeire és kiszámítottuk a  $\delta \mathbf{x}$  változásokat. Az  $\mathbf{x} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$  illetve  $\mathbf{x} = (0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 0.7 \ 1)^T$  kezdő értékekkel végezhetjük az iterációt. Abban az esetben, ha a kvaternió kezdőértékének nullát választunk és a méretaránynak egyet, akkor a  $\mathbf{B}$  koeficiens mátrix (14) elemei a  $K_1$ ,  $K_2$  és  $K_3$  elemek kivételével nullák lesznek, az  $\mathbf{N}_b^{-1}$  inverz mátrix nem számítható. Amennyiben a  $\delta \mathbf{x}$  vektor minden eleme kisebb, mint az előre megadott tolerancia, akkor a forgatási mátrix, a forgatások és az eltolás értékek számítása következik. Ellenkező esetben az iterációt mindaddig ismétljük egy jobban közelítő értékkel, ameddig a változások értékei kisebbek lesznek a megadott tolerancia értékénél.

A kvaternió-algebra alkalmazásán alapuló dátum transzformációs algoritmus iterációs megoldása végezetül az alábbiak szerint foglalható össze:

- 1) a súlypontra vonatkozó  $\Delta \mathbf{a}_i$ ,  $\Delta \mathbf{b}_i$  koordináták számítása: (12) egyenlet,
- 2) az iteráció kezdőértékeinek felvétele:  $\mathbf{x} = (q_0 \ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \lambda)^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ ,
- 3) a  $\delta \mathbf{x}$  változások számítása: (22) egyenlet,
- 4) ha a  $\delta \mathbf{x}$  vektor minden eleme kisebb a megadott  $\varepsilon$  toleranciánál, melynek értéke a számításainknál  $\varepsilon = 1E^{-9}$ , akkor folytatás a 6. lépésnél,
- 5) ha a  $\delta \mathbf{x}$  vektor minden eleme nagyobb a megadott toleranciánál, akkor újabb iteráció számítása következik az  $\mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  új kezdőértékkel ( $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \delta \mathbf{x}^k$ ), folytatás a 3. lépésnél,
- 6) az  $\mathbf{R}$  forgatási mátrix számítása: (9) egyenlet, forgásszögek számítása: (10) egyenlet,
- 7)  $\mathbf{t}$  eltolás vektor számítása az  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$  súlypont koordináták felhasználásával: (11) egyenlet.

## 4 THI program

A Térbeli Helmert transzformáció Iterációs megoldására az alábbiakban ismertetett *J nyelvű* programot készítettük. A program fájlból történő betöltése után először transzformációs paramétereket határozzuk meg. A program a számításokat és az eredmények listázását 20 számjegy élességgel végzi.

### 4.1 Ismert transzformációs paraméterek

Ismert transzformációs paraméterek esetén a program a  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  eltolás értékeket, a  $\mathbf{Q}$  kvaternió  $q_0, q_1, q_2, q_3$  elemeinek értékeit és a  $\lambda$  méretarányt kéri.

### 4.2 Ismeretlen transzformációs paraméterek

Ismeretlen transzformációs paraméterek esetén, a mindkét rendszerben adott, forrás- és célkoordinátákat tartalmazó FKJ és CKJ közös pontok koordinátáit tartalmazó fájlok betöltése után, a program kiszámítja a transzformációs paramétereket. A  $\mathbf{Q}$  kvaternió  $q_0, q_1, q_2, q_3$  elemei és a  $\lambda$  méretarány egy lépésben történő kiszámítása után az  $\alpha, \beta, \gamma$  elforgatások és a  $t_x, t_y, t_z$  eltolás értékek meghatározását végzi a program. Ezek után a maradék ellentmondások számítása következik. A program a közös pontok alapján meghatározott transzformációs paraméterek felhasználásával, a forrás rendszerbeli közös pontokat a cél rendszerbe transzformálja. A célrendszerben adott és transzformált koordináták

különbségeként számítja az  $e_x, e_y, e_z$  maradék ellentmondások három összetevőjét, továbbá ezek felhasználásával térbeli Pitagorasz-tétellel az  $e$  maradék ellentmondás vektort, amely a transzformált pont és az eredeti ponthely térbeli távolsága. A két rendszer illeszkedésének jellemzésére a program kiszámítja az  $m_0$  súlyegység középhibáját az

$$m_0 = \sqrt{\frac{\sum(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2)}{3n - 7}} \quad (23)$$

összefüggés alapján, ahol  $n$  a mindkét rendszerben adott közös pontok számát jelöli.

### 4.3 Térbeli Helmert transzformáció

Az átszámítandó pontokat tartalmazó KJ koordináta jegyzék fájl beolvasása után a program a forrás rendszerben adott pontok  $(x \ y \ z)$  koordinátáit az  $(X \ Y \ Z)$  célrendszerbe transzformálja. A transzformáció lépései Papp (2013) cikkében megtalálhatók.

Abból a célból, hogy bemutassuk a (22), (9), (10) és (11) összefüggések érvényességét megismerteltük Grafarend és Avange (2003), Shen et al. (2006) valamint Zeng és Yi (2011) számításait. Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek, mind pedig a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében (1. melléklet). Elvégeztük az OGPSH 24, 43 és 1151 pontjának felhasználásával a transzformációs paraméterek meghatározását, a *bemérés* (WGS84 XYZ  $\rightarrow$  IUGG67 XYZ) és *kitűzés* (IUGG67 XYZ  $\rightarrow$  WGS84 XYZ) feladatok esetén (2. melléklet). A Zeng és Yi (2011) tesztfeladatainak szimulált koordinátákkal történő számítási eredményei kis forgásszögek (B $\rightarrow$ A1), nagy forgásszögek (B $\rightarrow$ A2) és szupernagy forgásszögek esetén (B $\rightarrow$ A3) a 3. mellékletben található.

## 5 Összefoglalás

A dátumtranszformáció az egyik leggyakrabban előforduló számítási feladat a geodéziában, fotogrammetriában, térinformatikában, animációban és a számítógépes megjelenítésben. A hagyományos módszer hátránya, hogy a forgásszögek meghatározása erősen függ a paraméterek kezdeti értékeitől, amely szuper nagy forgásszögek esetén nem ad megoldást. A dolgozatban ismertetett módszer egység kvaterniót alkalmaz a térbeli forgatási mátrix meghatározásához. Ismerteti a kvaternió alapú geodéziái dátumtranszformáció iterációs megoldását linearizálással a Bursa-Wolf dátum-transzformációs modellben. A számítások azt mutatják, hogy a kvaternió alapú iterációs megoldás független a paraméterek kezdeti értékeitől, gyors és megbízható eredményt ad. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható a transzformációs paraméterek számításához. A kvaternió alapú dátum transzformációs megoldások közötti lényegi különbség a kvaternió eltérő számítási módszerében van. Analitikus megoldás eredményeként a  $\mathbf{Q}$  kvaternió  $q_0, q_1, q_2, q_3$  elemeit egy valódi szimmetrikus mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátértékének meghatározásával számítjuk. Ebben a dolgozatban bemutatott iteráció alkalmazásával a  $\mathbf{Q}$  kvaternió  $q_0, q_1, q_2, q_3$  elemei és a  $\lambda$  méretarány egy lépésben számíthatók.

**Köszönetnyilvánítás.** Őszinte és hálás köszönetet mondok Kádár István és Tóth Gyula tisztelt kollégáknak, továbbá a J Forums Programming tagjai közül Henry Rich, Mike Day és Raul Miller uraknak a feladat megoldásához és a program elkészítéséhez nyújtott önzetlen segítségükért.

### Hivatkozások

- Awange JL, Grafarend EW (2005): Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics, The answer to modern Challenges. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 333.  
 Bácsatyi L (2005): Az erdészeti térképek dátumtranszformációs kérdései. Geomatikai Közlemények, 8, 61-67.  
 Bácsatyi L (2005): Koordinátatranszformáció geoidundulációk becslésével. Geomatikai Közlemények, 8, 69-84.  
 Csepregi Sz (2001a): Forgatás. Geomatikai Közlemények, 4, 107-158.

- Csepregi Sz** (2001b): Forgatás, II. rész. Geomatikai Közlemények, 5, 253-268.
- Detrekői Á** (1991): Kiegyenlítő számítások Tankönyvkiadó, Budapest, 685.
- Grafarend EW, Awange LJ** (2003): Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group  $C7(3)$ ]. *J. Geod.* 77, 66–76.
- Hofmann-Wellenhof BH, Kienast G, Lichtenegger H** (1994): *GPS in der Praxis*. Springer Verlag, Wien-New York, 146.
- Hoffman-Wellenhof BH, Lichtenegger H, Collins J** (2001): *GPS Theory and Practice*. Fifth revised Ed. Springer Verlag, Wien, New York, 382.
- Horn BKP** (1987): Closed-form solution of absolut orientation using unit quaternions. *J. Opt. Soc. Am. A*, 4(4), 629-642.
- Kleusberg A, Teunissen PJG** (Eds.) (1996): *GPS for Geodesy, Lecture Notes in Earth Sciences 60*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Leick A** (2004): *GPS satellite surveying*. 3rd edn. Wiley, Hoboken.
- Papp E, Szűcs L, Varga J** (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. *Reports on Geodesy*, 4(27), 265-280.
- Papp E, Szűcs L, Varga J** (2002): Hungarian GPS Network Transformation into Different Datums and Projection Systems. *Per. Pol. Civ. Eng.*, 46(2), 199-204.
- Papp E, Szűcs L** (2005): Földi és műholdas hálózatok transzformációja. *Geomatikai Közlemények*, 8, 85-92.
- Papp E** (2013): Geodéziai dátumtranszformáció kvaternióval. *Geomatikai Közlemények*, 16, 17-28.
- Shen YZ, Chen Y, Zheng DH** (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. *J. Geod.* 80, 233–239.
- Vaníček P, Steeves RR** (1996): Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. *J. Geod.*, 70, 740-745.
- Vaníček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S** (2002): On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. *Geomatica*, 56(4), 329–340.
- Virág G, Borza T** (2007): Speciális transzformációs eljárások a valós idejű GNSS helymeghatározásnál. *Geomatikai Közlemények*, 10, 59-64.
- Welsch WM** (1993): A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. *Manuscr. Geod.* 17, 210–214.
- Yang Y** (1999): Robust estimation of geodetic datum transformation. *J. Geod.*, 73, 268–274.
- Závoti J** (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. *Geomatikai Közlemények*, 2, 149.
- Závoti J** (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. *Geomatikai Közlemények*, 8, 53-60.
- Závoti J, Jancsó T** (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 41(1), 87-100.
- Závoti J** (2012): A simple proof of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation. *Geomatikai Közlemények*, 2, 149. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 47(4), 453-464.
- Závoti J** (2014): Néhány alternatív megoldási lehetőség a 3D nemlineáris hasonlósági dátumtranszformáció alkalmazására a Bursa-Wolf modell viszonylatában. *Geomatikai Közlemények*, 17, 7-17.
- Zeng H, Yi Q** (2011): Quaternion-Based Iterative Solution of Three-Dimensional Coordinate Transformation Problem. *J. of Computers*, 6(7), 1361-1368.

## 1. Melléklet

```

=====
Térbeli HELMERT transzformáció
Közös pontok
PSZ      Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
=====
KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude      4157222.543  664789.307  4774952.099  4157870.237  664818.678  4775416.524
Bouch Zeil    4149043.336  688836.443  4778632.188  4149691.049  688865.785  4779096.588
Hohenneuffen 4172803.511  690340.078  4758129.701  4173451.354  690369.375  4758594.075
Kuehlenberg  4177148.376  642997.635  4760764.800  4177796.064  643026.700  4761228.899
Ex Mergelaec 4137012.190  671808.029  4791128.215  4137659.549  671837.337  4791592.531
Ex Hof Asperg 4146292.729  666952.887  4783859.856  4146940.228  666982.151  4784324.099
Ex Kaisersbach 4138759.902  702670.738  4785552.196  4139407.506  702700.227  4786016.645
n = 7 közös pont
=====
Transzformációs paraméterek
Eltolás      Elforgatás      Méretarány
641.88042526179925  0  0  _0.998497667920  1.0000055825198619
68.65534526761621  0  0  0.893695765060
416.39818473067135  0  0  0.993087724442
=====
MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
PSZ      ex      ey      ez      e
Solitude      94      135     140     216
Bouch Zeil    59      _50     14      78
Hohenneuffen _40     _88     _8      97
Kuehlenberg  20      _22     _87     92
Ex Mergelaec _92     14      _5      93
Ex Hof Asperg _12     7       _55     56
Ex Kaisersbach _29     4       2       30
=====
Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660919533681
=====
Q kvaternió
q0 = 0.99999999999183
q1 = 0.00000242043186
q2 = _0.00000216637384
q3 = _0.00000240731782
=====
PSZ      Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]
=====
KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude      4157222.543  664789.307  4774952.099  4157870.143  664818.543  4775416.384
Bouch Zeil    4149043.336  688836.443  4778632.188  4149690.990  688865.835  4779096.574
Hohenneuffen 4172803.511  690340.078  4758129.701  4173451.394  690369.463  4758594.083
Kuehlenberg  4177148.376  642997.635  4760764.800  4177796.044  643026.722  4761228.986
Ex Mergelaec 4137012.190  671808.029  4791128.215  4137659.641  671837.323  4791592.536
Ex Hof Asperg 4146292.729  666952.887  4783859.856  4146940.240  666982.144  4784324.154
Ex Kaisersbach 4138759.902  702670.738  4785552.196  4139407.535  702700.223  4786016.643
=====

```

## 2. Melléklet: Transzformációs paraméterek az OGPSH hálózatban

**24 OGPSH pont****Bemérés**

```

Transzformációs paraméterek
Eltolás      Elforgatás      Méretarány
_47.74933355068788  0  0  _0.306123213089  0.9999978420534464
69.28009660798125  0  0  0.065932597122
10.99731061328203  0  0  _0.470624405449

```

Súlyegység középhibája: m0 = 0.32418473225812611

Q kvaternió
1.0000000000084597
7.4206342672792757e_7
_1.5982597214247128e_7
1.1408256335389682e_6

**Kitűzés**

Transzformációs paraméterek				
Eltolás	Elforgatás	Méretarány		
47.74935320112854	0 0	0.306125542704	1.0000021579310256	
_69.28051680489443	0 0	_0.065929942692		
_10.99732533283532	0 0	0.470620253133		

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.32418543185011989$

Q kvaternió
1.000000000028832
_7.420694385260523e_7
1.598178444942707e_7
_1.1408158052317323e_6

**43 OGPSH pont****Bemérés**

Transzformációs paraméterek				
Eltolás	Elforgatás	Méretarány		
47.09508530888706	0 0	_0.263031423410	0.9999979020935977	
67.88758528418839	0 0	0.096979283117		
10.49353692680597	0 0	_0.488204349211		

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.37292550986285794$

Q kvaternió
1.0000000000161495
6.3760588495626314e_7
_2.3508517076049823e_7
1.1834405885019062e_6

**Kitűzés**

Transzformációs paraméterek				
Eltolás	Elforgatás	Méretarány		
47.09497904544696	0 0	0.263031877562	1.0000020978234070	
_67.88777068816125	0 0	_0.096984020876		
_10.49331891443580	0 0	0.488207751280		

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.37292629218370243$

Q kvaternió
1.0000000000161102
_6.3760754228436853e_7
2.3509514626974617e_7
_1.1834491351408273e_6

**1151 OGPSH pont****Bemérés**

Transzformációs paraméterek				
Eltolás	Elforgatás	Méretarány		
53.41677052946761	0 0	_0.142687542710	0.9999979573950024	
64.83007477363572	0 0	_0.176147624255		
16.46131046582013	0 0	_0.500099162842		

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.25089733292931155$

Q kvaternió
0.9999999999911493
3.4588488178171987e_7
4.2699347136121136e_7
1.2122747279752629e_6



**Kitűzés**

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás		Méterarány	
53.41677542310208	0	0	0.142687970732	1.0000020425996745
_64.83033450064249	0	0	0.176147278043	
_16.46120944619179	0	0	0.500099281061	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.25089784540894433$

Q kvaternió
0.99999999999911515
_3.4588488407018902e_7
_4.2699347073473769e_7
_1.2122747191661935e_6

**3. Melléklet: Tesztfeladatok szimulált koordinátákkal****B→A1 kis forgásszögek**

=====

Térbeli HELMERT transzformáció  
Közös pontok  
PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.000	30.000	5.000	40.437	59.903	14.682				
20.000	30.000	12.500	50.367	59.847	22.275				
30.000	30.000	15.000	60.343	59.721	24.867				
10.000	20.000	9.500	40.235	49.967	19.319				
20.000	20.000	11.000	50.219	49.828	20.911				
30.000	20.000	10.000	60.227	49.645	20.005				
10.000	10.000	14.500	40.028	40.038	24.455				
20.000	10.000	4.500	50.117	39.740	14.549				
30.000	10.000	4.000	60.120	39.573	14.142				

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek

Eltolás	Elforgatás		Méterarány	
29.99823028266335	0	47	31.252012352985	1.0000227366253285
30.00046987693159	0	31	14.217921271189	
10.00006743257287	0	55	43.247783217219	

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.0018259779959799709$

Q kvaternió

q0 = 0.99993321081940  
q1 = \_0.00687445845693  
q2 = \_0.00459897112805  
q3 = \_0.00807249565128

=====

**B→A2 nagy forgásszögek**

=====

Térbeli HELMERT transzformáció  
Közös pontok  
PSZ Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

KOORDINÁTA JEGYZÉK

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10.000	30.000	5.000	53.325	51.360	5.028				
20.000	30.000	12.500	61.051	51.648	14.850				
30.000	30.000	15.000	69.312	49.212	20.514				
10.000	20.000	9.500	47.733	46.333	13.009				
20.000	20.000	11.000	56.101	43.353	17.841				
30.000	20.000	10.000	64.737	39.011	20.593				
10.000	10.000	14.500	42.087	41.578	21.407				
20.000	10.000	4.500	51.686	32.334	16.672				
30.000	10.000	4.000	60.269	28.265	19.840				

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek  
 Eltolás                   Elforgatás                   Méterarány  
 30.00016823367852   33   12   48.492700493240   1.0000199563410337  
 29.99992344722332   6   8   46.053501577288  
 9.99954877705121   30   55   48.205836123700

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.00026419635541306141$

Q kvaternió  
 $q_0 = -0.92634995571619$   
 $q_1 = 0.26135833670539$   
 $q_2 = 0.12561249996497$   
 $q_3 = 0.24039359232675$

### **B→A3 szupernagy forgásszögek**

Térbeli HELMERT transzformáció  
 Közös pontok  
 PSZ   Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=====

	KOORDINÁTA JEGYZÉK					
1	10.000	30.000	5.000	52.116	7.239	14.222
2	20.000	30.000	12.500	58.807	9.608	24.512
3	30.000	30.000	15.000	61.443	9.072	34.463
4	10.000	20.000	9.500	49.949	17.746	16.493
5	20.000	20.000	11.000	51.773	16.629	26.376
6	30.000	20.000	10.000	51.570	14.060	36.090
7	10.000	10.000	14.500	48.187	28.543	18.797
8	20.000	10.000	4.500	40.683	20.745	27.902
9	30.000	10.000	4.000	40.886	18.466	37.650

n = 9 közös pont

=====

Transzformációs paraméterek  
 Eltolás                   Elforgatás                   Méterarány  
 30.00013025653966   83   21   12.807039002248   1.0000122196695893  
 29.99996363904662   \_54   \_12   \_9.233917704114  
 10.00005582802216   84   2   6.798470068257

Súlyegység középhibája:  $m_0 = 0.0003189606494462068$

Q kvaternió  
 $q_0 = -0.29121896346376$   
 $q_1 = 0.66752016745323$   
 $q_2 = 0.14341112073731$   
 $q_3 = 0.67010565719982$

=====



# A FÖLD KÖZEL NAPOS PERIÓDUSÚ NUTÁCIÓJÁNAK KIMUTATÁSA A SOPRONBÁNFALVI EXTENZOMÉTERES ADATOK ALAPJÁN – ELŐZETES EREDMÉNYEK

Mentes Gyula\*, Bán Dóra\*, Eperné Pápai Ildikó\*



**Detection of the near-diurnal period of the nutation of the Earth on the basis of the Sopronbánfalva extensometric data – Preliminary results** – *The axis of the fluid outer core of the Earth and the rotation axis of the mantle do not coincide, therefore restoring forces arise at the core-mantle boundary which try to realign the two axes and generate resonance effect at the same time. In celestial reference system this phenomenon is called the “Free Core Nutation” (FCN), which can be characterized by a period of 432 days, while in the Earth reference system it is called the “Nearly Diurnal Free Wobble” (NDFW). The NDFW frequency is close to the diurnal tidal frequencies, especially to P1 and K1 waves. Due to its resonance effect this phenomenon can be detected also by extensometers suitable for Earth tides recording. In this study the first attempts to detect the FCN on the basis of 11 years-long extensometric data series are described. The presence of the FCN resonance in the case of the K1 constituent is obvious while in the case of the P1 wave further investigations are needed.*

**Keywords:** Earth tides, extensometer, core-mantle boundary, free core nutation, resonance, tidal factors

A Föld folyékony külső magjának tengelye és a köpeny pillanatnyi forgástengelye nem esik egy vonalba, és emiatt visszatérítő erők hatnak a mag-köpeny határon, amelyek megpróbálják a két tengelyt egy egyenesbe hozni. Ennek következtében rezonancia lép fel a napos árapály frekvencia tartományban. Égi vonatkoztatási rendszerben a jelenség neve Free Core Nutation (FCN), mely 432 napos periódussal jellemezhető, míg a földi vonatkoztatási rendszerből szemlélve a Nearly Diurnal Free Wobble (NDFW) elnevezés használatos. Ennek frekvenciája közel esik az árapály egynapos frekvenciáihoz, különösen a P1 és K1 hullámokhoz. A jelenség kimutatható például az árapály mérésére is alkalmas extenzométer segítségével. Ebben a tanulmányban az FCN kimutatásának első próbálkozásait írjuk le 11 éves extenzométeres adatsor alapján. Az FCN rezonancia a K1 összetevő esetében nyilvánvaló, míg a P1 hullám esetében további vizsgálatokra van szükség.

**Kulcsszavak:** árapály, extenzométer, mag-köpeny határ, szabad mag nutáció, rezonancia, árapály faktorok

## 1 Bevezetés

Az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet (MTA CSFK GGI) Geodinamika Kutatócsoportja a földi árapály regisztrálása mellett nemzetközi együttműködésben extenzométerekkel vizsgálja a Pannon-medence recens kéregmozgásait (Mentes 2008, 2012). A Pannon-medencében levő extenzométeres állomásokon (1. ábra) kvarccsöves extenzométerekkel történik a regisztrálás. A műszerek mechanikai részei az egykori Szovjetunió Tudományos Akadémiájának Geofizikai Intézetében készültek az 1980-as és az 1990-es években (Latynina et al. 1984). Az extenzométerek kapacitív mérőátalakító érzékelőjét az akkori MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézetben (MTA GGKI), ma MTA CSFK GGI fejlesztették ki (Mentes 1991). Ugyancsak az MTA GGKI-ben készült egy nagy pontosságú hordozható kalibrátor a műszerek in-situ kalibrálására (Mentes 2010a, Mentes 2010b). Az egyes obszervatóriumok műszereinek rendszeres, egy-két évenkénti, kalibrálását szintén a GGI végzi. Az azonos műszerezettség jó lehetőséget nyújt a különböző adottságú (geológia, topográfia, környezeti paraméterek hatása, üreghatás, stb.) obszervatóriumokban mért adatok értelmezéséhez, összehasonlításához (Eper-Pápai et al. 2014), amely nagymértékben hozzájárul a Pannon-medence tektonikai mozgásainak jobb és pontosabb megismeréséhez (Mentes 2008, 2012).



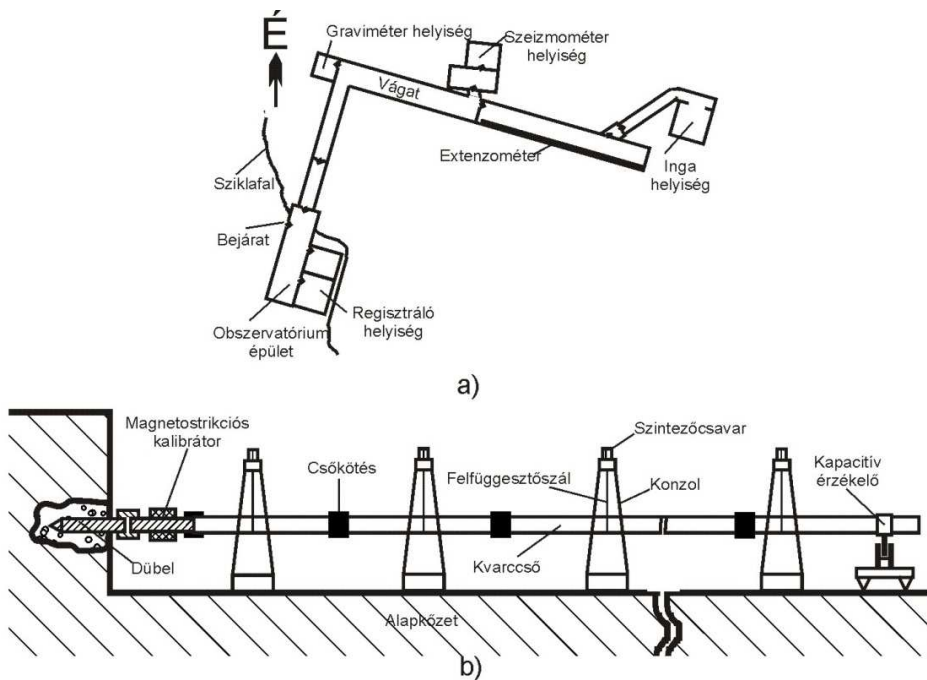
1. ábra. A Pannon-medence extenzométeres állomásai

Az extenzométeres mérések jól használhatók olyan globális problémák vizsgálatára is, mint a Föld folyékony magjának közel napos rezonanciája (Boyersky et al. 2003, Ping et al. 2004, Amoroso et al. 2012). Az MTA CSFK GGI Geodinamika Kutatócsoportja 2014-ben célul tűzte ki a szabad nutáció (Free Core Nutation, FCN) vizsgálatát a különböző obszervatóriumokban (1. ábra, Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatórium, Mátyáshegyi Gravitációs Obszervatórium, Pécsi Uránbánya, Bakonya, Vyhne-i Árapály Obszervatórium [Szlovákia], Beregszász [Ukrajna]) mért extenzométeres adatok alapján. Az egymástól eltérő geológiai, környezeti, stb. adottságú obszervatóriumokban mért adatok összehasonlítása hozzájárulhat a szabad nutáció megfigyelését zavaró hatások kiszűréséhez. Ennek a tanulmánynak a célja annak megvizsgálása, hogy a Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatóriumban (SGO) mért 11 éves (2000-2010) deformációs árapály adatsorból ki lehet-e mutatni az FCN-nek a napos periódusú KI (egész napos luniszoláris elliptikus hullám) és a P1 (egész napos fő szoláris hullám) árapály hullámokra gyakorolt hatását. A kutatás későbbi fő célja az FCN frekvenciájának pontosabb meghatározása, amelyhez a jelenség további tanulmányozását több obszervatóriumban mért adatok alapján tervezzük.

## 2 A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatórium és a kvarccsöves extenzométer

Az obszervatórium Sopron központjától kb. 5 km távolságra, Sopronbánfalván, Sopron kertvárosában, az Alpok keleti lábánál helyezkedik el. Koordinátái: északi szélesség  $47^{\circ}40'55''$ ; keleti hosszúság  $16^{\circ}33'32''$ ; tengerszint feletti magasság: 280 m. Az obszervatórium gneiszből kialakított mesterséges vágat, amely felett kb. 60 m kőzet helyezkedik el. Az obszervatórium alaprajzát az extenzométer elhelyezkedésével együtt a 2a. ábra mutatja. Az extenzométer hermetikusan lezárt vágatrészben helyezkedik el, a megfelelő hőmérsékletstabilitást a három-ajtós zsiliprendszer biztosítja. Az éves hőmérsékletváltozás az extenzométernél kisebb mint  $0.5^{\circ}\text{C}$ , míg a napi változás  $0.05^{\circ}\text{C}$  alatt van.

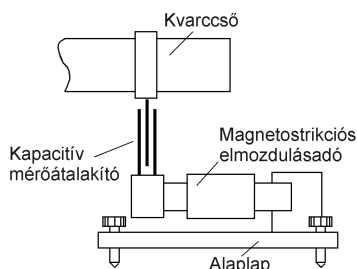
Az extenzométer felépítése a 2b. ábrán látható. A 22 m hosszú extenzométer 2-2.5 m hosszúságú, 45 mm átmérőjű és 2.5 mm falvastagságú kvarccsövekből áll, amelyek speciális kötéssel csatlakoznak egymáshoz. A csökötés három invar profillemézét csavarok fogják össze. A lemezek, valamint a kvarccsövek között kétkomponensű ragasztó, kvarchomok és cement keveréke van, ami rendkívül szilárd és stabil kötést biztosít (Mentes 1991, 2010a, 2010b). Az összeerősített kvarccsövet 2-3 méterenként elhelyezett konzolok tartják  $20\ \mu\text{m}$  átmérőjű, kb. 25 cm függőleges belógású invar huzalok segítségével. A konzolokon található szintezőcsavar a cső vízszintesítésére szolgál. A kvarccső egyik vége egy magnetrokriós elmozdulásadóhoz (kalibrátor) kapcsolódik, amely az alapkőzetbe erősített rozsdamentes acélból készült csaphoz (dübel) csatlakozik. A cső másik vége szabad. Ezen a végen helyezkedik el a differenciál kondenzátoros elmozdulás érzékelő középső lemeze, amely az alapkőzethez fixen rögzített állólemezek között mozog. A vékony és elegendően hosszú felfüggesztőszálak könnyen hajlanak, és nem akadályozzák a cső szabad mozgását, így az alapkőzetbe erősített csap mozgása akadályoztatás nélkül jut el a kapacitív mérőátalakítóhoz (Mentes 1983, 2010a, 2010b). A kapacitív érzékelő kimenő jelét egy 24 bites A/D konverter (PREMA Digital Multimeter 5017 és 5017SC 48 csatornás analóg multiplexer) segítségével digitalizáljuk és számítógépen regisztráljuk. Az adatok interneten keresztül lekérdezhetők. Az extenzométer érzékenysége:  $2.093 \pm 0.032\ \text{nm/mV}$  ( $1\ \text{nm} = 10^{-9}\ \text{m}$ ).



2. a) és b) ábra. A Sopronbánfalvi Geodinamikai Observatórium alaprajza, és a kvarccsöves extenzométer felépítése

Az igen kicsi geodinamikai deformációk megbízható mérése céljából a műszerek nagyon stabilnak kell lennie. Különösen a lassú tektonikai deformációk választhatók el nehezen a műszerparaméterek lassú, hosszúidejű változásaitól (drift), ami miatt a műszer helyes működésének állandó ellenőrzésére van szükség. A napi ellenőrzést szolgálja az extenzométerbe beépített magneostroikciós kalibráló egység (2b ábra). Ez egy permendúr magos tekercs, amelyre adott áramot kapcsolva a permendúr mag megváltoztatja a hosszát, ezáltal a kvarccsövet kismértékben elmozdítja, amit a kapacitív érzékelő regisztrál. Naponta 5 perc időtartamra szigorúan konstans (150 mA) áramot kapcsolva a tekercsre, a regisztrált impulzus amplitúdójából következtetni lehet a műszer paramétereinek változására. Ez az ellenőrzési mód csak a cső, ill. az elektronika stabilitásának ellenőrzésére alkalmas. Mivel magának a beépített kalibrátornak a paraméterei is változhatnak, ezért az extenzométer in-situ, obszervatóriumi kalibrálására egy közvetett interferométeres módszert fejlesztettünk ki. Mivel a rendelkezésünkre álló HP 5508 lézerinterferométer felbontóképesége  $0.1 \mu\text{m}$ , ezért meg kellett oldanunk az interferométer felbontóképeségének alóasztását, hogy nm ( $10^{-9}$  m) nagyságrendű elmozdulásokat is megbízhatóan tudjunk mérni.

A kalibráló berendezés egy talpcsavarokkal szintezhető, merev alaplaphoz erősített magneostroikciós elmozdulásadóból áll, amelynek szabad, mozgó vége egy differenciál-kondenzátoros kapacitív mérőátalakító állólemezeit tartja. A differenciálkondenzátor mozgó középső lemeze pedig az extenzométer csövéhez csatlakozik. A kalibráló berendezés felépítését a 3. ábra mutatja. Az extenzométer saját és a kalibráló berendezés kapacitív érzékelőivel párhuzamosan regisztráljuk az extenzométer szabad végének elmozdulását. A hordozható kalibrátort, minden obszervatóriumi kalibrálás előtt és után, laboratóriumban lézerinterferométerrel kalibráljuk. A laboratóriumi kalibrálás a Mentés (2010a, 2010b) által leírt módon történik, amelynek során mind a hordozható kalibrátor karakteristikáját, mind pedig az elmozdulásimpulzusok nagyságát nagy pontossággal meghatározzuk.



3. ábra. A hordozható in-situ kalibráló berendezés felépítése

A hordozható kalibrátorral az extenzométer kétféle módon kalibrálható. Az első módszer esetében az extenzométer beépített kalibrátorának, valamint a hordozható kalibrátor impulzusait regisztráljuk és a hordozható kalibrátor skálatényezőjének segítségével a beépített kalibrátor elmozdulását meghatározzuk. A másik módszer szerint az extenzométer saját és a hordozható kalibrátor kapacitív érzékelőjével hosszabb ideig párhuzamos árapály regisztrálást végzünk és a két görbe korrelációjával az extenzométer skálatényezője (érzékenysége) meghatározható

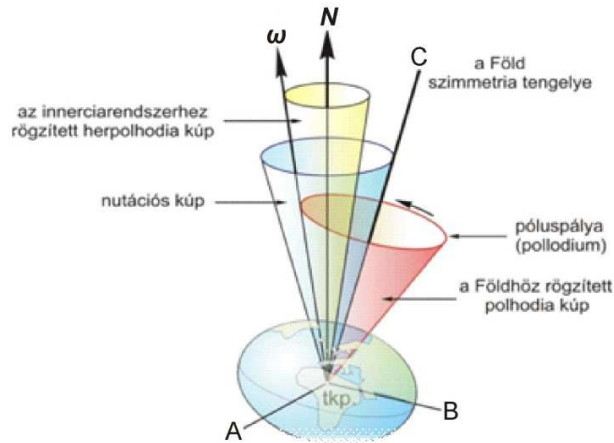
### 3 Az FCN kimutatásának elméleti alapjai

A Föld, mint merev test tengelykörüli forgása a 4. ábrán látható. A Föld forgó, külső folyékony magja és a forgó, elliptikus rugalmas földköpeny közötti dinamikus hatás (5. ábra), a Chandler-perióduson (Rochester és Smylie 1965) kívül, a rotációs spektrumban egy második sajátmódus is vezet. Ez a módus a pillanatnyi forgástengely ( $\omega$ ) szimmetriatengelyhez ( $C$ ) viszonyított retrográd forgásaként írható le, mely jelenség neve a szakirodalomban „Nearly Diurnal Free Wobble” (NDFW). Földhöz rögzített koordinátarendszerben sajátperiódusa közel esik az egy csillagászati naphoz. Másrészt ez a mozgás magában foglalja a pillanatnyi forgástengely ( $\omega$ ) impulzusmomentum ( $N$ ) irányához viszonyított mozgását is. Ez az ún. „Free Core Nutation” (FCN), melynek amplitúdója nagyjából 460-szor nagyobb, mint az NDFW amplitúdója, és az elméleti periódusa körülbelül 460 csillagászati nap, külső vonatkoztatási rendszerből szemlélve. A Föld folyékony külső magjának tengelye és a köpeny pillanatnyi forgástengelye nem esik egybe, és emiatt visszatérítő erők hatnak rá, rezonancia lép fel (Free Core Resonance, FCR). A rezonanciafrekvencia (Amoruso et al. 2012):

$$f_{FCR} = 1 + \frac{1}{T_{FCN}} . \quad (1)$$

A  $T_{FCN}$  értéke közelítőleg 460 nap, de a gyakorlatban elfogadott kísérleti érték kb. 430 nap (Wahr 1981). Ennek következtében néhány egész napos periódusú árapályhullám amplitúdója (főleg a P1, K1,  $\psi_1$  és  $\phi$ ), amelyeknek frekvenciája közel esik az  $f_{FCR}$ -hez, módosul. Ezek a rezonáns módosult hullámok használhatók fel az FCN tanulmányozására.

Az 6. ábra mutatja a P1 és K1 hullámok amplitúdóinak csökkenését az FCN következtében (Bo-yarsky et al. 2003). Az FCN által okozott deformációs terhelés nagyobb, mint a gravitáció változása, így a rezonancia által okozott amplitúdó változás is nagy, ezért az extenzométerek jobban használhatók az FCN tanulmányozására, mint a graviméterek, annak ellenére, hogy ezen utóbbi műszerek nagy érzékenységgel és nagy jel/zaj viszonytal rendelkeznek. A 6. ábrából látható, hogy az O1 hullám frekvenciája távol esik az FCR frekvenciától, ezért az nem módosul. Mivel a napos periódusú hullámokra gyakorolt zavaró hatások (geológia, topográfia, üreghatás, környezeti paraméterek, stb.) egyformán hatnak az összes hullámra, ezért az FCN tanulmányozásához a P1 és K1 hullámok amplitúdófaktorait célszerű az O1 (egész napos fő lunáris hullám) amplitúdófaktorához viszonyítani (Defraigne et al. 1994), hogy a zavaró hatások kiessenek.



4. ábra. Az Euler-féle szabadnutáció inerciarendszerből szemlélve (Völgyesi 2002). C és  $\omega$  a Föld szimmetria-, ill. forgástengelye, N az impulzusmomentum iránya



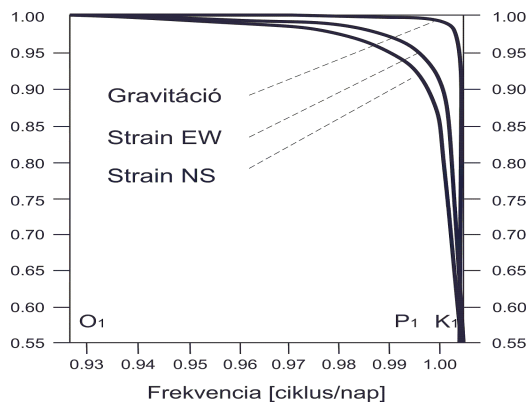
5. ábra. A folyékony mag és a köpeny közötti dinamikus hatás

Az elméletileg becsült arányok csak 1-2 %-kal térnek el a különböző földmodellek esetében (Boyarsky et al. 2003). Az átlagos ÉD-i (NS) és KNY-i (EW)  $\varepsilon$  és  $\eta$  deformáció komponensek a  $\varphi$  amplitúdófaktorok (mért/elméleti árapály) arányából számítva a következők (Boyarsky et al. 2003):

$$\varepsilon_{P1} = \varphi_{NS}(P1) / \varphi_{NS}(O1) = 0.90 \quad \varepsilon_{K1} = \varphi_{NS}(K1) / \varphi_{NS}(O1) = 0.65 \quad (2)$$

$$\eta_{P1} = \varphi_{EW}(P1) / \varphi_{EW}(O1) = 0.94 \quad \eta_{K1} = \varphi_{EW}(K1) / \varphi_{EW}(O1) = 0.80 \quad (3)$$

Vizsgálatainkhoz első közelítésben a fenti arányokat használjuk, mivel jelenlegi célunk csak az FCN kimutathatóságának vizsgálata.



6. ábra. A P1 és K1 hullámok amplitúdóinak módosulása az FCN következtében (Boyarsky et al., 2003)



### 3 Eredmények és diszkusszió

A vizsgálatokhoz a 2000 és 2010 között regisztrált éves adatsorokat használtuk fel. A feldolgozást évenként végeztük, mivel a K1 és P1 hullámok éves adatsorokból jól kimutathatók, és így lehetőségünk volt a kapott eredmények összehasonlítására. Az adatok árapály-feldolgozását az ETERNA 3.4 programcsomaggal (Wenzel 1996) végeztük. Az adatok először korrígálatlanul (UNC), majd a légnyomást korrígálva kerültek kiértékelésre. A légnyomás hatásának korrígálására öt módszert alkalmaztunk: az ETERNA program beépített lineáris regressziós korrekcióját (EC), egy külön lineáris regressziós korrekciót (RC), és három különböző neurális hálózattal (NNW1, NNW2 és NNW3) történő korrekciót (Mentes 2015). Az egy- és félnapos árapály frekvenciatartományban sem az obszervatórium, sem pedig a műszer nem érzékeny a hőmérsékletváltozásra (Mentes 2000, Mentes és Eper-Pápai 2006, Eper-Pápai et al. 2014), ezért a hőmérsékleti korrekciótól eltekintettünk, mivel annak hatása csak a hosszuperiódusú (éves) tartományban jelentős. Első közelítésben ugyancsak eltekintettünk az óceáni terhelés korrekciójától, mivel az a különböző óceáni modellek esetében is csak kb. 2%-kal javítja az amplitúdófaktorok értékeit. A P1/O1 és a K1/O1 amplitúdófaktorok évenként (2000-2010) számított hányadosait az 1. és 2. táblázatokban foglaltuk össze. A táblázatok utolsó két sora a különböző légnyomás-korrekciókkal kapott hányadosok évenkénti átlagát és szórását, míg a táblázatok utolsó két oszlopa a 11 évben kapott hányadosok átlagértékét és azok szórását mutatja különböző légnyomás korrekciók esetében. Mivel a sopronbánfalvi extenzométer közel K-Ny-i (EW) irányú, ezért a kapott amplitúdófaktor hányadosokat az elméleti  $\eta_{P1} = 0.94$  és az  $\eta_{K1} = 0.80$  értékekkel hasonlítottuk össze. Az  $\eta_{K1}$  értékek elég jól közelítik az elméleti 0.80 értéket, különösen az NNW3 neurális hálózattal végzett légnyomás korrekció esetében. A 11 év átlagértéke 0.807, és a szórás 0.032. Az  $\eta_{P1}$  értékek azonban lényeges eltérést mutatnak az elméleti 0.94 értéktől. Az elméletihez legközelebbi értéket ebben az esetben is az NNW3 hálózattal történő légnyomás korrekcióval kaptuk. Hogy magyarázatot találjunk a jelenségre, meghatároztuk az SGO árapály átvitelét jellemző koherencia függvényt (Mentes 2012) a különböző korrekciók esetében (7. ábra). Érdekes módon az extenzométeres adatok neurális hálózattal történő légnyomás korrekciója esetében az obszervatórium átvitelére rosszabb értékeket kaptunk, mint a többi esetben. Ennek oka talán az, hogy a koherencia értéke a fázisszögnek is függvénye. Megállapítottuk, hogy az ETERNA programmal végzett légnyomás korrekció jelentősen megváltoztatja néhány hullám fázisát. A neurális hálózattal végzett korrekció ezeket változatlanul hagyja, azonban más hullámok fázisát változtatja meg, amelyek nagyobb hatással vannak a kapott átviteli értékekre (ld. részletesen Mentes 2015). Boyarsky et al. (2003) az általunk kapott eredményekhez hasonlóakat kaptak a Protvino obszervatóriumban végzett extenzométeres mérésekből. Az elméletnek teljesen ellentmondó  $\eta_{P1}$  értékek okaként az obszervatórium hőmérsékletfüggését tételezték fel, azonban a hőmérséklet korrekciójával sem kaptak jobb eredményeket. Ez azonban nem jelenti azt, hogy a hőmérséklet hatását figyelmen kívül lehet hagyni. Gebauer et al. (2010) végeselem modellezései alapján az SGO érzékeny a légnyomásváltozásokra és az időjárási frontokra.

**1. táblázat.** A P1/O1 amplitúdó faktorok hányadosai különböző légnyomás korrekcióval ellátott extenzométeres adatsorok esetében. UNC nem korrígált, EC ETERNA programmal, RC lineáris regressziós módszerrel, NNW1, NNW2, NNW3 különböző neurális hálózatokkal korrígált adatsorok (Mentes, 2015)

Ext. adat	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	átlag	szórás
UNC	0.479	0.533	0.438	0.480	0.487	0.268	0.688	0.831	0.171	0.287	0.399	0.460	0.187
EC	0.698	0.684	0.773	0.634	0.694	0.702	0.769	0.568	1.122	0.719	0.612	0.725	0.145
RC	0.477	0.233	0.424	0.304	0.437	0.279	0.820	0.817	0.381	0.216	0.449	0.440	0.207
NNW1	0.625	0.671	0.760	0.651	0.600	0.556	1.000	0.800	0.317	0.386	0.705	0.643	0.188
NNW2	0.451	0.553	0.411	0.540	0.370	0.510	0.324	0.840	0.642	0.400	0.198	0.476	0.171
NNW3	0.708	0.898	0.866	0.835	0.780	0.749	0.649	0.884	0.773	0.430	0.536	0.737	0.149
Átlag	0.573	0.596	0.612	0.574	0.561	0.511	0.708	0.790	0.568	0.406	0.483	0.580	0.175
Szórás	0.118	0.220	0.209	0.179	0.158	0.204	0.225	0.112	0.349	0.173	0.178	0.137	0.024

**2. táblázat.** A K1/O1 amplitúdó faktorok hányadosai különböző légnyomás korrekcióval ellátott extenzométeres adatsorok esetében. UNC nem korrigált, EC ETERNA programmal, RC lineáris regressziós módszerrel, NNW1, NNW2, NNW3 különböző neurális hálózatokkal korrigált adatsorok (Mentes, 2015)

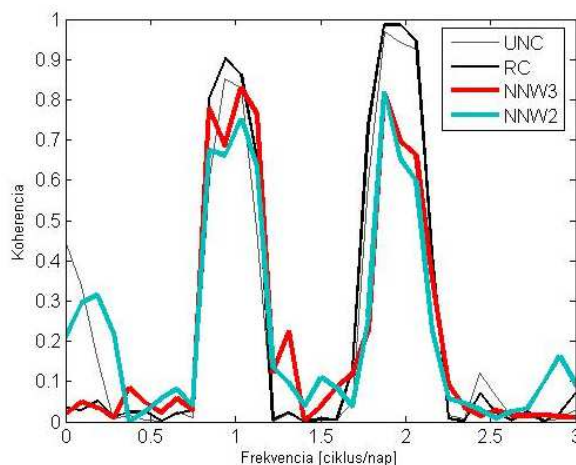
Ext. adat	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	átlag	szórás
UNC	0.671	0.683	0.682	0.697	0.733	0.773	0.711	0.668	0.861	0.765	0.679	0.720	0.059
EC	0.542	0.570	0.702	0.709	0.710	0.719	0.703	0.733	0.703	0.611	0.635	0.667	0.066
RC	0.695	0.520	0.706	0.720	0.731	0.753	0.696	0.658	0.772	0.673	0.660	0.689	0.067
NNW1	0.709	0.683	0.750	0.754	0.717	0.737	0.749	0.766	0.708	0.661	0.720	0.723	0.032
NNW2	0.618	0.643	0.602	0.730	0.767	0.704	0.729	0.676	0.724	0.890	0.616	0.700	0.084
NNW3	0.784	0.840	0.817	0.830	0.844	0.819	0.784	0.833	0.833	0.752	0.747	0.807	0.035
Átlag	0.670	0.657	0.710	0.740	0.750	0.751	0.729	0.722	0.767	0.725	0.676	0.718	0.057
Szórás	0.083	0.111	0.071	0.048	0.050	0.041	0.033	0.068	0.067	0.099	0.050	0.049	0.020

A pontosabb eredmények érdekében a jövőben a légnyomás korrekciója mellett az üreghatás korrekciójára is szükség lesz. Az  $\eta_{p1}$  értékeknek az elméletitől való eltérésének okaira több különböző obszervatórium adatainak kiértékelése adhatja meg a választ.

#### 4 Összefoglalás

A vizsgálat megmutatta, hogy extenzométeres mérésekből az FCN kimutatható, azonban az extenzométeres adatok további korrekciójára van szükség, hogy az FCN frekvenciáját is minél nagyobb pontossággal lehessen meghatározni. Ehhez nagy segítséget nyújthat, hogy négy különböző adottságú obszervatóriumban mért adatok állnak rendelkezésünkre. A vyhne-i és mátyáshegyi obszervatóriumok átvitele a napos árapályhullámok tartományában közel egy. Az obszervatóriumok topográfiája és geológiai környezete eltérő. A mélysztű extenzométer adatai a pécsi uránbányában (1040 m mélységben) és a közel fölötté elhelyezkedő felszíni bakonyai állomás eredményeinek összehasonlítása jó lehetőséget biztosít a topográfiai és geológiai hatások tanulmányozására. Ezen kívül további erőfeszítések szükségesek az extenzométeres adatok légnyomás és a hőmérséklet korrekciójának javítására, valamint az üreghatás figyelembevételére.

**Köszönetnyilvánítás.** Ezt a kutatást az OTKA támogatta a K109060 projekt keretében. Továbbá köszönet illeti Molnár Tibort a műszerek karbantartásáért és a kalibrálásokban nyújtott segítségéért.



**7. ábra.** A Sopronbánfalvi Geodinamikai Obszervatórium árapály átvitelét jellemző koherenciafüggvény különböző légnyomás korrekciók esetén. UNC nem korrigált, RC lineáris regressziós korrekció, NNW2 és NNW3 különböző neurális hálózattal való korrekció (Mentes 2015)

## Hivatkozások

- Amoruso A, Botta V, Crescentini L** (2012): Free Core Resonance parameters from strain data: sensitivity analysis and results from the Sasso (Italy) extensometers. *Geophys. J. Int.* 189, 923-936.
- Boyarsky EA, Ducarme B, Latynina LA, Vandercoilden L** (2003): An attempt to observe the Earth liquid core resonance with extensometers at Protvino Observatory. *Bull. d'Inf. Marrees Terr.*, 138, 10987-11009.
- Defraigne P, Dehant V, Hinderer J** (1994): Stacking gravity tide measurements and nutation observations in order to determine the complex eigenfrequency of the nearly diurnal free wobble. *J. Geophys.*, 99(B5), 9203-9213.
- Eper-Pápai I, Mentés Gy, Kis M, Koppán A** (2014): Comparison of two extensometric stations in Hungary. *Journal of Geodynamics*, 80, 3-11.
- Gebauer A, Steffen H, Kroner C, Jahr T** (2010): Finite element modelling of atmosphere loading effects on strain, tilt and displacement at multi-sensor stations. *Geophys. J. Int.*, 181, 1593-1612.
- Latynina LA, Szabó G, Varga P** (1984): Observations of the deformation of the Earth's crust in the "Mátyáshegy"-cave near Budapest. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 19(3-4), 197-205.
- Mentés Gy** (1983): Capacitive transducers for horizontal pendulums and gravimeters. *Acta Geod. Geoph. Mont. Hung.*, 18, 359-368.
- Mentés Gy** (1991): Installation of a quartz tube extensometer at the Sopron Observatory. *Bull. d'Inf. Marrees Terr.*, 110, 7936-7939.
- Mentés Gy** (2000): Influence of Temperature and Barometric Pressure Variations on Extensometric Deformation Measurements at the Sopron Station. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, 35(3), 277-282.
- Mentés Gy** (2008): Observation of recent tectonic movements by extensometers in the Pannonian Basin. *Journal of Geodynamics*, 45, 169-177.
- Mentés Gy** (2010a): Quartz tube extensometer for observation of Earth tides and local tectonic deformations at the Sopronbánfalva Geodynamic Observatory, Hungary. *Rev. Sci. Instrum.*, 81, 074501, DOI:10.1063/1.3470100
- Mentés Gy** (2010b): Húsz éves a sopronbánfalvi extenzométer. *Geodézia és Kartográfia*, 62(11), 3-11.
- Mentés Gy** (2012): Observation of local tectonic movements by a quartz-tube extensometer in the Sopronbánfalva Geodynamic Observatory, in Hungary – Validation of extensometric data by tidal analysis and simultaneous radon concentration measurements. *Journal of Geodynamics*, 58, 38-43.
- Mentés Gy** (2015): Artificial neural network model as a potential alternative for barometric correction of extensometric data. *Bull. d'Inf. Marrees Terr.*, 149, 12001-12012.
- Mentés Gy, Eper-Pápai I** (2006): Investigation of meteorological effects on strain measurements at two stations in Hungary. *J. Geodyn.*, 41(1-3), 259-267.
- Ping J, Tsubokawa T, Tamura Y, Heki K, Matsumoto KT, Sato T** (2004): Estimating the Fluid Core Resonance based on Strain Observation. *Bull. d'Inf. Marrees Terr.*, 139, 11015-11023.
- Rochester MG, Smylie DE** (1965): Geomagnetic CoreMantle Coupling and the Chandler Wobble. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 10, 289-315.
- Völgyesi L** 2002. A pólusmozgás fizikai alapjai. *Geomatikai Közlemények*, 5, 55-73.
- Wahr JM** (1981): Body tides of an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64, 677-703.
- Wenzel HG** (1996) The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bull. d'Inf. Marrees Terr.*, 124, 9425-9439.

# ÉVES HIDROLÓGIAI VÁLTOZÁSOK MEGHATÁROZÁSA GRACE GEOPOTENCIÁLIS MODELLEK SEGÍTSÉGÉVEL

Kiss Annamária\*, Földvály Lóránt\*



**Annual hydrologic variations from GRACE gravity models** – *The aim of the present study is to compare water storage variations from GRACE measurements and gauging data in the La Plata Basin for a time span of 5 and a half years. Annual curves have been fitted to the time series by means of different adjustment methods. Correlation between the original series and the curves has been determined, relationship of the annual amplitudes and phases has been investigated. According to our results, at the reliable hydrologic stations the annual phase shifts between the GRACE and the gauging series are only a few days, that implies the delay between precipitation and the subsequent runoffs.*

**Keywords:** water storage variation, annual gravity variation, GRACE

*Jelen tanulmányban a GRACE műholdak méréseiből meghatározott vízkészlet-változásokat hasonlítjuk össze folyók vízszintjeinek ingadozásával mintegy 5 és fél éves időtartamra, a La Plata vízgyűjtő területén. A vizsgált adatsorokra különféle kiegyenlítési módszerekkel éves periódusú görbéket illesztünk, melyek amplitúdójának és fázisának eltéréseit vizsgáljuk, valamint az illesztések sikerességét korrelációs számítással határozzuk meg. Eredményeink alapján a megbízható mérési adatokkal rendelkező hidrológiai állomásoknál a vízszintek és a műholdas mérésekből meghatározott tömeganomáliák éves fázisának eltérése csupán pár napos.*

**Kulcsszavak:** vízkészletváltozás, nehézségi erőteré éves változása, GRACE

## 1 Bevezetés

Földünk gravitációs erőterének folyamatos időbeli változását az atmoszféra, a hidroszféra és a geoszféra tömegátrendeződései okozzák. Ezen folyamatok közül szezonális változásokat jelentenek a légköri tömegek mozgásai, a hidrológiai folyamatok és az óceáni tömegtranszportok. A földi gravitációs tér periodikus változásainak meghatározásához nyújtanak segítséget a GRACE gravimetriai műholdpáros mérési adatai. A GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) immáron több mint egy évtizede szolgáltató hónapos felbontású geoidmodelleket, melyek feldolgozásával megállapíthatjuk a nagyobb kiterjedésű tömegátrendeződéseket eredményező folyamatok, így pl. a kontinentális vízkészlet éves és féléves periódusú változásait. Valamely vízgyűjtő hidrológiai folyamatainak vizsgálatához természetesen elengedhetetlen az egyes tömegek hatásának elkülönítése. A GRACE méréseit a legnagyobb szezonális tömegváltozást mutató atmoszférikus hatásokra előzetesen korrigálják, emellett hogyha kontinentális területet vizsgálunk, az óceáni tömegtranszportok nehézségi erőterre gyakorolt hatása nagyságrendekkel alacsonyabb az ottani hidrológiai folyamatok hatásánál. Így tehát a műholdas gravimetriai mérések lehetőséget nyújtanak arra, hogy a kontinentális vízkészletek periodikus változásait vizsgáljuk a többi tömegváltozás hatásától elkülönítve (Ilk et al. 2005).

Vizsgálati területnek a dél-amerikai La Plata vízgyűjtőjét választottuk, mivel ez az ötödik legnagyobb területű vízgyűjtő a Földön, így számos folyójának köszönhetően jelentős víztömegváltozások helyszínévé szolgált. A vízgyűjtőterület argentin folyóiról rendelkezésünkre áll több vízmérce adata a 2002 és 2008 közötti időszakról. Mivel a folyók lefolyásainak mennyisége alapvetően a vízgyűjtő területén összegyűlt víztömeg függvénye, vizsgálataink során a GRACE mérési eredmények és a vízszintadatok között keressük összefüggéseket. Jelen munka keretében hidrológiai adatokat és ürgravimetriai mérésekből levezetett éves tömegváltozásokat hasonlítunk össze.

\*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Általános- és Felsőgeodézia Tanszék  
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.  
E-mail: kiss.annamaria@epito.bme.hu

## 2 Felhasznált adatsorok

### 2.1 A GRACE mérései

A GRACE műholdpár 2002. március 17-én indult útjára a NASA és a DLR közös kezdeményezésére. A GRACE két, teljesen azonos műholdból épül fel, melyek egymást mintegy 220 km-re követve keringenek a Föld körül, identikus, közel poláris, majdnem kör alakú pályáikon. A GRACE a műholdak közötti távolság mikrométeres pontosságú folyamatos mérésének köszönhetően alkalmas a nehézségi erőter vizsgálatára. Ugyanis a műholdak közötti távolságnak a változásából következtetni lehet a műholdak pályájáért felelős nehézségi erőter térbeli változásaira. Természetesen ehhez szükséges a GRACE holdak helyzetének pontos ismerete is, mely a GNSS technika segítségével nagy pontossággal megoldható.

Indításkor a GRACE műholdakat 485 km-es pályamagasságra állították, ahol már szükséges számításba venni a légköri fékezéshatást, melyet a mesterséges holdak fedélzetén elhelyezett gyorsulásmérőkkel határoznak meg. A műholdak speciális elrendezésének és az alacsony keringési magasságnak köszönhetően azok különösen érzékenyek a nehézségi erőter nagyobb és közepes hullámhosszú komponenseire, valamint azok időbeli változásaira (Földváry 2004).

A GRACE mérési adatai alapján geoidmodelleket határoznak meg, melyeket a fejlesztők havi felbontásban tesznek közzé, 120 fok-, illetve rendszám értékig. A hónapos geoidmodellek a geoid éves- és féléves periódusú változásainak vizsgálatához nyújtanak alapot. A GRACE műholdak mérési adataiból számított együttthatók a CSR (Center for Survey Research, a Texasi Egyetem Űrkutató Központja) által közzétett adatbázisból szabadon hozzáférhetők. Jelen munkában összesen 65 hónapnyi gömbfüggvény-együtthatóval dolgoztunk, a 2002. áprilisa és 2007. novembere közötti időszakból.

### 2.1 A hidrológiai adatok

Az összehasonlításhoz szükséges vízmérce adatok is jellemzően a fentebb megnevezett időszakokra állnak rendelkezésünkre, túlnyomóan napi mintavételezési sűrűséggel, de előfordul óránkénti és havi felbontású adatsor is. Ezek a hidrológiai adatok a La Plata vízgyűjtő argentin területén lévő hét folyója mentén elhelyezkedő 21 állomáson létesített vízmércék regisztrálásából származnak. Az 1. ábrán tekinthető meg a felhasznált hidrológiai állomások elhelyezkedése.

## 3 Előfeldolgozás

Ahhoz, hogy a GRACE mérési eredményei összehasonlíthatók legyenek a vízszintadatokkal, a műholdas mérésekből számított gömbfüggvény-együtthatókból tömeganomália értékeket határoztunk meg. Az adatsorok kapcsolatának megteremtéséhez mind a vízszint-, mind a vízkészlet-változások idősorára éves periódusú görbéket illesztettünk.

### 3.1 A GRACE mérések előzetes feldolgozása

A GRACE általunk felhasznált 65 hónapnyi mérési eredményéből következtetni tudunk a La Plata vízgyűjtő felszínén végbemenő tömegváltozásokra, melyek a nehézségi erőter időbeli változásait okozzák.

A tömegváltozások vizsgálata során az (1) képletnek megfelelően valamennyi vízmérce helyén meghatároztuk a felszíni tömeganomáliával arányos ún. ekvivalens vízszlopvastagság értékét (Wahr 2007):

$$\Delta h(\varphi, \lambda) = \frac{\sigma_{\text{átlag}}}{3\rho_{\text{vz}}} \sum_{l=0}^{30} \sum_{m=0}^l \frac{2l+1}{l+k_1} W_l \tilde{P}_{lm}(\sin \varphi) (\Delta C_{lm} \cos(m\lambda) + \Delta S_{lm} \sin(m\lambda)). \quad (1)$$

Az (1) összefüggésben  $\Delta h$  a felszíni tömeganomália,  $\varphi$  és  $\lambda$  az egyes vízmércék földrajzi koordinátái,  $a$  a forgási ellipszoid fél nagytengelyének hossza, a  $\rho$  sűrűségek a Föld átlagsűrűségére, illetve a víz sűrűségére vonatkoznak,  $l$  és  $m$  a gömbfüggvény-együtthatók fok- és rendszáma,  $k_l$  a Love-féle szám, mellyel a földkéreg rugalmasságát vettük figyelembe,  $\bar{P}_{lm}$  a normalizált Legendre-függvényt jelzi, valamint  $\Delta C_{lm}$  és  $\Delta S_{lm}$  a GRACE méréseiből kapott gömbfüggvény-együtthatók havi változásai.

A nyers GRACE-modellek esetén meghatározható időbeli tömeganomália változások ábráján a tapasztalat szerint a műholdak pályája kirajzolódik. Ez nyilvánvalóan modellezési hiba. Wahr (2007) ezen hiba eltüntetésére egy Gauss-szűrő alkalmazását javasolta, amit jelen tanulmányban is alkalmaztunk, s  $W_l$ -vel jelöltünk az (1) összefüggésben. A (2)-(5) összefüggésekben bemutatott Gauss-szűrő emellett csökkenti a magasabb fokszámokon jelentkező zajokat is:

$$W_0 = 1, \quad (2)$$

$$W_1 = \frac{1 + e^{-2b}}{1 - e^{-2b}} - \frac{1}{b}, \quad (3)$$

$$W_{l+1} = -\frac{2l+1}{b} W_l + W_{l-1}, \quad (4)$$

ahol

$$b = \frac{\ln(a)}{1 - \cos\left(\frac{r}{a}\right)} \quad (5)$$

és  $r$  a simítás sugara.



1. ábra. A La Plata vízgyűjtő területe (sötétebb színnel) a Guarani felszín alatti víztározóval (szaggatott vonallal) és az argentin hidrológiai állomásokkal (megírt pontok)

A gyakorlatban a felületelemre vonatkozó tömeganomáliát a vele megegyező tömegű vízoszlop magasságaként szokták megadni. Az (1) összefüggésben a víz átlagos sűrűségével történő osztás így egy magasság jellegű mennyiséget eredményez ( $\Delta h$ ), ami azt mutatja meg, hogy egy adott hidrológiai állomás helyén bekövetkező víztömegváltozás hány centiméteres vízoszlopmagasság-változásnak felel meg. Az eredmények későbbi értelmezése szempontjából fontos hangsúlyozni, hogy a GRACE-modellekből számolt eredmények térbeli felbontása néhány 100 km-es, míg a vízmérce vízszintadatai egyértelműen pontbeli értékek.

### 3.2 A vízmérce adatok előzetes vizsgálata

A vízmérce adatok felhasználhatósága a vizsgálat céljaira erősen függ a hidrológiai állomás helyétől. A vízgyűjtő egyes területein ugyanis intenzív a vízszabályozás. Értelemszerűen egy-egy duzzasztó utáni folyószakaszon nem várhatunk éves periódusú vízszintingadozást, hiszen a vízállást alapvetően a szabályozás alakítja ki.

A La Plata területének és folyóinak a fenti szempont alapján végzett vizsgálata az alábbi eredményekre vezetett:

- 1) A La Plata területe alatt helyet foglaló Guarani (1. ábra) a Föld egyik legnagyobb természetes felszín alatti víztározó rendszere, mely jelentősen befolyásolja a felette futó folyók vízszintjeit. Hogyha a felszín alatti víz szintje a folyó vízszintje fölött található, akkor a víztározó hozzájárul a folyó vízhozamához, annak egy alap vízszintet biztosít. Viszont például áradás időszakában, amikor a folyó vízállása lesz magasabb, akkor az fogja táplálni a felszín alatti vízkészletet, tehát magának a folyónak a vízszintje kiegyenlítődik valamilyen mértékben. Összességében a felszín alatti víztározó jelenléte miatt több folyó vízszint-adatsorából hiányzik a periodikus ismétlődés.
- 2) A Paran folyón telepített vízmércék idősorán nem látható éves vagy féléves ciklus, melyért a fentebb említett Guaranin kívül a folyón létesített nagy gátak (Itaip, Yaciret) s víztározók tehetk felelőssé. Ezek ugyanis mind felborítják a természetes ciklust.
- 3) Az Uruguay folyó állomásaira is hatással van a Guarani, valamint e folyó mentén is építettek két nagy gátat, a Salto Grande és az It gtákat.
- 4) A Salado folyón létesített Cabra Corral gt és egyéb víztározók, ntzsi csatornák, folyószabályozások miatt az ottani állomások vízszintadatai sem alkalmasak vizsgálatunkhoz.
- 5) A Perfil Tipo lloms is a Guarani területére esik, gy ezt a hidrológiai állomást sem tudtuk felhasználni az évszakos változások tanulmányozására.
- 6) Az Uruguay mellékfolyójának, a Guleguaych-nak 3030-as állomása is egy az egyben a víztározó területére esik, gy a mérési eredmények ezen vízmérce esetében is nagy szrst mutatnak.
- 7) A Bermejo s Pilcomayo folyók az összes fenti vízállást befolyásoló tényező hatása alól mentesek, nincsenek szabályozva, nagyobb gtákat, víztározókat sem létesítettek rajtuk, valamint a Guarani sem érinti folyásuk útját.

Vizsgálatainkat gy a továbbiakban a Bermejo s Pilcomayo folyók hat állomására korlátozzuk, melyeket az 1. brn is kiemeltünk.

### 4 Szezonális görbék illesztése

A vízmérce és a GRACE adatsorok különbözőségéből adódóan eltérő módszereket találtunk ideálisnak a kiegyenlítéshez, melyet minden esetben iteratív úton oldottunk meg. Az alábbiakban az alkalmazott eljárásokat ismertetjük.

#### 4.1 Vízállás adatok

A Bermejo és Pilcomayo folyók állomásainak adatsorai jól tükrözik az éves periódusú változást, azaz a kora tavaszi maximális és a késő őszi minimális vízszinteket. Azonban még ezen esetekben is szembetűnő, hogy ha a legkisebb négyzetek módszerével kívánunk az adatsorokra görbét illeszteni, a javítások nem lesznek normális eloszlásúak. Ezért szükséges volt olyan kiegyenlítési módszert keresnünk, melynek nem feltétele a maradék ellentmondások normális eloszlása. A robusztus becslést végezhetjük  $L_1$ ,  $L_2$ , ...,  $L_\infty$  norma szerint is, mi tanulmányunkban egy  $L_2$  norma szerinti, iteratív súlyozáson alapuló eljárást alkalmaztunk. Ez a kiegyenlítés visszacsatoló súlyozással a javítások függvényében a durva hibásnak vélt adatok súlyait fokozatosan csökkenti, így minél inkább kiugró egy érték, annál kisebb súllyal fog részt venni a kiegyenlítésben, azaz kevésbé befolyásolja annak eredményét (Tóth 2004, Závoti 1999).

A mi esetünkben azt tapasztaltuk, hogy a vízállások idősorában több kiugró érték is megjelenik, ezért az alábbi súlyfüggvényt alkalmaztuk számításainknál:

$$p = \exp \left[ -k_1 \left| \frac{v}{\sigma_v} \right|^{k_2} \right], \quad (6)$$

ahol  $v$  a hibát,  $\sigma_v$  pedig annak szórását jelenti, a  $k$  állandókra pedig a geodéziai gyakorlatban elterjedt értékeket használtuk:  $k_1 = 0.05$ ,  $k_2 = 4.4$  (Soha 1986). Ez az exponenciális függvény 0 értékű hibánál  $p = 1$  súlyt ad, míg a nagyobb javításokra 0 és 1 közötti súlyértéket vesz fel, a fentiekben leírtaknak megfelelően. Emellett a kiegyenlítést reciprok súlyfüggvénnyel is elvégeztük, mely a fenti módszertől csak elhanyagolható mértékben szolgáltatott eltérő eredményt.

Az így nyert adatsorra periodikus függvényt illesztettünk (Földváry és Mészáros 2009):

$$f(t) = A + Bt + C \sin(\omega_\varepsilon t + \Phi_C) + D \sin(\omega_f t + \Phi_D), \quad (7)$$

ahol eltolás ( $A$ ), trend ( $B$ ), valamint éves ( $C$  és  $\Phi_C$ ) és féléves ( $D$  és  $\Phi_D$ ) összetevőket határoztunk meg. A (7) egyenletben az  $f(t)$  függvény a vízállás idősorára utal, ahol  $t$  az idő,  $\omega_\varepsilon$  és  $\omega_f$  pedig az éves és féléves szögsebesség.

#### 4.2 GRACE adatsorok

A gravimetriai műholdas mérésekből átlagosan havonta kaptunk egy-egy vízkészletszintet, azaz jóval kevesebb adat áll rendelkezésünkre, mint a napi mintavételezésű hidrológiai állomások esetén. A GRACE adatok javításait normális eloszlásúnak feltételezve a legkisebb négyzetek módszerével végeztük el a kiegyenlítést. Ahhoz, hogy az illesztés az éves és féléves periódusú változásokat tükrözze, a következő összefüggést használtuk a kiegyenlítéshez (Földváry 2015):

$$f(t) = A + Bt + \frac{1}{\text{sinc}(1/12)} C \sin(\omega_\varepsilon t + \Phi_C) + \frac{1}{\text{sinc}(1/6)} D \sin(\omega_f t + \Phi_D). \quad (8)$$

Az amplitúdók szorzója a szinusz kardinálisz függvény reciproka, mely a GRACE mérések átlagolódását hivatott korrigálni. Ugyanis azzal, hogy a GRACE-modellekben egy-egy körülbelül hónapnyi időtartam mérései átlagolódnak, a periodikus változás a valódi értékénél kisebb változásként jelenik meg. A jelenséget az  $N$  darab mintavételezési periódus esetén  $\frac{1}{\text{sinc}(1/N)}$  szorzóval lehet figyelembe

venni. Mivel az éves periódusra 12 mérés jut, ott  $(1/12)$ , a féléves periódus pedig 6 értékkel lett mintavételezve, így annak esetében  $(1/6)$  a szinusz kardinálisz függvény argumentuma (Földváry 2015).



## 5 Eredmények

Az 1. táblázatban foglaltuk össze a vízmérce, illetve GRACE adatokra történő görbeillesztés eredményeit azon hat állomás esetén, melyeket a 3.2 fejezetben ismertetett szempontok alapján alkalmasnak találtunk a vizsgálathoz. Az első öt hidrológiai állomás a Bermejo folyón található, a folyótorkolattól való, folyó mentén mért távolságuk szerinti növekvő sorrendben, míg La Paz állomás a Pilcomayo folyó középső folyásánál helyezkedik el, mintegy 626 km-re a torkolattól.

A vízmércékről leolvasott vízszinteket vizsgálva egyértelműen látszik, hogy az éves amplitúdók a folyó torkolatához közeledve egyre növekednek. Ez megfelel annak a jelenségnek, hogy a lehullott csapadék a folyó mentén egyre nagyobb víztömeget eredményez, így a folyón lefelé haladva a vízszint fokozatosan magasabb lesz.

Ezzel szemben a műholdas észlelés szerint az éves amplitúdók annál nagyobbak, minél messzebb van egy állomás a folyó torkolatától. Ennek magyarázata lehet, hogy a GRACE a teljes vízkészlet változását érzékeli, nem csupán a felszíni lefolyást jellemző vízszintjét, ami a folyók felső folyásánál még tisztán kivethető, és kevésbé befolyásolja egyéb tömeghatás a felszíni vizek változásának periodicitását. A folyók alsó folyásánál a fentebb tapasztalható éves periódusú változást zavarhatják az összetettebb hidrológiai folyamatok, beleértve a felszín alatti víztározás változásait, továbbá a párolgással, elszivárgással és az éves ciklussal kilépő víztömegeket, valamint az egyéb beáramló vizek (mellékfolyók, felszín alatti vizek) eltérő periódusainak módosító hatását. Az 1. ábrán látható, hogy a Bermejo folyó alsó folyása közelebb helyezkedik el a Guaranihoz, amelynek víztömegei így számottevő mértékben befolyásolják a becsült éves változás mértékét.

Szembetűnő, hogy a vízszintadatok amplitúdója messze meghaladja a GRACE mérésekből számított értékeket. Míg a valódi vízállásokra illesztett görbék szélsőértékei között akár több méteres különbség is előfordul, addig a kiegyenlített GRACE amplitúdók csupán pár centiméteresek.

Ezt egyrészt a GRACE műholdak felbontásából adódó nagyobb területekre átlagolt tömegátrendeződés értékei magyarázzák. Ezzel szemben a vízmércék mérési eredményei pontbelieknek tekinthetők, ahol a víztömeg a folyó keresztmetszetének szélességében halad. Ebből következik, hogy a vízszint valamilyen mértékű megváltozása a GRACE felbontására (tehát több 10 000 km<sup>2</sup>-es területelemekre) vonatkoztatva jóval kisebb lesz.

A másik oka az eltérésnek, hogy a GRACE mérései függőlegesen integrált tömegekre vonatkoznak, ami a hidrológiai folyamatok tekintetében azt jelenti, hogy a teljes vízkészletváltozást észlelik a műholdak. Ezt a vízkészletváltozást ténylegesen úgy kaphatjuk meg, hogyha a lehullott csapadékmennyiségből levonjuk a párolgással elvesztett vízmennyiséget és a lefolyást. Mivel a vízmércék csupán a lefolyást mérik, így valójában azok a GRACE méréseiből számított változásoknak csak egy részét képezik (Wahr 2007).

Az 1. táblázatban szereplő éves fázis a (4) egyenlet  $\Phi_C$  változójára utal, a fázist az év napjaira vonatkoztatva ( $2\pi = 365$  nap). A vízmérce és a GRACE adatsorok görbeillesztései itt már összhangban vannak, azaz mindkét esetben az látszik, hogy az éves fázis annál nagyobb, minél messzebb található egy állomás a torkolattól, tehát az éves periódus a folyók alsó folyásánál hamarabb jelenik meg, mint az eredetüknél. Ezt a szokatlan jelenséget okozhatja a vízgyűjtő nagy kiterjedése, mind vízszintes és magassági értelemben. Bár a jelenség hidrológiai magyarázatát megadni nem tudjuk, a GRACE mérések feldolgozása szempontjából meggyőző, hogy a GRACE-modellekből kapott fázis értékek a vízmérce fázisértékeivel megegyező tendenciát mutatnak.

**1. táblázat.** A vízmérce és GRACE adatsorokra történt görbeillesztések éves amplitúdói és fázisai

Állomásnév	Távolság (km)	Éves szorzó-tényező	Éves fázis-különbség (nap)	Vízmérce korreláció	GRACE korreláció
Puerto Velaz	35	130.7	4.1	0.894	0.380
El Colorado	124	110.4	1.5	0.883	0.406
Pozo Sarmiento	783	17.3	0.3	0.777	0.770
Aguas Blancas	826	9.3	1.8	0.820	0.793
Balapuca	858	16.0	2.2	0.845	0.804
La Paz	626	8.8	7.9	0.720	0.811

A vízmérce és a GRACE adatsorok amplitúdójának összehasonlítását a kettő arányának elemzésével végeztük el (2. táblázat). A kapott skálatényezővel a megjelenítéshez a GRACE méréseket átskáláztuk. Bár a GRACE amplitúdók csökkennek a folyótorkolathoz közeledve, míg a vízállások egyre magasabbak az alsó szakasz állomásainál, a két mennyiség hányadosa növekszik, mivel a vízmércek amplitúdóinak magas értékei sokkal meghatározóbbak e szempontból. A skálatényező értéke a folyók kezdeténél alacsonyabb, 10-20 körüli, a torkolatnál azonban már jóval nagyobb a GRACE és a vízmérce mérésekből származó amplitúdók eltérése.

Az összehasonlítás érdemi eredménye azonban a fázisok eltéréseiben mutatkozik meg. Állomásonként meghatároztuk a vízmérce és a GRACE fázisainak különbségét, amely pozitív, hogyha a vízmérce fázisa nagyobb, tehát ha a GRACE késleltetve észleli a változást. Mivel a GRACE a vízkészletváltozást észleli, és ez a vízgyűjtőn elsősorban a felszín alatt tározott készletet jelenti, ami lassabban változik, mint a lefolyás, ez logikus eredmény. A Pilcomayo és Bermejo folyók állomásainál a fáziskülönbségek csupán pár naposak.

Korrelációs számítással vizsgáltuk meg, hogy az egyes adatsorokra történő illesztések mennyire bizonyultak sikeresnek. Ahogy várni lehetett, a vízmérce korrelációk magasabb értékűek, az összes állomáson 0.7-0.9 közötti értékeket mutatnak. Jelentős elmaradása a GRACE-nek csak a folyók torkolatához közel jellemző, ahol a korreláció 0.4 körüli (ezen állomásoknál a Guarani közelsége már nem elhanyagolható), a felső folyás 0.7-0.8-as korrelációi igen magasnak mondhatók ebben az esetben is.

Az eredmények szemléltetése érdekében bemutatjuk Aguas Blancas állomás kiinduló adatsorait az illesztésekkel, valamint az illesztett görbék összehasonlítását a 2. ábrán. Mindkét adatsoron jól látható az éves ciklus, azaz a kora tavaszi maximum és a késő őszi minimum. A vízmérce adatok grafikonján emellett megjelennek azok a kiugró értékek, melyek miatt a robusztus kiegyenlítés mellett döntöttünk. A legelső ábrán a GRACE adatokra illesztett görbét a skálatényezővel megnyújtva ábrázoltuk, így jobban megfigyelhető annak a vízmérce illesztéssel való hasonlósága.

## 6 Hasonló tanulmányok eredményei

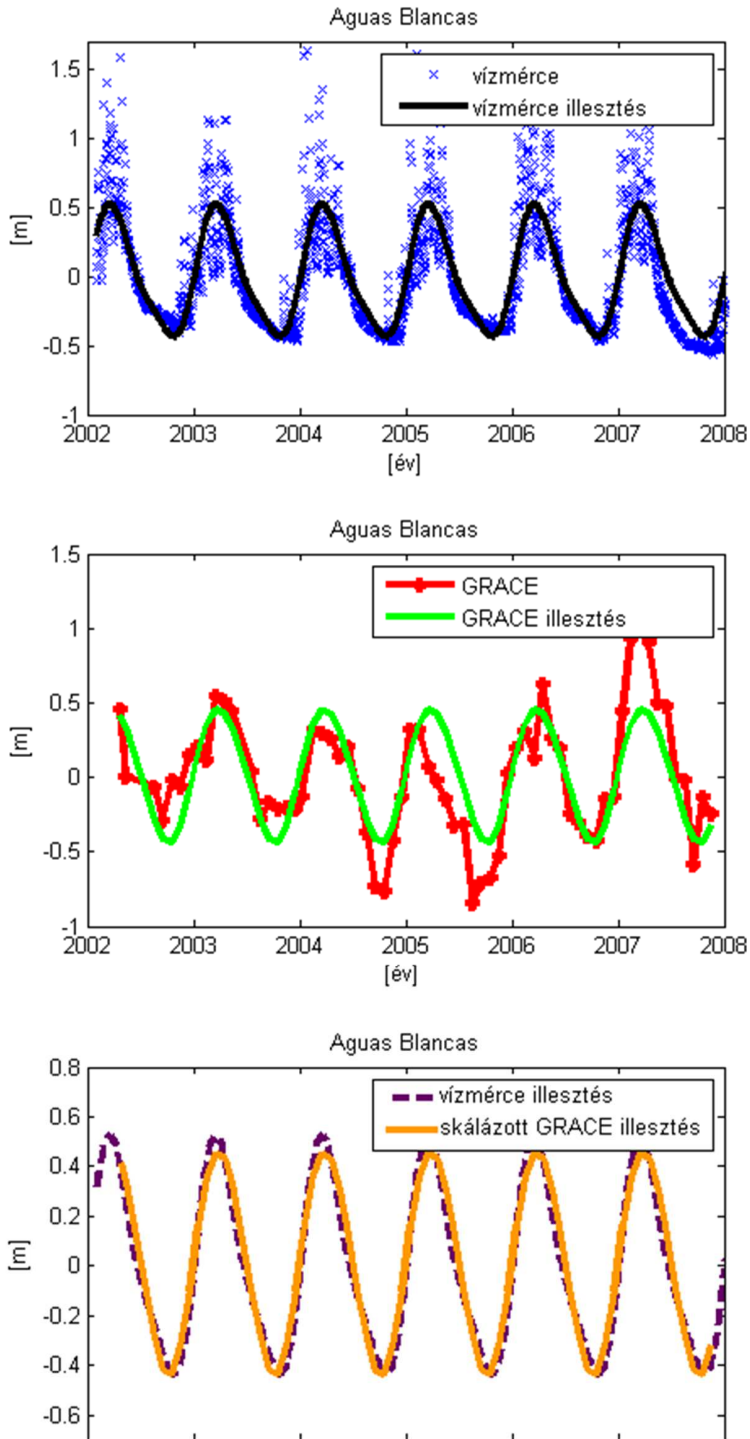
A GRACE műholdak mérési eredményeinek felhasználási lehetőségei igen széleskörűek. Az alábbiakban elsőként olyan vizsgálatok eredményeit említjük meg, melyek hozzánk hasonlóan folyók vízszintadatainak és a GRACE-modellekből nyert eredményeknek a kapcsolatát kutatták, majd azon tanulmányokról is szót ejtünk, melyek ugyancsak a La Plata vízgyűjtő területére számoltak tömegváltozásokat.

Andersen és társai (2008) Bangladesh folyójának mindössze 210 napos vízmérce adatsorát vetették össze a GRACE mérési eredményeivel. Az általuk számított fáziseltérés 2 hetes volt, míg a skálatényezőjük a miénkhez hasonlóan 10 körüli (Andersen et al. 2008).

Egy, az Amazonas vízgyűjtőjének 233 hidrológiai állomását vizsgáló kutatás az itt bemutatott eredményekkel összhangban a skálatényezőre 5-20 közötti értékeket számított a magas korrelációjú állomásoknál. A vizsgálat alapján a fáziseltérés annak függvénye, milyen magas a korreláció a folyóvizek és a felszín alatti vizek időbeli változása között, értelemszerűen minél szorosabb a kapcsolat, annál inkább fázisban halad a vízmérce és a GRACE görbéje (Vaz de Almeida et al. 2012).

2. táblázat. A vízmérce és GRACE adatsorokra történt görbeillesztések eredményeinek kapcsolata

Állomásnév	Távolság (km)	Éves vízmérce amplitúdó (m)	Éves GRACE amplitúdó (m)	Éves vízmérce fázis (nap)	Éves GRACE fázis (nap)
Puerto Velaz	35	2.522	0.019	359.2	355.1
El Colorado	124	2.330	0.021	359.7	358.3
Pozo Sarmiento	783	0.783	0.045	1.2	0.8
Aguas Blancas	826	0.450	0.048	2.0	0.3
Balapuca	858	0.803	0.050	2.3	0.0
La Paz	626	0.501	0.057	7.7	364.8



**2. ábra.** Aguas Blancas vízmerce adata és az illesztett görbe (fent) GRACE adata és illesztett görbéje (középen), valamint a vízmerce és GRACE illesztések együtt (alul)

A La Plata vízgyűjtőjére vonatkozó tanulmányok (Pereira et al. 2012 és Chen et al. 2010) egyértelműen kimutatták a GRACE mérései alapján a vízgyűjtő déli részét a 2000-es évek első évtizedében érintő szárazságot. Az egész vízgyűjtő vizsgálatakor mi is tapasztaltuk a 2002 és 2008 közötti negatív trendet a tömegváltozásokban a déli területeken. Emellett a tömegváltozások általunk keresett éves periódusa is megjelenik ezekben a vizsgálatokban is.

Jelen tanulmány újszerűsége, hogy a La Plata vízgyűjtőjét nem egészében, hanem folyókra bontva vizsgálja. Mivel tapasztalunk szerint a vízgyűjtő közel sem mutat egységes képet, aminek oka elsősorban a Guarani felszín alatti víztározó jelenléte, indokoltabbnak véljük az elemzést csak azon folyókra korlátozni, amelyek mentesek a víztározás hatásától. Ezt eredményeink is alátámasztották.

## 7 Összegzés

Tanulmányunkban a GRACE műholdpáros mérési eredményeiből számított felszíni tömeganomália-értékeknek és a La Plata vízgyűjtőn található folyók vízmérce adatsorainak kapcsolatát vizsgáltuk. Számításaink során elsőként az űrgravimetriai mérési eredményeket dolgoztuk fel, azaz az egyes hidrológiai állomások koordinátaiban vízkészlet-változásokat határoztunk meg. Ezt követően a kapott adatsorokra legkisebb négyzetek módszerével éves periódusú görbéket illesztettünk. A vízszintadatokra ezzel szemben robusztus kiegyenlítési módszerrel illesztettünk görbéket. Az így kapott görbék kapcsolatát vizsgáltuk, mégpedig az éves amplitúdók és fázisok segítségével. Ezen kívül az egyes folyók mentén elhelyezkedő állomások eredményeinek összehasonlításából is fontos következtetéseket vontunk le.

Vizsgálatunk alapján csakis azon folyók állomásaira érdemes elvégezni a műholdas és a vízmérce adatok összehasonlítását, melyek mentesek a vízszabályozások és felszín alatti víztározás hatásától. Az így megfelelően talált állomásoknak mind a vízmérce-, mind a GRACE adatsorában jól látható éves ciklus jelentkezik, s az itt elvégzett görbeillesztések sikerességét jelző korreláció is 0.7 fölötti.

A vízszintadatok esetén az egy folyón elhelyezkedő állomásoknál az éves amplitúdók a torkolathoz közeledve növekednek, ezzel szemben a GRACE adatsor amplitúdói ellentétes tendenciát mutatnak. Ez az eltérés jelzi számunkra azt, hogy míg a vízszint a folyó folyása mentén haladva csapadéktevékenység esetén egyre növekszik, addig a teljes vízkészlet változása, melyet a GRACE detektál, éppen fordítva zajlik le, ugyanis a műholdak által érzékelt felszín alatti készletváltozás a felső vízgyűjtőkön (abszolút értelemben) jelentősebb mértékben változik, mint az alsókon. A kétféle adatsor éves amplitúdója több nagyságrenddel eltér egymástól, ennek vizsgálatára skálátényezőket vezetünk be állomásonként. Ennek értéke a folyók középső és felső folyásánál 10-20 körüli, azonban a torkolathoz közeli állomásoknál a skálátényező 100 feletti. Ennek oka, hogy a GRACE által észlelt, területileg átlagolódtott tömegváltozások az alsó folyásnál már összemosódnak egyébként eltérő amplitúdójú és fázisú tömegátrendeződésekkel, így az éves jelleg nem nyilvánul már meg olyan mértékben a műholdas mérési eredményekben, mint a torkolattól távolabbi állomásoknál.

Az éves fázisok már mind a vízszintadatoknál, mind a GRACE adatsoroknál növekednek a folyók mentén, ezek összehasonlításából láthatjuk, hogy a GRACE fázisai mindössze pár nappal térnek el a vízszintek fázisától. Így tehát az alkalmazott eljárásokkal a GRACE gravimetriai méréseiből az olyan területeken, ahol kevésbé áll különféle befolyásoló hatások alatt a vízkészlet, a vízszintváltozások éves periódusa nagy pontossággal megadható.

**Köszönetnyilvánítás.** A tanulmány a K106118 számú OTKA projekt támogatásával készült.

## Hivatkozások

- Almeida Filho FGV, Calmant S, Seyler F, Ramillien G, Blitzkow D, Matos ACOC, Silva JS** (2012): Time-variations of equivalent water heights from Grace Mission and in-situ river stages in the Amazon basin. *Acta Amazonica* (Impresso), 42, 125-134.
- Andersen O, Berry P, Freeman J, Lemoine FG, Luthcke S, Jakobsen K, Butts M** (2008): Satellite Altimetry and GRACE Gravimetry for Studies of Annual Water Storage Variations in Bangladesh. *Terr. Atmos. Ocean Sci.*, 19, 47-52, DOI: 10.3319/TAO.2008.19.1-2.47(SA)

- Chen JL, Wilson CR, Tapley BD, Longuevergne L, Yang ZL, Scanlon SR** (2005): Recent La Plata basin drought conditions observed by satellite gravimetry. *Journal of Geophysical Research*, 115, D22108, 12, DOI: 10.1029/2010JD014689
- Földvály L** (2004): A 2000-es évek első évtizede: A gravimetriai műholdak korszaka. *Magyar Geofizika*, 45(4), 118-124.
- Földvály L, Mészáros P** (2009): Az Antarktisz tömegátrendeződéseinek vizsgálata GRACE geopotenciális modellek alapján. *Geomatikai Közlemények*, 12, 109-118.
- Földvály L** (2015): De-smoothing of averaged periodical signals for geodeic applications. *Geophysical Journal International* (közlésre elfogadva).
- Ilk KH, Flury J, Rummel R, Schwintzer P, Bosch W, Haas C, Schröter J, Stammer D, Zahel W, Miller H, Dietrich R, Huybrechts P, Schmeling H, Wolf D, Götze HJ, Riegger J, Bardossy A, Güntner A, Gruber Th** (2005): Mass transport and mass distribution in the Earth system – Contributions of the new generation of satellite gravity and altimetry missions to the geosciences. *GeoForschungsZentrum, Potsdam*. 154.
- Pereira A, Miranda S, Pacino MC, Forsberg R** (2012): Water storage changes from GRACE data in the La Plata basin. *Geodesy for Planet Earth. International Association of Geodesy Symposia*, 136(3), 613-618, DOI: 10.1007/978-3-642-20338-1\_75
- Soha G** (1986): Robusztus kiegyenlítés mérési javítástól függő súlyozással. *Geodézia és Kartográfia*, 4, 267-271.
- Tóth Gy** (2004): Korszerű matematikai módszerek a geodéziában. *BME elektronikus jegyzet*, 100. (<http://www.agt.bme.hu/tantargyak/korszmat/KorszeruMatematikaJegyzet.pdf>, 2015-10-18)
- Wahr J, Schubert G** (Ed.) (2007): *Time variable gravity from satellites. Treatise on Geophysics*. Elsevier Ltd., Oxford, 213-218.
- Závoti J** (1999): *A geodézia korszerű matematikai módszerei*. MTA Doktori Disszertáció, 149.

# SZÁMÍTÁSTECHNIKAI FEJLESZTÉS MŰHOLDAS GRAVIMETRIAI ADATOK FELDOLGOZÁSÁRA

Kemény Márton<sup>\*</sup>, Földváry Lóránt<sup>\*\*</sup>,<sup>\*\*\*</sup>



**Computational development for large satellite gravimetric datasets** – *The amount of observation data for the gravity field of the Earth has been drastically increased due to the dedicated gravity satellite missions and it has generated a demand for developing appropriate processing facilities. Our software, the BME-SHS, offers a solution for such a problem.*

**Keywords:** geoid, satellite geodesy, large amounts of data, C++

*A gravimetriai műholdak megjelenése nyomán jelentősen megnövekedett adatmennyiség új számítástechnikai platformok fejlesztését tette szükségessé megvalósíthatósági és gyorsasági szempontok miatt. Erre kínál megoldást az általunk C++ nyelven létrehozott BME-SHS program.*

**Kulcsszavak:** geoid, műholdas geodézia, nagy adatmennyiség, C++

## 1 Bevezetés

A kétezres évek elejétől kezdődően a legújabb műholdas technikák megjelenése a gravimetriában forradalmasította a nehézségi erőtér meghatározását (Földváry 2004). A CHAMP műhold hat hónapos működése során pontosította a korábban létező legjobb globális nehézségi erőtér modellt (GRIM5-S1). A két évvel később, 2002-ben újtárra indított GRACE műholdpár lehetőséget biztosított a nehézségi erőtér változásainak becslésére is, emellett tovább javította a statikus nehézségi erőtér modell térbeli felbontását is, mintegy 220 km-re. A harmadik, nehézségi erőtér meghatározása céljából pályára állított műhold a GOCE volt, amelynek adatai alapján számított geoid modell immár kb. 140 km-es felbontású; jelenleg ugyanis maximálisan 280 fokig-rendig határozzák meg a méréseiből az együtthatókat (Barthelmes és Köhler 2012).

A mérési adatmennyiség növekedése nyomán újabban megjelenő lehetőségek a pontosság növelésére a korábbiaknál hatékonyabb modellszámító programok megírását teszik szükségessé. A modellparaméterek és a mérési adatok számának növekedése feladatot adott a matematikusok és a programozók számára – ilyen adattömeg számára gyorsabb, hatékonyabb programozási megoldásokat kellett keresni a korábbiak helyett. Nagy adatmennyiség kezelésére alkalmas algoritmusok hasonló problémákra alkalmazva korábban is léteztek, de ezeket sok esetben még nem alkalmazták korábban specifikusan a műholdas geodéziai problémák megoldására.

Mivel a C és a C++ programozási nyelvek képesek a memóriafoglalás szabadon megválasztható lehetőségeit megvalósítani, segítségükkel tetszőlegesen nagy adatmennyiség válik kezelhetővé. Így a BME-SHS (Spherical Harmonic Solver), C++ nyelven fejlesztett program lehetőséget biztosít arra, hogy különböző eljárásokkal oldjunk meg nagy adatmennyiség okozta problémákat. Mint általában az alacsonyabb szintű programnyelvek, a C++ sem rendelkezik beépített vektor és mátrix adattípusokkal, de éppen ez biztosítja a nagyobb adatmerekkel kezelhetőségét.

Ugyan a nemzetközi gyakorlatban több gömbharmonikus kezelő szoftver fejlesztése történt már korábban (Rummel et al. 1993, Arabelos és Tscherning 1993, Arabelos és Tscherning 1999, Han et al. 2002, Pail és Plank 2004, Krasbutter et al. 2011), két okból tartottuk fontosnak az újabb fejlesztését. Egyrészt, a korábbi programok sok esetben FORTRAN forráskódúak, amelynél korszerűbb kezelési lehetőséget biztosít a C vagy a C++ nyelv. Másrészt az egyes programok

<sup>\*</sup>BME ÁFGT, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3., K ép. mf. 26.

E-mail: kemeny.marton@epito.bme.hu

<sup>\*\*</sup>Óbudai Egyetem, Alba Regia Műszaki Kar  
8000 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.

<sup>\*\*\*</sup>MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézet  
9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8.

sajátossága, hogy a helyi adottságoknak megfelelő hardverre készülnek; jelenleg ugyan nem clusterre történt a fejlesztés, de a hosszú távú célok között szerepel ennek megvalósítása.

## 2 A program feladata

A program gömbharmonikusok (gömbfüggvények) analízisét és szintézisét képes megvalósítani. A szintézis során a gömbharmonikus együtthatók alapján számítjuk az egyes nehézségi térjellemzők adott térbeli pontokban érvényes (modell szerinti) értékeit a gömbfüggvény sorfejtéses képlete alapján. A potenciál, mint térjellemző esetén ez (Bíró et al 2013):

$$V(r, \vartheta, \lambda) = \frac{GM_0}{R} \sum_{n=0}^{nmax} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [C_{n,m} \cos(m\lambda) + S_{n,m} P_{n,m} \sin(m\lambda)] P_{n,m}(\cos \vartheta), \quad (1)$$

ahol  $r$  az origótól vett távolság,  $\vartheta$  a pólusszög,  $\lambda$  a földrajzi hosszúság,  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  a teret leíró gömbi harmonikus függvény  $n$ . fokú és  $m$ . rendű együtthatói,  $P_{n,m}$  a Legendre-függvényeket jelöli,  $nmax$  a sorfejtés maximális fokszáma,  $G$  a gravitációs állandó,  $M_0$  a Föld tömege,  $R$  a Föld átlagos sugara.

Amennyiben ismerjük  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  értékeit  $n = nmax$ -ig bezárólag, akkor (1) felhasználásával tetszőleges  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\lambda$  helyeken számíthatjuk a nehézségi potenciál értékeit – ez a szintézis. Az általunk fejlesztett program összesen tízféle nehézségi erőterjellemző értékét képes számolni a gömbharmonikus együtthatók alapján, ezek: nehézségi potenciál ( $W$ ), nehézségi anomália ( $\Delta g$ ), geoid unduláció ( $N$ ), a nehézségi anomália a fölfelszínen ( $\delta g$ ), illetve az Eötvös-tenzor hat független eleme ( $V_{xx}$ ,  $V_{xy}$ , stb.). Valamennyi nehézségi erőter változó a megfelelő megfontolások alapján (1) képlethez hasonlóan gömbfüggvény-soros alakban is kifejezhető. Ezen esetekben az összefüggés sokszor valamivel összetettebb (Barthelmes 2009), így pl. az Eötvös-tenzor némely tagjában a Legendre-függvények első, illetve második deriváltjai is szerepelnek

A másik program feladata a gömbharmonikus analízis. Az analízis során fordítva járunk el: a megadott pontokban ismerjük a térjellemzők értékeit, és ezek alapján következtetünk a modellparaméterekre: a gömbharmonikus együtthatókra. A feladat: a műholdas adatok alapján számítani az együtthatókat. Az analízist végző program a legkisebb négyzetek módszere szerint működik, amely megoldásaként azt a geoid modellt (gömbfüggvény együtthatókat) szolgáltatja, amely mellett az egyes mérések javításainak négyzetösszege minimális. Ezt a megoldást az alábbi összefüggéssel kapjuk (Detrekői 1991):

$$\hat{x} = (A^T P A)^{-1} A^T P l. \quad (2)$$

Az  $\hat{x}$  a modellparaméterek vektorát (ez esetben a gömbharmonikus együtthatókat),  $l$  a mérési adatok vektorát, az  $A$  az alakmátrixot, a  $P$  pedig a súlymátrixot jelöli. A program első verziójában a legkisebb négyzetes módszer legegyszerűbb verzióját követtük, nem vettük figyelembe a mérési paraméterek hibáját (a súlymátrixot egységmátrixként fogjuk fel), és a modellparaméterekkel kapcsolatos a priori feltételezéseket (nem definiálunk kényszerfeltételeket), de a program későbbi verzióiban tervezzük ezek implementálását is. Az alakmátrix úgy számítható, hogy minden egyes helyen (ahol mérés áll rendelkezésünkre) kiszámoljuk a közvetítő egyenlet, jelen esetben az (1) képlet minden egyes paraméterre vett parciális deriváltját, így:

$$A_f = \frac{GM_0}{R} \left(\frac{R}{r_f}\right)^{n+1} P_{n,m}(\cos \vartheta_f) \cos(m \lambda_f) \quad (3)$$

a  $C_{n,m}$  együtthatókra vonatkozóan,

$$A_f = \frac{GM_0}{R} \left(\frac{R}{r_f}\right)^{n+1} P_{n,m}(\cos \vartheta_f) \sin(m \lambda_f) \quad (4)$$

az  $S_{n,m}$  együtthatókra vonatkozóan. Az  $f$  a mérési helyekre vonatkozó index, amely egyben megadja, hogy az  $A$  alakmátrix hányadik sorában szerepel a mátrixegyüttható.

A mátrix oszlopait úgy rendezzük, hogy előbb a  $C_{n,m}$ , majd az  $S_{n,m}$  együtthatók szerinti parciális deriváltak követik egymást, mindkettő növekvő fok, azon belül növekvő rend szerint rendezve, tehát:  $\partial/\partial C(0,0)$ ,  $\partial/\partial C(1,0)$ ,  $\partial/\partial C(1,1)$ ,  $\partial/\partial C(2,0)$ ,  $\partial/\partial C(2,1)$ , ...  $\partial/\partial C(nmax,nmax)$ ,  $\partial/\partial S(1,1)$ ,  $\partial/\partial S(2,1)$ ,  $\partial/\partial S(2,2)$ ,  $\partial/\partial S(3,1)$ , ...  $\partial/\partial S(nmax,nmax)$ . Ezt az alábbi indexeléssel érhetjük el:

$C_{n,m}$  együtthatók esetén:

$$t = \frac{(n+1)n}{2} + m \quad (5)$$

$S_{n,m}$  együtthatók esetén:

$$t = \frac{(nmax+2)(nmax+1)}{2} + \frac{(n+1)n}{2} + m \quad (6)$$

Az analízis tesztelésénél első körben (a mérési zaj hatásának elkerülése végett) nem mérési, hanem szimulált adatokkal dolgozunk, amelyeket a szintézist végző programmal hoztunk létre. A validáció során a becsült  $\hat{x}$  gömbharmonikus együtthatók meg kell, hogy egyezzenek a szintézis program bemeneti modellparamétereivel.

### 3 Bemeneti és kimeneti adatok

A szintézist végző program bemeneti adatai az (1) képletből következően önkényesen felvett helyek  $\lambda$ ,  $\vartheta$ ,  $r$  földrajzi koordinátái. A megvalósítás szerint ez három bemeneti szöveges állományt jelent, egyikben a  $\lambda$ , másikban a  $\vartheta$ , a harmadikban az  $r$  értékeket találhatjuk felsorolva, az egymáshoz tartozó értékek a különböző állományokban azonos sorszámú helyen szerepelnek. Ezek az adatrendszerek valós mérések esetén igen nagyméretűek is lehetnek. Pl. a GOCE műhold minden 1 s-ben végzett mérést, így egy nap 86 400 mérési pont és adat keletkezik. Ez egy év alatt 31 536 000 mérési pontot jelent.

További bemeneti adatok a gömbi harmonikus együtthatók, amelyeket valamilyen nehézségi erőter modellből (esetünkben EGM2008 (Pavlis et al. 2012, Szűcs 2012) olvastatunk be. A beolvasás során a  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  együtthatóknak külön állományokban kell lenniük, egymás alatt felsorolva, az (5) és (6) egyenleteknél ismertetett sorrendet követve.

A program számára meg kell adni azt is, hogy mekkora maximális együtthatószámmal dolgozzon, meg kell adni a számítás helyét és a működési módot is (ez utóbbi arra vonatkozik, hogy milyen nehézségi erőterjellemező meghatározását kérjük). A program struktúrájában ezt a három értéket összefoglalóan bemeneti paramétereknek nevezzük. Meg kell adni a kimeneti állomány nevét is. A kimeneti állomány a program futása után a kiválasztott térjellemező (pl. a potenciál) értékeit fogja tartalmazni az általunk megadott pontokban, ugyanolyan sorrendbe rendezve, mint ahogy a pontok koordinátáit tartalmazó állományokban megadtuk őket.

A szintézis és analízis programok bemeneti és kimeneti adatai között annyi a különbség, hogy az analízis során a modellparaméterek kimeneti adatok lesznek, és a megadott helyeken mért (vagy szintézissel számított) értékek pedig itt bemeneti állományok. Ugyanúgy meg kell adni a program számára a mérés (vagy számítás) pontjainak koordinátáit, a gömbharmonikus maximális fokszámát, és azt, hogy a mérési (vagy szintetikus) adatok milyen típusú térjellemezők.

### 4 A programok felépítése

A szintézist végző program kilenc, jól elkülöníthető blokkból áll. Az első blokkban deklaráljuk a bemeneti és kimeneti adatállományok és paraméterek neveit és egyes mennyiségekre alapértelmezett értékeket adunk meg. A második blokkban a konzolról olvastatjuk be a bemeneti adatokat tartalmazó állományok neveit és a bemeneti paramétereket, ha azokat korábban nem adtuk meg alapértelmezettként. A harmadik blokk fájl objektumokat deklarál és megnyitja a korábbiakban megadott névvel jelölt fájlokat. A negyedik blokk dinamikusan memóriát foglal a  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  együtthatókat tartalmazó mátrixok, illetve a térjellemező értékeket tartalmazó vektor számára. Az ötödik blokk beolvassa fájlból a lefoglalt és mutatóval megjelölt memóriahelyekre a  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$



együtthatók értékeit. A hatodik blokk helyet foglal a pontok koordinátái számára, a hetedik blokk pedig a fájlból beolvassa a foglalt memóiahelyekre ezeket a koordinátákat, és a fokokban megadott szögértékeket átváltja radiánba. A nyolcadik blokk helyet foglal a Legendre-függvények adott  $\vartheta$  szögnél vett értékei számára. Ez három darab mátrixot jelent: a maximális fokszámig bezárólag az összes fokra és rendre mátrixban összefoglalva adja meg a Legendre-függvények, illetve azok szög szerinti első és második deriváltjainak értékeit.

A tényleges számítást az eddigi blokkok csupán előkészítették, azt a kilencedik blokk hajtja végre: itt a számítási folyamat tíz alesetre bomlik a tízféle számítható térjellemező (tíz mód) alapján. Mindegyik mód egy háromszorosán egymásba ágyazott ciklust valósít meg, a külső ciklus az számítás helyeit veszi sorra, a két belső pedig az együtthatók fokain és rendjein fut végig. A két belső index szerinti összegzéssel így az (1) képlet szerinti számítás megvalósítható. A külső index összes ugrásánál a Legendre-függvényt számító függvény (plegendre2) kitölti a három mátrix számára foglalt helyet az éppen aktuális új  $\vartheta$  szögértékkel számolva, a számítás összes fokára és rendjére, és az első, és második deriváltakra is. A belső két index összes ugrásánál pedig a program számítja az adott fok és rend járulékát a térjellemezőhöz (lásd (7) képlet a potenciál esetén),

$$V_{n,m,f} \frac{GM_0}{R} \left(\frac{R}{r_f}\right)^{n+1} \{C_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta_f) \cos(m\lambda_f) + S_{n,m} P_{n,m}(\cos \vartheta_f) \sin(m\lambda_f)\}, \quad (7)$$

amelyeket  $n$ ,  $m$  indexek szerint összegezve megkapjuk a választott térjellemező értékét az adott pontban.

Az analízis program tizenhárom blokkból áll. A szerkezete a nyolcadik blokkig teljesen analóg a szintézist végzőével: a különbség annyi, hogy nem a gömbi harmonikus együtthatókat, hanem az adott térjellemező egyes pontokban mért (vagy szimulált) értékeit olvassuk be adatállományból; illetve, mivel nem a térjellemező értékére, hanem az alakmátrixra leszünk később kíváncsiak, nem egy vektor, hanem egy mátrix számára foglalunk helyet. A kilencedik blokk az alakmátrixot számítja (3) és (4) képletek értelmében, a szintézishez hasonlóan egy háromszorosán egymásba ágyazott ciklus segítségével, a Legendre-függvényeket a külső ciklusban minden alkalommal újraszámítva. Az  $S_{n,m}$ , illetve a  $C_{n,m}$  együtthatókra vonatkozó alakmátrix elemeket elkülönült egymásba ágyazott ciklusokban számítja. Miután feltöltötte az alakmátrixot, a tizedik blokkban annak a saját transzponáltjával vett szorzatát számítja (ú.n. normálmátrix), majd a tizenegyedik blokkban a transzponálnak a mérési (vagy szintetikus) vektorral vett szorzatát számolja ki (ú.n. a normálegyenletrendszer tisztatag vektora). A tizenkettedik blokkban megoldja a (2) egyenletrendszert  $\hat{x}$ -ra, a gömbharmonikus együtthatók vektorára nézve. Ez a megoldás többféle algoritmussal történhet, például Gauss-Jordan-féle eliminációval. A tizenharmadik blokk a számított gömbharmonikus együtthatók kiírását végzi.

A program külső függvényeket is használ: a plegendre2 függvény a Legendre-függvények, és azok  $\vartheta$  szög szerinti első és második deriváltjainak értékeit számítja adott  $\vartheta$  szög esetén, a megadott maximális együtthatószámig minden fokra és rendre, a fokok és rendek szerint mátrix alakba rendezve őket, rekurzív algoritmussal. A plegendre2 függvényt a szintézis program térjellemezőket számító kilencedik, illetve az analízis program alakmátrixot számoló, szintén kilencedik blokkjában használom. Az analízis tizenkettedik blokkjában az egyenletrendszer megoldására az alábbi függvényeket használtam: Gauss-Jordan elimináció, szinguláris érték felbontás, LU dekompozíció, Cholesky-dekompozíció (Press et al. 2007). Ha megadjuk az egyes eljárások számára a tisztatag vektort és az együtthatómátrixot, számítják az ismeretleneket. Azért tartottuk fontosnak valamennyi implementációját, hogy numerikusan instabil feladat esetén is felkészült eszköztárral rendelkezzen a szoftver (a kapcsolódó vizsgálatot lásd a 6. fejezetben).

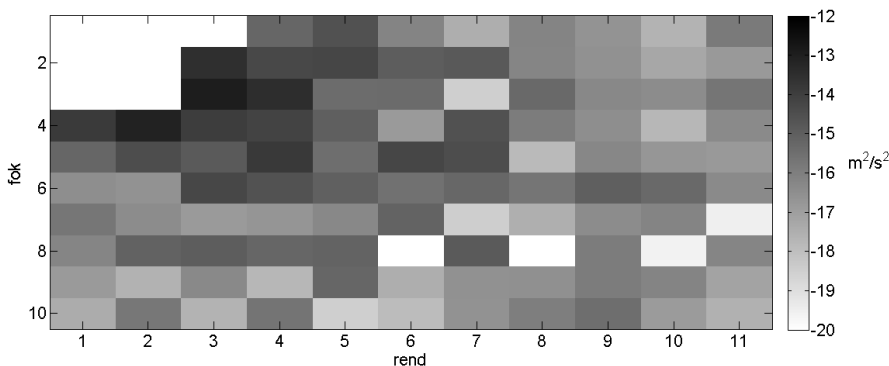
#### 4 A program tesztelése

A szintézist végző programot (annak elvi egyszerűsége okán) csak egyszerűbb validáció alá vetettük. Szintézist végző programok jellemző hibáiként a Legendre-függvények magasabb fokoknál tapasztalható kicsiny értékeinek kezelése említhető (Mughal et al. 2006). Ezt ellenőriztük, a Legendre-függvények számítását végző rutin egészen magas fokig ( $\vartheta=30^\circ$  esetén 3630-ig, más  $\vartheta$ -nál

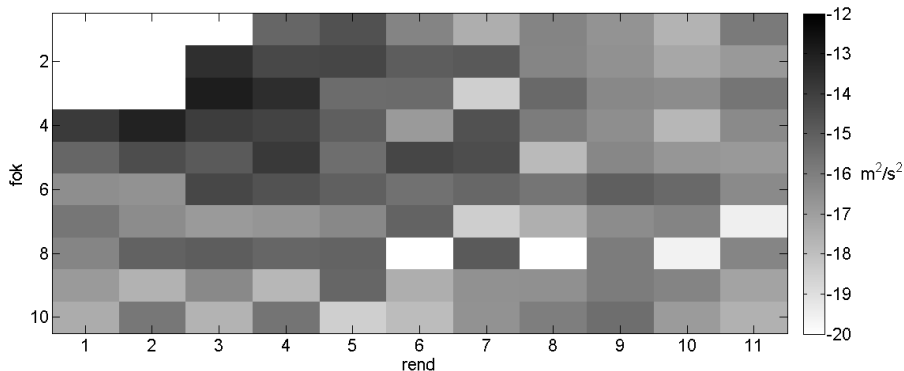
e fölött is) megfelelően számol. Ezen kívül a szintézissel kalkulált eredményeket egy korábbi, MATLAB környezetben írt szintézist végző program eredményeivel hasonlítottuk össze; az összehasonlítás alapján azok megfelelőnek minősültek.

Az analízist végző program tesztelése során az elsődleges szempont az volt, hogy a szintézist végző programnak a mérések szimulációja során megadott geoid modell minél pontosabban megegyezzen az analízist végző program kimenetével. Megtehetjük, hogy az így kapott együtthatósort újból megadjuk a szintézist végző programnak mint bemenetet, amelyből térbeli adatokat kapva ismét elvégezzük az analízist, így ez a validációs folyamat iterálható. Fontos szempont még a futási idő és a memóriaigény optimalizálása (hiszen ezért írtuk programunkat C++ nyelven, amely lehetővé teszi a mélyebb, „gépközeli” tervezést).

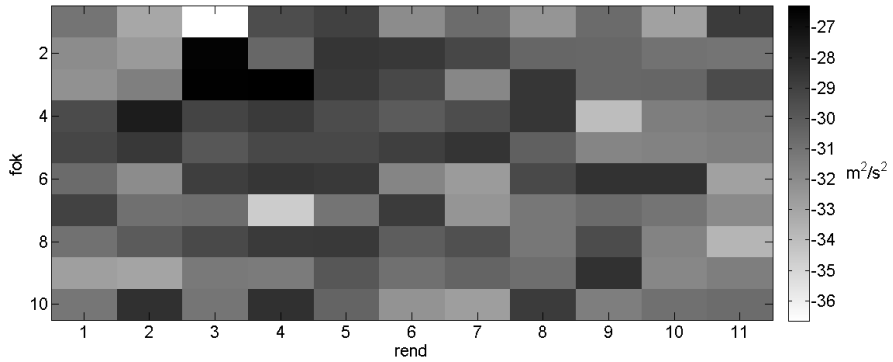
Az első szempontnak megfelel a program: a 3. ábrán az eredeti gömbi harmonikus együtthatók és a fentebb leírt módon háromszor iterált megoldások közötti különbségeket láthatjuk a fokok és rendek függvényében. Az 1. és 2. ábrán az együtthatók tényleges értékeit láthatjuk; a 3. ábrát velük összehasonlítva láthatjuk, hogy az egy iterációs lépés során megjelenő hiba igen kicsi, a tényleges értékeknek csupán átlagosan  $10^{-14}$  szerese, ami a módszer számítási pontosságát jelzi. A 4. és az 5. ábrán térképen ábrázolva láthatjuk a különbséget az EGM2008 modell alapján számított potenciálértékek és a három iteráció után visszakapottak között, ami igen kicsi. A 6. ábrán egy 70 fokig és rendig meghatározott geoidot láthatunk, amit a szintézis program számolt az EGM2008 modellből.



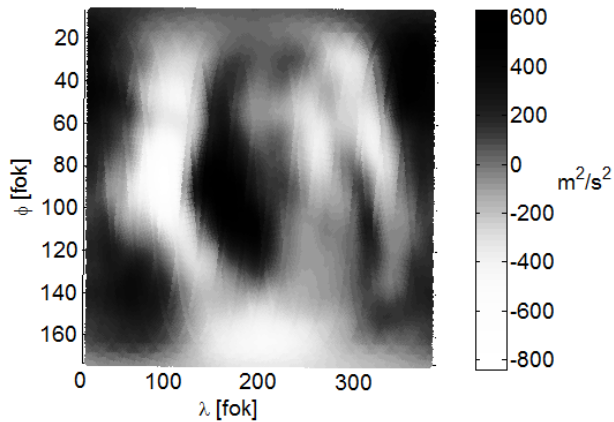
**1. ábra.** Az EGM2008 modell szerinti  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  együtthatók értékeinek ábrázolása 10 fokig és rendig színskálával. A  $C_{n,m}$  együtthatók a főátlótól balra lent, az  $S_{n,m}$ -ek attól jobbra fent találhatók. A bal felső sarokban található együtthatók kilógnak a színskáláról, mert nagyobbak  $10^{-12}$   $m^2/s^2$ -nél, ezért fehérrel vannak ábrázolva



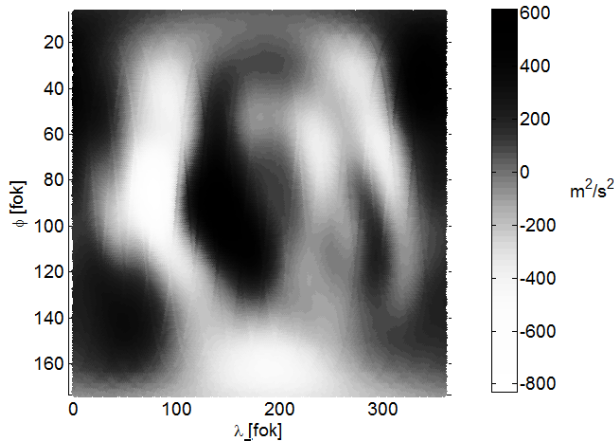
**2. ábra.** Az analízis után visszakapott  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  együtthatók értékeinek ábrázolása színskálával. A  $C_{n,m}$  együtthatók a főátlótól balra lent, az  $S_{n,m}$ -ek attól jobbra fent találhatók. A bal felső sarokban található együtthatók kilógnak a színskáláról, mert nagyobbak  $10^{-12}$   $m^2/s^2$ -nél, ezért fehérrel vannak ábrázolva



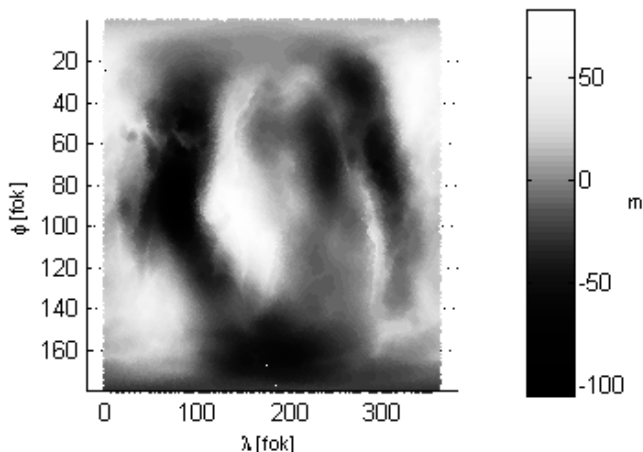
3. ábra. Az eredeti modellben szereplő és az analízis után visszakapott együtthatók közötti különbségek színskálán



4. ábra. Az EGM2008 modell alapján szintézissel számított nehézségi potenciálértékek a GOCE egy teljes napi műholdpályája mentén, minden lépésnél maximálisan 10 fokkal és renddel számolva



5. ábra. Háromszori iteráció után visszakapott együtthatókból szintézissel számított nehézségi potenciálértékek a Föld középpontjától 6372.797 km magasságban, a GOCE egy napi pályája mentén megadott pontokban, maximálisan 10 fokkal és renddel számolva minden iterációnál



**6. ábra.** Az eredeti modell egyúthatóiból szintézissel számított geoidunduláció értékek a Föld középpontjától 6372.797 km magasságban, véletlenszerű helyeken megadott pontokban, maximálisan 70 fokkal számolva

## 6 További fejlesztések

Miután a validáció megtörtént, szükség volt a program memóriakezelési és futási idő optimalizálási szempontok szerinti fejlesztésére is. A futási időt több módon is csökkentettem a fejlesztés során, e szempont szerint jártam el, amikor a korábbi  $plegendre(n,m,\vartheta)$  függvényt (Press et al. 2007) felváltottam a  $plegendre2(**p, **dp, **ddp, nmax, \vartheta)$  függvényvel, ahol  $**p$ ,  $**dp$  és  $**ddp$  azokat a memóriahelyeket adják meg az eljárásnak, ahova a Legendre-függvény összes értékét írhatja egy  $n$ ,  $m$  indexelésű mátrixba, megadott  $\vartheta$  értéknél, adott  $nmax$  maximális fokszámánál. Tehát míg a  $plegendre(n, m, \vartheta)$  három bemenetű, adott  $n$  fokra,  $m$  rendre,  $\vartheta$  szögnek számítja a Legendre-függvény számszerű értékét, a  $plegendre2$  tulajdonképpen egy egy bemenetű függvény (a valódi bemenete a  $\vartheta$ ), a kimenete pedig három mátrix. Ezáltal a mérési adatok óriási számához képest elhanyagolható mértékben valamivel több memóriahelyet foglal a számítás során, viszont a futási időt lényegesen gyorsítja, hiszen nincs szükség a legbelső ciklus minden egyes ugrásánál újraszámolni a Legendre-függvény értékeit, hanem csak a külső ciklus ugrásainál számolja a mátrixokat újra. A belső ciklus immár azonnal elő tudja venni a korábban kiszámolt értéket a memóriamutató alapján a számított mátrixból. A  $plegendre2$  függvény rekurzív algoritmusra épül, így futási idő szempontjából egyértelműen ennek használata az optimális. A fentieket alátámasztva, vizsgálataink szerint a  $plegendre(n,m,\vartheta)$  függvényvel, maximálisan 50 fokig-rendig számolva a szintézist végző program 946 s-ig futott, míg a futás  $plegendre2(**p, **dp, **ddp, nmax, \vartheta)$  függvényvel csak 195 s-ig tartott.

A másik lehetőség a futási idő optimalizálására különböző egyenletmegoldó algoritmusok vizsgálata a saját adatokra. Ekkor, ha az első, a számítási pontosságot garantáló feltétel bármely kipróbált algoritmus esetén teljesül, a legfontosabb szempont a különböző eljárások közötti döntésnél a gyors futási idő. Mivel az általunk vizsgált esetben a normálmátrix jól kondicionált (kondíciószáma 44,48), a felhasznált algoritmusok között a döntő tényező a futási idő. Itt megjegyzem, hogy a mérési pontok elhelyezkedésétől függően a kondíciós szám változhat, a fentebbi értéket szabályos rácson számolva kaptuk. Egy műholdpálya esetén a pontok helye nem egyenletesen elosztott, mint egy rácson, hanem is véletlenszerű, az adatok a műhold haladásának irányában erősen korreláltak lesznek, így a kondíciós szám jelentősen megnőhet. Ezért a program az aktuális adatok alapján meghatározza a normálmátrix kondíciós számát, és rosszul kondicionált esetben figyelmeztet; ez esetben érdemes elgondolkodni valamilyen kondicionáltságtól független eljárás (pl. SVD) futtatásán és az eredmények összevetése alapján történhet meg az egyes eljárások minősítése. A futási idők között a következő különbségek adódtak: egy 50x50-es normálmátrix esetén a futás Gauss-Jordan eliminációval 976 s-nak, LU dekompozícióval 509 s-nak, szinguláris érték felbontással 7394 s-nak, Cholesky-dekompozíció esetén 433 s-nak adódott. Tehát, ha a számítási pontosság nem függ a választott

egyenletmegoldó algoritmustól, a leghatékonyabb megoldás a Cholesky-dekompozíció használata lehet.

A harmadik szempont a memóriahasználat optimalizálása. Ha a program számára a rendelkezésére bocsátott memória mennyisége nem elégséges, akkor a feladat végrehajthatatlan. Mivel a program által használt adatstruktúrák szerkezetéből és adatigényéből adódóan (óriási mérési információmennyiség) a memóriahasználat igen jelentős, statikus helyfoglalással és így az adatrendszerek absztrakt matematikai objektumként (vektor, mátrix, stb.) történő kezelésével nem érhetünk eredményt. Kisebbségi mérések esetén (szabályos rács pontjaiban, majd véletlenszerű helyeken) működik a statikus helyfoglalási módszer a vektorok és a mátrixok deklarálásával, de valódi, akár több napos pályaadatok esetén a növekvő adatmennyiség miatt a dinamikus helyfoglalás elkerülhetetlen. Ez pedig megköveteli az adatok mutatókkal való címkézését, ennél fogva azoknak absztrakt matematikai objektumok helyett különböző memóriahelyeken tárolt egyedi számokként történő megjelenítését. Természetesen a mátrix és a vektor fogalma továbbra is a programozó segítségére lehet a konkrét számításoknál. A statikus helyfoglalással a program futása lehetetlenné válik az ilyen esetben fellépő memórialimit miatt, viszont dinamikus helyfoglalás esetén elméletileg bármekkora tárhelyet foglalhatunk, ezt mi tudjuk beállítani. Természetesen az operációs rendszer által beépített határértékek, majd a memória fizikai korlátai miatt ilyenkor is van határa a foglalás lehetőségeinek, de ez már a számítógéptől, és az operációs rendszertől függ. Egy szuperszámítógép képes lehet igen nagy mennyiségű, akár több éves pályaadattal való számolásra is, amelynek kipróbálására a BME-n lehetőségünk van a Superman elnevezésű clusteren.

## 7 Összefoglalás

Tanulmányunkban bemutatásra került a BME-n fejlesztés alatt álló, már jelenleg is üzemképes gömbharmonikus szintézis és analízis végzésére alkalmas C++ szoftver. A szoftvert úgy fejlesztettük, hogy az elmúlt másfél évtized folyamányaként rendelkezésünkre álló nagyon nagy mennyiségű gravimetriai műholdas adat kezelésére is képes legyen. A projekt nem tekinthető lezártnak, tervezünk jövőbeli fejlesztéseket.

További lehetőségek adódnak a futási idő optimalizálására, pl. a folyamat szálainak párhuzamossá tételével. Például egy két processzorral rendelkező számítógép esetén a  $C_{n,m}$  és  $S_{n,m}$  együtthatókat nem egymás után, hanem egymással párhuzamosan is számíthatjuk. Ezenkívül tervezzük ezen algoritmusok összehasonlítását a normálmátrix invertálásának további módszereivel, számítási pontosság és futási idő, illetve a memóriaiszükséglettel összefüggő megvalósíthatóság szempontjai alapján.

Funkcionalitását tekintve is végezhetünk még fejlesztéseket, így pl. további fejlesztési lehetőség különböző mérési mennyiségek optimális együttes kiegyenlítésének kidolgozása súlyozással. A végső validáció pedig valódi mérési (nem szintetikus) adatokon végrehajtott analízisen kell, hogy alapuljon, valamelyik gravimetriai műhold által mért összes térjellemező (pl. GOCE esetén Eötvös-tenzor elemek) méréseit felhasználva, a megoldás során azokat megfelelően kombinálva.

## Hivatkozások

- Arabelos D, Tscherning CC** (1993): Regional recovery of the gravity field from SGG and SST/GPS data using collocation. in: Study of the gravity field determination using gradiometry and GPS, Phase 1, Final report ESA Contract 9877/92/F/FL
- Arabelos D, Tscherning CC** (1999): Gravity field recovery from airborne gravity gradiometer data using collocation and taking into account correlated errors. Phys. Chem. Earth (A), 24(1), 19-25.
- Barthelmes F, Köhler W** (2012): International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Journal of Geodesy, The Geodesists Handbook 2012, 86(10), 932-934.
- Barthelmes F** (2009): Definition of Functionals of the Geopotential and Their Calculation of the Spherical Harmonic Models. Scientific Technical Report, STR09/02, Revised Edition, January 2013, 21-23.
- Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. Egyetemi tankönyv és kézikönyv, Budapest, 153.
- Detrekői Á** (1991): Kiegyenlítő számítások. Nemzeti Tankönyvkiadó. 688.
- Földváry L** (2004): A 2000-es évek első évtizede: A gravimetriai műholdak korszaka. Magyar Geofizika, 45(4), 118-124.

- Han SC, Jekeli C, Shum CK** (2002): Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP. *Geophysical Research Letters*, 29 (16), 36-1–36-4.
- Krasbutter I, Brockmann J M, Kargoll B, Schuh WD, Goiginger H, Pail R** (2011): Refinement of the stochastic model of GOCE scientific data in a long time series. in: Ouwehand, L. (eds.) *Proceedings of the 4th International GOCE User Workshop*, ESA Publication SP-696, ESA/ESTEC, 103-107.
- Mughal AM, Ye X, Iqbal K** (2006): Computational Algorithm for Higher Order Legendre Polynomial and Gaussian Quadrature Method. Conference paper: *Proceedings of the 2006 International Conference on Scientific Computing, CSC 2006*, Las Vegas, Nevada, USA, June 26-29, 1-5.
- Pail R, Plank G** (2004): GOCE gravity field processing strategy. *Stud. Geophys. Geod.*, 48, 289-308.
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK** (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *J. Geophys. Res.*, 117, B04406, DOI:10.1029/2011JB008916
- Press WH, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP** (2007): *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.). Cambridge University Press, New York.
- Rummel R, van Gelderen M, Koop R, Schrama E, Sanso F, Brovelli M, Migliaccio F, Sacerdote F.** (1993): Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry. *Neth. Geod. Comm., Publications on Geodesy*, 39, Delft, the Netherlands, 124.
- Szűcs E** (2012): Validation of GOCE time-wise gravity field models using GPS-levelling, gravity, vertical deflections and gravity gradient measurements in Hungary. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 56(1), 3-11.



# ÚJ MAGYARORSZÁGI GEOIDMEGHATÁROZÁS AZ ÖTÖDIK GENERÁCIÓS GOCE NEHÉZSÉGI ERŐTÉR MODELLEK SEGÍTSÉGÉVEL

Tóth Gyula\*, Földváry Lóránt\*\*



**Updated Hungarian gravity field solution based on fifth-generation GOCE gravity field models** – *With the completion of the ESA's GOCE satellite mission fifth-generation gravity field models are available from the ESA GOCE High Processing Facility. An updated gravity field solution for Hungary using the latest DIR R05 GOCE gravity field model has been determined. The solution methodology is the least-squares gravity field parameter estimation using spherical radial base functions. Regional datasets including deflections of the vertical, gravity anomalies and quasi-geoid heights by GPS/levelling have been applied. The GOCE DIR R05 model has been combined with the EGM2008 model and has been evaluated in comparison with the EGM2008 and EIGEN-6C3stat models to assess the performance of our regional gravity field solution.*

**Keywords:** geoid determination, GOCE, spherical radial base functions

Az ESA GOCE mesterséges holdja nagymértékben hozzájárult a földi nehézségi erőter korábbiaknál jobb felbontású meghatározásához. A mérések befejezése után 2014-ben elérhetővé váltak a GOCE ötödik generációs nehézségi erőter modelljei. Ez lehetővé tette olyan új geoidmegoldás előállítását Magyarország területére, amely már tartalmazza a GOCE méréseit is. A megoldás módszere a gömbi bázisfüggvényeken alapuló legkisebb négyzetes paraméterbecslés. A GOCE modellen kívül felhasználtuk a felszíni függővonal-elhajlások, nehézségi rendellenességek és OGPSH magasságok adatait is. Az EGM2008 geopotenciális modellt a GOCE DIR R05 modellel úgy módosítottuk, hogy tartalmazza a GOCE-ből származó összetevőket is abban a spektrális tartományban, ahol a GOCE mérései jelentős hozzájárulást adnak. Ismertetjük az elkészített megoldás ellenőrző vizsgálatait, amelybe bevontuk a fenti modellen kívül az EGM2008 és EIGEN-6C3stat modelleket is.

**Kulcsszavak:** geoidmeghatározás, GOCE, gömbi radiális bázisfüggvények

## 1 Bevezetés

2014 nyarán az Európai Űrügynökség (ESA) elérhetővé tette a High Processing Facility (HPF, Bouman et al. 2009) keretében készített ötödik generációs GOCE nehézségi erőter modelleket. Ezek a modellek a GOCE űrprojekt teljes 42 hónapnyi méréseit tartalmazzák a 2009.11.01. és 2013.10.20. közötti időszakban. Az ötödik generációs DIR R05 modell a GOCE mérései mellett még LAGEOS és GRACE méréseket is tartalmaz a modell maximális 300 fok- és rendszámáig, ami az összes DIR modell között a legmagasabb (Bruisma et al. 2013).

Az a célunk, hogy ezt a GOCE által szolgáltatott értékes információt hasznosítsuk a nehézségi erőter Magyarország területére vonatkozó modelljeiben. Ennek egyik lehetősége az, hogy a földfelszíni nehézségi adatokkal együtt közvetlenül a GOCE által mért gravitációs gradienseket vonjuk be a meghatározásba. Másik lehetőségként az említett ötödik generációs GOCE nehézségi erőter modelleket használhatjuk fel a regionális nehézségi erőter modellezéséhez. Jelen tanulmányban kizárólag ez utóbbi lehetőséget vizsgáljuk, de megemlítjük, hogy terveink között szerepel a GOCE mérési adatok közvetlen felhasználása is.

A dolgozat a továbbiakban a következő elrendezést követi: A 2. fejezetben rövid áttekintést adunk a regionális nehézségi erőter modellezésben alkalmazott két fő módszerről, valamint a korábbi magyarországi geoidmeghatározásokról. Az ezt követő 3. fejezetben a konkrétan alkalmazott eljárás, a hazánkban újdonságnak számító térben lokalizált gömbi radiális bázisfüggvényeken (Spherical Radial Base Functions, SRBF) alapuló paraméterbecslés ismertetésére térünk át. A

\*BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.

E-mail: toth.gyula@epito.bme.hu

\*\*MTA CSFK Geodézia és Geofizikai Intézet

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8.



4. fejezetben részletesen ismertetjük az adatfeldolgozást és paraméterbecslést. Ezt követik az 5. fejezetben a kísérleti számítások és az eredmények, végül a 6. fejezetben megfogalmazunk néhány fontos következtetést az eddigi eredmények alapján.

## 2 A regionális nehézségi erőter meghatározás módszerei

A regionális nehézségi erőter meghatározása olyan becslési eljárás, amelyben a nehézségi erőterre vonatkozó adataink (mérések) lehetőség szerinti optimális kombinációját keressük a mérési hibák egyidejű csökkentése mellett. Ezen kívül fontos a nehézségi erőter különböző funkcionáljainak és azok hibáinak becslése is nem mért pontokban (ún. predikció). Ilyen funkcionálnak tekinthető a potenciálzavar valamely függvénye, mint például a geoidunduláció, a nehézségi rendellenességek, a függővonal-elhajlások és a gravitációs gradiens tenzor.

A becslés általában a következő sémát követi: Mérési egyenleteket írhatunk fel a különböző mért  $f(P)$  funkcionál értékekre  $e(P)$  mérési hiba mellett a  $P$  mérési pontokban a következő módon

$$f(P) + e(P) = ad(P) + DT. \quad (1)$$

Ebben az egyenletben  $T$  az ismeretlen potenciálzavar,  $D$  az  $f$  mérési funkcionálhoz tartozó lineáris differenciáloperátor,  $a$  skaláris állandó, valamint  $d(P)$  a tényleges és közelítő peremfelület helyektorainak különbsége.

Az (1) egyenlet megoldása geodéziai peremérték-feladattal úgy történik, hogy gömbfüggvények segítségével először spektrális alakra transzformáljuk, majd alkalmasan választott spektrális súlyok segítségével legkisebb négyzetes (LKN) becsléssel határozzuk meg a potenciálzavart (van Gelderen és Rummel 2000). Ezt a becslést aztán visszatranszformáljuk a tértartományba, amely ott egyenértékű az  $f(P)$  mérési adatok és valamely alkalmasan választott magfüggvény konvolúciójával. A tértartományban a potenciálzavar számítása tehát konvolúciós szűrésnek tekinthető, amit a gyakorlatban numerikus integrálással valósítanak meg. A Stokes-Helmert eljárással történő hagyományos geoidmeghatározás a fenti módszer jól ismert példája.

Az (1)-es egyenlethez kapcsolódó becslési probléma megoldásának másik megközelítése az, hogy  $T$ -t térben lokalizált, alkalmasan választott paramétereiktől függő bázisfüggvényekkel közelítjük. Ezután a  $T$  legjobb becslését szolgáltató paramétereiket az  $e(P)$  mérési hibák négyzetösszegének megfelelően súlyozott minimalizálásával határozzuk meg. Ez az eljárás gyakran regularizációt igényel, amelyhez a megoldásra (paraméterekre) vonatkozó előzetes információra van szükség (Schmidt et al. 2006). Ennek a megközelítésnek egyik jól kidolgozott eljárása a legkisebb négyzetes kollokáció (LSC), melyben a bázisfüggvények szoros kapcsolatban vannak az LSC kovariancia függvényével (Moritz 1980).

Mindkét előbb említett megoldásnak vannak előnyei és hátrányai, ezért mindkettőt gyakran alkalmazzák a nehézségi erőter meghatározására. Az említett módszerek gyakorlati összevetését illetően Ophaug (2013) dolgozatára utalunk.

A nehézségi erőter modellezése Magyarországon hosszú múltra tekinthet vissza. A világon az első ilyen meghatározásnak tekinthető Eötvös Loránd és Pekár Dezső 1918-ban közölt korabeli térképe az Arad környéki terület potenciálkülönbségeiről, melyet csillagászati-geodéziai és torziós inga mérések alapján szerkesztettek meg (Bíró et al. 2013). Az 1950-es évektől végzett csillagászati-geodéziai geoidmeghatározásokat a különböző intézményekben modern gravimetriai geoidszámítások követték, melyekről jó áttekintést adnak Bíró et al. (2013). Külön megemlítjük azt az LSC alkalmazásával heterogén adatokból végzett nehézségi erőter meghatározást, melynek eredménye a HGTUB2007 jelű gravimetriai, asztrogeodéziai, gradiometriai geoidmegoldás (Tóth 2009), illetve az EGM2008 geopotenciális modell (Pavlis et al. 2012) és LSC eljárásával készített kombinált asztrogeodéziai-gravimetriai kvázigeoidot (Tóth és Szűcs 2011). Dobróka és Völgyesi (2008) a nehézségi erőter kisebb területen történő modellezésére a jelen tanulmányban alkalmazott módszerhez hasonló inverziós eljárást alkalmaztak, amelyben azonban a potenciáltér leírására használt bázisfüggvények térbeli derékszögű koordináták háromváltozós polinomjai voltak.

Jelen tanulmányban a nehézségi erőter modellezését gömbi radiális bázisfüggvényekkel (SRBF) végeztük. A következő fejezetben áttekintjük a módszer elvi alapjait.

### 3 Gömbi radiális bázisfüggvényeken alapuló nehézségi erőter meghatározás

Abban az esetben, amikor a teljes földfelszínt homogén ponteloszlásban lefedő adatok állnak rendelkezésünkre, általában a legcélszerűbb a nehézségi erőter gömbfüggvényeken alapuló modellezését és becslését alkalmazni. A regionális nehézségi erőter modellezése szempontjából nézve azonban a gömbfüggvények alkalmazása több hátránnyal is jár. Az egyik hátrány az, hogy a gömbfüggvények zérus vagy közel zérus értékű helyei által lefedett terület a gömb felszínéhez képest elhanyagolhatóan kicsi, ezért szinte a teljes földfelszínről kell adatokkal rendelkezünk. Másrészt, ha az adatok eloszlása nem egyenletes, akkor azokon a területeken, ahol sűrűbbek az adataink, a nehézségi erőter több részletét kellene tudnunk meghatározni. Ez az egyenetlen ponteloszlás azonban a gömbfüggvényekkel történő modellezés esetében azt eredményezi, hogy a megoldás bizonyos területeken vagy túl sima lesz, vagy pedig a nem modellezett magasabb frekvenciájú nehézségi erőter összetevők elrontják a becslést (aliasing). Ezen kívül a gömbfüggvények alkalmazása ahhoz vezet, hogy a lokális mérési hibák is a teljes földfelszínre kiterjedő hibahatást fognak eredményezni.

A gömbi radiális bázisfüggvényeken alapuló eljárások – a gömbfüggvények alkalmazása vagy a hagyományos geodéziai peremérték-feladatokkal történő megoldások mellett – a tapasztalatok szerint jól alkalmazhatók a regionális nehézségi erőter meghatározására. Schmidt et al. (2006) jó áttekintést adnak erről az eljárásról, amelyet többen sikeresen alkalmaztak a helyi nehézségi erőter számítására mind földi (Klees et al. 2008, Wittwer 2009), mind mesterséges holdas (Eicker 2008, Naeimi 2013) adatok esetében.

A következőkben felsoroljuk a módszer néhány előnyét:

- minden mérési adathoz egyedi súlyt rendelhetünk,
- különböző típusú mérések (pl. függővonal-elhajlások vagy gravitációs gradiensek) bevonására van lehetőség,
- az LSC-hez képest kisebb a számításigény (nem kell az adatok számával megegyező számú ismeretlen meghatározni),
- a paraméterbecslés és a predikció a kiegyenlítő számítások szigorú eszköztárával történhet, pl. teljes kovarianciamátrixok felhasználásával.

A gömbi radiális bázisfüggvényeken alapuló paraméterbecslés funkcionális modellje hasonló az (1)-es képletben adott matematikai modellhez. Feltesszük, hogy a mérési pontok helyzete ismert, így nem kell az ismeretlen peremfelület  $d(P)$  korrekciójával foglalkozni. Ekkor

$$F(\mathbf{r}_i) + \mathbf{e}(\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^K x_k B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k). \tag{2}$$

Ebben a kifejezésben  $F$  illetve  $\mathbf{e}$  jelölik a mért nehézségi erőter összetevőt (funkcionált) illetve annak mérési hibáját az  $\mathbf{r}_i$  pontban,  $B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$  az  $\mathbf{r}_k$  pontba helyezett gömbi radiális bázisfüggvény,  $K$  a bázisfüggvények száma és az  $x_k$ -k az ismeretlen paraméterek. A (2) egyenlet vektoros alakban felírható az ismeretlen paraméterek  $\mathbf{x}$  vektorára vonatkozó lineáris egyenletrendszerként, ahol  $\mathbf{A}$  az alakmátrix,  $\mathbf{y}$  a mérési adatok és  $\mathbf{e}$  a mérési hibák vektora

$$\mathbf{y} + \mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{3}$$

Az  $N_{\min}$  és  $N_{\max}$  közötti frekvencia tartományban sávkorlátozott  $B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$  gömbi radiális bázisfüggvény Legendre-sorának  $b_n$  együttthatóival definiáljuk

$$B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (2n+1) \left( \frac{r_k}{r_i} \right)^{n+1} b_n P_n(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k), \tag{4}$$

ahol  $P_n(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k)$  az  $n$ -edfokú Legendre-polinomot,  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} / |\mathbf{r}| = \mathbf{r} / r$  az  $\mathbf{r}$  vektorhoz tartozó egységvektort,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  pedig az  $\mathbf{a}$  és  $\mathbf{b}$  vektorok skaláris szorzatát jelöli. Ebből a sorfejtésből megkaphatjuk a

$B^F(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$  sorfejtését úgy, hogy alkalmazzuk rá a megfelelő  $F$  funkcionálhoz tartozó  $D$  differenciál operátort. Például az észak-déli irányú  $\zeta$  függővonal-elhajlás összetevő esetében – gömbi közelítést alkalmazva a derivált számításához –  $B^\zeta(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$  a  $B(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k)$  bázisfüggvénynek az  $\mathbf{r}_i$  adatpontban képzett  $\varphi$  szélesség szerinti deriváltjából számítható ki

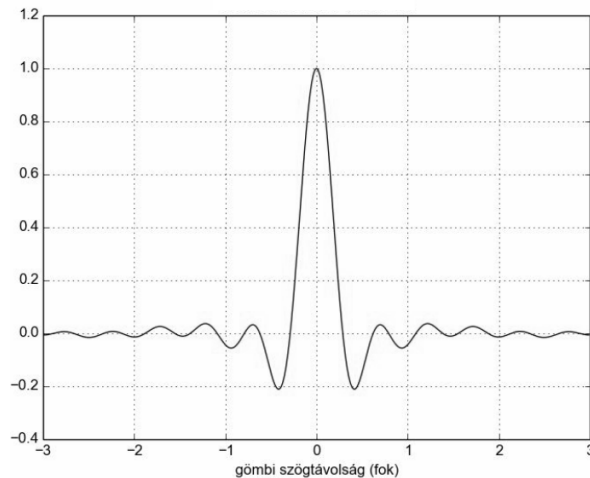
$$B^\zeta(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_k) = \sum_{n=N_{\min}}^{N_{\max}} (2n+1) \left( \frac{r_k}{r_i} \right)^{n+1} b_n P_n'(\hat{\mathbf{r}}_i \cdot \hat{\mathbf{r}}_k) \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}_i}{\partial \varphi} \cdot \hat{\mathbf{r}}_k. \quad (5)$$

A gömbi radiális bázisfüggvények alakja függ a választott frekvenciatartománytól és a  $b_n$  együtthatóktól. Tenzer és Klees (2008) valamint Bentel et al. (2013) tárgyalják az SRBF-eket és ezek alkalmazhatóságát a regionális nehézségi erőter meghatározás szempontjából. Jelen tanulmányban a legegyszerűbb sávkorlátozott Shannon-féle gömbi radiális bázisfüggvényt alkalmaztuk (1. ábra). A Shannon-féle SRBF a széleken viszonylag jelentős amplitúdójú ingadozásokat mutat, ugyanakkor megfelelőnek bizonyult az erőter modellezés első kísérleti számításai során.

A gömbi bázisfüggvényekkel végzett nehézségi erőter modellezés számos paraméter tetszőleges megválasztását foglalja magában. További választási lehetőséget jelent az SRBF-ek helyének meghatározása, vagyis az  $\mathbf{r}_k$  pontok megadása. Jelen tanulmányban ezeket a pontokat a gömbön szabályos lefedést adó Reuter rács szolgáltatta (Eicker 2008). A Reuter rács szomszédos pontjainak távolsága állandó, és ezt a  $c$  paraméterrel lehet megadni. Ez a paraméter egyszerűen a meridián mentén található pontok száma. A  $c$  paraméter közvetlen kapcsolatban van a bázisfüggvények sorfejtésének maximális  $N_{\max}$  fokszámával is, ennél fogva  $c$ -t úgy választottuk meg, hogy egyenlő legyen  $N_{\max}$  értékével.

A nehézségi erőterre vonatkozó mérésekből a nehézségi erőter modellezése általában rosszul kondicionált inverzfeladat. Egyrészt azért, mert a nehézségi erőter jellemzőit hibákkal terhelt mérésekből kell meghatározni. Másrészt az inverz művelet operátorának instabilitása nem csupán a mérési hibák eredménye, hanem közrejátszanak ebben a lefelé történő folytatás és szabálytalan adateloszlás, például adathiányos területek is. A fizikailag értelmes megoldás megtalálásához ezért regularizációra van szükség. A szakirodalomban számos regularizációs eljárást javasoltak; ezek jó áttekinthetéseként utalunk Bouman (1998) tanulmányára.

Ezen túlmenően, amikor különböző típusú méréseket szeretnénk kombinálni egymással, az egyes mérési típusok súlytényezőinek helyes megválasztása elengedhetetlen ahhoz, hogy megfelelő eredményt kapjunk. Szűcs et al. (2014) különböző típusú földi adatok spektrális jellemzőit hasonlították össze.



1. ábra. Shannon-féle sávkorlátozott radiális bázisfüggvény ( $N_{\min} = 200$ ,  $N_{\max} = 700$ )

Az adatok súlytényezőinek becslésével egyidejűleg a Tyihonov-regularizáció paramétere is meghatározható, ha a regularizációt az ismeretlen paraméterekre vonatkozó előzetes információnak tekintjük a Bayes-féle becslés elmélete szerint. Ez a Koch és Kusche (2002) által javasolt Variance Component Estimation (VCE) eljárás lényege. A továbbiakban röviden ismertetjük a VCE becslést.

Abban az esetben, amikor az  $\mathbf{x} = [x_k]$ ,  $k = 1, \dots, K$  paraméter vektor becslését többféle típusú adat felhasználásával végezzük, minden  $i$ -edik mérési csoporthoz bevezetünk egy ismeretlen  $\sigma_i$  szórástényezőt. Az utolsó „mérési” csoportnak tekintjük az ismeretlen paraméterekre vonatkozó előzetes információt, és az ehhez tartozó szórástényező legyen  $\sigma_\mu$ , amelyet regularizációs paraméternek tekinthetünk. A megoldásra vonatkozó becslést az  $N$  együttható-mátrixú normálegyenlet-rendszerből határozhatjuk meg, amely az egyes mérési csoportok  $N_i$  együttható-mátrixú és  $\mathbf{n}_i$  vektóru normálegyenlet rendszereinek súlyozott összegéként állítható elő

$$N\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{n} \quad , \quad \text{ahol } N = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} N_i \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \sum_i \frac{1}{\sigma_i^2} \mathbf{n}_i \quad . \quad (6)$$

A súlytényezők a normálegyenletek becsült  $\sigma_i$  szórástényezői négyzetének

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^T \mathbf{P}_i \hat{\mathbf{e}}_i}{r_i} \quad (7)$$

reciprokai, ahol  $\hat{\mathbf{e}}_i$  a javítások vektora,  $\mathbf{P}_i$  az  $i$ -edik mérési csoport súlymátrixa és  $r_i$  a fölősmérés-hányad

$$r_i = n_i - \frac{1}{\sigma_i^2} \text{tr}(N_i N^{-1}) \quad , \quad (8)$$

amely kifejezésben  $n_i$  jelöli az  $i$ -edik mérési csoport méréseinek számát, illetve  $\text{tr}(\mathbf{A})$  az  $\mathbf{A}$  mátrix nyomát. Mivel kezdetben sem az  $\hat{\mathbf{x}}$  megoldás, sem a  $\sigma_i$  szórástényezők nem ismertek, ezért iterációra van szükség (Eicker 2008). Amennyiben az iteráció konvergens, a VCE végül optimális becslést ad a paramétervektorra, az egyes mérési csoportok szórástényezőire és a regularizációs paraméterre.

A VCE iteráció minél gyorsabb konvergenciájának biztosításához a regularizációs paraméter jó kiinduló becslését kell adnunk. Ehhez a modellezett terület nagyságából számítható kezdőértéket használtunk fel Naeimi (2013) javaslata szerint, továbbá kiindulásként az összes szórástényezőt egységnyiinek választottuk.

Az  $\hat{\mathbf{x}}$  megoldás becslése után a paraméterek  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}}$  kovariancia mátrixa a kovariancia terjedés törvényéből levezethető

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} = \sum_i \frac{1}{\hat{\sigma}_i^2} N^{-1} N_i N^{-1} \quad . \quad (9)$$

A megoldás ismeretében a nehézségi erőter különböző paramétereinek (funkcionáljainak) predikciója (szintézise) a nem mért pontokban könnyen elvégezhető az  $\hat{\mathbf{x}}$  becslésnek a (3)-hoz hasonló egyenletekbe történő behelyettesítésével, a funkcionálnak megfelelő bázisfüggvények felhasználásával, az  $\mathbf{y}_S = \mathbf{A}_S \hat{\mathbf{x}}$  képlet szerint, azzal a különbséggel, hogy az  $\mathbf{A}_S$  mátrix kiszámításához a bázisfüggvényeket a predikció pontjaiban kell felírni. Az így meghatározott  $\hat{\mathbf{y}}_S$  funkcionálhoz tartozó teljes kovarianciamátrix ebben az esetben is levezethető a kovariancia terjedés törvényéből

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}} = \mathbf{A}_S \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{A}_S^T \quad . \quad (10)$$

## 4. Mérési adatok feldolgozása és paraméterbecslés

### 4.1 Mérési adatok

Az előzőekben ismertetett számítási módszer kipróbálásához a következő 7 mérési adatrendszert készítettük elő a GRS80 vonatkoztatási rendszerben történő regionális nehézségi erőter meghatározás számára:

- $\Delta g$  szabadlevegő nehézségi rendellenességek az MGH-50 alaphálózatban (Renner és Szilárd 1959, 509 pont)
- $\zeta$ ,  $\eta$  csillagászati-geodéziai függővonal-elhajlás összetevők a felsőrendű alaphálózat pontjaiban (138 pont)
- $\zeta$  kvázi-geoid undulációk (magassági anomáliák) az OGPSH alaphálózat pontjaiban:
  - $\zeta$  a régi Bendefy-féle szintezési hálózat pontjaiban (87 pont)
  - $\zeta$  az EOMA szintezési hálózat pontjaiban (149 pont)
  - $\zeta$  az újonnan szintezett EOMA hálózat pontjaiban (97 pont)

Az utolsóként megemlített  $\zeta$  adatrendszer valamelyik felhasznált geopotenciális modell (GPM) segítségével számított kvázi-geoid undulációkat tartalmazza Magyarország területén kívül egy  $c = 2190$  paraméterű Reuter rács pontjaiban (3598 pont). Ez a paraméter az előzőekben felsorolt 6 mérési adatrendszer adatsűrűségével azonos pontsűrűséget ad és egyben homogén módon lefedi a számítási területnek azt a részét, ahol nincsenek adatok. A gömbfüggvény-sorfejtés fokszáma pontosan megfelel az SRBF bázisfüggvények fokszámának (a (4) egyenletben az  $N_{\min}$  és  $N_{\max}$ ). A következőkben ismertetjük a felhasznált GPM-eket.

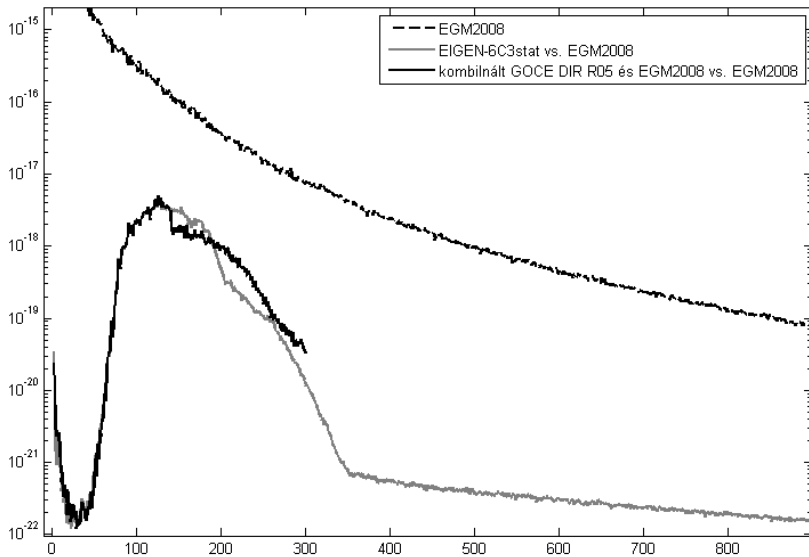
### 4.2 Geopotenciális modellek

Jelen dolgozatban három GPM-et vizsgáltunk. A legkisebb négyzetes kollokációval meghatározott korábbi nehézségi erőter megoldásunk (Tóth és Szűcs 2011) az EGM2008-as geopotenciális modellen alapult (Pavlis et al. 2012). Ez volt az általunk használt első modell. A GOCE mesterséges hold méréseinek bevonását szem előtt tartva másodikként az EIGEN-6C3stat modellt alkalmaztuk (Shako et al. 2014). Ebben GOCE, GRACE és LAGEOS mérési adatokat is felhasználtak és a modell maximális fokszáma 1949. A számításokhoz ezt a modellt kibővítettük az EGM2008 modell együtthatóival annak maximális fokszámáig.

Harmadikként egy kombinált EGM2008 és GOCE DIR R05 modellt állítottunk elő. A két modell együtthatóinak súlyozott átlagát vettük. Elképzelésünk az volt, hogy kiemeljük a GOCE modellt 240-250 fokszámig, mivel feltételeztük, hogy ezeken a frekvenciákon a GOCE modell jobb az EGM2008-nál. Azt találtuk, hogy a súlyozástól függetlenül kb. 140-es fokszámig a modell jeltartalma nem változott számottevően. Tapasztalati úton arra jutottunk, hogy a legjobb kombinációt a modellek szórásnégyzetének négyzetével fordított arányban ( $1/\sigma^4$ ) történő súlyozás adja. Ezt a súlyozást a 100 és 300 fokszámok között alkalmaztuk, a 300-as fokszámon túl csak az EGM2008-at használtuk. Az említett modellek fokvarianciáinak összehasonlítását a 2. ábra mutatja.

### 4.3 A gömbi radiális bázisfüggvények frekvenciatartománya és redukción

A modellezésben alkalmazott gömbi radiális bázisfüggvények frekvenciatartományát, az  $N_{\min}$  és  $N_{\max}$  értékeket az adatterület kiterjedésével illetve a szomszédos adatok átlagos távolságával összhangban kell megválasztani. Az adatterületet Magyarország észak-déli irányú, körülbelül  $2.5^\circ$ -os kiterjedése határozza meg. Az ennek megfelelő minimális fokszám  $N_{\min} = 360^\circ/2.5^\circ = 144$ . A számításaink során ennél kissé nagyobb,  $N_{\min} = 200$  értéket választottunk. A GPS/szintezési adatok átlagos ponttávolsága 17 km. Amennyiben azt a szakirodalom által javasolt szabályt alkalmazzuk, hogy az ismeretlen paraméterek száma az adatok számának körülbelül  $1/3$ -a legyen (Wittwer 2009), akkor az SRBF-ek átlagos távolságára 30 km-t kapunk. Ez az  $N_{\max} = 20000 \text{ km}/30 \text{ km} = 670$  fokszámnak felel meg. A számításainkban ennél kissé nagyobb,  $N_{\max} = 700$  értéket használtunk.

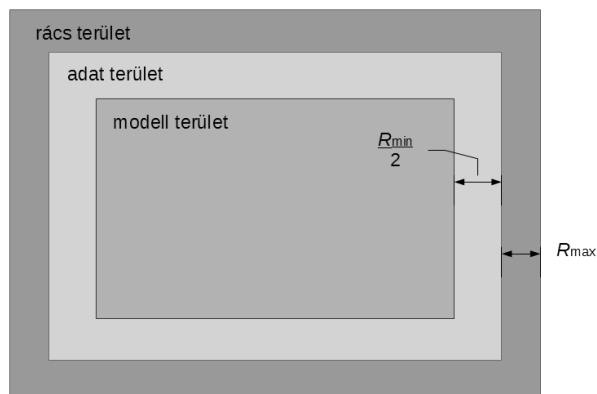


2. ábra. Az EGM2008 fokvarianciája, valamint az EIGEN-6C3stat és kombinált GOCE DIR R05-EGM2008 modellek EGM2008-hoz képesti eltéréseinek fokvarianciái

Így magyarázatot kapunk arra, hogy miért így választottuk meg a Shannon-féle sávkorlátozott SRBF minimális és maximális fokszámait (1. ábra), illetve a Reuter rács  $c = 700$  paraméterét.

A peremhatás elkerülése miatt a modell, adat és rács területeket gondosan kell megválasztani (Naeimi 2013). Az adat területet minden oldalon  $R_{\min}/2$  távolsággal ki kell bővíteni a 3. ábrán látható módon, ahol  $R_{\min} = 180^\circ/N_{\min}$ . Ehhez hasonlóan a számításhoz egy kicsit nagyobb rács területre van szükség, mivel azok a bázisfüggvények, amelyek ugyan kívül esnek az adat területén, de közel esnek ahhoz, jelentős mértékben hozzájárulnak a modellezéshez. Ebből fakadóan egy  $R_{\max} = 180^\circ/N_{\max}$  szélességű keretnek kell lennie az adat és rács területek között.

Az összes említett adatrendszert úgy redukáltuk, hogy csak a választott  $N_{\min}$  és  $N_{\max}$  közötti gömbfüggvény fokszám-tartományban tartalmazzon információt a nehézségi erőterről. Első lépésben a 2160 fokszámánál nagyobb frekvenciájú összetevőket távolítottuk el az ERTM2160 modell segítségével (Hirt et al. 2014). Másodszor a GPM hatását is eltávolítottuk az adatokból az  $N_{\min}$ -nél kisebb, illetve az  $N_{\max}$ -nál nagyobb fokszámú együtthatók felhasználásával. Már láttuk annak az okát, hogy miért az  $N_{\min} = 200$  és az  $N_{\max} = 700$  fokszámokat választottuk. Az 1. táblázatban a redukált adatok statisztikai jellemzőit gyűjtöttük össze.



3. ábra. Az SRBF modellezésben alkalmazott modell, adat és rács területek

**1. táblázat.** A redukált adatrendszerek szórásai és átlagai. A mértékegységek mGal, szögmásodperc és méter. Az adatokat a 200-700 közötti gömbfüggvény fokszám tartományba redukáltuk

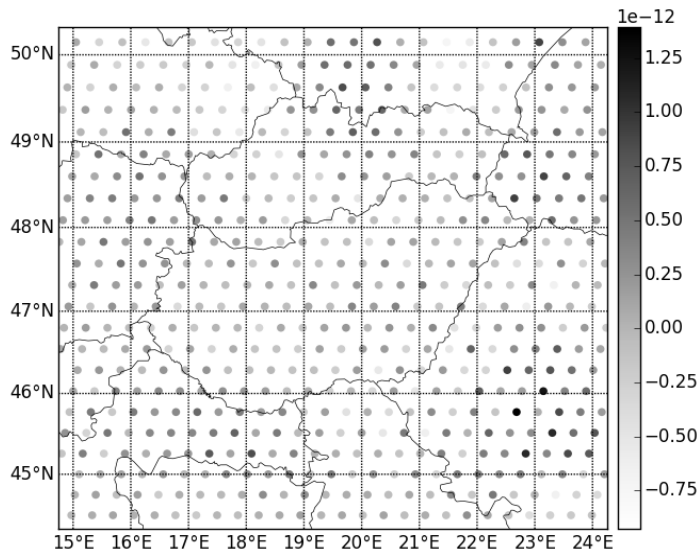
adatrendszer és GPM		$\Delta g$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$ Bendefy	$\zeta$ EOMA	$\zeta$ új szint.	$\zeta$ GPM
EGM2008	szórás	9.51	1.70	1.57	0.22	0.15	0.20	0.42
	átlag	-1.37	-0.15	0.38	0.44	0.52	0.50	0.00
EIGEN-6C3stat	szórás	9.52	1.74	1.58	0.22	0.14	0.19	0.42
	átlag	-1.47	-0.19	0.38	0.44	0.51	0.50	0.00
GOCE DIR R05 és EGM2008	szórás	9.42	1.69	1.56	0.22	0.14	0.19	0.42
	átlag	-1.42	-0.16	0.34	0.44	0.51	0.50	0.00

Az 1. táblázatból kitűnik az, hogy a GOCE adatait tartalmazó modellek és különösen a kombinált GOCE DIR R05 – EGM2008 modell kissé jobb eredményeket adnak a szórások tekintetében, különösen a függővonal-elhajlás és nehézségi rendellenesség adatokra.

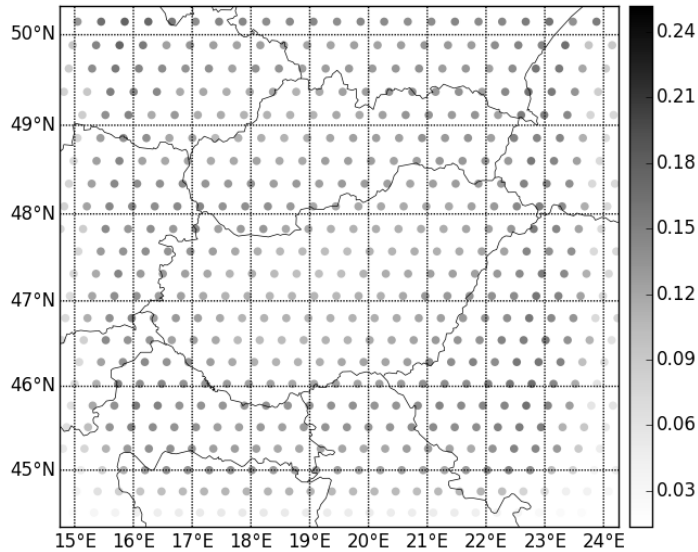
## 5 Kísérleti számítások és eredmények

A 4. fejezetben ismertetett adatokkal és geopotenciális modellekkel több különböző regionális nehézségi erőter megoldást határoztunk meg Magyarország területére a 3. fejezetben ismertetett, gömbi radiális bázisfüggvényeken alapuló becslési eljárással. Mindegyik számítás esetében az ismeretlen paraméterek száma 598 volt. Ez a szám megfelel a  $c = 700$  paraméterű Reuter rácsnak. A szórástényezők és a regularizációs paraméter VCE becslése során szükséges iterációt addig folytattuk, amíg a paraméter vektor változásának relatív nagysága a  $10^{-5}$  küszöbérték alá nem csökkent. Ez általában 10-30 iterációs lépés után következett be. A megoldást, vagyis a becslült SRBF paramétereket a 4. ábrán láthatjuk a kombinált GOCE DIR R05-EGM2008 geopotenciális modell esetében.

A paraméterek relatív pontosságát úgy definiálhatjuk, mint a paraméterek és a megoldásvektor szórásainak hányadosát. Ezeket a relatív pontosságokat szemlélteti az 5. ábra ugyancsak a kombinált geopotenciális modell esetében.



**4. ábra.** A becslült SRBF paraméterek



5. ábra. A becült SRBF paraméterek relatív pontossága

A megoldást jellemző további mérőszámként bevezethetjük a dB-ben kifejezett jel-zaj viszonyt (SNR), amit úgy definiálunk, mint az  $y = A\hat{x}$  jel valamint az  $\hat{e}$  mérési javítások normái hányadosának logaritmusát

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\|A\hat{x}\|}{\|\hat{e}\|} . \tag{11}$$

A 2. táblázatban megtalálhatjuk mindegyik adatrendszer becült szórástényezőit és jel-zaj viszonyát. A VCE iteráció ezekhez a  $\sigma_i^2$  szórástényezőkhöz konvergált, amelyek az egyes adatrendszerek egymáshoz viszonyított súlyait jelzik. Ahol nagyok a szórástényezők, ott az adatok kis súlyt kaptak a végső megoldásban.

A 2. táblázat adatait elemezve azt láthatjuk, hogy a  $\zeta$  függővonal-elhajlás összetevő nagyon rossz eredményt ad, így ezeknek az adatoknak igen kicsi súlyuk van a megoldásban. Elképzelhető, hogy az adatokban van a probléma, illetve ami ennél valószínűbb, hogy a saját fejlesztésű szoftver még fel nem derített hibája az ok. A szoftver további gondos ellenőrzésére és tesztelésére van tehát szükség. Ellenben, még ha a szoftver hibáról is van szó, ez nem rontja el a meghatározott geoid megoldást, mivel a  $\zeta$  függővonal-elhajlás összetevőt annyira kicsi súllyal vette figyelembe, hogy gyakorlatilag nincs is hatással a végső megoldásra.

2. táblázat. Az adatrendszerek becült szórástényezőinek négyzetgyökei ( $\sigma_i$ ) és a dB-ben kifejezett becült jel-zaj viszony (SNR) . A mértékegységek mGal, szögmásodperc és méter

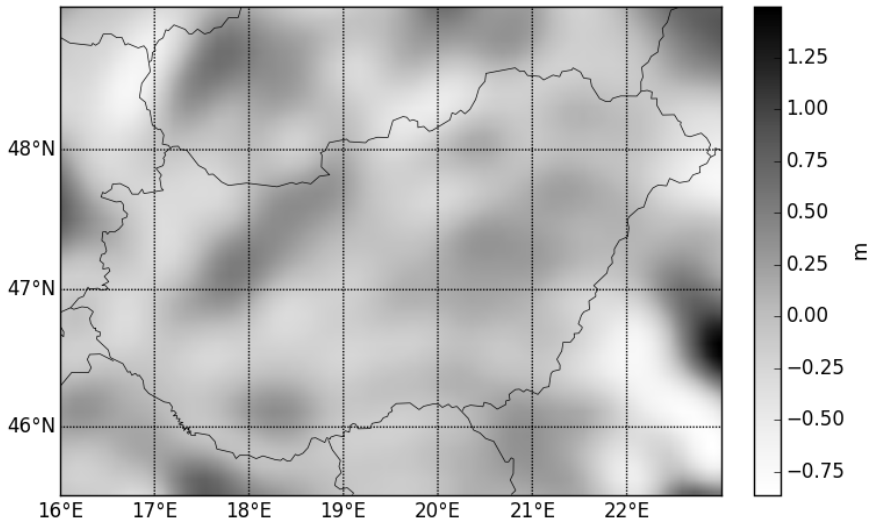
adatrendszer és GPM		$\Delta g$	$\zeta$	$\eta$	$\zeta$ Bendefy	$\zeta$ EOMA	$\zeta$ új szint.	$\zeta$ GPM
EGM2008	$\sigma_i$	3.06	16.2	0.68	0.33	0.22	0.19	0.04
	SNR	4.27	-0.02	4.06	5.89	3.37	5.76	15.4
EIGEN-6C3stat	$\sigma_i$	4.44	14.6	0.78	0.35	0.22	0.22	0.04
	SNR	3.36	0.00	3.36	5.16	3.30	5.11	15.5
GOCE DIR R05 és EGM2008	$\sigma_i$	3.81	14.3	0.70	0.36	0.26	0.25	0.04
	SNR	4.07	-0.01	3.91	4.45	2.53	4.39	15.5



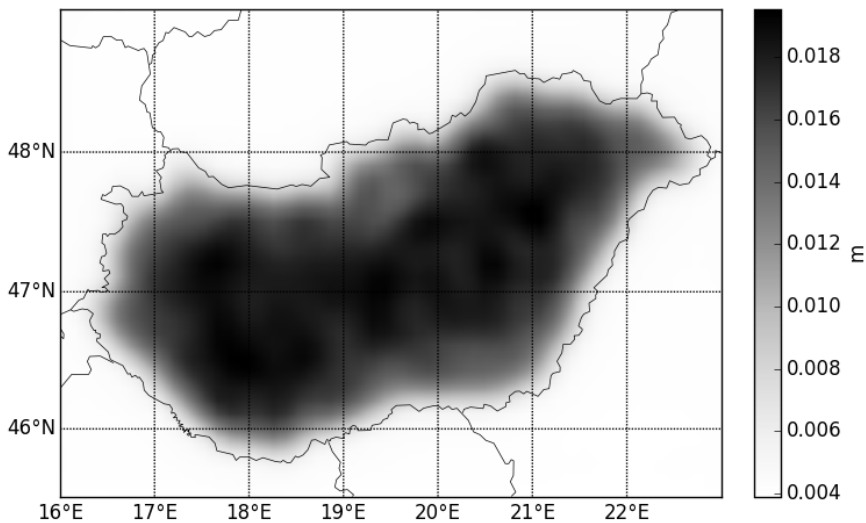
Az  $\hat{x}$  megoldásvektor becslését felhasználva a (9) összefüggéssel kvázigeoid magasságokat és kovarianciákat, azokból pedig középphibákat számítottunk egy szabályos rács pontjaiban. Ezeket láthatjuk a 6. és 7. ábrákon.

Végül pedig úgy is ellenőriztük a megoldást, hogy egy Magyarországon belüli  $c = 2100$  paraméterű Reuter rács pontjaiban (összesen 1024 pontban) kiszámítottuk a kvázigeoid magasságokat és összehasonlítottuk azokat az adott megoldásban alkalmazott GPM-ből a 200-700 fokszám tartományban szintetizált kvázigeoid magasságokkal (8. ábra).

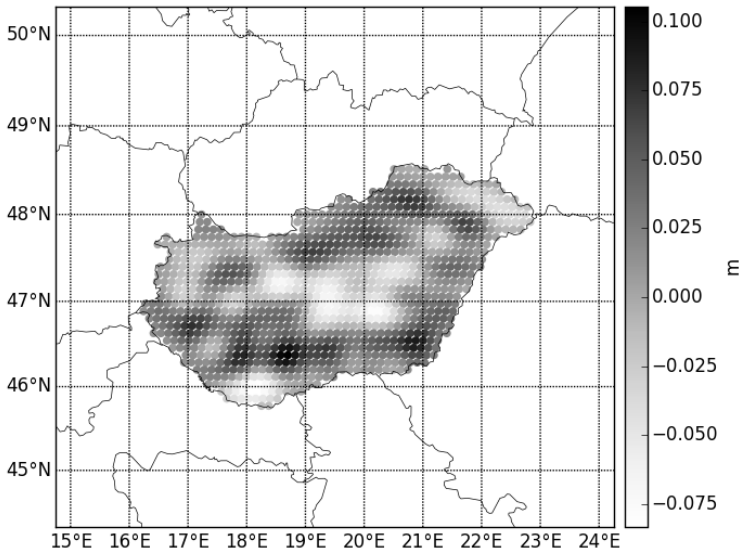
A 3. táblázat összefoglalja a három felhasznált geopotenciális modell esetében ennek az összehasonlításnak a statisztikai jellemzőit. Az EGM2008-as modell esetében ezek a statisztikai jellemzők kissé jobbák a 200-700 fokszám tartományban, ahol a maradékokat az SRBF modellel előrejelzett és a GPM-ből kiszámolt kvázigeoid undulációk különbségeként értelmeztük. A maradékok átlaga ugyanakkor a kombinált GOCE-EGM2008-as modell esetében a legjobb.



6. ábra. Becsült  $\zeta$  kvázigeoid undulációk a 200-700 fokszám tartományban



7. ábra. Becsült  $\zeta$  kvázigeoid unduláció középphibák a 200-700 fokszám tartományban



8. ábra. Kvázigeoid unduláció eltérések a kombinált GOCE DIR R05-EGM2008 modellből 200-700 fokszám tartományban  $c = 700$  paraméterű Reuter rács pontjaiban

### 6 Következtetések és további tervek

Habár csupán előzetesnek tekinthetők a jelen tanulmányban közölt eredmények, melyek több szempontból is finomításra szorulnak, bizonyos következtetéseket mégis le lehet vonni ezekből a kísérleti számításokból. Először is azt, hogy az SRBF-ekkel végzett regionális nehézségi erőter modellezés a vártan megfelelően működött és ésszerű eredményeket szolgáltatott. Ismét hangsúlyozzuk, hogy a modellezési technika egyik fontos előnye az, hogy különböző típusú és heterogén eloszlású adatok nehézség nélkül kombinálhatók egy szigorú értelemben vett paraméterbecslési eljárásban, amely egyúttal a becslült paraméterek kovariancia mátrixát is szolgáltatja. Ezt kísérletileg is alátámasztottuk számításainkkal, hiszen függővonal-elhajlás, nehézségi rendellenesség és GPS/szintezési méréseket sikeresen kombináltunk össze a különböző geopotenciális modellekkel. A legkisebb négyzetes kollokációhoz képest kisebb a számításigény, hiszen az ismeretlenek száma csak mintegy egyharmada az adatok számának.

További terveink között szerepel földfelszíni (Eötvös-inga) és mesterséges holdas (GOCE) gradiométeres adatok felhasználása a modellezésben. Ezen kívül másfajta regularizációs eljárásokat is szeretnénk kipróbálni, különösen a Naeimi (2013) által javasolt PSC eljárást. Várható, hogy a Klees et al. (2008) által kidolgozott adaptív eljárás még jobb eredményeket fog szolgáltatni.

Végül szeretnénk rámutatni arra, hogy közvetlen kapcsolat áll fenn a (2) egyenletben található  $x_k$  SRBF együtthatók és a gömbfüggvény együtthatók között (Schmidt et al 2006). Ennek a kapcsolatnak a segítségével könnyű levezetni bármilyen regionális adatrendszerhez tartozó becslült jel és hiba fokvarianciákat, amely az SRBF erőter modellezés további előnyeként említhető meg. Ezek a fokvarianciák például az optimális spektrális becslésen alapuló nehézségi erőter modellezési eljárások számára fontosak.

3. táblázat. Az SRBF modellből és a különböző GPM-ekből számított kvázigeoid magasságok eltéréseinek statisztikai jellemzői [méter]

GPM	min	max	átlag	szórás
EGM2008	-0.080	0.090	0.015	0.033
EIGEN-6C3stat	-0.096	0.104	0.014	0.036
GOCE DIR R05 és EGM2008	-0.083	0.105	0.012	0.035

**Köszönetnyilvánítás.** Megköszönjük a FÖMI-nek, hogy a vizsgálataink céljára rendelkezésünkre bocsátotta az OGPSH és a függővonal-elhajlás adatokat. Köszönjük Benedek Juditnak és másik bírálónknak az értékes megjegyzéseit, javaslatait. Kutatásainkat a K106118 és K076231 számú OTKA pályázatok keretében végeztük.

### Hivatkozások

- Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest.
- Bouman J** (1998): Quality of regularization methods. DEOS Report, 98(2).
- Bouman J, Rispens S, Gruber T, Koop R, Schrama E, Visser P, Tscherning CC, Veicherts M** (2009): Preprocessing of gravity gradients at the GOCE high-level processing facility. *Journal of Geodesy*, 83(7), 659-678, DOI: 10.1007/s00190-008-0279-9
- Bruinsma S, Foerste C, Abrikosov O, Marty JC, Rio MH, Mulet S, Bonvalot S.** (2013): The new ESA satellite-only gravity field model via the direct approach. *Geophysical Research Letters*, 40(14), 3607-3612, DOI: 10.1002/grl.50716
- Dobróka M, Völgyesi L** (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. *Mathematical Geosciences*, 40(3), 299-311, DOI:10.1007/s11004-007-9139-z
- Eicker A** (2008): Gravity Field Refinement by Radial Base Functions from In-situ Satellite Data. PhD Thesis, Institute of Geodesy and Geo-information, University of Bonn, Nr. 10, 137.
- Hirt C, Kuhn M, Claessens SJ, Pail R, Seitz K, Gruber T** (2014). Study of the Earth's short-scale gravity field using the ERTM2160 gravity model. *Computers & Geosciences*, 73, 71-80.
- Klees R, Tenzer R, Prutkin I, Wittwer T** (2008): A data-driven approach to local gravity field modelling using spherical radial basis functions. *Journal of Geodesy*, 82, 457-471, DOI: 10.1007/s00190-007-0196-3
- Koch KR, Kusche J** (2002): Regularization of geopotential determination from satellite data by variance components. *Journal of Geodesy*, 96, 259-268, DOI: 10.1007/s00190-002-0245-x
- Moritz H** (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
- Naeimi M** (2013): Inversion of satellite gravity data using spherical radial base functions. PhD Thesis, University of Hannover, Nr. 309, DGK Reihe C, 711.
- Ophaug V** (2013): Regional gravity field modeling: A comparison of methods. Master's Thesis, Dept. of Mathematical Sciences and Technology, Norwegian University of Life Sciences.
- Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK** (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *J. Geophys. Res.*, 117, B04406. DOI: 10.1029/2011JB008916
- Renner J, Szilárd J** (1959): Gravity network of Hungary. *Acta Techn. Acad. Scient. Hung.*, 23(4), 365-395.
- Schmidt M, Fengler M, Mayer-Gürr T, Eicker A, Kusche J, Sánchez L, Han SC.** (2006): Regional gravity modeling in terms of spherical base functions. *Journal of Geodesy*, 81(1), 17-38, DOI: 10.1007/s00190-006-0101-5
- Shako R, Förste C, Abrikosov O, Bruinsma S, Marty JC, Lemoine JM, Flechtner F, Neumayer KH, Dahle C** (2014): EIGEN-6C: A High-Resolution Global Gravity Combination Model Including GOCE Data - In: Flechtner, F., Sneeuw, N., Schuh, W.-D. (Eds.), *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions*, (GEOTECHNOLOGIEN Science Report; No. 20; Advanced Technologies in Earth Sciences), Berlin [u.a.]: Springer, 155-161. DOI 10.1007/978-3-642-32135-1\_20. Print ISBN 978-3-642-32134-4 Online ISBN 978-3-642-32135-1
- Szűcs E, Papp G, Benedek J** (2014): A study of different wavelength spectral components of the gravity field derived from various terrestrial data sets. *Acta Geod. et Geoph.*, 49(3), 327-342, DOI: 10.1007/s40328-014-0061-9
- Tóth Gy** (2009): A HGTUB2007 új magyarországi kombinált kvázigeoid megoldás. *Geomatikai Közlemények*, 12, 131-140.
- Tóth Gy, Szűcs E** (2011): On the determination of a new combined EGM2008 based quasi-geoid model for Hungary. *Acta Geod. et Geoph. Hung.*, 46(4), 417-430, DOI: 10.1556/AGeod.46.2011.4.4
- van Gelderen M, Rummel R** (2000): A general least-squares solution of the geodetic boundary value problem. *IAG Symposium*, Vol 121. Schwarz (ed.), *Geodesy Beyond 2000 – The Challenges of the First Decade*, 171-178, Springer.
- Wittwer T** (2009): Regional gravity field modeling with radial basis functions, PhD Thesis, Technical University of Delft.

# A FÜGGŐVONAL-ELHAJLÁS MEGHATÁROZÁSÁNAK LEHETŐSÉGEI

Völgyesi Lajos\*, Tóth Gyula\*



*Possibilities of determination of the vertical deflections – Not so long ago the astronomic position determination was the traditional method of vertical deflection measurements. Deflection data were determined only at few points because of the long and costly measurement implementation. Currently there are only 138 astrogeodetic points in Hungary where the deflections of the vertical values are known with an accuracy of not better than 0.2-0.3” , though these would give the most important direct geometric data for geoid determination. An important procedure for the calculation of deflection values is based on the interpolation between the known points of gravity or gravity gradients measured by gravimeters or torsion balances, respectively. Recently precise data can also be computed from the GGMplus gravity field model or can be determined by the application of the QDaedalus system.*

**Keywords:** deflection of the vertical, astronomic position determination, interpolations methods, GGMplus model, QDaedalus system

A függővonal-elhajlás meghatározásának korábbi klasszikus módszere a csillagászati földrajzi helymeghatározáshoz kötődött. A meglehetősen hosszadalmas és költséges módszer miatt csak igen kevés pontban végeztek ilyen méréseket. Jelenleg Magyarországon mindössze 138 pontban állnak rendelkezésre 0.2-0.3 szögmásodperc pontosságú függővonal-elhajlás értékek, pedig ezek a geoid-meghatározás legfontosabb kiinduló adatrendszerét képezik. Fontos eljárás az ismert függővonal-elhajlás értékek közötti sűrítés a nehézségi erőter (Eötvös-íngá és graviméteres) mérések adatainak felhasználásával. Az utóbbi időkben jelentős előrelépés történt a GGMplus modellszámítással és különösen a QDaedalus mérőrendszer alkalmazási lehetőségével.

**Kulcsszavak:** függővonal-elhajlás, csillagászati-földrajzi meghatározás, interpolációs módszerek, GGMplus model, QDaedalus-rendszer

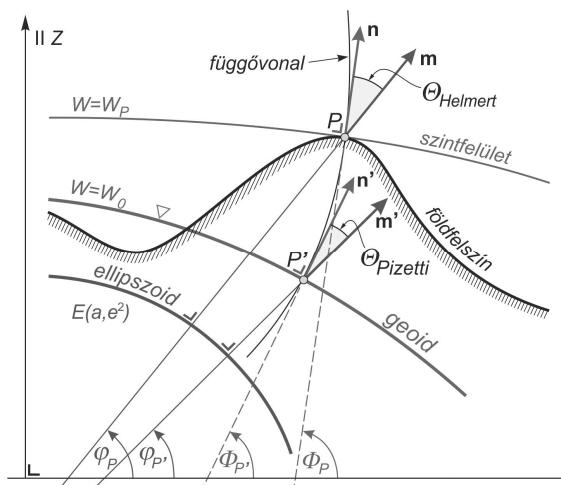
## 1 A függővonal-elhajlás értelmezése

Tetszőleges pontban a helyi függőleges (a helyi szintfelület normálisa) és a ponton átmenő ellipszoidi normális iránya néhány (esetleg néhányszor 10) másodpercenyi szöveget zárnak be egymással, amit függővonal-elhajlásnak nevezünk. Ennek két összetevője a meridián irányú  $\xi$  és a meridiánra merőleges síkra vett vetülete az  $\eta$ . A két összetevőből a függővonal-elhajlás  $\Theta$  szöge:

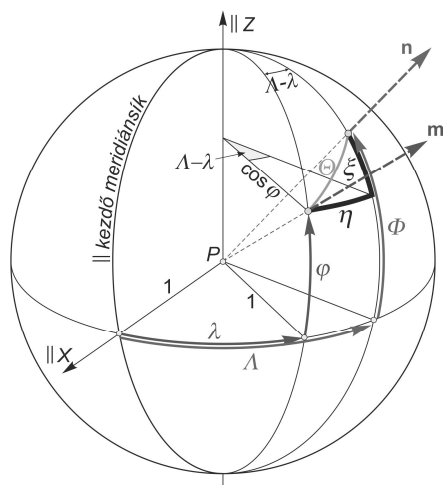
$$\Theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} . \quad (1)$$

A függővonal-elhajlás értékek felfoghatók mint vektorok is, amennyiben e vektorok pozitív irányának az ellipszoidi zenittől a csillagászati zenit felé mutató irányt tekintjük, a vektor hosszának pedig az illető pontban a függővonal-elhajlás abszolút értékét választjuk. Ilyen értelemben a vektorok akár vízszintes erőösszetevőket, akár közvetlen függővonal-elhajlás értékeket is jelölhetnek, az előbbieket mindössze a  $\mathbf{g}$  vektorral történő szorzással térnek el az utóbbiaktól.

Attól függően, hogy a függővonal-elhajlást valamely  $P$  földfelszíni pontban, vagy ennek  $P'$  geoidi megfelelőjében értelmezzük, az 1. ábrán látható módon megkülönböztetünk földfelszíni (Helmert-féle), illetve geoidi (Pizetti-féle) függővonal-elhajlást (az ábrán az  $\mathbf{n}$  és  $\mathbf{m}$  a szintfelületi, illetve az ellipszoidi normális a  $P$  földfelszíni pontban, míg az  $\mathbf{n}'$  és  $\mathbf{m}'$  a geoidi, illetve az ellipszoidi normális a  $P'$  geoidi pontban) (Bíró et al. 2013).



1. ábra. A földfelszíni és a geoidi függővonal-elhajlás



2. ábra. A függővonal-elhajlás összetevők

A függővonal-elhajlások alapvetően a változatos fizikai földfelszínnek és a Föld szabálytalan tömegeloszlásának következményei, de az értékük természetesen függ az alkalmazott ellipszoid méretétől és elhelyezésétől is. Ennek megfelelően megkülönböztetünk *abszolút* (geocentrikus elhelyezé- sű ellipszoidra vonatkozó) és *relatív* (általános helyzetű ellipszoidhoz viszonyított) függővonal- elhajlás értékeket.

A függővonal-elhajlás szögét, pontosabban ennek összetevőit a helyi függőleges, illetve az ellip- szoidi  $m$  normális térbeli helyzetét meghatározó földrajzi koordinátákból számíthatjuk. A 2. ábrán látható  $P$  pont körül rajzolt egységsugarú gömb segítségével:

$$\xi = \Phi - \varphi \quad (2)$$

$$\eta = (A - \lambda) \cos \varphi \quad (3)$$

A 2. ábrán feltüntetettük a földi térbeli derékszögű koordináta-rendszer  $X$  és  $Z$  alapirányával párhuzamos irányt, a ponton átmenő szintfelületi ill. ellipszoidi normális  $n$  ill.  $m$  egységvektorát, valamint a  $\Phi$  és  $A$  szintfelületi, ill. a  $\varphi$  és  $\lambda$  ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság szögének az egység- gömbön megfelelő ívdarabokat.

Az  $\eta$  összetevő egyébként a szintfelületi és ellipszoidi azimut értékekből is számítható:

$$\eta = (A - \alpha) \operatorname{ctg} \varphi \quad (4)$$

ahol  $A$  a szintfelületi,  $\alpha$  az ellipszoidi azimut (Biró et al. 2013).

## 2 A függővonal-elhajlás klasszikus meghatározása

A (2) és (3) alapösszefüggés szerint a függővonal-elhajlás meghatározásához ismernünk kell a  $\Phi$  és  $A$  szintfelületi, ill. a  $\varphi$  és  $\lambda$  ellipszoidi földrajzi szélesség és hosszúság értékeket. A szintfelületi normális irányának korábbi klasszikus meghatározási módszere a csillagászati földrajzi helymegha- tározás, míg az ellipszoidi normális irányát a  $\varphi$ ,  $\lambda$  ellipszoidi földrajzi koordinátákkal adjuk meg, amelyeket pl. WGS84 ellipszoidra GPS mérésekkel határozhatunk meg.

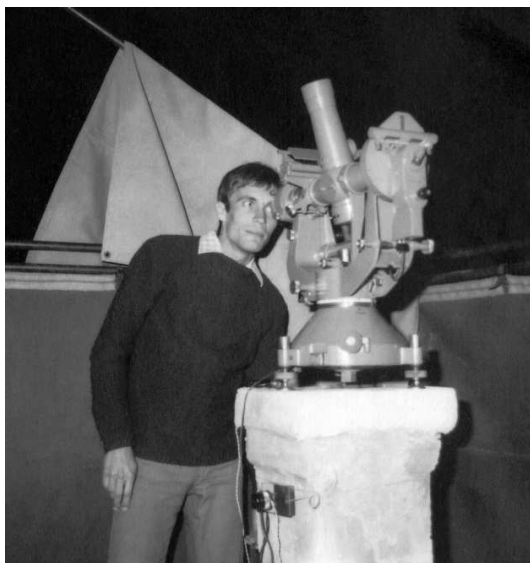
A csillagászati földrajzi helymeghatározás gyakorlatilag az álláspont helyi függőlegese térbeli helyzetének (irányának) meghatározását jelenti a Földhöz kötött, vele együttforgó földi térbeli de- rékszögű koordináta-rendszer (jelenleg ITRS, korábban CIO) alapirányaihoz viszonyítva. Adott pontban felállított műszer koordináta-rendszere az állásponti horizonti koordináta-rendszer, amely- ben a megirányzott csillagokra vízszintes és magassági (zenit-) szögeket tudunk mérni. A mérés helyén és idejében látható ismert koordinátájú csillagokat 1535 ún. alapszillag közül választhatjuk

ki, melyek valódi égi egyenlítői koordinátái (az  $\alpha$  rektaszcenzió, és a  $\delta$  deklináció) a csillag mérés-kori látszó helyére, vagyis az  $\omega(t)$  valódi forgástengelyre és a  $\Upsilon(t)$  valódi Tavaszpontra vonatkoznak (Karsay 1976). Álláspontunk  $\Phi$ ,  $\Lambda$  szintfelületi földrajzi koordinátáit viszont a Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszerben (ITRS) kell meghatározni, így ez utóbbiak az IERS vonatkoztatási pólusra (IRP) és az IERS kezdő szintfelületi meridiánsíkra (IRM) vonatkoznak. A  $\Phi$ ,  $\Lambda$  szintfelületi földrajzi koordináták a valódi helyi függőleges irányának a térbeni helyzetét jelölik ki az ITRS előbb említett alapirányaihoz viszonyítva. A helyi függőleges a látszólagos éggömböt a Zenitpontban döfi, így ugyanezt az irányt megadhatjuk a Zenitpont  $\alpha_{Zenit}$ ,  $\delta_{Zenit}$  valódi égi egyenlítői koordinátaival is (Biró et al. 2013). A feladatot két lépésben oldhatjuk meg: először a Zenitpont  $\alpha_{Zenit}$ ,  $\delta_{Zenit}$  koordinátáit határozzuk meg a csillagokra végzett méréssel a valódi égi egyenlítői koordináta-rendszerben, majd ebből egyszerű koordináta-átszámítással a helyi függőleges irányának (az álláspont  $\Phi$ ,  $\Lambda$  szintfelületi földrajzi koordinátáinak) meghatározása következik az ITRS Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszerben.

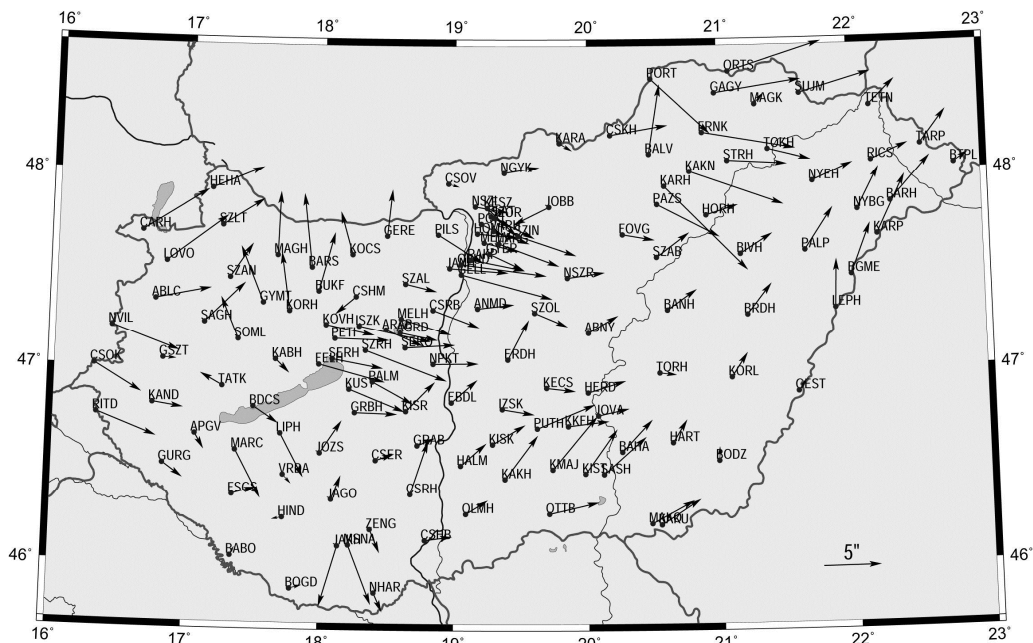
A nagy pontossági igény, az éjszakai körülmények és a csillagok gyors látszólagos mozgása miatt a mérésekhez csak speciális geodéziai műszerek és módszerek alkalmasak. A mérések leggyakrabban használt terepi műszere a WILD T4 teodolit, amely okulár-mikrométerrel és meredek (akár függőleges) irányzást is lehetővé tevő ún. tört távcsővel rendelkezik, a leolvasó berendezéseket és a szátkeresztet pedig belső megvilágítással látták el (3. ábra). A csillagokra mért vízszintes és magassági (zenit-) szögek a Föld forgása miatt az időben gyorsan változnak, ezért e szögek mérésének időpontját is igen pontosan rögzíteni kell.

A klasszikus csillagászati földrajzi helymeghatározás igen hosszadalmas és költséges munka. A méréseket előre elkészített csillagprogram alapján végzik. Ebben csillagászati évkönyvek felhasználásával időrendben összeállítják az észlelés helyére és időtartamára a mérhető csillagok (csillagpárok) beállítási adatait. Az esetleg több hétig is eltartó éjszakai terepi munkákhoz komoly infrastruktúra szükséges (közlekedési lehetőség, áramellátás, kiszolgáló személyzet, stb.) a mérésekhez megfelelő pillért kell építeni speciális észlelésátorral (3. ábra).

A csillagászati földrajzi helymeghatározás meglehetősen hosszadalmas és költséges módszere miatt csak igen kevés pontban, általában egymástól legfeljebb csak néhány száz 10 km távolságban végeztek ilyen méréseket, így jelenleg Magyarországon mindössze 138 pontban állnak rendelkezésre értékek, ami mintegy 33 km-es átlagos ponttávolságnak felel meg. Ezek térbeli eloszlását és a függővonal-elhajlások vektorokkal ábrázolt értékeit a 4. ábrán láthatjuk.



3. ábra. Csillagászati földrajzi helymeghatározás WILD T4 műszerrel 1976-ban Ceglédbercel közelében



4. ábra. Csillagászati földrajzi helymeghatározással meghatározott magyarországi függővonal-elhajlások geocentrikus elhelyezésű GRS80 ellipszoidra vonatkoztatva.

Lukács és Sárdi (1980) szerint az I. rendű csillagászati pontokon  $\lambda$ -ban  $\pm 0.15''$ ,  $\Phi$ -ben  $\pm 0.12''$ , a II. rendű csillagászati pontokon  $\lambda$ -ban  $\pm 0.23''$ ,  $\Phi$ -ben  $\pm 0.20''$  belső középphibával lehet számolni. Az ellipszoidi koordinátákat is terheli hiba a hálózatmérés hibái miatt, de ezek 3 méter alatti értékek, így  $\pm 0.1''$  vagy ennél kisebb középphibával jellemezhetők. A fentiek miatt a hazai függővonal-elhajlások  $\pm 0.2 - 0.3''$  középphibával jellemezhetők.

### 3 Függővonal-elhajlás értékek sűrítése

A gyakorlatban a függővonal-elhajlás értékek sűrű hálózatára van szükségünk, amit a szokásos asztrogeodéziai úton költséges és hosszadalmas előállítani, ezért az eddigi gyakorlatban a csillagászati-geodéziai pontok ritkább hálózatából kiindulva ezek  $\xi$ ,  $\eta$  értékeit sűrítettük különféle módszerekkel. A sűrítésre három adatforrás kínálkozik: a gravimetriai adatok, a domborzat alapján és az Eötvös-inga mérések felhasználásával (Biró et al. 2013).

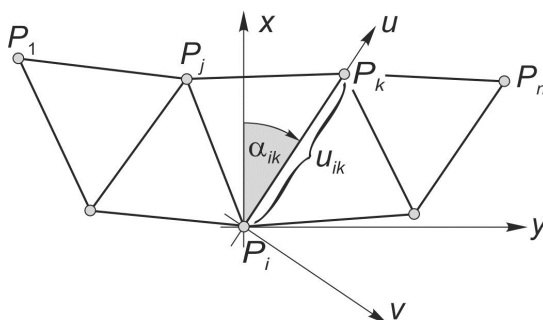
A hazai adatosságok mellett a gradiensek alapján végzett sűrítési módszer a leggazdaságosabb, hiszen az Eötvös-inga mérésekből Magyarország területének jelentős részén rendelkezésre állnak az interpolációhoz szükséges görbületi adatok. Az interpoláció alapelve szerint az 5. ábrán látható tetszőleges  $P_i$  és  $P_k$  pont között a függővonal elhajlás összetevők  $\Delta\xi_{ki}$  és  $\Delta\eta_{ki}$  megváltozása (Biró et al. 2013) és az Eötvös-ingával mérhető  $W_\Delta$  és  $W_{xy}$  görbületi gradiensek kapcsolatát az

$$\int_{u_i}^{u_k} \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} \cong \frac{1}{2} [(\Delta W_{uv})_i + (\Delta W_{uv})_k] u_{ik} = g(\Delta\xi_{ki} \sin \alpha_{ik} - \Delta\eta_{ki} \cos \alpha_{ik}) \quad (5)$$

összefüggés adja meg, ahol

$$\Delta W_{uv} = \frac{1}{2} (W_\Delta - U_\Delta) \sin 2\alpha_{ik} + (W_{xy} - U_{xy}) \cos 2\alpha_{ik}, \quad (6)$$

amelyben az  $U_\Delta$  és az  $U_{xy}$  az Eötvös-ingával mérhető  $W_\Delta$  és  $W_{xy}$  görbületi gradiensek normálértékei (Völgyesi 1993, 1995).



5. ábra. Az interpolációs hálózat pontjai

Az (5) integrálnak a trapéz integrálformulával közelítése azonban csak akkor lehetséges, ha a két pont között a gradiensek változása lineárisnak tekinthető. Amennyiben nem csak két pont között, hanem nagyobb összefüggő területen szeretnénk függővonal-elhajlás interpolációt végezni, akkor a területet háromszöghálóval lefedve további két

$$\Delta \xi_{ki} + \Delta \xi_{ij} + \Delta \xi_{jk} = 0, \quad \Delta \eta_{ki} + \Delta \eta_{ij} + \Delta \eta_{jk} = 0 \quad (7)$$

összefüggés írható fel valamennyi háromszögre (Völgyesi 1993), mivel az egyes háromszögeken körbehaladva a  $\Delta \xi_{ki}$  és  $\Delta \eta_{ki}$  összegeknek zérust kell adniuk.

Nagyobb összefüggő területen, ahol a  $P_1$  és a  $P_n$  ponton ismertek a függővonal-elhajlás összetevők értékei (5. ábra), az alábbi összefüggések is felírhatók (Völgyesi 1993):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta \xi_{i+1,i} = \xi_n - \xi_1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \eta_{i+1,i} = \eta_n - \eta_1. \quad (8)$$

Ekkor – ha az adott területen megfelelő pontsűrűségben állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérések – elvégezhető a függővonal-elhajlás interpoláció. Nagyobb területeken elvégzett kísérleti számítások szerint a függővonal-elhajlás összetevők kedvező esetben közel fél szögmásodperces pontossággal sűrűsíthetők az interpolációval (Völgyesi 2012).

#### 4 Számítás a GGMplus modellel

A függővonal-elhajlások igen pontos számítására alkalmazhatjuk a Hirt-féle *GGMplus* a Föld gravitációs erőterének modelljét is (Hirt et al. 2013). A modell pontosságára vonatkozóan a szerzők részletes vizsgálatokat végeztek, melyek eredményeit az érdeklődő olvasó megtalálhatja az említett cikkben (Hirt et al. 2013), illetve annak mellékletében. A modell pontosságára vonatkozó hazai vizsgálatokra még kitérünk. A szerzők a legmodernebb számítástechnika adottságokat kihasználva a jelenleg hozzáférhető valamennyi szükséges alapadat bevonásával (7 éves GRACE és 2 éves GOCE mérési sorozat, EGM2008 ( $n=2190$ ,  $m=2159$ ) geopotenciál modell, szárazföldi területeken  $7.5'' \times 7.5''$  /kb. 230m/ felbontású SRTM domborzatmodell, óceáni területeken  $30'' \times 30''$  /kb.  $1\text{km} \times 1\text{km}$ / felbontású SRTM30\_PLUS domborzatmodell) számították ki a  $g$ ,  $\Delta g$  nehézségi adatokat, a  $\xi$ ,  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevőket és az  $N$  Mologyenszkij-féle kvázigeoid magasságokat  $-60^\circ$  és  $+60^\circ$  földrajzi szélességek között a teljes Földre összesen 3 062 677 383 pontban. A 74 GB méretű adatbázisból  $5^\circ \times 5^\circ$  méretű részterületekre tölthetők le szabadon FTP szerverről az adatok, valamennyi részterület  $2500 \times 2500$  rácspontban (kb.  $230\text{m} \times 230\text{m}$  felbontásban) tartalmazza a  $g$ ,  $\Delta g$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $N$  értékeket. Jelenleg [2016.02.02] minderről a nyugat-ausztráliai Curtin University <https://geodesy.curtin.edu.au/research/models/GGMplus> weboldalán szerepel részletes leírás, és itt olyan MATLAB scriptek is találhatóak, amelyekkel az adott részterületeken belül bármely tetszőleges pontban is kiszámíthatók a nehézségi adatok, a függővonal-elhajlás értékek és a geoidmagasságok.

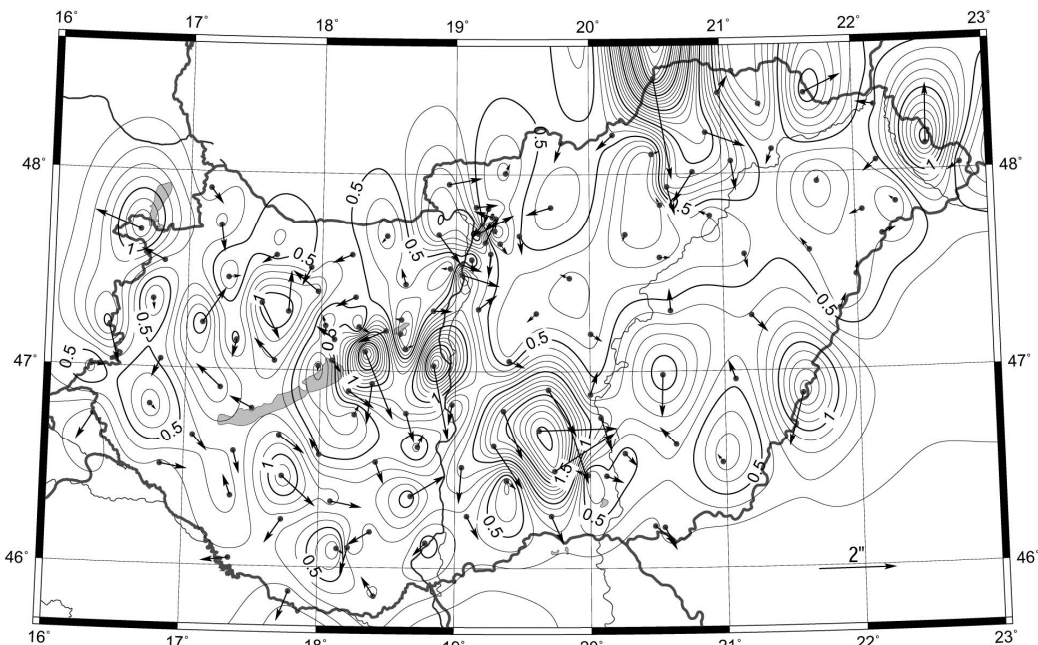


A GGMplus modell meghatározásának érdekessége, hogy egy processzorral, párhuzamosítás nélkül 80 év CPU időt igényeltek volna a számítások, ezt a GGMplus modell esetében speciális többprocesszoros párhuzamos feldolgozással sikerült kevesebb mint két hónapra rövidíteni. A számított  $g$ ,  $\Delta g$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $N$  értékek a földfelszínre vonatkoznak a GRS80 modell alkalmazása mellett.

A GGMplus modellel számított  $\xi$ ,  $\eta$  függővonal-elhajlás összetevők ellenőrzése céljából kiszámítottuk és összehasonlítottuk az értékeket a Magyarországon 138 pontban csillagászati földrajzi helymeghatározással mért értékekkel. Ezek az értékek eredetileg a HD72 geodéziai dátumra vonatkoztak, amelyeket az összehasonlítás előtt természetesen átszámítottuk a geocentrikus elhelyezéű GRS80 ellipszoidra. A  $\xi$  értékek átlagos eltérése  $0.37''$  az  $\eta$  értékeké  $0.47''$ , a két összetevőből a függővonal-elhajlás (1) szerint értelmezett  $\Theta$  szögének átlagos eltérése pedig  $0.66''$ . Ez az érték jobb, mint az európai területre vonatkozóan (Hirt et al. 2013) által közölt  $1''$  körüli átlagos eltérés. A dátumtranszformáció paramétereinek bizonytalansága Ádám (2000) alapján  $1.5$ - $2$  m-re, vagyis kb.  $0.05''$ -re becsülhető hibát okozhat az átszámítás során, tehát a kapott átlagos eltérések semmiképpen sem magyarázhatók a transzformációs paraméterek bizonytalanságának hatásaként. A 6. ábrán a mért és a GGMplus modellel számított  $\Theta$  értékek eltérése és ennek területi eloszlása látható. Az eltérés az ország jelentős területén kicsi, a 138 pontból mindössze 22 pontban nagyobb  $1''$  értéknél és 2 pontban  $2''$ -nél.

## 5 Meghatározás zenitkamerával

A Zenitpont valódi égi egyenlítői koordinátáinak meghatározásához függőleges tengelyű zenittávcsóvel, vagy zenitkamerával mérőképet készítünk a Zenitpont környezetében lévő csillagokról, és pontosan rögzítjük a felvétel időpontját. A képen látszó csillagok azonosítása és képkoordinátáik kimérése után, a látszó helyű égi egyenlítői koordinátái alapján koordináta-transzformációt végzünk, és ezzel számítjuk az  $x' = y' = 0$  képkoordinátájú Zenitpont  $\alpha_{Zenit}$ ,  $\delta_{Zenit}$  valódi égi egyenlítői koordinátáit. Ezeket átszámítva a Nemzetközi Földi Vonatkoztatási Rendszerbe (ITRS) kapjuk az álláspont  $\Phi$  és  $\Lambda$  szintfelületi földrajzi koordinátáját (Biró et al. 2013).



6. ábra. Csillagászati földrajzi helymeghatározással mért és a GGMplus modellel számított  $\Theta$  értékek eltérései

A mai korszerű CCD érzékelővel ellátott zenitkamerák már lehetővé teszik, hogy akár több csillagászati-geodéziai pontot is meghatározzunk egyetlen éjszaka alatt egytized szögmásodperc megbízhatósággal (Bürki et al. 2004, 2010). Ilyen műszerrel eddig még nem történtek mérések Magyarországon. A CCD érzékelővel ellátott zenitkamerákkal kapcsolatos további részleteket illetően utalunk Hirt et al. (2010, 2014) tanulmányokra és az ezekben található hivatkozásokra.

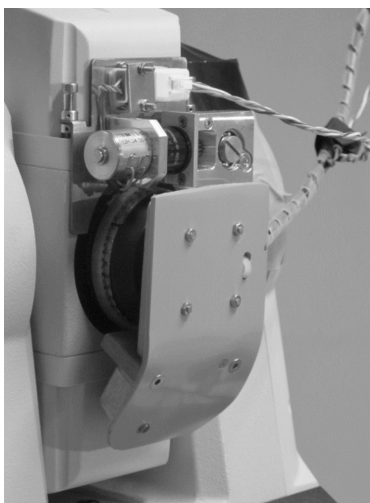
## 6 Függővonal-elhajlás mérések a QDaedalus rendszerrel

A QDaedalus rendszert a Zürichi Műszaki Egyetem szakemberei fejlesztették ki, a rendszer használatába és fejlesztésébe 2013-ban a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszéke is bekapcsolódott. Jelenleg ebből a berendezésből még csak néhány működik a világon Svájcban, Németországban és most már Magyarországon is. A QDaedalus rendszer GNSS technikával kiegészített és külső számítógéppel vezérelt automatikus mérőrendszer, amelynek geodéziai alaplészere egy megfelelőképpen átalakított Leica TCA1800 mérőállomás. A rendszerrel mindössze 15-20 perc idő alatt a mérési körülményektől függően 0.1–0.3 szögmásodperces pontossággal lehet függővonal-elhajlás értékeket meghatározni, vagy a Napra és Holdra történő mérésekkel minden eddiginél pontosabb alaphálózati azimut-meghatározások is végezhetők.

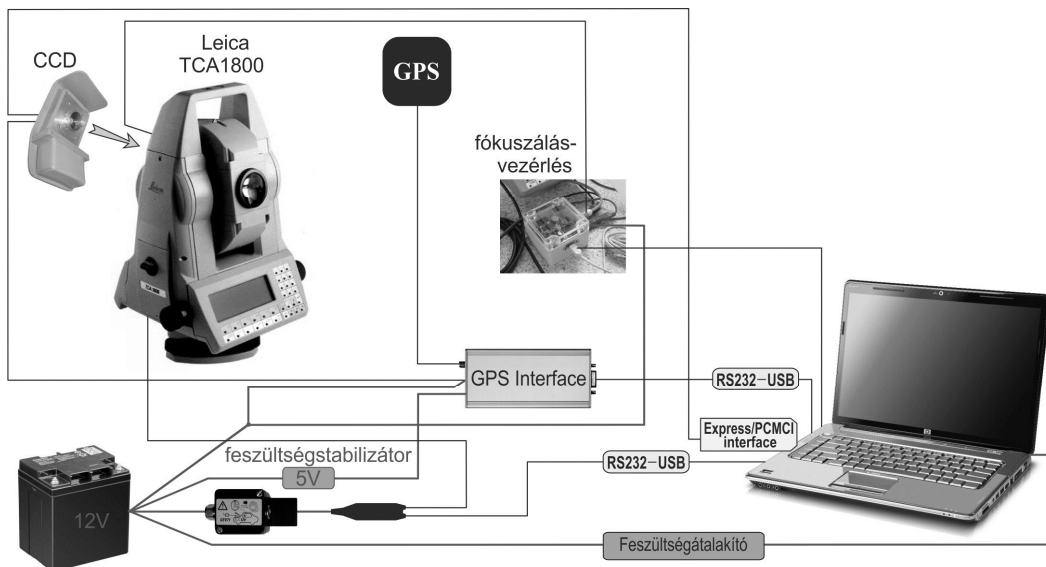
A rendszer alapeszköze egy átalakított Leica TCA1800 mérőállomás. Az átalakítás a műszer optikai rendszerét érinti, a mérőállomás okulárját nagy felbontású és igen nagy érzékenyséű CCD érzékelőre cseréljük. A CCD érzékelő felszerelése után már nincs lehetőség a hagyományos vizuális leolvasásra, kép csak a műszerhez illesztett külső számítógép képernyőjén látható. Emiatt a fókuszálást is a számítógépről kell vezérelni, amit a mérőállomásra erősített illesztő egységen keresztül vezérelt léptetőmotor végez. A 7. ábrán az átalakított távcső okulár felőli oldala látható, a CCD érzékelővel és a fókuszáló motorral.

A csillagászati mérésekhez szükséges pontos időjelet a rendszerbe illesztett GPS vevő biztosítja, amely egyúttal a WGS84 ellipszoidi koordinátákat is szolgáltatja. A teljes rendszer elvi felépítését a 8. ábrán láthatjuk.

A GNSS rendszer két irányban szolgáltat adatokat: egyrészt a CCD érzékelőt és a vezérlő számítógépet a csillagászati felvételek készítéséhez pontos időjellel látja el, továbbá RS232-USB átalakítón keresztül továbbítja a számítógépbe a WGS84 koordinátákat is. A CCD érzékelővel rögzített képek nagy mennyiségű adattömege gyors csatlakozáson keresztül jut a vezérlő/feldolgozó számítógépbe PCMCIA, vagy EXPRESS CARD csatlakozással. A mérőállomás vezérlését a csillagok automatikus keresését és mérését szintén a külső számítógép oldja meg másik RS232-USB csatornán és a mérőállomáshoz tartozó interfészen (csatoló egységen) keresztül.



7. ábra. A Leica TCA1800 mérőállomás okulárjának helyére szerelt CCD érzékelő és a fókuszáló berendezés



8. ábra. A QDaedalus rendszer vázlatos felépítése

A fókuszálás-vezérléshez további USB kapcsolat szükséges, a kapcsolat a 8. ábrán látható közbeiktatott vezérlő egységen keresztül valósul meg. A rendszer energiaellátását nagyobb kapacitású akkumulátorok biztosítják. A számítógép terepi, hosszabb idejű működéséhez szükséges feszültséget inverter állítja elő, míg a GPS egység speciális feszültség-stabilizátoron keresztül jut a megfelelő táphoz.

Az egész rendszer vezérlését és az adatfeldolgozást a QDaedalus szoftver végzi. Ez irányítja a mérőállomás mozgatását, vezérli a távcső fókuszálását, sorra megkeresi a mérhető csillagokat, fogadja és feldolgozza a CCD érzékelő képeit, kezeli a GNSS adatokat, asztrogeodéziai mérések esetén meghatározza a csillagok, a Nap, Hold és a bolygók pillanatnyi topocentrikus koordinátáit, adatbázisba rendezi a kiinduló- és a mért értékeket, kiegyenlítéssel a helyszínen meghatározza a  $\Phi$ ,  $\Lambda$  szintfelületi és a  $\varphi$ ,  $\lambda$  ellipszoidi földrajzi szélességeket és hosszúságokat, valamint a keresett függővonal-elhajlás értékeket.

Mivel a mérések újrafeldolgozására, különböző feldolgozási változatok kipróbálására a mérés befejezése után a QDaedalus szoftver nem ad lehetőséget, ezért saját feldolgozó szoftvert kellett kifejlesztünk. Ezzel a QDBME elnevezésű szoftverrel lehetőség nyílik az adatbázisban megőrzött mérési eredmények utólagos feldolgozására és saját feldolgozó algoritmusok kipróbálására. A saját szoftver egyrészt képes szintfelületi koordináták és függővonal-elhajlás értékek számítására, másrészt a következőkben említett műszer kalibráció eredményfájljainak segítségével különböző kalibrációs feldolgozási eljárások alkalmazása is lehetővé válik.

A mérések a műszer kalibrálásával kezdődnek, ezzel teremt kapcsolatot a rendszer a mérőállomás vízszintes és magassági körén tett leolvasások, illetve a CCD érzékelő koordináta-rendszerében adódó értékek között. Ezt a néhány perces időtartamú műveletet követik a tényleges mérések a csillagokra. A mérőrendszer sorra, többször is megkeresi a zenit tengelyű kb.  $30^\circ \pm 2^\circ$  kúpszög tartományban található mérésre alkalmas csillagokat, képsorozatokat készít róluk, majd automatikusan kiértékeli a felvételeket és meghatározza a Zenitpont  $\alpha_{zenit}$ ,  $\delta_{zenit}$  valódi égi egyenlítői koordinátáit. Ebből különböző korrekciók és koordináta-transzformációk sorozata után kapjuk a függővonal-elhajlás értékeket.

A BME kertjében különböző időpontokban és körülmények között végzett nagyszámú, egyenként 15-20 perces időtartamú tesztmérések során sikerült elérni az egy mérési sorozatból meghatározott  $\xi$ ,  $\eta$  értékek 0.1 szögmásodperc körüli szórását. A mérés érdekessége, hogy ugyanebben a pontban a GGMplus modellel számított  $\xi$ ,  $\eta$  értékek 0.1–0.2 szögmásodpercre megegyeztek az

általunk mért értékekkel (a legjobb 6 mérési sorozatból, napi aberráció javítással meghatározott középértékek  $\xi = -2.91''$ ,  $\eta = 6.40''$ , a GGMPPlus értékek  $\xi = -2.79''$ ,  $\eta = 6.19''$ , tehát az eltérés  $0.12''$  és  $0.21''$ ). Az Ócsa, Örkény, Újhartán, Alsónémedi és Bugyi közelében 2015 őszén végzett kísérleti terepi méréseink során viszonylag kedvezőtlen körülmények között (erősen párás időben, nagy gépkocsi forgalom mellett) is sikerült meghatározni 0.3 szögmásodperc pontosságú függővonal-elhajlás értékeket (Csala 2015).

## 7 Összefoglalás

A tanulmányban röviden összefoglaltuk a függővonal-elhajlások meghatározásának lehetőségeit a korábbi klasszikus csillagászati földrajzi helymeghatározástól a legújabb lehetőségig. 2013 óta a svájci ETH Zürich munkatársaival olyan új módszer és csillagászati-geodéziai mérőrendszer fejlesztésében veszünk részt, amely az eddigi mérések és vizsgálatok alapján jelentős változásokat vetít előre a függővonal-elhajlások meghatározásában. Az új QDaedalus mérőrendszer igen érzékeny CCD érzékelővel felszerelt, GPS időjellel és számítógéppel vezérelt speciális geodéziai mérőállomás, amiből jelenleg még csak néhány (az egyik éppen a mi kezelésünkben) működik a világon. A rendszerrel a mérés rendkívül gyors (a korábbi hosszú hetekig tartó mérési és számítási idő helyett mindössze 15-20 perc szükséges) ráadásul az új rendszer a korábbiaknál nagyobb pontosságot szolgáltat. A kutatások várható eredményei nemzetközi szinten is kiemelkedő jelentőségűek, új távlatokat nyitnak többek között az igen pontos, nagy felbontású helyi geoid-meghatározásokban.

## Hivatkozások

- Ádám J** (2000): Magyarországon alkalmazott geodéziai vonatkoztatási rendszerek vizsgálata. *Geodézia és Kartográfia*, 52(12), 9-15.
- Bíró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata (egyetemi tankönyv és kézikönyv). HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest.
- Bürki B, Müller A, Kahle HG** (2004): Diadem: The new digital astronomical deflection measuring system for high-precision measurements of deflections of the vertical at ETH Zürich. IAG Int. Symp. Gravity, Geoid and Space Missions, Porto, Portugal, from August 30th to September 3rd, 2004.
- Bürki B, Guillaume S, Sorber P, Oesch HP** (2010): DAEDALUS: A Versatile Usable Digital Clip-on Measuring System for Total Stations. 2010 International Conference on Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 15-17 September 2010, Zürich, Switzerland.
- Csala B** (2015): Geoid helyi felületdarabjának meghatározása a QDaedalus rendszerrel végzett függővonal-elhajlás mérésekkel. Diplomaterv, BME Ált. és Felsőgeodézia Tsz.
- Hirt C, Bürki B, Somieski A, Seeber G** (2010): Modern determination of vertical deflections using digital zenith cameras; *Journal Surveying Engineering*, 136(1), 1-12, doi: 10.1061/\_ASCE\_SU.1943-5428.0000009
- Hirt C, Claessens JS, Fecher T, Kuhn M, Pail R, Rexer M** (2013): New ultrahigh-resolution picture of Earth's gravity field, *Geophysical Research Letters*, 40, doi: 10.1002/grl.50838
- Hirt C, Papp G, Pál A, Benedek J, Szűcs E** (2014): Expected accuracy of tilt measurements on a novel hexapod-based Digital Zenith Camera System – a Monte-Carlo simulation study, *Measurement Science Technology*, 25, 085004, doi: 10.1088/0957-0233/25/8/085004
- Karsay F** (1976): Csillagászati és Földrajzi helymeghatározás. ELTE TTK egyetemi jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest.
- Lukács T, Sárdi A** (1980): Földrajzi helymeghatározás. BME egyetemi jegyzet, Budapest.
- Völgyesi L** (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica CE.*, 37(2), 137-166.
- Völgyesi L** (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. *Periodica Polytechnica CE.*, 39(1), 37-75.
- Völgyesi L** (2012): Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában. *Geomatikai Közlemények*, 15, 9-26.



# HUNGARIAN NATIONAL REPORT ON IAVCEI 2011-2014 – AN ADDENDUM

*Dobosi Gábor*<sup>\*,\*\*</sup>, *Harangi Szabolcs*<sup>\*\*\*,\*\*\*\*</sup>

*In this short note, we complete the Hungarian National Report on IAVCEI 2011-2014 with some additional significant results missed regrettably in the original summary.*

**Keywords:** addendum, IAVCEI, national report

*E rövid közleményben az IAVCEI Magyar Nemzeti Jelentés 2011-2014 angol nyelvű összefoglalását egészítjük ki néhány, az eredeti jelentésből sajnálatosan kimaradt kutatási eredménnyel.*

**Kulcsszó:** kiegészítés, IAVCEI, nemzeti jelentés

## 1 Introduction

In our review about the research activity of the Hungarian scientists in the field of IAVCEI between 2011 and 2014 (Dobosi and Harangi 2015), some significant results were regrettably missed. Here, we provide an addendum to the report referring to the titles and subtitles of the original paper of Dobosi and Harangi (2015).

## 3 Plio-Pleistocene alkali basalt volcanism and their upper mantle and lower crustal xenoliths

### 3.3 Upper mantle and lower crustal xenoliths in alkali basalts

Török (2012) investigated rare clinopyroxene-plagioclase bearing, felsic granulite and skarn xenoliths from various localities of the Bakony–Balaton Highland Volcanic Field (West Hungary). The first group formed in the lower crust together with mafic and metasedimentary granulites. The second group represents magmatic intrusions of the middle crust, and the third one comprises contact metamorphic rocks of relatively shallow origin. The calculated pressure difference from the core and rim compositions of plagioclase and clinopyroxene as well as garnet breakdown reactions in some xenoliths shows evidence for pressure decrease due to crustal thinning both in lower crustal and middle crustal xenoliths during formation of the Pannonian Basin. On the basis of mineral stabilities and geothermo-barometry, Török (2012) suggested that thinning affected both the lower and the upper portion of the crust but on different scales during the syn-extensional phase of the Pannonian Basin. The calculated thinning factors are between 2.25 and 3.4 for the lower crust and 1.3–1.56 for the upper crust. Török et al. (2014) provided new information on the evolution of the middle crust beneath the western Pannonian Basin based on felsic and mafic granulite xenoliths. These rocks were formed by a complex multistage evolution controlled by the changing temperature, pressure and migrating fluids in the crust.

## 4 International collaboration

### 4.5 Geochronology

Further geochronological results were obtained for the Late Cenozoic volcanic activity along the Moravia-Silesia border (Cajz et al. 2012), for the Mt. Cer pluton (West Serbia; Koroneos et al. 2011), for the southern part of the San Salvador Metropolitan Area (Lexa et al. 2011) and for the Los Loros volcano, Mendoza, Argentina (Németh et al. 2012).

<sup>\*</sup> Department of Mineralogy and Geology, University of Debrecen

<sup>\*\*</sup> Hungarian Academy of Sciences, Research Centre for Astronomy and Earth Sciences

E-mail: [dobosi@geochem.hu](mailto:dobosi@geochem.hu)

<sup>\*\*\*</sup> Department of Petrology and Geochemistry, Eötvös Loránd University

<sup>\*\*\*\*</sup> MTA-ELTE Volcanology Research Group

## 4.6 Volcanology

Fornaciai et al. (in co-operation with Karátson) conducted morphometric analysis of scoria cones at various geodynamic settings using freely downloadable digital elevation models (DEMs). They found systematic morphometric differences between cones related to subduction zones and those occurring in extensional areas (Fornaciai et al. 2012). Although the factors, which are responsible for these differences are still unclear, they suggested that such quantitative approach could help to constrain this relation in the future. Karátson et al. (2012) investigated erosion patterns and rates of 33 stratovolcanoes in the Central Andes and found a strong climatic control on it. They concluded that erosion of juvenile volcanoes was more rapid due to their unconsolidated cover and steeper slope. Furthermore, they proposed that the degree of denudation in the function of volcano age could provide a rough morphometric tool to constrain the time elapsed since the extinction of the volcanic activity. Telbisz et al. (2012) used swath analysis based on digital terrain models to characterize quantitatively the denudation of Central Andean volcanoes. The ideal volcanic cone profile was derived from the Parinacota volcano and this model enabled comparisons with other, more denuded volcanoes to quantify erosion volume. Székely et al. (2014) presented a geomorphometric approach in the recognition of quasi-planar ignimbrite sheets as paleosurfaces in the Central Andes. Favalli et al. (in co-operation with Karátson) used surface fitting in the morphological characterization of regular-shaped volcanic landforms. They claimed that application of the MINUIT minimization library have a twofold advantage: the extent, how a given volcanic landform is regular, can be determined quantitatively and in the case of degraded volcanic landforms, whose geometry is not clear, this method of surface fitting reconstructs the original shape with the maximum precision (Favalli et al. 2014).

## References

- Cajz V, Schnabl P, Pécskay Z, Skacelova Z, Venhodova D, Slechta S, Cizkova K (2012): Chronological implications of the paleomagnetic record of the Late Cenozoic volcanic activity along the Moravia-Silesia border (NE Bohemian Massif). *Geologica Carpathica*, 63, 423-435.
- Dobosi G, Harangi Sz (2015): Hungarian National Report on IAVCEI (2011-2014). *Publications in Geomatics*, 18, 137-145.
- Favalli M, Karátson D, Yepes J, Nannipieri L (2014): Surface fitting in geomorphology – Examples for regular-shaped volcanic landforms. *Geomorphology*, 221, 139-149.
- Fornaciai A, Favalli M, Karátson D, Tarquini S, Boschi E (2012): Morphometry of scoria cones, and their relation to geodynamic setting: A DEM-based analysis. *Journal of Volcanology and Geothermal Research* 217-218, 56–72.
- Karátson D, Telbisz T, Wörner G (2012): Erosion rates and erosion patterns of Neogene to Quaternary stratovolcanoes in the Western Cordillera of the Central Andes: An SRTM DEM based analysis. *Geomorphology* 139-140, 122–135.
- Koroneos A, Poli G, Cvetkovic V, Christofides G, Krstic D, Pécskay Z (2011): Petrogenetic and tectonic inferences from the study of the Mt Cer pluton (West Serbia). *Geological Magazine*, 148, 89-111.
- Lexa J, Sebesta J, Alexander Chavez J, Hernandez W, Pécskay Z (2011): Geology and volcanic evolution in the southern part of the San Salvador Metropolitan Area. *Journal of Geosciences*, 56, 105-140.
- Németh K, Risso C, Nullo F, Smith IEM, Pécskay Z (2012): Facies architecture of an isolated long-lived, nested polygenetic silicic tuff ring erupted in a braided river system: The Los Loros volcano, Mendoza, Argentina. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 239, 33-48.
- Székely B, Koma Zs, Karátson D, Dorninger P, Wörner G, Brandmeier M, Nothegger C (2014): Automated recognition of quasi-planar ignimbrite sheets as paleosurfaces via robust segmentation of digital elevation models: an example from the Central Andes. *Earth Surface Processes and Landforms*, 39, 1386–1399.
- Telbisz T, Kovács G, Székely B, Karátson D (2012): A sávsvélvényelemzés (swath analysis) módszere digitális terepmodell (DTM) alapján (The method of swath analysis based on digital terrain models). *Földtani Közlemények*, 142, 193-200.
- Török K (2012): On the origin and fluid content of some rare crustal xenoliths and their bearing on the structure and evolution of the crust beneath the Bakony-Balaton Highland Volcanic Field (W-Hungary). *International Journal of Earth Sciences*, 101, 1581-1597.
- Török K, Németh B, Koller F, Dégi J, Badenszki E, Szabó C, Mogessie A (2014): Evolution of the middle crust beneath the western Pannonian Basin: a xenolith study. *Mineralogy and Petrology*, 108, 33-47.

# ACTIVITY OF THE DEPARTMENT OF GEOPHYSICS, UNIVERSITY OF MISKOLC–IAGA DIVISION 1. INTERNAL MAGNETIC FIELDS

Gábor Pethő<sup>r\*</sup>



*This is a reprint of the original publication Pethő G (2015): Activity of the Department of Geophysics, University of Miskolc - IAGA Division 1. Internal Magnetic Fields, In: Ádám (ed.): Hungarian National Report on International Union of Geodesy and Geophysics. Publications in Geomatics, 18(1), 55-56. corrected in its References.*

## 1 Near-surface and environmental studies

The activity of the Department of Geophysics at University of Miskolc covers both methodological and interpretational method developments of mainly near-surface geophysics and geo-environmental issues.

For time domain IP data processing the theoretical basis of TAU-transformation was given by Turai and Dobróka (2011) and the interpretation of IP field data by Turai (2011, 2012a). Additional IP application possibilities (including environmental protection as well) are presented by Turai (2012b). Mineral and thermal water resources in the Tokaj Mountains were characterized by Szűcs et al. (2014). For archaeological exploration multi-electrode geoelectrical measurements were applied and interpreted by 2D conductivity distribution assumption by Turai and Hursán (2012). A new petrophysical model describing the pressure dependence of acoustic wave propagation characteristics was established by Dobróka and Somogyiné Molnár (2012a, 2012b, 2013), Dobróka et al. (2014), Somogyiné Molnár et al. (2013, 2015) and Somogyiné Molnár and Kiss (2014). The validity of the new petrophysical model was also investigated by them in the course of lab measurements. Dobróka et al. (2013) applied an approximate inversion for quick imaging of MT data. Some geological applications of VLF resistivity method are presented by Pethő (2012a). Three dimensional DC numerical modelling was done by Baracza and Gyulai (2012) for selecting the best array to detect failures of modern landfills. EM frequency domain numerical modelling results for 2.5D isotropic models and the bases of EM underground transillumination for anisotropic 2.5D case are given by Pethő (2012b, 2013). Gyulai et al. (2013) carried out in-mine geoelectric investigations to detect tectonic disturbances in coal seam beds. For the interpretation of field geophysical data new, high resolution, inversion methods were developed. All inversion methods developed in the framework of geoelectric survey were tested via field data and the main characteristics of them are described by Gyulai et al. (2014).

## 2 Inversion and additional interpretation techniques

New, automated joint inversion method was developed by Drahos et al. (2011) for 2D geologic structure. An overview is presented by Gyulai et al. (2013) on the geophysical applications of joint inversion. The series expansion-based inversion method –which relies on the assumption that the variations of formation boundaries and physical parameters along the investigated profile can be described by continuous functions– was applied by Gyulai and Tolnai (2012), Völgyesi et al. (2012), Paripás and Ormos (2012), Gyulai and Szabó(2013). In the course of 2D CGI (Combined Geoelectric Inversion) the combination of the 2D finite difference geoelectric forward modeling and the series expansion-based inversion method is applied and this method was further developed by automatically weighting the individual geoelectric data setsto improve the inversion resultsby Gyulai et al. (2014). New inversion methods were elaborated by Ormos and Paripás (2012) and Paripás and Ormos (2013) to enhance the reliability of seismic refraction interpretation.Interval inversion methods were further developed and applied by Dobróka and Szabó (2011, 2012), Dobróka et al. (2012a) for formation

<sup>r</sup>Department of Geophysics, University of Miskolc  
H 3515, Miskolc-Egyetemváros A/2 ép.  
E-mail: gfp@uni-miskolc.hu



boundaries determination, textural and petrophysical characterization in the course of log analysis. Improved algorithm was elaborated by Dobróka et al. (2012c) for the Fourier transform as an inverse problem. New inversion algorithm for the computation of Fourier transform was developed by Szegedi et al. (2013). Robust Fourier- transform method for the case of outlier data was elaborated by Dobróka and Szegedi (2013). Szegedi and Dobróka (2014) presented a paper on the role of Steiner's weights in the inversion-based Fourier transformation. Dobróka et al. (2014) investigated the reduced noise sensitivity of a new Fourier transformation algorithm. Szegedi (2014) developed a new aspect of the inversion-based robust Fourier-transform. Paper was presented by Dobróka and Szegedi (2014) on the generalization of seismic tomography algorithms. Factor analysis was applied by Szabó (2011), Szabó and Dobróka (2013) and Szabó et al. (2014) for the interpretation of well log data putting emphasis on shale volume determination. Additional factor analysis investigations were made by Szabó (2012) and Szabó et al. (2012) to assist the interpretation of engineering geophysical sounding data. A cluster analysis procedure was developed by Szabó et al. (2013) for a more automated characterization of hydrocarbon reservoirs.

## References

- Baracza MK, Gyulai Á** (2012): 3 Dimensional Model Studies of Modern Landfills. *Geosciences and Engineering*, 1(1), 21-28.
- Dobróka M, Prácsér E, Kavanda R, Turai E** (2013): Quick imaging of MT data using an approximate inversion algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 48(1), 17-25.
- Dobróka M, Somogyiné Molnár J** (2012a): New petrophysical model describing the pressure dependence of seismic velocity. *Acta Geophysica*, 60(2), 371-383.
- Dobróka M, Somogyiné Molnár J** (2012b): The pressure dependence of acoustic velocity and quality factor – New petrophysical models. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 149-160.
- Dobróka M, Somogyiné Molnár J** (2013): New petrophysical model for describing pressure dependence of acoustic velocity based on the change of pore volume. *International Scientific Herald*, 6(25), 57-65.
- Dobróka M, Somogyiné Molnár J, Szűcs P, Turai E** (2014): Pressure dependence of seismic Q – a microcrack-based petrophysical model. *Near Surface Geophysics*, 12(3), 427-436.
- Dobróka M, Szabó NP** (2011): Interval inversion of well-logging data for objective determination of textural parameters. *Acta Geophysica*, 59(5), 907-934.
- Dobróka M, Szabó NP** (2012): Interval inversion of well-logging data for automatic determination of formation boundaries by using a float-encoded genetic algorithm. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 86-87, 144-152.
- Dobróka M, Szabó NP, Turai E** (2012a): Interval inversion of borehole data for petrophysical characterization of complex reservoirs. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 172-184.
- Dobróka M, Szegedi H** (2013): Investigation of Robust Fourier-transform method in case of outliers. *International Scientific Herald*, 6(25), 306-313.
- Dobróka M, Szegedi H** (2014): On the generalization of seismic tomography algorithms. *American Journal of Computational Mathematics*, 4(1), 37-46.
- Dobróka M, Szegedi H, Somogyiné Molnár J, Szűcs P** (2014): On the reduced noise sensitivity of a new Fourier transformation algorithm. *Mathematical Geosciences*, 46(11004), 1-19.
- Dobróka M, Szegedi H, Vass P, Turai E** (2012c): Fourier transformation as inverse problem – an improved algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 185-196.
- Drahos D, Gyulai Á, Ormos T, Dobróka M** (2011): Automated weighting joint inversion of geoelectric data over a two dimensional geologic structure. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46(3), 309-316.
- Gyulai Á, Baracza MK, Szabó NP** (2014): On the application of combined geoelectric weighted inversion in environmental exploration. *Environmental Earth Sciences*, 71, 383-392.
- Gyulai Á, Baracza MK, Tolnai ÉE** (2013): The application of joint inversion in geophysical exploration. *International Journal of Geosciences*, 4(2), 283-289.
- Gyulai Á, Ormos T, Dobróka M, Turai E, Sasvári T** (2013): In-mine geoelectric investigations for detecting tectonic disturbances in coal seam structures. *Acta Geophysica*, 61(5), 1184-1195.
- Gyulai Á, Szabó NP** (2013): Series expansion-based geoelectric inversion methodology used for geoenvironmental investigations. *Frontiers in Geosciences*, 2(1), 11-17.
- Gyulai Á, Tolnai ÉE** (2012): 2.5D geoelectric inversion method using series expansion. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 210-222.
- Ormos T, Paripás AN** (2012): Traveltime differences in seismic refraction inversion. *Geosciences and Engineering*, 1(2), 123-128.
- Paripás AN, Ormos T** (2012): Resolution and ambiguity studies for a series expansion based multilayer refraction inversion method. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 28-41.
- Paripás AN, Ormos T** (2013): New inversion techniques for the elimination of trigger errors in seismic refraction data. *Geosciences and Engineering*, 2(3), 73-82.
- Pethő G** (2012a): Geological applications of VLF method. *Geosciences and Engineering*, 1(2), 129-136.

- Pethő G** (2012b): Frequency domain electromagnetic investigation on elongated conductivity structures. *Geosciences and Engineering*, 1(1), 271-282.
- Pethő G** (2013): Bases of FD modelling for EM underground transillumination with vertical electric dipoles in 2D anisotropic conductivity structures. *Geosciences and Engineering*, 2(3), 51-62.
- Somogyiné Molnár J, Dobróka M, Bodoky T** (2013): Explanation of pressure dependence of acoustic velocity based on the change of pore volume. *Geosciences and Engineering*, 2(3), 63-72.
- Somogyiné Molnár J, Kiss A** (2014): Modelling the pressure dependence of p wave velocity and porosity on sandstones. *Geosciences and Engineering*, 2(4), 1-11.
- Somogyiné Molnár J, Kiss A, Dobróka M** (2015): Petrophysical models to describe the pressure dependence of acoustic wave propagation characteristics. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 50(3), 339-352.
- Szabó NP** (2011): Shale volume estimation based on the factor analysis of well-logging data. *Acta Geophysica*, 59(5), 935-953.
- Szabó NP** (2012): Dry density derived by factor analysis of engineering geophysical sounding measurements. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 161-171.
- Szabó NP, Dobróka M** (2013): Extending the application of a shale volume estimation formula derived from factor analysis of wireline logging data. *Mathematical Geosciences*, 45(7), 837-850.
- Szabó NP, Dobróka M, Drahos D** (2012): Factor analysis of engineering geophysical sounding data for water saturation estimation in shallow formations. *Geophysics*, 77(3), WA35-WA44.
- Szabó NP, Dobróka M, Kavanda R** (2013): Cluster analysis assisted float-encoded genetic algorithm for a more automated characterization of hydrocarbon reservoirs. *Intelligent Control and Automation*, 4(4), 362-370.
- Szabó NP, Dobróka M, Turai E, Szűcs P** (2014): Factor analysis of borehole logs for evaluating formation shaliness: a hydrogeophysical application for groundwater studies. *Hydrogeology Journal*, 22(3), 511-526.
- Szegedi H** (2014): Generating Hilbert transform with the use of inversion-based robust Fourier transform. *Geosciences and Engineering*, 2(2), 103-115.
- Szegedi H, Dobróka M** (2014): On the use of Steiner's weights in inversion-based Fourier transformation: robustification of a previously published algorithm. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 49(1), 95-104.
- Szegedi H, Dobróka M, Bodoky T** (2013): New inversion algorithm for the computation of Fourier transform - examination on a synthetic data set. *Geosciences and Engineering*, 2(3), 83-90.
- Szűcs P, Fejes Z, Zákányi B, Fekete Zs, Szárnya G, Hartai É, Turai E, Gyulai Á, Szabó NP, Cserny T** (2014): General characterization of mineral and thermal water resources in the Tokaj Mountains. *Geosciences and Engineering*, 3(5), 77-82.
- Turai E** (2011): Data processing method developments using TAU-transformation of time domain IP data: II. interpretation results of field measured data. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46(4), 391-400.
- Turai E** (2012a): Some field measurement results of IP method. *Geosciences and Engineering*, 1(2), 167-172.
- Turai E** (2012b): Application possibilities of IP method in the fields of environmental protection, ore- and direct hydrocarbon exploration. *Geosciences and Engineering*, 1(2), 161-166.
- Turai E, Dobróka M** (2011): Data processing method developments using TAU-transformation of time-domain IP data I. theoretical basis. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 46(3), 283-290.
- Turai E, Hursán L** (2012): 2D inversion processing of geoelectric measurements with archaeological aim. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 245-255.
- Völgyesi L, Dobróka M, Ulmann Z** (2012): Determination of vertical gradients of gravity by series expansion based inversion. *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica*, 47(2), 233-244.

