ÉVFOLYAM
Volume
XVI 2013

GEOMATIKAI
KÖZLEMÉNYEK

Publications in Geomatics

FŐSZERKESZTŐ **PAPP G**
Editor in Chief

TANÁCSADÓ TESTÜLET **ÁDÁM J** *(elnök/chair)*
Advisory board **BIRÓ P**
BOZÓ L
MÁRTON P

HU ISSN 1419-6492

MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZET
SOPRON

CSFK

Geomatikai Közlemények

Publications in Geomatics

kiadja az

MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZETE

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.
tel.: 99 - 508-340 fax.: 99 - 508-355
e-mail: geomatika@ggki.hu
web: www.geomatika.ggki.hu
web programozó: Lovranits Tamás

felelős kiadó:

Ábrahám Péter
főigazgató

főszerkesztő:

Papp Gábor

angol nyelvi szaklektor:

Eperné Pápai Ildikó

technikai szerkesztő

Bischof Annamária

készült a
LŐVÉR PRINT Kft. nyomdájában
9400 Sopron, Ady Endre u. 5.
tel.: 99 - 329-977

megjelent 150 példányban
Sopron, 2013

HU ISSN 1419-6492

GEOMATIKAI

KÖZLEMÉNYEK

XVI.

"Minden nemzet a maga
nyelvén lett tudós,
de idegenen sohasem."

(Bessenyei György)

ÁLTALÁNOS INFORMÁCIÓK ÉS ÚTMUTATÓ

A Geomatikai Közlemények 1998 óta rendszeresen, általában évenként egy alkalommal megjelenő folyóirat. A kiadvány célja, hogy elsősorban magyar és esetenként angol nyelvű fórumot biztosítson azon hazai, ill. külföldi kutatóknak és szakembereknek, akik a műszaki- és földtudományok azon területein (geodézia, fotogrammetria, térinformatika, fizikai geodézia, geofizika, földmágnesség, geodinamika, a Föld belső szerkezete és a Föld körüli térség fizikája) elért tudományos eredményeiket szeretnék közzétenni, amelyek a geomatika módszereit használják helyhez kötött adataik gyűjtéséhez, feldolgozásához és elemzéséhez. A kiadványban megjelenő cikkek és tanulmányok a mai normáknak megfelelő lektorálási folyamaton mennek keresztül, azaz mielőtt publikálásra kerülnek legalább kettő független bíráló véleményt alkot a közlésre benyújtott kéziratról. A bírálók nevét alaphelyzetben csak a szerkesztőbizottság ismeri, de a bírálók kérhetik anonimitásuk felfüggesztését. A bírálatok alapján a bizottság eldönti, hogy az adott kézirat megfelel-e a Geomatikai Közlemények formai és tartalmi követelmény-rendszerének, illetve, hogy az esetlegesen felmerülő hibák és hiányosságok kijavíthatók- és pótolhatók-e a kézirat kisebb-nagyobb átdolgozásával. A szerkesztőbizottság szakmai munkáját egy Tanácsadó Testület segíti.

A Geomatikai Közlemények szerkesztését, amelyet 2011-től már egy az Interneten keresztül elérhető és működtethető web felület is támogat (www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek ©Lovranits Tamás és Papp Gábor), társadalmi munkában végző szerkesztőség nagy hangsúlyt fektet a lehető leggyorsabb minőségi munkára. Ez mind a szerzőktől, mind a bírálóktól erőfeszítéseket és fegyelmet kíván, amit a szerkesztőség előre is tisztelettel megköszön. Ennek biztosításához javasoljuk áttanulmányozni a következő anyagokat:

Geomatikai_Közlemények_instrukciók_szerzőknek.doc,
Geomatikai_Közlemények_instrukciók_bírálóknak.pdf,

amelyek a már fent megadott címre belépve letölthetők. A regisztrált felhasználók ugyanezen a címen keresztül végezhetik el a rendszer által koordinált aktuális feladataikat akár szerzői akár bírálói szerepkörben. Az új felhasználók ugyanitt regisztrálhatnak, felhasználói név és e-mail cím megadásával.

A feltöltött kéziratokat a szerkesztőség egy tagja, a kézirathoz rendelt felelős szerkesztő előbírálja, elsősorban az instrukciókban megfogalmazott formai szempontok szerint. Ha a kézirat formailag kielégítőnek bizonyul, akkor elindul a bírálati folyamat, amely általában több ciklust is képez és egészen addig tart, ameddig a bírálók, ill. a felelős szerkesztő ezt tartalmi-formai indokok miatt szükségesnek tartják. A bírálati fázisokról és az aktuális teendőkről mind a szerzők mind a bírálók automatikus üzenetekben értesülnek.

A Geomatikai Közleményeket jelenlegi elnevezése szerint az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete adja ki. A kiadás anyagi hátterét egyrészt a kétévente Sopronban megrendezésre kerülő Geomatika Szeminárium másrészt különböző pályázatok és tudományos szervezetek (pl. Soproni Tudós Társaság) támogatásai biztosítják.

A Geomatikai Közlemények jelen kötetének felelős szerkesztői:
Benedek Judit, Gribovszki Katalin, Kalmár János, Papp Gábor, Szűcs Eszter, Újvári Gábor, Závoti József.

A KÖTETBEN MEGJELENT CIKKEK BÍRÁLÓI

Bartha Gábor
Battha László
Benedek Judit
Czajlik Zoltán
Czimber Kornél
Érdi Bálint
Jancsó Tamás
Kalmár János
Kenyeres Ambrus
Király Géza
Kis Márta
Paláncz Béla
Papp Erik
Siki Zoltán
Takács Bence
Tóth Gyula
Varga Péter
Völgyesi Lajos

TARTALOMJEGYZÉK
CONTENTS

A 2D és 3D NEMLINEÁRIS HASONLÓSÁGI (HELMERT) TRANSZFORMÁCIÓK MEGOLDÁSÁNAK ÚJ LEVEZETÉSE

Závoti József *

New treatment of the solution of 2D and 3D non-linear similarity (Helmert) transformations - *The laws of nature in general, and the relations and laws in geodesy in particular can be expressed in most cases by non-linear equations which are generally solved by transforming them to linear form and applying iteration. The process of bringing the equations to linear form implies neglections and approximation. In certain cases it is possible to obtain exact, correct solutions for non-linear problems. In the present work we introduce parameters into the rotation matrix, and using this we derive solutions for the 2D and 3D similarity transformations. This method involves no iteration, and it does not require the transformation of the equations to linear form. The scale parameter is determined by solving a polynomial equation of second degree. This solution is already known, but our derivation is worth consideration because of its simple nature*

Keywords: 3D, 7-parameter datum transformation, absolute orientation

A természetben, így a geodéziában is fennálló összefüggések, törvények többségükben nemlineáris egyenletekre vezetnek, amelyeket általában linearizálva, iterációval szokás megoldani. A linearizálás eleve elhanyagolást, közelítést eredményez. Bizonyos esetekben lehetőség nyílik arra, hogy a nemlineáris problémákra egzakt, korrekt megoldást kapjunk. A tanulmányban a forgatási mátrix parametrizálásával megadunk egy levezetést a 2D és 3D hasonlósági transzformációk nemlineáris feladatának megoldására. A módszer sem nem iteratív, sem nem követeli meg a megfigyelési egyenletek linearizálását. A méretarány paraméterének meghatározására másodfokú polinomegyenletet adódik. Maga a megoldás ismert a szakirodalomban, ez a levezetés az egyszerűségével mégis figyelmet érdemel.

Kulcsszavak: 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció, abszolút tájékozás

1 Bevezetés

A koordináta-rendszerek közötti áttérés során kiemelkedő jelentőségű a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció alkalmazása, ez a legelterjedtebb módszer a GPS rendszerek közötti átszámítások elvégzésében is. A gyakorlatban közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek. Ezeknek a modelleknek gyakorlati használatát az akadályozza, hogy az átszámításhoz használt közös pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladat a számítástechnika mai állása mellett sem oldható meg valós időben.

A probléma sokoldalú tárgyalása a Grafarend és Krumm (1995), a Grafarend és Kampman (1996) és a Grafarend és Shan (1997) tanulmányokban megtalálható, később Awange et al. (2004) tanulmánya bővíti a feladat megoldási lehetőségeit. Závoti (1999) munkája L1 normában oldotta meg a feladatot.

A dátum transzformációk számítógépes algebrai rendszerekkel történő tárgyalásában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) években megjelent tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmány a linearizálásra új módszert adott, a Battha és Závoti (2009a, 2009b) cikkek pedig kiterjesztették az alkalmazási területeket. A fotogrammetriai külső tájékozás esetére a Závoti és Fritsch (2011) tanulmány tartalmaz új eredményeket. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tartalmazta az elsők között.

*MTA CSFK GGI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
***E**-mail: zavoti@ggki.hu*

Ezen tanulmányban olyan matematikai megoldást adunk, amely kiküszöböli a kombinatorikus robbanás problémáját, és az egyéb numerikus nehézségek is mellőzhetők. E cikk alapjának a Závoti (2012) tanulmány tekinthető, és teljes levezetését adja a 3D, 7-paraméteres, nemlineáris hasonlósági transzformáció elemi eszközökkel történő tárgyalásának.

2 A 2D hasonlósági (Helmert) transzformáció alapformulái

A 4 paraméteres, 2D (Helmert) hasonlósági transzformáció Závoti (1999) tanulmánya alapján az alábbi egyenlettel adható meg:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} + \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n), \tag{1}$$

ahol $\{x_i, y_i\}$ és $\{X_i, Y_i\}$ $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ ugyanazon pontok koordinátái a két koordináta rendszerben, λ az ismeretlen méretarány tényező, X_0, Y_0 az ismeretlen eltolási értékek, $\boldsymbol{R}$ a forgatási mátrix. Az elforgatás α szögével az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot a következőképp írhatjuk fel

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Az $\boldsymbol{R}$ elforgatási mátrix előállítható egy ferdén szimmetrikus $\boldsymbol{S}$ mátrix felhasználásával:

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}), \tag{3}$$

ahol $\boldsymbol{I}_2$ kétdimenziós egységmátrix és

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Mivel

$$(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+c^2} & \frac{-c}{1+c^2} \\ \frac{c}{1+c^2} & \frac{1}{1+c^2} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

ezért a fenti $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot explicit kifejezhetjük az alábbi módon

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+c^2} \begin{pmatrix} 1-c^2 & -2c \\ 2c & 1-c^2 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

A ferdén szimmetrikus mátrix segítségével a forgatási mátrix elemeinek felhasználásával a forgatási szög szögfüggvényeire kapjuk

$$\sin\alpha = \frac{2c}{1+c^2}, \quad \cos\alpha = \frac{1-c^2}{1+c^2}, \quad tg\alpha = \frac{2c}{1-c^2}. \tag{7}$$

A (7) összefüggések utolsó tagja miatt a $c \neq \pm 1$ kikötést kell tenni.

A (1) összefüggés alapján írhatjuk:

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \lambda (\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_2 + \boldsymbol{S}) \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{8}$$

Az $\left(\boldsymbol{I}_2 - \boldsymbol{S}\right)$ mátrixszal balról szorozzuk végig a fenti egyenletet

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1-c \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \qquad \left(i = 1, 2, 3, ..., n\right). \tag{9}$$

3 A 2D hasonlósági (Helmert) transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározása

A súlyponti koordinátákra bevezetjük a következők jelölést

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad Y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, \\ x_s &= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad y_s = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}. \end{aligned} \tag{10}$$

A súlypontok kielégítik az alábbi egyenleteket

$$\begin{aligned} s_1 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_s - \lambda c y_s - X_s - cY_s = 0 \\ s_2 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_s + \lambda y_s + cX_s - Y_s = 0\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Valamennyi adott pontpárra felírható a (9) összefüggés, így egy túlhatározott egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{aligned} f_1 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_1 - \lambda c y_1 - X_1 - cY_1 = 0 \\ f_2 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_1 + \lambda y_1 + cX_1 - Y_1 = 0 \\ f_3 &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_2 - \lambda c y_2 - X_2 - cY_2 = 0 \\ f_4 &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_2 + \lambda y_2 + cX_2 - Y_2 = 0 \\ &\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ &\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \\ f_{2n-1} &:= +X_0 + cY_0 + \lambda x_n - \lambda c y_n - X_n - cY_n = 0 \\ f_{2n} &:= -cX_0 + Y_0 + \lambda c x_n + \lambda y_n + cX_n - Y_n = 0 \end{aligned} \quad . \tag{12}$$

A (11) összefüggéssel adott súlyponti egyenletek alkalmas kivonásával kiküszöbölhetők az eltolási paraméterek

$$\begin{aligned} f_{1s} &:= f_1 - s_1 = \lambda x_{1s} - \lambda c y_{1s} - X_{1s} - cY_{1s} = 0 \\ f_{2s} &:= f_2 - s_2 = \lambda c x_{1s} + \lambda y_{1s} + cX_{1s} - Y_{1s} = 0 \\ f_{3s} &:= f_3 - s_1 = \lambda x_{2s} - \lambda c y_{2s} - X_{2s} - cY_{2s} = 0 \\ f_{4s} &:= f_4 - s_2 = \lambda c x_{2s} + \lambda y_{2s} + cX_{2s} - Y_{2s} = 0 \\ &\;\;\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\;\;\cdot \qquad\qquad \cdot \\ &\;\;\cdot \qquad\qquad \cdot \\ f_{2n-1s} &:= f_{2n-1} - s_1 = \lambda x_{ns} - \lambda c y_{ns} - X_{ns} - cY_{ns} = 0 \\ f_{2ns} &:= f_{2n} - s_2 = \lambda c x_{ns} + \lambda y_{ns} + cX_{ns} - Y_{ns} = 0 \end{aligned} \quad , \tag{13}$$

ahol

$$X_{is} = X_i - X_s\,,\; Y_{is} = Y_i - Y_s\,,\; x_{is} = x_i - x_s\,,\; y_{is} = y_i - y_s \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n).$$

Valamennyi f_{2i-1s} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletből kifejezhető a *c* paraméter

$$c = (\lambda x_{is} - X_{is})/(\lambda y_{is} + Y_{is}) \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{14}$$

Ha a (14) képlettel adott *c* paramétert behelyettesítjük az f_{2is} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletekbe, kapjuk

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \tag{15}$$

A (15) összefüggés akkor és csak akkor teljesül, ha fennáll az alábbi összefüggés is

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2\right). \tag{16}$$

A fenti egyenletekből a méretarány matematikai jelentése alapján az λ paraméterre a következő megoldást kapjuk (csak a pozitív gyököt tekintjük)

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2\right)}}\,. \tag{17}$$

4 A lineáris- és az eltolási paraméterek meghatározása

A (17) képlettel megadott λ paraméter ismeretében a még hiányzó *c* paraméter a (13) összefüggésekből a legkisebb négyzetek módszerének alkalmazásával meghatározható

$$c = \frac{2\lambda \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}Y_{is} - y_{is}X_{is}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\lambda x_{is} + X_{is}\right)^2 + \left(\lambda y_{is} + Y_{is}\right)^2\right]}\,. \tag{18}$$

Az X_0 és Y_0 eltolási paraméterek a súlyponti koordinátákból az (1) összefüggés alapján származtathatók

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \end{bmatrix} - \lambda \frac{1}{1+c^2}\begin{pmatrix} 1-c^2 & -2c \\ 2c & 1-c^2 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix}. \tag{19}$$

5 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció alapformulái

A 3D, 7-paraméteres (Helmert) térbeli túlhatározott hasonlósági transzformáció a következő matematikai modellel adható meg: a transzformáció az elsődleges (cél) *(X, Y, Z)*, és a másodlagos (tárgy) *(x, y, z)* koordináta-rendszerek közötti Euklidészi térben adott pontok között valósít meg leképezést az eltolási, az elforgatási és a skálaparaméter függvényében:

$$\boldsymbol{X_i} = \boldsymbol{X}_0 + \lambda \boldsymbol{R}\boldsymbol{x_i} \qquad (i = 1,2,...,n), \tag{20}$$

ahol $\boldsymbol{X_i} = [X_i, Y_i, Z_i]^T$ a célpontok koordináta értékei,

$\boldsymbol{X_0} = [X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási vektor,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\boldsymbol{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ a forgatási mátrix,

$\boldsymbol{x_i} = [x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független, meghatározandó α, β és γ paraméterrel írható le

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma) \ . \tag{21}$$

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix levezetését Cardan-szögekkel a fizikai geodéziában Awange (2002) az alábbi módon adta meg: (Természetesen, eltérő forgatási sorrend vagy ellenkező irányú tengely körüli forgatások más-más eredményre vezetetnek. - Lásd pl. a fotogrammetriában Kraus (1996) által bevezetett forgatási mátrix.)

$$\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\beta\sin\gamma & -\sin\beta \\ \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix} . \tag{22}$$

A forgási szögek a forgási mátrix elemeiből az alábbi összefüggéssel határozhatók meg:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \ \ \beta = -\arcsin(r_{13}), \ \ \gamma = \arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \tag{23}$$

ahol r_{ij} érték az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix i-edik sorának és j-edik oszlopának eleme.

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot az $\boldsymbol{S}$ ferdén szimmetrikus mátrix bevezetésével a következő módon írhatjuk fel

$$\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})^{-1}(\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{S}) \ , \tag{24}$$

ahol I_3 a háromdimenziós egységmátrix, és az $\boldsymbol{S}$ mátrixot az a, b és c paraméterekkel az alábbi formában adjuk meg

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} . \tag{25}$$

Ha a (24) összefüggés alapján a (20) egyenletet az $(\boldsymbol{I}_3 - \boldsymbol{S})$ mátrixszal balról szorozzuk, akkor a következő alak adódik

$$\begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 & -c & b \\ c & 1 & -a \\ -b & a & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} . \tag{26}$$

6 A 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció méretarány-tényezőjének meghatározása

Közismert, hogy súlyponti koordináták bevezetésével mód nyílik az eltolási paraméterek eliminálására. Ezen a módon teljesen új levezetés adható a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldására. A méretarány-tényező meghatározása után a feladat lineárisra redukálható, és megadható a lineáris probléma kiegyenlítő számítási modellje. Ezen a módon tetszőlegesen sok egyenletből (közös pontból adódó) álló egyenletrendszer is megoldható, a normál mátrix speciális tulajdonságát kihasználva a forgatási paraméterek is meghatározhatók.

Az adott közös pontok alapján meghatározhatók a két rendszer súlypontjainak koordinátái

$$
\begin{array}{lll}
X_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, & Y_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}, & Z_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} Z_i}{n}, \\
x_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, & y_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}, & z_s = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n}.
\end{array}
\tag{27}
$$

A súlypontok kielégítik az alábbi fiktív egyenleteket

$$
\begin{array}{llllllllllll}
s_1 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_s & -\lambda cy_s & +\lambda bz_s & -X_s & -cY_s & +bZ_s & =0 \\
s_2 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda cx_s & +\lambda y_s & -\lambda az_s & +cX_s & -Y_s & -aZ_s & =0 \\
s_3 := & bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda bx_s & +\lambda ay_s & +\lambda z_s & -bX_s & +aY_s & -Z_s & =0
\end{array} .
\tag{28}
$$

A (26) formulát minden adott pontra felírva, a következő túlhatározott egyenletrendszerhez jutunk

$$
\begin{array}{lllllllllll}
f_1 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_1 & -\lambda cy_1 & +\lambda bz_1 & -X_1 & -cY_1 & +bZ_1 & =0 \\
f_2 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda cx_1 & +\lambda y_1 & -\lambda az_1 & +cX_1 & -Y_1 & -aZ_1 & =0 \\
f_3 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda bx_1 & +\lambda ay_1 & +\lambda z_1 & -bX_1 & +aY_1 & -Z_1 & =0 \\
f_4 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_2 & -\lambda cy_2 & +\lambda bz_2 & -X_2 & -cY_2 & +bZ_2 & =0 \\
f_5 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda cx_2 & +\lambda y_2 & -\lambda az_2 & +cX_2 & -Y_2 & -aZ_2 & =0 \\
f_6 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda bx_2 & +\lambda ay_2 & +\lambda z_2 & -bX_2 & +aY_2 & -Z_2 & =0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
f_{3n-2} := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda x_n & -\lambda cy_n & +\lambda bz_n & -X_n & -cY_n & +bZ_n & =0 \\
f_{3n-1} := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +\lambda cx_n & +\lambda y_n & -\lambda az_n & +cX_n & -Y_n & -aZ_n & =0 \\
f_{3n} := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -\lambda bx_n & +\lambda ay_n & +\lambda z_n & -bX_n & +aY_n & -Z_n & =0
\end{array} .
\tag{29}
$$

A fenti egyenletekből az s_1, s_2 és s_3 súlyponti egyenleteket rendre kivonva, eltávolíthatjuk az eltolási paramétereket és az egyenletekben egyúttal áttérünk a súlyponti koordinátákra

$$
\begin{array}{llllllllll}
f_{1s} := & f_1 - s_1 = & \lambda x_{1s} & -\lambda cy_{1s} & +\lambda bz_{1s} & -X_{1s} & -cY_{1s} & +bZ_{1s} & =0 \\
f_{2s} := & f_2 - s_2 = & \lambda cx_{1s} & +\lambda y_{1s} & -\lambda az_{1s} & +cX_{1s} & -Y_{1s} & -aZ_{1s} & =0 \\
f_{3s} := & f_3 - s_3 = & -\lambda bx_{1s} & +\lambda ay_{1s} & +\lambda z_{1s} & -bX_{1s} & +aY_{1s} & -Z_{1s} & =0 \\
f_{4s} := & f_4 - s_1 = & \lambda x_{2s} & -\lambda cy_{2s} & +\lambda bz_{2s} & -X_{2s} & -cY_{2s} & +bZ_{2s} & =0 \\
f_{5s} := & f_5 - s_2 = & \lambda cx_{2s} & +\lambda y_{2s} & -\lambda az_{2s} & +cX_{2s} & -Y_{2s} & -aZ_{2s} & =0 \\
f_{6s} := & f_6 - s_3 = & -\lambda bx_{2s} & +\lambda ay_{2s} & +\lambda z_{2s} & -bX_{2s} & +aY_{2s} & -Z_{2s} & =0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
f_{3n-2s} := & f_{3n-2} - s_1 = & \lambda x_{ns} & -\lambda cy_{ns} & +\lambda bz_{ns} & -X_{ns} & -cY_{ns} & +bZ_{ns} & =0 \\
f_{3n-1s} := & f_{3n-1} - s_2 = & \lambda cx_{ns} & +\lambda y_{ns} & -\lambda az_{ns} & +cX_{ns} & -Y_{ns} & -aZ_{ns} & =0 \\
f_{3ns} := & f_{3n} - s_3 = & -\lambda bx_{ns} & +\lambda ay_{1s} & +\lambda z_{ns} & -bX_{ns} & +aY_{ns} & -Z_{ns} & =0
\end{array} ,
\tag{30}
$$

ahol

$$
X_{is} = X_i - X_s, \; Y_{is} = Y_i - Y_s, \; Z_{is} = Z_i - Z_s \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),
$$

$$
x_{is} = x_i - x_s, \; y_{is} = y_i - y_s, \; z_{is} = z_i - z_s \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n).
$$

Az f_{3i-2s}, f_{3i-1s} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletekből a *b* paramétert, illetve az *a* paramétert kifejezve, kapjuk az alábbi formulákat

$$\begin{aligned} b &= \left(-\lambda x_{is} + \lambda c y_{is} + X_{is} + cY_{is}\right) / \left(Z_{is} + \lambda z_{is}\right) \\ a &= \left(\lambda c x_{is} + \lambda y_{is} + cX_{is} - Y\right)_{is} / \left(Z_{is} + \lambda z_{is}\right) \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (31)$$

Az f_{3is} $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ egyenletek a következő módon is felírhatók:

$$(\lambda y_{is} + Y_{is})a - (\lambda x_{is} + X_{is})b = Z_{is} - \lambda z_{is} \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (32)$$

A (31) összefüggéssel adott *a* és *b* paramétereket a (32) képletbe helyettesítve adódik az alábbi egyenlet

$$(\lambda y_{is} + Y_{is})\left[\lambda y_{is} - Y_{is} + c(\lambda x_{is} + X_{is})\right] + (\lambda x_{is} + X_{is})\left[\lambda x_{is} - X_{is} - c(\lambda y_{is} + Y_{is})\right] = Z_{is}^2 - \lambda^2 z_{is}^2$$

$$(i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (33)$$

Néhány egyszerűsítés és összevonás után azt tapasztaljuk, hogy a *c* ismeretlen paraméter kiesik, és a λ paraméterre egy ismeretlenes, másodfokú, túlhatározott egyenletrendszer áll elő egy

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2 \qquad (i = 1, 2, 3, ..., n). \quad (34)$$

(Megjegyezzük, hogy Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban a méretarány-tényezőre egy negyedfokú egyenletet vezettek le.) A fenti egyenletrendszer a következő alakban is felírható

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right). \quad (35)$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása során a λ méretarány-tényezőre - a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyök alapján - az alábbi, a Horn (1987) tanulmányában a kvaterniókkal levezetett összefüggés adódik

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right)}}. \quad (36)$$

Tehát esetünkben a méretarány-tényező a másodfokú egyenletekből egyértelműen meghatározható – a szakirodalomból ismert (Awange és Grafarend (2002)) negyedfokú polinom gyökeinek kényszerű szétválasztási eljárásával ellentétben.

7 A lineáris- és az eltolási paraméterek meghatározása

A λ méretarány-tényező ismeretében valamennyi pontra a (30) összefüggés felhasználásával az alábbi formában írhatjuk fel a közvetítő egyenleteket

$$\begin{bmatrix} X_{1s}-\lambda x_{1s} \\ Y_{1s}-\lambda y_{1s} \\ Z_{1s}-\lambda z_{1s} \\ X_{2s}-\lambda x_{2s} \\ Y_{2s}-\lambda y_{2s} \\ Z_{2s}-\lambda z_{2s} \\ . \\ . \\ . \\ X_{ns}-\lambda x_{ns} \\ Y_{ns}-\lambda y_{ns} \\ Z_{ns}-\lambda z_{ns} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \\ . \\ . \\ . \\ v_{xn} \\ v_{yn} \\ v_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda z_{1s}+Z_{1s} & -(\lambda y_{1s}+Y_{1s}) \\ -(\lambda z_{1s}+Z_{1s}) & 0 & \lambda x_{1s}+X_{1s} \\ \lambda y_{1s}+Y_{1s} & -(\lambda x_{1s}+X_{1s}) & 0 \\ 0 & \lambda z_{2s}+Z_{2s} & -(\lambda y_{2s}+Y_{2s}) \\ -(\lambda z_{2s}+Z_{2s}) & 0 & \lambda x_{2s}+X_{2s} \\ \lambda y_{2s}+Y_{2s} & -(\lambda x_{2s}+X_{2s}) & 0 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 0 & \lambda z_{ns}+Z_{ns} & -(\lambda y_{ns}+Y_{ns}) \\ -(\lambda z_{ns}+Z_{ns}) & 0 & \lambda x_{ns}+X_{ns} \\ \lambda y_{ns}+Y_{ns} & -(\lambda x_{ns}+X_{ns}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \tag{37}$$

A Gauss-Helmert modell alapján keressük az alábbi szélsőérték feladat megoldását

$$\sum_{i=1}^{n} v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2 \longrightarrow \min . \tag{38}$$

Néhány mátrixaritmetikai azonosság alkalmazásával a normálegyenlet együtthatómátrixára a következő alak vezethető le

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda y_{is}+Y_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda y_{is}+Y_{is}) & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is}+X_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda z_{is}+Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_{is}+Y_{is})(\lambda z_{is}+Z_{is}) \\ & & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is}+X_{is})^2+(\lambda y_{is}+Y_{is})^2\right] \end{bmatrix}. \tag{39}$$

A normálegyenlet együtthatómátrixa szimmetrikus. Hasonló módon adódik a normálegyenlet tisztatagjának vektora

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_{is}Z_{is}-z_{is}Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_{is}X_{is}-x_{is}Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{is}Y_{is}-y_{is}X_{is}) \end{bmatrix}. \tag{40}$$

A 3x3 méretű normál-egyenletrendszerből az *a, b* és *c* paraméterek számos eljárással meghatározhatók, mi a szinguláris érték felbontás (singular value decomposition, SVD) módszert javasoljuk. A még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az (20) összefüggés alapján az alábbi egyenletből lehet meghatározni

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \tag{41}$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adott közös pontok koordinátáiból származnak.
A 2D és 3D hasonlósági transzformációk matematikai modelljének alkalmazása során a pontossági, variancia és kovariancia paraméterek számítása a hagyományos módon történik.

8 Összegzés

A tanulmányban a 2D, síkbeli hasonlósági (Helmert) transzformáció modelljét vizsgáltuk. Bár a szakirodalomban többféle tárgyalás ismeretes, talán nem érdektelen a 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció levezetésével való egységes összevetés.

A 3D, 7 paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához az általunk megadott új matematikai levezetés a forgási mátrix alkalmas paraméterezésén alapul. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelési egyenletek sorba fejtése, linearizálása sem. Nincs megkötés a tengelykörüli forgatások nagyságrendjére vonatkozóan sem. A matematikai modell levezetése során a 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció problémáját egy másodfokú polinomegyenlet megoldására vezettük vissza, a szakirodalomban ismert negyedfokú egyenlettel szemben. A kidolgozott matematikai modell nem a szakirodalomból ismert kvaterniókat, nem a Gröbner-bázist, nem a Dixon- vagy Sylvester rezultánst alkalmazza, hanem elemi matematikai eszközöket használ fel.

Hivatkozások

Awange JL (2002): Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobbi Combinatorical Algorithms-Adjustment of Nonlinear GPS/LPS Observations. Dissertation, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart.

Awange JL, Grafarend EW (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation c_7 (3) problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.

Awange JL, Grafarend EW (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformatiotn. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.

Awange JL, Grafarend EW (2003b): Explicit Solution of the Overdetermined Three-Dimensional Resection Problem. Journal of Geodesy, 76, 605-616.

Awange JL, Grafarend EW (2003c): Polynomial Optimization of the 7-Parameter Datum Transformation Problem when Only Three Stations in Both Systems are Given. Zeitschrift für Vermessungswesen, 128, 266-270.

Awange JL, Grafarend EW, Fukuda Y (2004): Exact solution of the nonlinear 7-parameter datum transformation by Groebner basis. Bul. di Geodesia e Scienze Affini, 63,117-127.

Battha L, Závoti J (2009a): Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 44(4), 429-438.

Battha L, Závoti J (2009b): Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció. Geomatikai közlemények, 12, 19-26.

Grafarend EW, Kampmann G (1996): C_{10}(3): The ten parameter conformal group as a datum transformation in threedimensional Euclidean space. Zeitschrift für Vermessungswesen, 121, 68-77.

Grafarend EW, Krumm F (1995): Curvilinear geodetic datum transformations. Zeitschrift für Vermessungswesen, 120, 334-350.

Grafarend EW, Shan J (1997): Estimable quantities in projective networks. Zeitschrift für Vermessungswesen, 122, 323-333.

Horn BKP (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America, 4, 629-642.

Závoti J (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. Geomatikai közlemények, 2, 149.

Závoti J (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.

Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.

Závoti J, Fritsch D (2011): A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry. Acta Geod. Geoph. Hung., 46, 317-325.

Závoti J (2012): A simple proof of the solutions of the Helmert- and the overdetermined nonlinear 7-parameter datum transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 47(4), 453-464.

Függelék

Numerikus példa a 3D, 7 paraméteres hasonlósági transzformáció megoldására

A módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatásához az Awange és Grafarend (2002) tanulmányban közölt példát vesszük. A közvetlen összehasonlítás során a pontossági vizsgálatok arra utalnak, hogy a két módszer ugyanarra az eredményre vezet. Kiemeljük az általunk bemutatott eljárás egyszerűségét:

1. A (36) összefüggéssel meghatározható a λ méretarány-tényező.
2. A (39) és (40) formulákkal adott normálegyenlet-rendszerből meghatározhatók az *a*, *b* és *c* paraméterek.
3. A (41) képlet megadja az X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket.
4. Az α, β és γ forgatási szögek a (23) összefüggésekkel számolhatók az alábbi ***R*** forgatási mátrixból:

$$\boldsymbol{R} = \frac{1}{1+a^2+b^2+c^2}\begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix}. \qquad (42)$$

Amint látható, nem szükséges kezdőértéket megadni, nem kell az egyenleteket sorba fejteni, szükségtelen iterálni, és az eljárás tetszőleges szögelfordulások esetén is használható. Természetesen az eddig ismert numerikus eljárásokkal azonos eredményeket szolgáltat.

A két koordináta rendszerben – a *WGS84* és egy *lokális* rendszerben – adott pontok koordinátái az 1. táblázatban adottak. (A számításokat MATLAB-ban írt saját programmal végeztük).

1. táblázat. A cél- és tárgykoordináták (m)

No.	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i
1	4157870.237	664818.678	4775416.524	4157222.543	664789.307	4774952.099
2	4149691.049	688865.785	4779096.588	4149043.336	688836.443	4778632.188
3	4173451.354	690369.375	4758594.075	4172803.511	690340.07	4758129.701
4	4177796.064	643026.700	4761228.899	4177148.376	642997.635	4760764.800
5	4137659.549	671837.337	4791592.531	4137012.190	671808.029	4791128.215
6	4146940.228	666982.151	4784324.099	4146292.729	666952.887	4783859.856
7	4139407.506	702700.227	4786016.645	4138759.902	702670.738	4785552.196

A tanulmányban ismertetett algoritmussal a nemlineáris feladat megoldására az alábbi eredményeket kapjuk:

2. táblázat: A numerikus számítások eredménye

Ismeretlen	Nemlineáris módszer
λ	1.0000055825
a	0.0000024204
b	-0.0000021664
c	-0.0000024073
X_0	641.8804
Y_0	68.6553
Z_0	416.3981

A nemlineáris módszer a Cardan szögekre a következő értékeket adja:

$$\alpha = -0.9984976709[''], \qquad \beta = 0.8936957645[''], \qquad \gamma = 0.9930877298[''].$$

GEODÉZIAI DÁTUMTRANSZFORMÁCIÓ KVATERNIÓVAL

Papp Erik [*]

Geodetic datum transformation by quaternion – *Datum transformation has been widely used in geodesy and a number of different algorithms have been known and applied. However, many of them are based on the assumption of small rotations, and linearization is needed in order to derive the datum transformation parameters. In this paper, we have used the concept of quaternions to represent the rotation, the translation and scale parameters in the Bursa-Wolf geodetic transformation model. The main advantage of this algorithm is that it can be applied in case of arbitrary size rotation, we do not need linearization and iteration for the computation of the datum transformation parameters for a non-linear transformation model.*

Keywords: Datum transformation, quaternions, non-linear model

A dátumtranszformáció a geodéziában alkalmazott olyan számítási módszer, melynek számos különböző algoritmuson alapuló változata ismert. A megoldások többsége kis szögelfordulásokat feltételez és linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához. A dolgozat kvaternió alapú dátum transzformációs analitikus megoldást ismertet. Bemutatja a kvaternió számításához szükséges összefüggéseket, a kvaterniók alkalmazását forgatás, az eltolás és méretarány paraméterek meghatározását a Bursa-Wolf dátum transzformációs modellben. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében is alkalmazható, nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához.

Kulcsszavak: Dátumtranszformáció, kvaternió nem lineáris modell

1 Bevezetés

A GPS-szel történő szabatos helymeghatározáskor a koordináták WGS84 rendszerben adottak, amelyeket gyakran át kell transzformálni egy helyi geodéziai koordináta rendszerbe. Kitűzéskor helyi rendszerbeli koordinátákat transzformálunk WGS84 rendszerbe. Mozgó platform térbeli helyzetének meghatározása három vagy több GPS antenna koordinátáiból történik WGS84 rendszerben vagy a platform koordináta rendszerében. Dátumtranszformáció esetén hét transzformációs paramétert kell kiszámítanunk, nevezetesen három eltolást, három elforgatást és a méretarány paramétert. A méretarány csak a koordináták közötti transzformációval van kapcsolatban és nem a koordináta rendszerek közötti transzformációval, lásd Vanicek et al. (2002) ezért ők egy alternatív megoldást javasoltak, méretarány paraméter nélkül, amelyet mi is alkalmazunk az itt bemutatott kvaternió algebra felhasználásán alapuló dátumtranszformációhoz. A forgatási paramétereket általában három forgásszöggel szokás megadni. A forgatási mátrixban kilenc ismeretlen szerepel, amelyekre hat ortogonalitási és normalizálási feltétel teljesül.

Számos külföldi és hazai publikáció foglakozik a geodéziai dátumtranszformációval, mint például Welsch (1993), Grafarend et al. (1995), Vanicek and Steeves (1996), Yung (1999), Papp at al. (1997, 2002, 2005) és linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek meghatározásához azért, hogy egyszerűsítsük a modellt. Grafarend és Awange (2003) Gauss–Jacobi kombinatorikai és procrustes algoritmust javasolt 3D dátumtranszformációs feladat megoldásához, ez az algoritmus linearizáció mentes.

Hamilton (1853) felfedezte a kvaterniókat egy 3D vektor ábrázolására. A kvaternió nagyon alkalmas a forgatás egységsugarú gömbön történő leírására. Ezért széles körben alkalmazzák mozgó objektum helyzetének leírására, mint például űrhajó, repülőgép vagy gépjármű, továbbá a robotok irányításában, az animációban, fizikában és mechanikában.

Ebben a dolgozatban megvizsgáljuk a dátumtranszformáció megoldását a kvaternióalgebra jelölésével illetve alkalmazásával, és bemutatjuk a kvaternió alapú dátumtranszformációs algoritmust.

[*] *SzIE Ybl Miklós Építéstudományi Kar, 1146 Budapest, Thököly út.74.*
E-mail: papp.erik@ybl.szie.hu

2 A kvaternióalgebráról röviden

A Q kvaternió komplex számként a következőképpen definiálható

$$Q = q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} = q_0 + \boldsymbol{q} \,, \tag{1}$$

ahol $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1,\ \boldsymbol{ij} = -\boldsymbol{ji} = \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{jk} = -\boldsymbol{kj} = \boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ki} = -\boldsymbol{ik} = \boldsymbol{j}$,
és a képzetes rész $(\boldsymbol{q} = q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})$ egy 3D vektort jelöl.

A megfelelő konjugált kvaternió az alábbiak szerint jelölhető

$$Q^* = q_0 - q_1\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_3\boldsymbol{k} = q_0 - \boldsymbol{q} \,. \tag{2}$$

A $\boldsymbol{Q}$ kvaternió oszlopvektor formában is kifejezhető az (1, ***i, j, k***) egységvektorok felhasználásával

$$\boldsymbol{Q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^T = (q_0, \boldsymbol{q}^T)^T \,, \tag{3}$$

ahol $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$ egy 3D vektort, és T a transzponálást jelöli. Egy 3D $\boldsymbol{p}$ vektor mindig megadható kvaterniókkal a következők szerint:

$$\boldsymbol{p} = 0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j} + p_3\boldsymbol{k} = 0 + \boldsymbol{p} \,. \tag{4}$$

A kvaternió hossza:

$$\|Q\| = \sqrt{q_0^{\ 2} + q_1^{\ 2} + q_2^{\ 2} + q_3^{\ 2}} \,. \tag{5}$$

Ha $\|Q\| = 1$, akkor a Q kvaterniót egység kvaterniónak nevezzük.

A Q kvaternió definíciójának megfelelően könnyen igazolhatók az alábbi tulajdonságok:

$$\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q \,, \tag{6}$$

$$PQ = p_0 q_0 + p_0\boldsymbol{q} + q_0\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} + \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} \,, \tag{7}$$

$$C(P + Q) = CP + CQ \,, \tag{8}$$

$$CPQ = (CP)Q = C(PQ), \tag{9}$$

$$(PQ)^* = Q^* P^* \,, \tag{10}$$

$$QQ^* = \|Q\|, \tag{11}$$

$$Q^{-1} = \frac{Q^*}{\|Q\|} \,, \tag{12}$$

ahol λ egy valós szám, C , P és Q kvaterniók, a Q^{-1} a Q kvaternió inverzét jelöli, a $\cdot$ és $\times$ a skaláris és a vektoriális szorzat jele. Vektorok skaláris és vektoriális szorzata a következőképpen definiálható

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{q} \,. \tag{13}$$

A kvaternió szorzat $C = PQ$ (7) egyenlet oszlopvektor és mátrix szorzataként kifejezhető

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_0 \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}^T \\ \boldsymbol{p} & p_0\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}, \tag{14}$$

ahol $$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})=\begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bevezetve a következő mátrix jelöléseket:

$$\boldsymbol{P}^{+}=\begin{bmatrix} p_0 & -\boldsymbol{p}^T \\ \boldsymbol{p} & p_0\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}^{-}=\begin{bmatrix} q_0 & -\boldsymbol{q}^T \\ \boldsymbol{q} & q_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

ahol a + és – felsőindex a $\boldsymbol{C}(.)$ mátrix előjelét jelöli, és behelyettesítve a (15) egyenletet a (14) egyenletbe, eredményül a szorzat kvaternió vektor és mátrix formáját kapjuk

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{+}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{-}\boldsymbol{P}\ . \tag{16}$$

Egyszerűen bizonyítható, hogy a konjugált kvaternió a következő tulajdonságokkal rendelkezik

$$\left(\boldsymbol{P}^{*}\right)^{+}=\left(\boldsymbol{P}^{+}\right)^{T},\quad \left(\boldsymbol{P}^{*}\right)^{-}=\left(\boldsymbol{P}^{-}\right)^{T}\ . \tag{17}$$

Jól ismert módszer egy 3D $\boldsymbol{p}$ vektor $\boldsymbol{s}$ vektorba történő forgatására kvaternióval a következő

$$S=QPQ^{*}\ , \tag{18}$$

ahol a $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{s}$ vektorokból képzett kvaterniók a P és S, Q pedig egység kvaternió, amely az alábbiak szerint definiálható

$$Q=\cos\frac{\theta}{2}+\boldsymbol{e}_n\sin\frac{\theta}{2}\ , \tag{19}$$

ahol $\boldsymbol{e}_n=e_i\boldsymbol{i}+e_2\boldsymbol{j}+e_3\boldsymbol{k}$, és $e_1^2+e_2^2+e_3^2=1$, amely egy 3D egység vektor, θ a forgásszög az $\boldsymbol{e}_n$ egységvektor körül, és az $\boldsymbol{e}_n\cdot\boldsymbol{e}_n=-1$.

Összehasonlítva a (19) egyenletet az (1) egyenlettel, nyilvánvaló, hogy

$$q_0=\cos\frac{\theta}{2},\quad q_1=e_1\sin\frac{\theta}{2},\quad q_2=e_2\sin\frac{\theta}{2},\quad q_3=e_3\sin\frac{\theta}{2}\ .$$

A (16) és (17) egyenletek alapján a (18) egyenlet kifejezhető vektor-mátrix formában

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^{+}\boldsymbol{P}^{+}\boldsymbol{Q}^{*}\ . \tag{20}$$

3 Dátumtranszformációs modell kvaternióval

Legtöbb dátumtranszformációs modell hétparaméteres, amelyek két különböző geodéziai dátumhoz tartozó közös pontok felhasználásával kerülnek kiszámításra. A jól ismert Bursa–Wolf hasonlósági transzformációs modell, amelyet klasszikus modellnek, hétparaméteres modellnek, vagy térbeli Helmert modellnek is neveznek, a következők szerint írható fel:

$$\boldsymbol{s}_i=\boldsymbol{t}+k\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_i\ , \tag{21}$$

ahol $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ (i=1,…,n) a két különböző rendszerben adott közös pontok 3D koordinátái, $\boldsymbol{t}=(t_X t_Y t_Z)^T$ jelöli a három eltolás paramétert, k a méretarány tényező (ebben a hétparaméteres modellben) és a 3×3 -as $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix három forgatási paramétert tartalmaz. Nyilvánvaló, hogy hét paraméter meghatározásához a közös pontok számának $\boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p}_i$ (i=1,…,n), nagyobbnak vagy egyenlőnek kell lennie, mint három.

Határozzuk meg a súlypontra vonatkozó $\Delta\boldsymbol{s}_i$, $\Delta\boldsymbol{p}_i$ koordinátákat

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{s}_i - \bar{\boldsymbol{s}} \quad , \quad \Delta\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i - \bar{\boldsymbol{p}} \ , \tag{22}$$

ahol $\bar{\boldsymbol{s}} = {}^1\!/_{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{s}_i$, $\boldsymbol{p} = {}^1\!/_{\mathrm{n}} \sum_{i=1}^{n} p_i$. Behelyettesítve a (22) egyenletet a (21) egyenletbe a következőt kapjuk

$$\Delta\boldsymbol{s}_i = \Delta\boldsymbol{t} + k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \ , \tag{23}$$

és

$$\Delta\boldsymbol{t} = \boldsymbol{t} + k\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} - \bar{\boldsymbol{s}} \ . \tag{24}$$

A (23) egyenlet általában túlhatározott. Jelölje a maradékvektort $\boldsymbol{v}_i$

$$\boldsymbol{v}_i = \Delta\boldsymbol{s}_i - \Delta\boldsymbol{t} - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \ . \tag{25}$$

Ezek után a transzformációs paraméterek a következő optimalizálási feladat megoldásával határozhatók meg

$$\min_{k,\Delta,\Delta t} \sum v_i^T v_i = \min_{k,\Delta,\Delta t} \left[n\Delta\Delta^T \Delta t + \sum_{i=1}^{n} \left(\Delta s_i - kR\Delta R_i \right)^T \left(\Delta s_i - kR\Delta R_i \right) \right] . \tag{26}$$

Mivel a (26) egyenlet jobb oldalán lévő $\Delta\boldsymbol{t}$ első tag független a másodiktól, ezért $\Delta\boldsymbol{t} = 0$, vagy ami ezzel egyenlő

$$\boldsymbol{t} = \bar{\boldsymbol{s}} - k\boldsymbol{R}\bar{\boldsymbol{p}} \ . \tag{27}$$

Ebből következően csak egy rész-optimalizálási feladatot kell megoldanunk, nevezetesen

$$\min_{k,\Delta,\Delta t} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \right)^T \left(\Delta\boldsymbol{s}_i - k\boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \right) \right] . \tag{28}$$

Mivel $\boldsymbol{R}$ ortogonális mátrix, a (28) egyenlet a következő alakban is felírható

$$\min_{k,\Delta,\Delta t} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i^T \Delta s_i - 2k \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i^T R\Delta\Delta_i + k^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i^T \Delta p_i \right] . \tag{29}$$

A (29) egyenlet k szerinti parciális differenciálhányadosát véve meghatározhatjuk a méretarány paramétert, amelyre az alábbi összefüggést kapjuk

$$k = \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{s}_i^T \boldsymbol{R}\Delta\boldsymbol{p}_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{p}_i^T \ \Delta\boldsymbol{p}_i \ . \tag{30}$$

Behelyettesítve a (30) egyenletet a (29) egyenletbe a következő problémához jutunk

$$\min_{R} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i^T \Delta s_i \text{-} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i^T R\Delta\Delta_i \right)^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \Delta p_i^T \Delta p_i \right] . \tag{31}$$

Az egyetlen paraméter, amelyre meg kell oldanunk a (31) egyenletet az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix, továbbá a (31) egyenletben szereplő minimumkeresési feladat így egyenértékű a (31) egyenlet második tagja maximumának a meghatározásával, nevezetesen

$$\max_{R} \left[\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i^T R\Delta\Delta_i \right] . \tag{32}$$

Bevezetve az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrixot képviselő $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{S}_i$ és $\boldsymbol{P}_i$ vektor-kvaterniókat, a (32) egyenlet megadható kvaterniókkal

$$\max_{Q}\left[\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i^T\boldsymbol{Q}^+\boldsymbol{P}_i^+\boldsymbol{Q}^*\right], \tag{33}$$

ahol $\boldsymbol{S}_i=\left(0,\Delta\boldsymbol{s}_i^T\right)^T,\ \boldsymbol{P}_i=\left(0,\Delta\boldsymbol{p}_i^T\right)^T$ és $\boldsymbol{Q}=\left(q_0,\boldsymbol{q}^T\right)^T$.

A (33) egyenletben szereplő $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{S}_i^T\boldsymbol{Q}^+\boldsymbol{P}_i^+\boldsymbol{Q}^*$ kifejezés átrendezhető a (17) egyenlet alapján (Shan 2006, 235. old.). A részletes levezetés nélkül a következő, számításra alkalmas összefüggést kapjuk

$$\sum_{i=1}^{n}S_i^TQ^+P_i^+Q^*=\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}, \tag{34}$$

ahol $\boldsymbol{N}$ egy 4×4 -es mátrix

$$\underset{4x4}{\boldsymbol{N}}==\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}n_{11} & n_{12}\\ n_{21} & n_{22}\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{s}_i^T\boldsymbol{\Delta}p_i & \Delta\boldsymbol{s}_i^T\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i)\\ -\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\Delta\boldsymbol{p}_i & \Delta\boldsymbol{s}_i\Delta\boldsymbol{p}_i^T+\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{s}_i)\boldsymbol{C}(\Delta\boldsymbol{p}_i)\end{bmatrix}. \tag{35}$$

Következésképpen a (33) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat az alábbiak szerint írható

$$\max_{Q}\left[\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}\right]. \tag{36}$$

Más szavakkal, a (32) egyenletben szereplő maximumkeresési feladat egyenértékű a $\boldsymbol{Q}$ kvaternió meghatározásával, a (36) egyenlet maximumkeresési feladatával.

Mivel $\boldsymbol{N}$ egy valódi szimmetrikus mátrix, amely négy valós λ_i sajátértéket, és négy ezekhez tartozó megfelelő valós $\boldsymbol{e}_i$ sajátvektort tartalmaz

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{e}_i=\lambda_i\boldsymbol{e}_i,\ \left(i=1,\ldots,n\right), \tag{37}$$

ezért a (36) egyenletben szereplő maximum meghatározási feladat azonos az $\boldsymbol{N}$ mátrix sajátvektorához tartozó maximális sajátértékének a meghatározásával

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{e}_i,\quad \text{és}\quad \lambda_j=\max_{i}\left\{\lambda_i\right\}. \tag{38}$$

A (20) egyenlet a következőképpen alakítható át

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{Q}^+\boldsymbol{P}^+\boldsymbol{Q}^*=\boldsymbol{Q}^+\left(\boldsymbol{Q}^*\right)^-\boldsymbol{P}=\boldsymbol{Q}^+\left(\boldsymbol{Q}^-\right)^T\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \left(q_0^2-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{I}+2\left(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T+q_0\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})\right)\end{bmatrix}\boldsymbol{P}. \tag{39}$$

Az $\boldsymbol{R}$ 3×3-as forgatási mátrix

$$\boldsymbol{R}=\left(q_0^2-\boldsymbol{q}^T\boldsymbol{q}\right)\boldsymbol{I}+2\left(\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T+q_0\boldsymbol{C}(\boldsymbol{q})\right), \tag{40}$$

ahol a $\boldsymbol{q}$ egy 3D vektort jelöl, $\boldsymbol{I}$ egy 3×3-as egységmátrix, ld. a (14) egyenletet.

Ezek után a forgásszögek, az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix elemeiből számíthatók

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix},\quad \alpha_X=arc\,tg\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right),\quad \beta_Y=arc\,sin\left(-r_{13}\right),\quad \gamma_Z=arc\,tg\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \tag{41}$$

ahol α, β és γ az $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$ és $\boldsymbol{Z}$ tengelyek körüli forgásszögeket jelölik.

A kvaternióalgebra alkalmazásán alapuló dátumtranszformációs algoritmus végezetül az alábbiak szerint foglalható össze:

1. A súlypontra vonatkozó $\Delta\boldsymbol{s}_i, \Delta\boldsymbol{p}_i$ koordináták számítása: (22) egyenlet
2. Az ***N*** mátrix számítása: (35) egyenlet
3. Az ***N*** mátrix maximális sajátértékeinek számítása; a hozzátartozó sajátvektorához lesz a keresett ***Q*** kvaternió
4. Az ***R*** forgatási mátrix számítása: (40) egyenlet
5. *k* méretarány paraméter számítása: (30) egyenlet
6. ***t*** eltolás paraméter számítása: (27) egyenlet

4 TH program

A **T**érbeli **H**elmert transzformáció megoldására az alábbiakban ismertetett *J nyelvű* programot készítettük (2. melléklet). A program fájlból történő betöltése után először transzformációs paramétereket határozunk meg a p’’ bevitele után megjelenő listából.

4.1 Ismert transzformációs paraméterek

Ismert transzformációs paraméterek esetén a program az E_X, E_Y, E_Z eltolás értékeket, a ***Q*** kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeinek értékeit és a *k* méretarányt kéri.

4.2 Ismeretlen transzformációs paraméterek

Ismeretlen transzformációs paraméterek esetén, a mindkét rendszerben adott, forrás- és célkoordinátákat tartalmazó FKJ és CKJ közös pontok koordinátáit tartalmazó fájlok betöltése után a program kiszámítja a transzformációs paramétereket: az E_X, E_Y, E_Z eltolás értékeket, az α, β, γ elforgatásokat fok-perc-másodpercben, a *k* méretarányt, a ***Q*** kvaternió q_0, q_1, q_2, q_3 elemeit.

Ezek után a maradék ellentmondások számítása következik. A program a közös pontok alapján meghatározott transzformációs paraméterek felhasználásával, a forrás-rendszerbeli közös pontokat a célrendszerbe transzformálja. A célrendszerben adott és transzformált koordináták különbségeként számítja az e_x, e_y, e_z maradék ellentmondások három összetevőjét, továbbá ezek felhasználásával térbeli Pitagorasz-tétellel az *e* maradék ellentmondás vektort, amely a transzformált pont és az eredeti ponthely térbeli távolsága. A két rendszer illeszkedésének jellemzésére a program kiszámítja az m_0 súlyegység középhibáját az

$$m_0 = \sqrt{\frac{\Sigma\left(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2\right)}{3n - 7}} \tag{42}$$

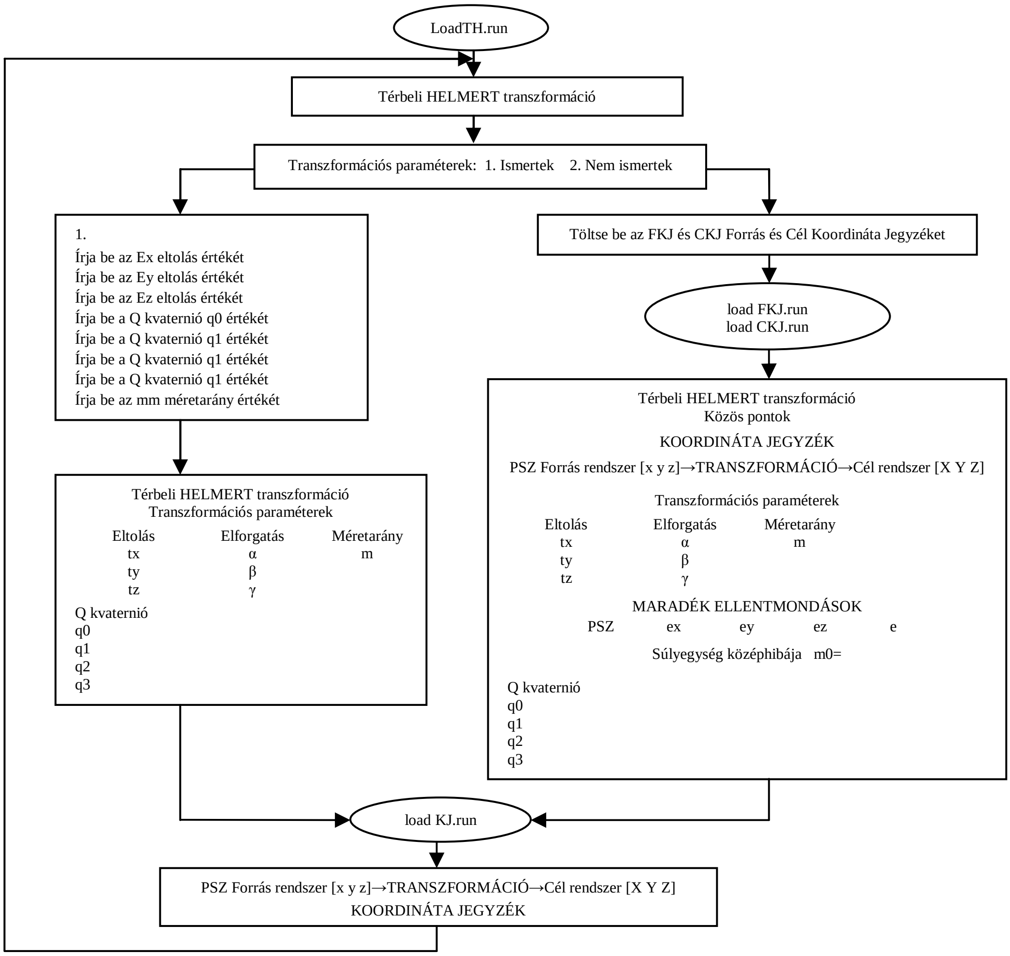
összefüggés alapján, ahol *n* a mindkét rendszerben adott közös pontok számát jelöli.

4.3 Térbeli Helmert transzformáció

Az átszámítandó pontokat tartalmazó KJ koordinátajegyzék-fájl beolvasása után a program a forrás rendszerben adott pontok [*x y z*] koordinátáit az [*X Y Z*] célrendszerbe transzformálja. A transzformáció lépései az 1. ábrán látható folyamatábrán olvashatóak.

Abból a célból, hogy bemutassuk a (36), (40), (30) és (27) összefüggések érvényességét, megismételtük Grafarend és Avange (2003), valamint Shan és társai (2006) számításait. Az eredmények teljes egyezést mutatnak úgy a transzformációs paraméterek, mind pedig a transzformált koordináták és maradék ellentmondások tekintetében (1. Melléklet).

1. ábra. Térbeli Helmert transzformáció folyamatábrája



Elvégeztük az OGPSH 24, 43 és 1151 pontjának felhasználásával a transzformációs paraméterek meghatározását, a *bemérés* (WGS84 XYZ →IUGG67 XYZ) és *kitűzés* (IUGG67 XYZ → WGS84 XYZ) feladatok esetén (3. melléklet).

5 Összefoglalás

A dátumtranszformáció széles körben alkalmazott a geodéziában és a kartográfiában. Számos algoritmus használata javasolt. Az algoritmusok többsége azonban kicsiny forgásszögek feltételezésén alapszik, továbbá linearizálás szükséges a transzformációs paraméterek széleskörű gyakorlati felhasználás céljára történő meghatározásához.

Ez a dolgozat kvaternióalgebra alkalmazásán alapuló dátumtranszformációs analitikus megoldást mutatott be a paraméterek meghatározására. Ennek az algoritmusnak a legnagyobb előnye, hogy nincs szükség linearizálásra és iterációra a transzformációs paraméterek számításához egy nem lineáris transzformációs modellben. A módszer tetszőleges nagyságú szögelfordulások esetében alkalmazható. Az algoritmus alkalmazhatóságát számpéldán mutattuk be.

Azonban meg kell jegyezzük, hogy analitikus megoldáskor bizonyos egyszerűsítéseket kellett alkalmazzunk a pontok hibáinak függetlenségére vonatkozóan. Ezek nélkül nem lehetséges az analitikus megoldás. Ez a fő hátrány ezeknél az algoritmusoknál. Mindazonáltal a módszer elfogadható eredményt adott.

Hivatkozások

Grafarend EW, Awange LJ (2003): Nonlinear analysis of the threedimensional datum transformation [conformal group C7(3)]. Journal of Geodesy, 77, 66–76.

HamiltonWR (1853): Lectures on quaternions: containing a systematic statement of a Newmathematical method. Hodges and Smith, Dublin.

Papp E, Szűcs L, Varga J (1997): GPS network transformation into different datums and projection systems. Reports on Geodes, 4(27), 265-280.

Papp E, Szűcs L, Varga J (2002): Hungarian GPS network transformation into different datums and projection systems. Per. Pol. Civ. Eng. 46(2), 199-204.

Papp E, Szűcs L (2005): Földi és műholdas hálózatok transzformációja. Geomatikai Közlemények, 8, 85-92.

Vaniček P, Steeves RR (1996): Transformation of coordinates between two horizontal geodetic datums. Journal of Geodesy, 70, 740-745.

Vaniček P, Novák P, Craymer MR, Pagiatakis S (2002): On the correct determination of transformation parameters of a horizontal geodetic datum. Geomatica 56(4), 329-340.

Welsch WM(1993): A general 7-parameter transformation for the combination, comparison and accuracy control of the terrestrial and satellite network observations. Manuscripta geodaetica,17, 210-214.

Yang Y (1999): Robust estimation of geodetic datum transformation. Journal of Geodesy, 73, 268-274.

Shen YZ,·Chen Y, Zheng DH (2006): A quaternion-based geodetic datum transformation algorithm. Journal of Geodesy, 80, 233–239.

1. Melléklet

```
=======================================================================================
                                    Térbeli HELMERT transzformáció
                                             Közös pontok
   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=======================================================================================

                                          KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude        4157222.543  664789.307 4774952.099 4157870.237  664818.678 4775416.524
Bouch Zeil      4149043.336  688836.443 4778632.188 4149691.049  688865.785 4779096.588
Hohenneuffen    4172803.511  690340.078 4758129.701 4173451.354  690369.375 4758594.075
Kuehlenberg     4177148.376  642997.635 4760764.800 4177796.064  643026.700 4761228.899
Ex Mergelaec    4137012.190  671808.029 4791128.215 4137659.549  671837.337 4791592.531
Ex Hof Asperg   4146292.729  666952.887 4783859.856 4146940.228  666982.151 4784324.099
Ex Kaisersbach  4138759.902  702670.738 4785552.196 4139407.506  702700.227 4786016.645
                                         n = 7 közös pont
=======================================================================================

                                 Transzformációs paraméterek
                    Eltolás            Elforgatás            Méretarány
            641.88042527250946   0   0  _0.998497670887   1.0000055825198522
             68.65534545248374   0   0   0.893695764524
            416.39818477910012   0   0   0.993087729872

=======================================================================================

                                       MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]
   PSZ                       ex               ey               ez               e
Solitude                     94              135              140             216
Bouch Zeil                   59              _50               14              78
Hohenneuffen                _40              _88               _8              97
Kuehlenberg                  20              _22              _87              92
Ex Mergelaec                _92               14               _5              93
Ex Hof Asperg               _12                7              _55              56
Ex Kaisersbach              _29                4                2              30

=======================================================================================

                             Súlyegység középhibája: m0 = 0.077233660859330686

=======================================================================================

Q kvaternió
q0 =  _0.99999999999183
q1 =  _0.00000242043187
q2 =   0.00000216637384
q3 =   0.00000240731783

=======================================================================================

=======================================================================================

   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]

=======================================================================================
```

```
                                           KOORDINÁTA JEGYZÉK
Solitude        4157222.543  664789.307 4774952.099 4157870.143  664818.543 4775416.384
Bouch Zeil      4149043.336  688836.443 4778632.188 4149690.990  688865.835 4779096.574
Hohenneuffen    4172803.511  690340.078 4758129.701 4173451.394  690369.463 4758594.083
Kuehlenberg     4177148.376  642997.635 4760764.800 4177796.044  643026.722 4761228.986
Ex Mergelaec    4137012.190  671808.029 4791128.215 4137659.641  671837.323 4791592.536
Ex Hof Asperg   4146292.729  666952.887 4783859.856 4146940.240  666982.144 4784324.154
Ex Kaisersbach  4138759.902  702670.738 4785552.196 4139407.535  702700.223 4786016.643

=======================================================================================
```

2. Melléklet: TH program lista

```
NB.================================================================================
NB.        Térbeli HELMERT transzformáció kvaternióval J nyelven (J602a)
NB.                  Bursa-Wolf hasonlósági transzformáció
NB.                     Fájlból történő átszámítás
NB.                Ismert transzformációs paraméterek: p’’
NB.       Transzformációs paraméterek közös pontok alapján: FKJ tp CKJ
NB.                   Új pontok transzformálása : TH KJ
NB.================================================================================

   pps=:9!:11     NB. set print precision
   pps 20

   vonal=: 0 : 0

=======================================================================================
)

   mp=: +/ . *    NB. Matrix product

   dmstor=:3 :'1r180p1*1r60#.|."1:y'
   rtodms=:3 :',4j0 4j0 17j12":,"2 s*0 60 60#:3600*1r180p1%~|y[s=.*y'

   display =: (1!:2) & 2
   p=: 3 : 0
display'                                    Térbeli HELMERT transzformáció'
display''
display'                                     Transzformációs paraméterek'
display''
display'                                            1 Ismertek'
display'                                            2 Nem ismertek'
display''
display'Transzformációs paraméterek: 1 Ismertek 2 Nem ismertek'
W=:".w[w=: (1!:1)1
''
if. W=1 do.
display'Írja be az Ex eltolás értékét:'
tx=: (1!:1)1
display'Írja be az Ey eltolás értékét:'
ty=: (1!:1)1
display'Írja be az Ez eltolás értékét:'
tz=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q0 értékét:'
q0=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q1 értékét:'
q1=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q2 értékét:'
q2=: (1!:1)1
display'Írja be a Q kvaternió q3 értékét:'
q3=: (1!:1)1
display'Írja be az m méretarány értékét:'
k=: (1!:1)1
k=:".k[t=:3 1$tx,ty,tz[tx=:".tx[ty=:".ty[tz=:".tz[q=:3 1$q1,q2,q3[q0=:".q0[q1=:".q1[q2=:".q2[q3=:".q3
I=:3 3$1 0 0 0[Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0    NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q) +(3 3$ , q0) * Cq[R1=: I * 3 3$ ,(q0^2) -(|:q) mp q
Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez                                                              NB. forgatások
c16=:'                                   Térbeli HELMERT transzformáció'
c22=:'                         Transzformációs paraméterek'
c23=:'                  Eltolás            Elforgatás            Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,k[e=:'',(":U )[f=:'',(":U )[U=:''
c24=:,.(30j14":t),.(":E),.c6
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 = ',18j14":q3)
vonal,c16,c22,c23,c24,vonal,UQ,vonal
elseif. W=2 do.'Töltse be az FKJ és CKJ Forrás és Cél Koordináta Jegyzéket',vonal end.
)

   tp=: 4 : 0      NB. Transzformációs paraméterek számítása közös pontok alapján
BS=:(".BKJ)-"1 RB=:(+/%#)".BKJ=:>,15}."1&.>,.CKJ[AS=:(".AKJ)-"1 RA=:(+/%#)".AKJ=:>,15}."1&.>,.FKJ
i=:0[n=:0{$AKJ[N=:0
while. i<n do.
   Cds=:3 3$0,(-zs),ys,zs,0,(-xs),(-ys),xs,0[xs=:0{ds[ys=:1{ds[zs=:2{ds[ds=:,.i{AS
   Cdp=:3 3$0,(-zp),yp,zp,0,(-xp),(-yp),xp,0[xp=:0{dp[yp=:1{dp[zp=:2{dp[dp=:,.i{BS
   n11=:(|:ds) mp dp[n12=:(|:-ds) mp Cdp
   n21=:-Cds mp dp[n22=:(ds mp |:dp) + (Cds mp Cdp)
```

```
   N=:N+(n11,.n12),(n21,.n22)                            NB. N mátrix
   i=:i+1
end.
maxse=:>. / se[se=:,se[se=:>1{sesv[sesv=:,.geev N
Q=:|:maxsei{"1 sv[sv=:>0{sesv[maxsei=:se i. maxse       NB. Q kvaternió
q=:3 1$q1,q2,q3[q3=:3{Q[q2=:2{Q[q1=:1{Q[q0=:0{Q
I=:3 3$1 0 0 0[Cq=:3 3$0,(-q3),q2,q3,0,(-q1),(-q2),q1,0 NB. R forgatási mátrix
R=:R1+R2[R2=:2*(q mp |:q) +(3 3$ , q0) * Cq[R1=: I * 3 3$ ,(q0^2) -(|:q) mp q
j=:0[n=:0{$AKJ[A=:0[B=:0
while. j<n do.
   dp=:,.j{BS[ds=:,.j{AS
   B=:B+(|:dp) mp dp[A=:A+(|:ds) mp R mp dp
   j=:j+1
end.
k=:A%B                                                   NB. k méretarány
t=:3 1$1{"1[e=: RA- (3 3$,k)*R mp RB                     NB. t eltolás
Ez=: rtodms _3 o. 1{r % 0{r[Ey=: rtodms _1 o. -2{r[Ex=: rtodms _3 o. 5{r % 8{r[r=:,R
E=:Ex,Ey,:Ez                                                                NB. forgatások
m=:3 3$,k,0,0,0,k,0,0,0,k[i=:0[n=:0{$AKJ[TKJ=:0 3$0[P=:>,.15{. "1&.>,.FKJ
while. i<n do.
   TKJ =:TKJ,RA + m mp R mp bs[bs=:i{ BS
   i=:i+1
end.
Tav=:+/&.*:/                                               NB. térbeli Pitagórasz
T=:1e3*Tav"1 me[me=:(".AKJ) - TKJ                          NB. e maradék ellentmondások
m0=:%:(+/*:T%1e3) % (3*n)-7                                NB. mo súlyegység középhibája
c16=:'                                     Térbeli HELMERT transzformáció'
c17=:'                                              Közös pontok'
c18=:'   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]'
c20=:'                                         KOORDINÁTA JEGYZÉK'
PO=:P[KJA=:12j3":(".AKJ)[KJB=:12j3":(".BKJ)[P=:>,15{."1&.>,FKJ
c19=:(":PO),.(":KJB),.(":KJA)
c21=:'                                         n = ',(":n),' közös pont'
c22=:'                                 Transzformációs paraméterek'
c23=:'                    Eltolás            Elforgatás            Méretarány'
c6=:d,e,:f[d=:21j16":,k[e=:'',(":U )[f=:'',(":U )[U=:''
c24=:,.(30j14":t),.(":E),.c6
c27=:'                                       MARADÉK ELLENTMONDÁSOK [mm]'
c28=:'   PSZ                      ex              ey              ez               e'
c29=:(":PO),.(16j0":1e3*me),.(16j0":,.T)
c25=:'                            Súlyegység középhibája: m0 = ',":m0
UQ=:('Q kvaternió'),('q0 = ',18j14":q0),('q1 = ',18j14":q1),('q2 = ',18j14":q2),:('q3 = ',18j14":q3)
vonal,c16,c17,c18,vonal,c20,c19,c21,vonal,c22,c23,c24,vonal,c27,c28,c29,vonal,c25,vonal,UQ,vonal
)


    TH=:3 : 0       NB. Térbeli HELMERT transzformáció: Új pontok transzformálása
i=:0[n=:0{$KJ[KJT=:0 3$0[P=:>,15{."1&.>,KJ[AKJ=:>,15}."1&.>,.KJ
m=:3 3$,k,0,0,0,k,0,0,0,k
while. i<n do.
   KJT=:KJT,(,t) + m mp R mp kj[kj=:i{(".AKJ)
   i=:i+1
end.
PO=:P[KJ1=:12j3":".>,15}."1&.>,.KJ[KJ2=:12j3":KJT
c13=:'   PSZ             Forrás rendszer [x y z] -> TRANSZFORMÁCIÓ -> Cél rendszer [X Y Z]'
c14=:'                                         KOORDINÁTA JEGYZÉK'
c15=:(":PO),.(":KJ1),.(":KJ2)
vonal,c13,vonal,c14,c15,vonal
)
```

3. Melléklet: Transzformációs paraméterek az OGPSH hálózatban

24 OGPSH pont

Bemérés

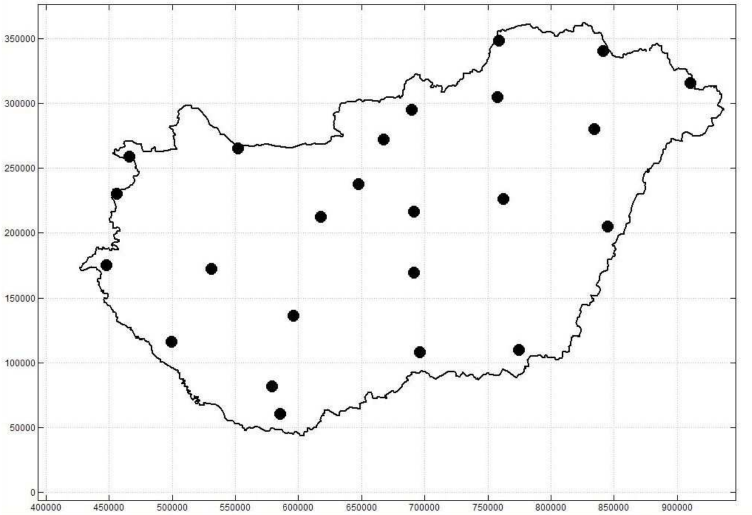
```
                          Transzformációs paraméterek
           Eltolás             Elforgatás            Méretarány
     47.74933348270133   0   0   0.306123808591   1.0000021579325942
    _69.28041060944088   0   0  _0.065931015976
    _10.99728770926595   0   0   0.470623193073

             Súlyegység középhibája: m0 = 0.3241854318337738
```

Kitűzés

```
                          Transzformációs paraméterek
           Eltolás             Elforgatás            Méretarány
    _47.74934213329107   0   0  _0.306123959022   0.9999978420598722
     69.28015322983265   0   0   0.065930317510
     10.99740835465491   0   0  _0.470623290923

            Súlyegység középhibája: m0 = 0.32418473228911937
```



2. ábra. 24 pont az OGPSH-hálózatban

43 OGPSH pont

Bemérés

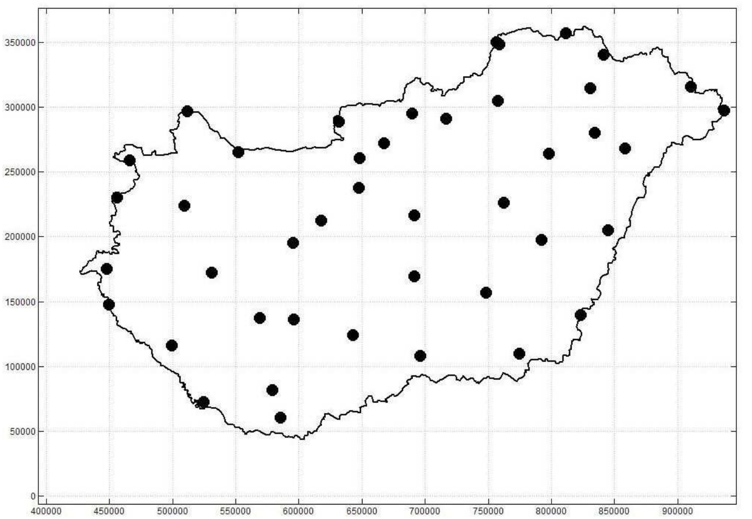
```
                            Transzformációs paraméterek
       Eltolás                 Elforgatás            Méretarány
  47.09499303298071   0   0   0.263032373949   1.0000020978530781
 _67.88777859602124   0   0  _0.096984246011
 _10.49329041223973   0   0   0.488207598695

              Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292629217956724
```

Kitűzés

```
                       Transzformációs paraméterek
       Eltolás                 Elforgatás            Méretarány
 _47.09499386139214   0   0  _0.263032603500   0.9999979021351638
  67.88753455318511   0   0   0.096983623440
  10.49340822361410   0   0  _0.488207722370

            Súlyegység középhibája: m0 = 0.37292550982340555
```



3. ábra. 43 pont az OGPSH-hálózatban

1151 OGPSH pont

Bemérés

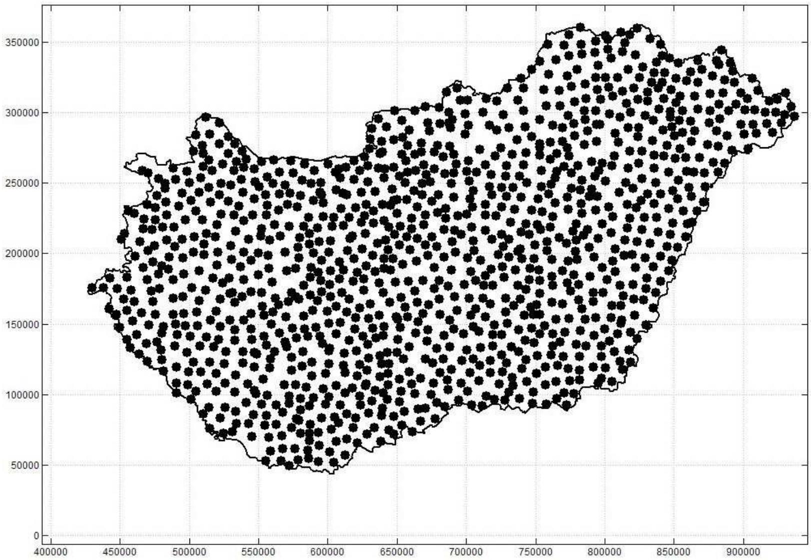
```
                         Transzformációs paraméterek
         Eltolás                Elforgatás              Méretarány
  53.41677557630464   0   0   0.142687965708   1.0000020425996370
 _64.83033404103480   0   0   0.176147282232
 _16.46120938099921   0   0   0.500099295632

                Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089784540964433
```

Kitűzés

```
                         Transzformációs paraméterek
         Eltolás                Elforgatás              Méretarány
 _53.41677066683769   0   0  _0.142687538630   0.9999979573950342
  64.83007442043163   0   0  _0.176147628185
  16.46131043229252   0   0  _0.500099173778

                Súlyegység középhibája: m0 = 0.25089733292912053
```



4. ábra. 1151 pont az OGPSH-hálózatban

GLONASS-MŰHOLDAK PÁLYASZÁMÍTÁSA

Takács Bence[*]

Orbit computation of GLONASS satellites – *Now the GLONASS satellite system constellation has been almost fully completed. Instruments receiving the signals of both systems has been widely applied in geodesy. Combined GPS/GLONASS positioning is significantly more efficient and robust even in less favourable environments. In the Hungarian literature, however, little work has been published on the special aspects of GLONASS system. In order to fill this gap, this paper presents the algorithm of GLONASS broadcast orbit computation. The calculated satellite positions are tested by their correspondence with real measurements.*

Keywords: GLONASS, orbit computation, broadcast ephemeris, numerical integration

Jelenleg a GLONASS-műholdrendszer csaknem teljesen kiépült. A GPS- és GLONASS-rendszerek jeleit egyaránt alkalmazó vevők mára széles körben elterjedtek a geodéziában. Segítségükkel lényegesen hatékonyabban és megbízhatóbban végezhető a cm pontos relatív helymeghatározás, még a korábbi fogalmaink szerint GPS-mérésre kevésbé alkalmas környezetben is. Ennek ellenére a hazai szakirodalom alig foglalkozik a GLONASS-műholdrendszer sajátosságaival. Ezen a hiányosságon részben enyhítünk jelen cikkünkkel, amelyben bemutatjuk, hogyan kell a műhold-koordinátákat fedélzeti pályaadatok alapján kiszámítani. A számított műhold-koordináták helyességét a műholdakra végzett mérésekkel való összhangjuk alapján bizonyítjuk.

Kulcsszavak: GLONASS, pályaszámítás, fedélzeti pályaadatok, numerikus integrálás

1 Bevezetés

Bizonyos feladatok (pl. előrejelzés) esetén a pillanatnyi műholdkoordináták az almanach adatok alapján számíthatók, az adatok és a számítás módja szinte teljes mértékben megegyezik a GPS-műholdak esetén végzett számításokkal, így ezzel a kérdéssel jelen cikkünkben nem foglalkozunk.

A geodéziában és a navigációban szokásos helymeghatározási feladatok esetén a műholdkoordinátákat a fedélzeti pályaadatokból számítják. Mind a sugárzott adatokban, mind pedig a számításokban jelentős különbségek vannak az amerikai GPS és az orosz GLONASS-műholdrendszer között.

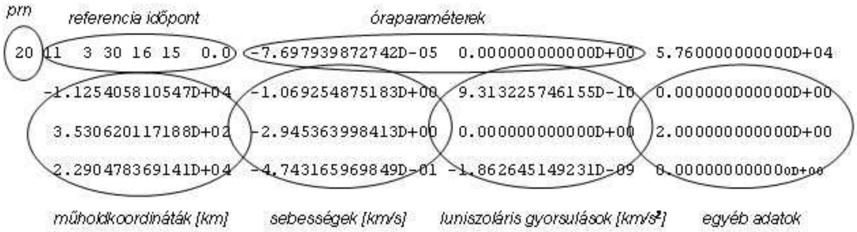
A GLONASS-műholdak pályaszámításához használt modellek és algoritmusok leírása számos helyen megtalálható a szakirodalomban. A különböző cikkek és tanulmányok mindegyike a GLONASS-műholdrendszerben sugárzott adatok leíró dokumentumára (*Glonass Interface Control Document*) hivatkozik, ennek jelenleg az 5.1 verziója (2008) a legfrissebb, amely elérhető a világhálón (facility.unavco.org/data/docs/ICD_GLONASS_5.1_(2008)_en.pdf, 2013-02-14).

2 GLONASS-műholdak fedélzeti pályaadatai

A GPS-műholdak sugározzák a pályájuk Kepler-féle 6 pályaelemét, valamint a pályaadatok korrekciójához szükséges paraméterkészletet. A sugárzott adatok leírása, és a műholdkoordináták számítási képletei megtalálhatóak az Ádám et al. (2004) publikációban. A sugárzott adatokat a műholdak két óránként frissítik.

A GLONASS-műholdak ezzel szemben diszkrét időpontokban megadják egy a Földhöz kötött és a Földdel együtt forgó térbeli derékszögű koordináta-rendszerben értelmezett *pillanatnyi pozíciójukat*, *sebességüket*, valamint az ú.n. *luniszoláris gyorsulásokat* (1. ábra). Ez utóbbiak lényegében a perturbáló erőkből származó hatásokat fejezik ki. Az adatok a referencia időpont előtti és utáni 15-15 percben használhatók fel, a műholdak 30 percenként frissítik azokat.

[*]*BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.*
E-mail: bence@agt.bme.hu



1. ábra. GLONASS fedélzeti pályaadatok vevőtől független, ú.n. RINEX formátumban

Érdekességképpen megemlítjük, hogy a tudományos igényű feldolgozáshoz használt műholdpályákat (természetesen a GPS-műholdakét is) a különböző feldolgozó központok diszkrét időpontokban ismert pozíciók alapján adják meg, ezek alapján a Kepler-féle pályaelemek számíthatók.

3 Műholdkoordináták számítása numerikus integrálással

Számításainkhoz ismerni kell a pillanatnyi koordináták, sebességek és a gyorsulások közötti összefüggést, mely a Föld nehézségi erőterének gömbfüggvény alakban kifejezett potenciálfüggvénye és a Föld körül keringő műholdak gyorsulásai közötti összefüggésből vezethető le, figyelembe véve a perturbációs hatásokat is. A GLONASS-műholdak jelentős távolsága (~20 000 km) miatt a Föld gravitációs erőteréből elegendő a második zonális tagot figyelembe venni, valamint ebben a távolságban hasonló nagyságrendű a Nap és a Hold perturbációs hatása. A többi perturbációs hatás első közelítésben elhanyagolható. A levezetés több helyen is megtalálható a szakirodalomban, pl. Stewart és Tsakiri (1998) munkájában.

A levezetést most itt nem közöljük, csupán a gyakorlati alkalmazások szempontjából fontos Földhöz rögzített, földdel együtt forgó koordináta-rendszerben ismert végső összefüggést adjuk meg, amelyet egyébként Rossbach (2000) jelölései alapján írunk fel

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \dot{x} \\
\frac{dy}{dt} &= \dot{y} \\
\frac{dz}{dt} &= \dot{z} \\
\frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu}{r^3}\cdot x + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu a_E^2}{r^5}\cdot x\cdot\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right) + \ddot{x}_{LS} + \omega_E^2\cdot x + 2\omega_E\cdot\dot{y} \\
\frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu}{r^3}\cdot y + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu a_E^2}{r^5}\cdot y\cdot\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right) + \ddot{y}_{LS} + \omega_E^2\cdot y - 2\omega_E\cdot\dot{x} \\
\frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu}{r^3}\cdot z + \frac{3}{2}c_{20}\frac{\mu a_E^2}{r^5}\cdot z\cdot\left(3-5\frac{z^2}{r^2}\right) + \ddot{z}_{LS}
\end{aligned}
\quad , \qquad (1)
$$

ahol

x, y, z	a műhold pillanatnyi koordinátái,
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$	a műhold pillanatnyi sebessége,
$\ddot{x}_{LS}, \ddot{y}_{LS}, \ddot{z}_{LS}$	a luniszoláris gyorsulások,
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	a műhold távolsága a Föld középpontjától,
$\mu = 3.9860044\cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}^2$	a Föld geocentrikus gravitációs együtthatója,
$c_{20} = -1.08263\cdot 10^{-3}$	a másodrendű zonális együttható,

$a_E = 6378136\text{m}$ a Föld átlagos egyenlítői sugara,

$\omega_E = 7.292115 \cdot 10^{-5} \cdot s^{-1}$ a Föld forgási szögsebessége.

Megjegyezzük, hogy az előbb felsorolt állandók a GLONASS-rendszer saját vonatkoztatási rendszerében adottak.

Ahhoz, hogy megkapjuk a műhold pozícióját egy bizonyos időpontban, a fenti egyenleteket kell integrálni. Az összefüggések túl bonyolultak ahhoz, hogy az integrálást analitikusan el lehessen végezni, ezért az integrálást a gyakorlatban numerikusan, leggyakrabban *negyedrendű Runge-Kutta módszer*rel hajtjuk végre (Stewart és Tsakiri 1998).

3 A numerikus integrálás (belső) pontossága

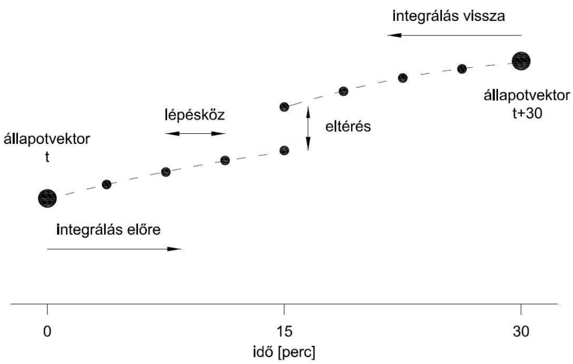
A szakirodalom alapján (Habrich 1999), *a numerikus integrálás lépésközét 10 másodperc*ben célszerű felvenni. A lépésköz hosszának a numerikus integrálásra gyakorolt hatását vizsgálhatjuk, ha két egymást követő fedélzeti pályaadat referencia időpontjának számtani középértékére számítjuk ki mind a megelőző, mind pedig a követő pályaadatokból az adott műhold pozícióját, majd pedig képezzük a két pozíció eltérését.

Kutatási eredményeink megerősítik a szakirodalmi adatokat. 24 órára vonatkozó fedélzeti pályaadatok alapján vizsgáltuk a 2. ábrán látható módon az időben előre, majd visszafelé történő numerikus integrálás eltérését. Sok száz adat vizsgálata alapján elmondható, hogy 10 másodperces lépésköz esetén *a pontosság 1 méter körüli,* a pontosság ennél rövidebb lépésköz esetén sem nő érdemben (3. ábra).

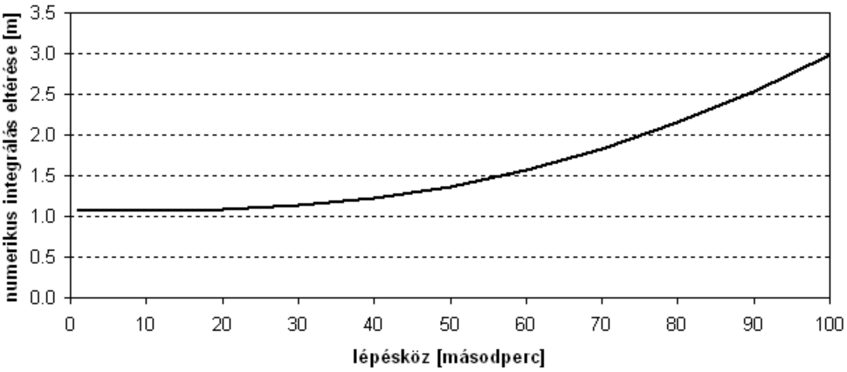
4 A számított műhold-koordináták ellenőrzése mérések alapján (külső pontosság)

Az eddig bemutatott eredmények igazolják, hogy a műholdak által sugárzott fedélzeti pályaadatokból a szakirodalomból átvett képletekkel számított műhold-koordináták egymással összhangban vannak. Ugyanakkor még nem bizonyítottuk a számított műhold-koordináták tényleges mérésekkel való összhangját. Ezért számításainkat permanens állomások nyers mérési adatainak feldolgozásán keresztül tovább teszteltük.

Együtt dolgoztunk fel GPS és GLONASS kódmérési adatokat, abszolút helymeghatározást végezve. Másképp megfogalmazva a kiszámított műholdkoordináták, a mért műhold-vevő távolságok alapján pedig meghatároztuk minden mérési időpontban a vevő pillanatnyi pozícióját. Egy-egy időpontban a szükséges mérések számánál több mérési adat is rendelkezésre áll, az elkerülhetetlen mérési hibák miatt ezek egymásnak némileg ellentmondanak. Ezért a lehetséges megoldások közül azt keressük, amelynél a távolságmérés maradék ellentmondásainak négyzetösszege a lehető legkisebb. Egy-egy mérés maradék ellentmondása pedig a műhold és a vevő (a megfelelő korrekciók figyelembe vételével) mért és (a koordináták alapján) számított távolságának különbsége.



2. ábra. Az intervallum lépésközének hatása a numerikus integrálás pontosságára



3. ábra. A numerikus integrálás lépésközének hossza és az integrálás pontossága közötti összefüggés

A számított pozíciók ellenőrizhetőek. Egyrészt a maradék ellentmondások értéke alapján, másrészt permanens állomások méréseiről lévén szó, a vevőantenna hibátlannak tekinthető pozíciója alapján.

Ahhoz, hogy a számításokat el tudjuk végezni, megvizsgáltuk a két műholdrendszer eltérő idő és koordináta-rendszerének kapcsolatát is.

4.1 GLONASS-műholdak időrendszere

A GLONASS-rendszernek saját időrendszere van, amelynek kapcsolata az UTC időrendszerrel a következő összefüggés alapján adható meg (Rossbach 2000):

$$t_{UTC} = t_{GLONASS} + \tau_c - 3óra \,. \qquad (2)$$

A τ_c értékét a műholdak a GLONASS fedélzeti pályaadatok között sugározzák, értékét általában naponta frissítik. Érdekességként megjegyezzük, hogy 2012-ben ez átlagosan mintegy 172 ns (4. ábra), távolságegységre átváltva valamivel több, mint 51.5 méter.

Megjegyezzük, hogy RINEX formátumban a két műholdrendszerre vonatkozó távolságmérési adatok egy állományban szerepelnek. Az állomány fejlécében szerepel, hogy melyik (általában GPS) műhold rendszerében szerepelnek az idő adatok. A két műholdrendszer navigációs adatainak szerkezetében mutatkozó jelentős eltérések miatt külön formátuma van a két műholdrendszer navigációs üzeneteinek. A GLONASS-műholdakra vonatkozó navigációs adatok időpont adatai UTC rendszerben adottak, a GPS-műholdakra vonatkozó adatok a navigációs állományban értelemszerűen GPS-időrendszerben. A két műholdrendszer adatainak együttes feldolgozása során tehát bizonyos esetekben szükség van a két időrendszer közötti átszámításra.

4. ábra. A τ_c értéke 2012. évben

4.2 GLONASS-műholdak koordinátarendszere

Az előzőekhez hasonlóan a GLONASS-rendszernek saját koordináta-rendszere van, elnevezése „*Parametry Zemli 1990 Goda*”, rövidítése PZ-90. A rendszer definíciója megtalálható a szakirodalomban, például Rossbach (2000) disszertációjában. Érdekességképpen a GLONASS- és a GPS-rendszer vonatkoztatási rendszereinek néhány fontosabb adatát az 1. táblázatban összehasonlítjuk, a teljesség kedvéért említjük, hogy utóbbi elnevezése WGS84 (World Geodetic System 1984).

A számított műhold-koordinátákat mindig az adott műhold saját koordináta-rendszerében kapjuk. Értelemszerűen a két műholdrendszer adatainak együttes feldolgozásakor a műhold-koordinátákat azonos rendszerbe kell átszámolni. Praktikusan a WGS84 rendszerbe, hiszen így a vevőkoordinátákat is ebben a rendszerben kapjuk.

A két koordináta-rendszer közötti kapcsolatot térbeli hasonlósági transzformációval teremtjük meg, a transzformáció egyenlete megtalálható Boucher és Altamini (2001) publikációjában.

Érdekességképpen megjegyezzük, hogy 2007 szeptemberében bevezették a PZ-90.02 vonatkoztatási rendszert, ezt már az ITRF (International Terrestrial Reference Frame) rendszerhez igazították. Mivel az ITRF és a WGS84 rendszerek közötti eltérés ma már csak néhány centiméter, emiatt a legtöbb gyakorlati alkalmazás számára nincs szükség a WGS84 és a PZ-90.02 rendszer közötti transzformációra, így cikkünkben bemutatott vizsgálataink során sem használtuk.

4.3 A GLONASS-műholdak órakorrekciója

A két műholdrendszer méréseit ugyanazok a szabályos hibák terhelik, hatásukat lényegében azonos módon vesszük figyelembe. Némi eltérés mutatkozik a műholdak óraigazítatlansága hatásának figyelembe vétele kapcsán (Rossbach 2000)

$$\delta t(t) = \tau_n(t_b) - \gamma_n(t_b) \cdot (t - t_b)\,, \tag{3}$$

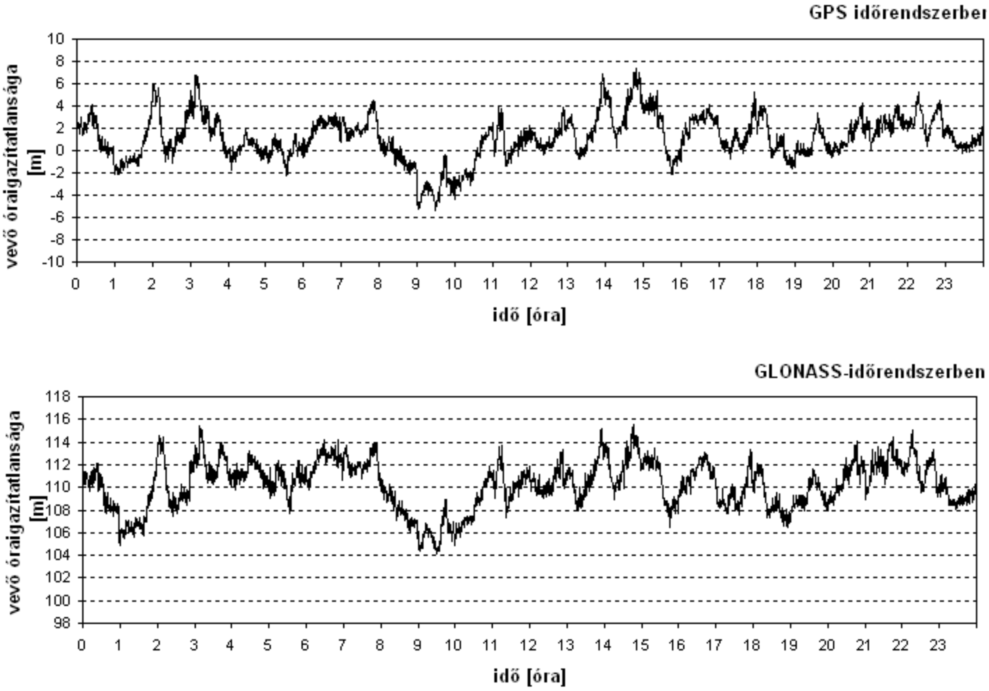
ahol az *n*-edik műholdra vonatkozó $\tau_n(t_b), \gamma_n(t_b)$ óraparamétereket t_b időpontra vonatkozóan megtaláljuk a navigációs üzenetek között.

4.4 A vevő óraigazítatlansága

Ha a két műholdrendszer adatait együtt dolgozzuk fel, akkor a vevő órájának mindkét időrendszertől való eltérését meg kell határoznunk. Ennek több módja is lehetséges. A talán legegyszerűbb megoldás szerint a helymeghatározás egy újabb, ötödik ismeretlen mennyisége lesz a vevő órájának igazítatlansága a GLONASS-időrendszerhez képest, melyet a vevő órájának a GPS-időrendszerhez képesti igazítatlanságával azonos módon határozunk meg. A két óraigazítatlanság között (5. ábra) várakozásainknak megfelelően nagyon erős a korreláció, a konkrét számpélda esetében ez 0,90.

1. táblázat. A PZ-90 és a WGS84 vonatkoztatási rendszer néhány adata

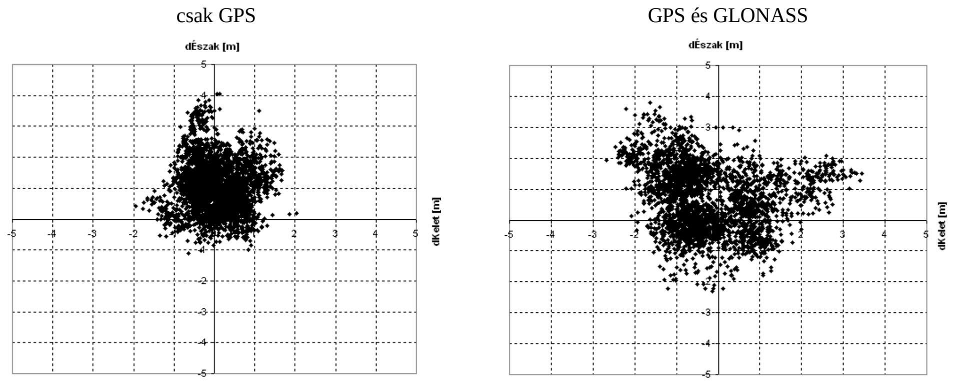
	PZ-90	WGS84
ellipszoid fél nagytengely hossza	6 378 136 m	6 378 137 m
ellipszoid lapultsága	1/298.257 839 303	1/298.257 223 563
geocentrikus gravitációs együttható	$3.986\,004\,4 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2	$3.986\,004\,418 \cdot 10^{14}$ m^3/s^2
a Föld forgási szögsebessége	$7.292\,115 \cdot 10^{-5}$ rad/s	$7.292\,115 \cdot 10^{-5}$ rad/s
normalizált 2. zonális együttható	$-0.484\,165 \cdot 10^{-3}$	$-0.484\,166\,774\,985 \cdot 10^{-3}$



5. ábra. Vevő órájának igazítatlansága GPS- és GLONASS-időrendszerhez képest

4.5 Eredmények

A BME permanens állomásán 2011. március 31-én rögzített mérési adatokat dolgoztuk fel. Először csak a GPS-műholdak adatait használtuk, azután a GPS- és GLONASS-adatokat együtt dolgoztuk fel. Az epochánként egymástól függetlenül meghatározott koordináták pontossága lényegében azonos, néhány méterre tehető. Ha a GLONASS-méréseket is bevonjuk a feldolgozásba, akkor a meghatározott pozíciók szórása valamivel nagyobb (6. ábra), melynek oka lehet egyrészt a GLONASS-méréseket terhelő és a feldolgozás során nem kellő hatékonysággal figyelembe vett szabályos hibák hatása, másrészt a GLONASS-méréseket terhelő nagyobb véletlen jellegű hibák hatása. Jelen tanulmányunkban ezeknek a hibáknak részletesebb vizsgálata nem célunk, mindössze bizonyítani szeretnénk, hogy a pályaszámítás helyes.



6. ábra. Abszolút helymeghatározás valódi hibái vízszintes értelemben

5 Összefoglalás

Cikkünkben bemutattuk a GLONASS-műholdak pályaszámításának fontosabb lépéseit. A nemzetközi szakirodalomból átvett képleteket saját számítások alapján ellenőriztük. A teljesség igénye nélkül kitértünk a GPS- és GLONASS-adatok együttes feldolgozása során figyelembe veendő sajátos szempontokra, majd egy permanens állomás 24 órás GPS- és GLONASS-adatokat egyaránt tartalmazó méréseire abszolút helymeghatározást végeztünk. A GPS- és GLONASS-adatok összhangja meggyőző, ugyanakkor utóbbi méréseket terhelő szabályos és véletlen jellegű hibák részletesebb vizsgálata egy következő tanulmány témája lehetne.

Köszönetnyilvánítás. A munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.

Hivatkozások

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás. Műegyetemi Kiadó, Budapest. 458.

Boucher C, Altamini Z (2001): ITRS, PZ-90 and WGS84: current realizations and the related transformation parameteres. Journal of Geodesy, 75 (11), 613-619.

Habrich H (1999): Geodetic Applications of the Global Navigation Satellite System (GLONASS) and of GLONASS/GPS Combinations. Doktori disszertáció, Bern. 147. (ftp://ftp.unibe.ch/aiub/papers/hhdiss.pdf, 2013-01-18).

Rossbach U (2000): Positioning and Navigation Using the Russian Satellite System Glonass. Doktori disszertáció, München. 167. (http://ub.unibw-muenchen.de/dissertationen/ediss/rossbach-udo/inhalt.pdf, 2013-01-18).

Stewart M, Tsakiri M (1998): Glonass Broadcast Orbit Computation. GPS Solution 2(2), 16-27.

JAVÍTHATÓAK-E A DURVA POZÍCIONÁLÁSBÓL SZÁRMAZÓ KOORDINÁTÁK MOZGÁSMINTÁK SEGÍTSÉGÉVEL?

Koppányi Zoltán[*], *Lovas Tamás*[*]

***Can the coordinates of rough positioning techniques be improved with mobility patterns? –** Nowadays the human spatial activities and positions are tracked by several applications for different purposes. In the last years examinations showed that the spatial human behaviour can be predicted and modelled via physical and mathematical approaches. For this reason there is an interesting question: are we able to improve the coordinates of the rough positioning techniques with previously recorded mobility patterns of users? In our paper Bayesian estimation – where the mobility pattern is the a priori information – will be used in order to improve coordinates. The likelihood function, as the model of the measurement, has normal distribution. The selection of the parameters is verified with a real GPS dataset, and the reliability of the method will be also discussed.*

Keywords: rough positioning, mobility patterns, Bayesian estimation

A felhasználók mozgásait napjainkban egyre több alkalmazás rögzíti, esetleg fel is használja. Az utóbbi években végzett kutatások kimutatták, hogy mozgásunk a térben nem olyan véletlenszerű, mint gondolnánk. Ezek alapján felmerülhet a kérdés, hogy vajon a korábban eltárolt mozgásmintáink segítségével javíthatóak-e a durva pozícionáló eszközök által szolgáltatott koordináták. Cikkünkben Bayes-becslést – ahol a mozgásminta a becslés a priori információja – alkalmazunk a koordináták pontosítására. A becslés likelihood függvényét normál eloszlás mellett vizsgáljuk. Egy mintahalmazon bemutatjuk módszerünk egyes paramétereinek megválasztásának kérdéseit, valamint meghatározzuk a becslés megbízhatóságát.

Kulcsszavak: durva pozícionálás, mozgásminták, Bayes-becslés

1 Bevezetés

A mobileszközök térhódításával a felhasználók nagy tömege valós idejű helyinformációkhoz juthat. Az így nyert információk köré szolgáltatásokat építenek, ezeket nevezzük hely-alapú szolgáltatásoknak (*location-based services*, *LBS*). A mobileszköz és a mobil hálózat – akár együttműködve – különböző lehetőségeket nyújtanak a pozíció valamilyen módon történő levezetésére, melyek pontossága, megbízhatósága eltérő.

A széles körben alkalmazott módszerek közül legpontosabb a GNSS alapú helymeghatározás, mely azonban gyorsan meríti az eszköz akkumulátorait, valamint az inicializálási idő (idő az első megoldásig) is jelentős lehet a bekapcsolásakor, a rajta futó alkalmazás elindulásakor vagy a műholdjel elvesztése esetén (megjegyezzük, hogy alkalmazása válogatja, hogy mennyi idő számít jelentősnek, mozgó jármű navigációja esetén másodpercek is számítanak). A GNSS másik hátránya, hogy amennyiben nincs szabad rálátás az égboltra, akkor nem tud pozíciót szolgáltatni, így épületen belül nem használható.

Ezt kiküszöbölendő a mobileszközök a kisebb pontossági igényű feladatok esetén ún. *durva pozícionálást* végeznek. Ilyen módszerek például a mobil kommunikációs hálózati cella azonosító alapján, WiFi hálózat segítségével történő helymeghatározás, valamint egyéb kifinomultabb megoldások, például E-OTD, U-TDoA, IP alapú, stb. technológiák, melyekről részletesebb információkat közöl Küpper (2005), magyar nyelven a GSM pozíciónálási módszerekről pedig Koppányi (2012). Ezen módszerek pontossága tág tartományban mozog, akár 50-1000 méter vagy ennél rosszabb is lehet.

[*]*BME FMT, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3. K. épület I. em. 31.*
E-mail: zoltan.koppanyi@fmt.bme.hu

Kutatásainkban célunk ezen durva pozícionálási technikák által szolgáltatott koordináták javítása korábbi mozgásmintáink alapján. Mozgásminták alatt a felhasználó korábbi pozíciói és a hozzájuk tartozó időpontok halmazát értjük. Az ötlet egyszerű: ha tudjuk, hogy egy lehatárolható környezetben található a felhasználó, akkor azon belül valószínűleg abban a pozícióban tartózkodik, ahol már korábban is megfordult. Tehát feltesszük, hogy a felhasználók ugyanazokra a helyekre térnek vissza, ahol korábban már megfordultak, azaz számítunk rá, hogy térbeli mozgásuk, jövőbeli tartózkodásuk hasonló a múltban tapasztaltakkal. Ez tulajdonképpen az emberi mozgás előre jelezhető tulajdonságára utal (predikció).

Eagle és munktársai vizsgálták az emberi viselkedés ilyen vonatkozásait és predikciós algoritmust fejlesztettek (Eagle és Pentland 2006, 2009), mely a felhasználó jövőbeni helyzetét becsli. Barabási és munkatársai 50 000 felhasználó mobileszközeinek cella információi elemzése alapján megállapították, hogy a legjobb predikciós algoritmus átlagosan az esetek 93%-ban képes meghatározni jövőbeni helyünket (Song et al. 2010). Munkánkban a mozgásmintákon alapuló predikciós lehetőségeket alkalmazzuk, de a mi esetünkeben, mivel ismert a pozíció előzetes értéke, több információval rendelkezünk, mint a szakirodalomban közölt predikciós algoritmusok.

Más kutatások, fejlesztések előzetes ismeretként alkalmazták a helymeghatározás során azokat a területeket, ahol a felhasználó biztosan nem tartózkodhat, így pl. épület falában (Marc et al. 2006). Bár az általunk bemutatandó megoldásba ezen ismeretek is beépíthetőek, nem csupán ilyen egyértelműen meghatározható előzetes információkat alkalmazunk. A megoldásunk továbbá sokkal általánosabb: nem egy konkrét helymeghatározási módszert pontosítunk, hanem a módszert absztrakt módon kezeljük, oly módon, hogy azt egy normális eloszlással fogjuk leírni, meghagyva a lehetőséget más eloszlás alkalmazására is. Módszerünk megbízhatóságát egy konkrét példán, valamint valós adathalmazon vizsgáljuk.

2 Módszer

A felhasználó korábbi ismert pozícióinak a hozzájuk tartozó idővel kiegészített halmazát mozgásmintának nevezzük. Ezután definiáljuk a tartózkodási mintát, melyet a mozgásmintából úgy kapunk, hogy az időt eltávolítjuk:

$$S = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)\}. \tag{1}$$

Jelen cikkben a mozgás és az idő kapcsolatával nem foglalkozunk. Az adatokban rejlő predikciós képességet az S halmaz feletti sűrűségfüggvény fogja jelenteni; ezt később ki is használjuk, alkalmazzuk vizsgálataink során. A durva pozícionálásból származó mérésünket (x^m,y^m) várható értékkel (koordinátákkal) és σ szórással adjuk meg (ez tulajdonképpen a mérésünk modellje), miközben valójában az (x^p, y^p) koordinátájú helyen található a felhasználó. A feladat során célunk a

$$\{S, (x^m, y^m), \sigma\} \rightarrow \{(x^p, y^p)\} \tag{2}$$

megoldása. Nagyméretű tartózkodási minta esetén érdemes a mért koordináta környezetében a tartózkodási mintában található pontok közül a $N\sigma$ (a mérés szórásának egész számú többszöröse) távolságban található pontokat felhasználni, így egy csökkentett tartókodási mintahalmazt kapunk, melyet redukált tartózkodási mintának, vagy röviden redukált mintának nevezünk. Ezzel csökkenthető a probléma mérete, a számítások gyorsabbá, az adatkezelés hatákonyabbá válik. Egy adott mérés esetén tehát a redukált minta:

$$S^m = \{(x_i, y_i) \mid d((x_i, y_i), (x^m, y^m)) < N\sigma\} \qquad (i = 1,...,n), \tag{3}$$

ahol d(.,.) az euklideszi távolság, míg az S^m az m méréshez tartozó redukált minta. Az így kapott redukált mintára a (2)-es feladat a következőképpen fogalmazható át:

$$\{S^m, (x^m, y^m), \sigma\} \rightarrow \{(x^p, y^p)\} \ . \tag{4}$$

A fenti összefüggés egy becslési eljárás. A megoldáshoz a következő feltételezésekkel élünk és az alábbi hatásokat vesszük figyelembe, illetve hanyagolunk el:

1. A mért, vagyis a durva pozícionálásból származó koordináták (x^m,y^m) normális eloszlásúak és σ szórással írjuk le. A későbbiekben bemutatott eljárás segítségével más eloszlású mérési hiba is használható, illetve vizsgálható. Itt jegyezzük meg, hogy a továbbiakban a mérés pontosságának a fogalmán az itt található σ szórást értjük. A magyar geodéziai szakirodalom a pontosságot a középhibával definiálja. A középhiba szabályos vagy modell hibából és véletlen hibából tevődik össze. Amenyiben a mérés nem tartalmaz szabályos részt, akkor a középhiba a véletlen hibát jelenti, amelyet a szórás jellemezhet normális eloszlás esetén (1). Vizsgálataink során modell hibát nem tételezünk fel méréseinkben, de a módszer alkalmazható modell hiba jelenléte esetén is, de ezzel kapcsolatos vizsgálatokat ebben a dolgozatban nem mutatunk be.
2. A tartózkodási mintában (S) található koordinátákat szintén valamilyen helymeghatározási módszerrel határoztuk meg, mely különbözhet attól, melyet az új pont mérése során alkalmaztunk, azaz amelyet pontosítani szeretnénk. Az S minta koordinátáinak pontosságát σ^s szórással írjuk le. A továbbiakban feltételezzük, hogy σ^s legalább egy nagyságrenddel kisebb, mint σ ($\sigma^s << \sigma$), így ezzel a hibahatással nem foglalkozunk, azaz a tartózkodási mintában található pozíciókat hibátlannak tekintjük.
3. Pozíciónk becslése során előfordulhat, hogy annak ellenére, hogy ismertek a redukált mintában a legvalószínűbb pozícióink, mégis ezektől eltérő helyen tartózkodunk, azaz nem követjük a korábbi mozgási szokásainkat. Ennek egyik oka az lehet, hogy a tartózkodási mintánk nem teljes, azaz bár a felhasználó szokott arra járni, de nem adott róla információt, a másik eset pedig az, hogy a felhasználó olyan új környezetben, területen tartózkodik, amit nem is lett volna esélyünk megfigyelni korábban. Az utóbbival kapcsolatban elmondható, hogy a bevezetésben már közölt szakirodalom alapján azt várjuk, hogy a felhasználók jellemzően korábbi szokásaikat követik.

A továbbiakban a (4)-re adunk megoldást, amihez a Bayes-becslést alkalmazzuk. Ezután szimuláció segítségével megvizsgáljuk, hogy a megadott eljárással milyen paraméterek mellett, mekkora megbízhatósággal tudjuk a mérést javítani.

2.1 Bayes-becslés alkalmazása

A Bayes-becslés során a becsülendő ismeretleneket valószínűségi változóknak tekintjük. A hagyományos geodézia feladatok során ezt a becslési eljárást nem alkalmazzuk, mivel nincs előzetes információnk a helyre vonatkozóan: a paramétereket nem tekintjük valószínűségi változóknak (Detrekői 1991). Esetünkben azonban a korábbi tartózkodási helyek ismeretében előzetes tudással rendelkezünk a felhasználó lehetséges pozícióiról, pontosabban arról, hogy a felhasználó mely pozíciókban tartózkodik nagyobb valószínűséggel.

Legyenek az $\boldsymbol{L} = (X, Y)$ koordináták valószínűségi változók; a feladat megoldása során az $\boldsymbol{L}$ értékét becsüljük. Legyen I_0 a méréskor elérhető információnk, ekkor a $P(\boldsymbol{L}|I_0)$ feltételes valószínűséget *a priori* függvénynek nevezzük, mely a koordinátákra vonatkozó előzetes tudásunkat adja meg. Ez már a mérés előtt a tartózkodási minta alapján meghatározható. Az *apriori* függvény esetünkben egy kétdimenziós sűrűségfüggvény, mely megadja azt, hogy a felhasználó az egyes koordinátákon mekkora valószínűséggel tartózkodik. Az előzetes információ az $\boldsymbol{L}^m = (X^m, Y^m)$ mérés ismeretében $(X^m = x^m, Y^m = y^m)$ az alábbiak szerint változik (Berthold 2003)

$$p(\boldsymbol{L} \mid \boldsymbol{L^m}, I_0) = \frac{p(\boldsymbol{L^m} \mid \boldsymbol{L}, I_0)\, p(\boldsymbol{L}, I_0)}{p(\boldsymbol{L^m} \mid I_0)}, \tag{5}$$

ahol $p\left(\boldsymbol{L}^m \middle| \boldsymbol{L}, I_0\right)$ a likelihood függvény, mely mérésünk modellje; cikkünkben a korábbiaknak megfelelően tekintsük ezt $N\left(x^m, y^m, \sigma^2\right)$ normális eloszlásúnak. Megjegyezzük, hogy más helymeghatározási módszer esetén másfajta eloszlást is alkalmazhatunk, pl. cella azonosító alapján történő helymeghatározáskor egyenletes eloszlást feltételezve. A képletben $p\left(\boldsymbol{L}^m \middle| I_0\right)$ a marginális függvény, mely egy normalizáló tényező, valamint az (5) eredménye $p\left(\boldsymbol{L}^m \middle| \boldsymbol{L}^m, I_0\right)$ pedig az *a posteriori* függvény.

Az ismeretlen értékének meghatározására jó megoldás kapható az *a posteriori* függvényen az átlagos négyzetes hiba rizikó függvényt (*Mean Square Error, MSE*) alkalmazva, mely a következő (Lehmann és Casella 2003)

$$\hat{\boldsymbol{l}}\left(\boldsymbol{L}^m, I_0\right) = \int \boldsymbol{L} p\left(\boldsymbol{L} \mid \boldsymbol{L}^m, I_0\right) d\boldsymbol{L}, \tag{6}$$

ahol $\hat{\boldsymbol{l}} = (\hat{x}, \hat{y})$ a becsült érték. Megemlítjük, hogy a szakirodalomban az ismeretlenek meghatározására az *a posteriori* függvény ismeretében több más megoldás is használatos (Lehmann 2003). Megemlítjük, hogy megvizsgáltuk a logaritmikus veszteségfüggvénnyel adott becslést és a legnagyobb *a posteriori* (maximum *a posteriori*, MAP) eljárást is, melyekkel azonban a lentebb ismertetésre kerülő eredményeknél rosszabb megoldást kaptunk. A könnyebb számíthatósága és a mi esetünkben „hatásosabb becslési” képessége miatt döntöttünk az MSE rizikófüggvény használata mellett.

A feladatban a fent említett sűrűségfüggvények kétdimenziósak, a megoldás során ezeket diszkrét módon kezeltük. Ennek oka, hogy nem tételeztünk fel semmilyen nevezetes eloszlást az *a priori* függvényről, valamint a számítások is könnyebben végrehajthatóak ezen a módon.

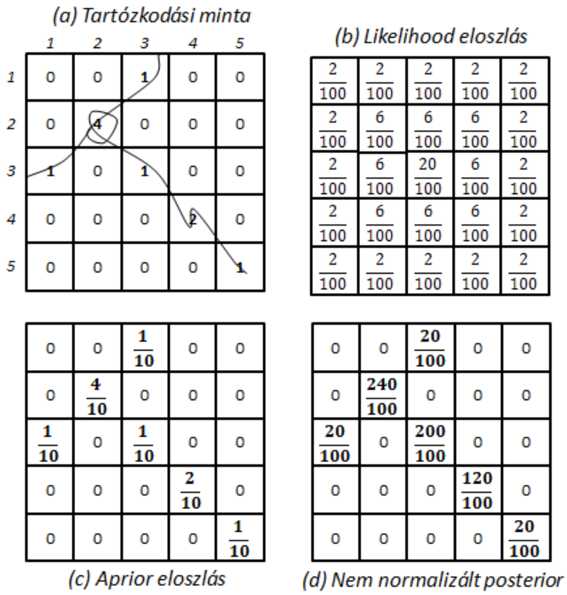
2.2 Példa és diszkrét megoldás

A következőekben nézzünk egy egyszerű példát. Ismerjük a durva pozícionálásból származó x^m, y^m mért koordintákat. Egy felhasználó tartózkodási mintája az 1. ábra (a) részében látható. Az adatokra egy négyzethálót fektetünk, az egyes négyzetrácsokat diszrketizációs celláknak hívjuk. Az ábrázolt számok mutatják, hogy korábban hány pozíció került rögzítésre az adott cellában. Halvány vonallal látható a trajektória. A négyzetrácsok koordinátái legyenek azok középpontjai. Ezen kívül a $p\left(\boldsymbol{L}^m \middle| \boldsymbol{L}, I_0\right)$ diszkrét likelihood eloszlást jelöljük $p_{i,j}^{a\ priori}$, ugyanígy $p_{i,j}^{a\ post}$ és $p_{i,j}^{liklehood}$ az *a posteriori* és likelihood függvények diszkrét eloszlását jelentik. Így tehát az $\boldsymbol{L}$ diszkrét valószínűségi vektor változó sűrűségfüggvényének értelmezési tartománya az i,j által felvett értékek halmaza. Az olvasó észreveheti, hogy a fent mutatott diszkrét függvényekben nem szerepel a feltételes valószínűség. Ennek oka, hogy mivel a méréseket rögzítettnek vesszük, így az $\boldsymbol{L_m}$ a teljes paraméter téren ugyanaz a sűrűségfüggvény írja le, azaz a fenti sűrűségfüggvények csak $\boldsymbol{L}$ változótól függnek, így $\boldsymbol{L_m}$ jelölésétől eltekintünk.

Az 1. ábra (b) részében a példánk mérésének diszkrét sűrűségfüggvényének értékei láthatóak. Itt tűnik ki először a diszkrét függvények használatának előnye, mivel az *apriori* eloszlás függvényének típusa előre nem ismert, valamint diszkrét értékként állnak rendelkezésre. Először a tartózkodási mintát normáljuk:

$$p_{i,j}^{a\ priori} = \frac{n_{i,j}}{\sum_{i,j} n_{i,j}}, \tag{7}$$

ahol $n_{i,j}$ az i,j-ik diszretizációs cellában található pozíciók száma. Az *a posterori* diszkrét eloszláshoz alkalmazhatjuk az (5)-t.



1. ábra. Mintapélda

Esetünkben a mérés rögzített, valamint diszkrét, így a képlet a következőképpen módosul

$$p_{i,j}^{a\,post} = \frac{p_{i,j}^{likelihood}\, p_{i,j}^{a\,priori}}{\sum_{k,l} p_{k,l}^{likelihood}\, p_{k,l}^{a\,priori}}. \tag{8}$$

A (8) képlet nevezőinek értékeit az egyes cellák esetén az 1. ábra (d) részén láthatjuk. Ezután kiszámítható a marginális függvény, mely ebben az esetben egy normalizáló konstans

$$\sum_{i,j} p_{i,j}^{likelihood}\, p_{i,j}^{a\,priori} = \frac{620}{100}. \tag{9}$$

A marginális konstans ismeretében kiszámíthatók az a posteriori függvény egyes cellái

$$\begin{array}{l} p_{3,1}^{a\,post} = \frac{20}{100}\frac{100}{620} = 0.0323,\; p_{2,2}^{a\,post} = \frac{240}{100}\frac{100}{620} = 0.387,\; p_{1,3}^{a\,post} = \frac{20}{100}\frac{100}{620} = 0.0323 \\ p_{3,3}^{a\,post} = \frac{200}{100}\frac{100}{620} = 0.323,\; p_{4,4}^{a\,post} = \frac{120}{100}\frac{100}{620} = 0.193,\; p_{5,5}^{a\,post} = \frac{20}{100}\frac{100}{620} = 0.0323 \end{array}. \tag{10}$$

Amennyiben a MAP becslést végeznénk, akkor az (1.5, 1.5) eredményt kapnánk. Ehelyett számítsuk ki az *a posteriori* függvény várható értékét az MSE becsléshez. A (6)-os egyenletet írjuk fel diszkrét esetre

$$\hat{\iota}_x = \sum_{i,j} i p_{i,j}^{a\,post},\; \hat{\iota}_y = \sum_{i,j} j p_{i,j}^{a\,post}, \tag{11}$$

ahol $\hat{\iota}_x, \hat{\iota}_y$ a koordináták becsült értékei. Folytassuk példánkat és számítsuk ki ezen becsült értékeket

$$\begin{array}{l} \hat{\iota}_x = 2.5\cdot 0.0323 + 1.5\cdot 0.387 + 0.5\cdot 0.032 + 2.5\cdot 0.0323 + 3.5\cdot 0.193 + 4.5\cdot 0.0323 = 2.31 \\ \hat{\iota}_y = 0.5\cdot 0.0323 + 1.5\cdot 0.387 + 2.5\cdot 0.032 + 2.5\cdot 0.0323 + 3.5\cdot 0.193 + 4.5\cdot 0.0323 = 2.31 \end{array}. \tag{12}$$

Észrevehetjük, hogy a két koordinátára ugyanazt az eredményt kaptuk, köszönhetően annak, hogy az *a priori* és *likelihood* függvények szimmetrikusak. Összehasonlítva az eredményül kapott koordinátákat a mért koordinátákkal láthatjuk, hogy a mért koordináta az (1.5,1.5) cella felé tolódott el.

3 Szimulációs vizsgálatok

3.1 Adathalmaz

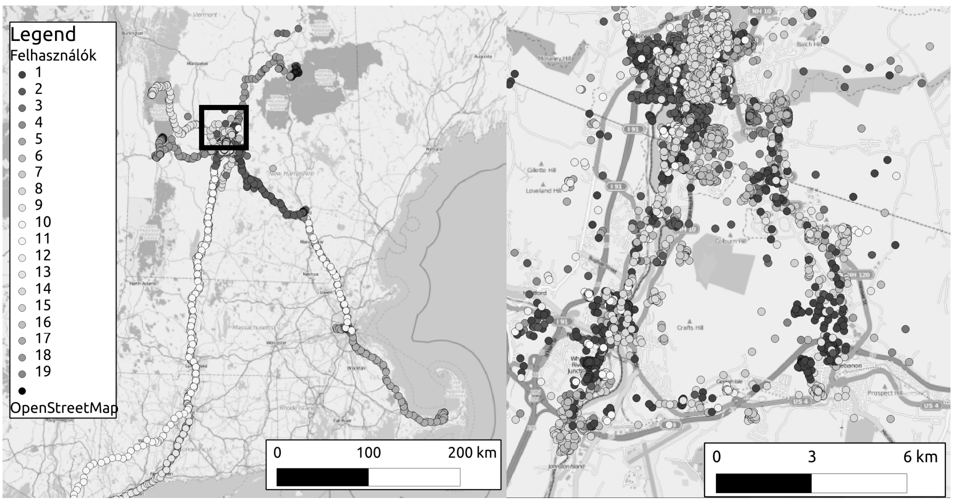
Az egyesült államokbeli Darthmouth egyetemen fejlesztett CenceMeLite mobil alkalmazás segítségével GPS adatokat gyűjtöttek 19 hallgató, egyetemi alkalmazottak és oktatók bevonásával (Musolesi et al. 2010). A méréseket többnyire 2008-07-28 és 2008-08-11 (~14 nap) között végezték, némely esetben azonban a méréseket korábban kezdték, így előfordulnak ~19 napos minták is. A koordinátákat a mobiltelefonba épített GPS-ből nyerték, így azok pontossága megfelel az általában a mobiltelefonba épített abszolút helymeghatározással nyert GPS koordináták pontosságával (kb. 5-10 méter). A teljes adathalmaz mérete szöveges formátumban 500 MB. A felhasznlók által megtett útvonalakat teljes terjedelmében a 2. ábra bal oldala, míg a városon belüli mozgásokat a jobb oldala mutatja. Az 1-es felhasználóra vonatkozó mintavétel gyakoriságát jellemző mintavételezési lefedés a 3. ábrán látható, ahol a függőleges vonalak mutatják, mely időpontokban van rögzített koordinátánk. A különböző adatainak mintavételezési lefedése eltérő; vizsgálataink során az adathalmazban található 10 legtöbb pozícióval rendelkező felhasználó mozgásmintáit vizsgáltuk.

3.2 Vizsgálati módszer

A tényleges rendszer működésének szimulációjához meghatároztunk egy sémát, mely a valós rendszerrel kapcsolatos működési elvet írja le; ezt szimuláljuk. A séma a következő: adott felhasználó mozgását egy ideig megfigyeljük, ekkor ismertek a hibátlannak tekintett GPS mérésből származó korábban rögzítésre került koordináták. Ebből az információból kiindulva azután úgy tekintjük, hogy a GPS mérés nem elérhető, helyette egy valamilyen más helymeghatározási módszerből származó normális eloszlású mérést tekintünk és ezt a mérést próbáljuk javítani. Ezt a sémát követjük a vizsgálatok során.

Ehhez a korábban bemutatott adathalmaz egy felhasználójának pozícióiból (mozgásmintájából) indultunk ki (T). Ezt két részre bontottuk: az adathalmaz egyik része képezi a már ismert pozíciók halmazát (azaz tartózkodási mintát), ekkor ismerjük a pontos koordinátákat (S), míg az adathalmaz másik részén (V) ellenőrizzük, validáljuk a módszerünket:

$$\begin{aligned} S &= \{(x_l, y_l), (x_{l+1}, y_{l+1}), \ldots (x_k, y_k)\}, \\ V &= \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{l-1}, y_{l-1}), (x_{k+1}, y_{k+1}), \ldots (x_t, y_t)\}, (x_i, y_i) \in T \qquad (i = 1, \ldots, |T|). \end{aligned} \tag{13}$$



2. ábra. A teljes mintahalmaz (bal oldal) és kiemelve a lakott területek (jobb oldal)

3. ábra. Az 1-es felhasználó mintavételezési lefedése

Annak hatását, hogy hol bontjuk fel erre a két részre a T adathalmazt ($l=?$, $k=?$) a későbbiekben vizsgáljuk.

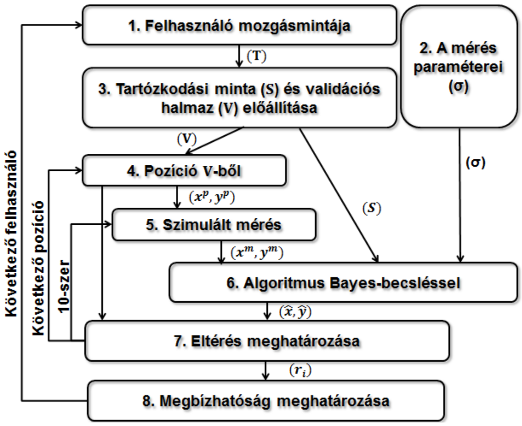
A vizsgálat a következő lépésekből áll (4. ábra):

1. Az algoritmus végigmegy az összes felhasználón. Esetünkben az elemzések során 10 felhasználó adatait vizsgáltuk.
2. A mérési paramétereket normális eloszlás esetén a σ szórással jellemezhetjük. Vizsgálatokat végeztünk arra vonatkozóan, hogy a σ nagysága milyen hatással van a becslésre. Ezt a későbbiekben közöljük.
3. A felhasználó mozgásait (T) két részre bontjuk (13)-nak megfelelően. Vizsgáljuk a különböző felbontások hatását a megbízhatóságra.
4. Kiválasztunk egy pozíciót V-ből.
5. A validációs halmaz elemein végigmegyünk és minden pozícióban mérést szimulálunk. A szimuláció során a validációs halmaz adott pontját hibátlannak tekintve azt „elrontjuk” egy σ szórású normális eloszlású véletlen számmal; ezt tekintjük utána mérésnek. 10 darab szimulált mérést végzünk egy adott tartózkodási pontban, ennek oka, hogy ekkora mintavétel esetén találtuk a megoldásainkat „stabilnak”.
6. Az 1. ábrán látható eljárásnak megfelelően elvégezzük a becslést.
7. Meghatározzuk az eltéréseket. Ehhez egy adott mérésre vonatkozó eltérést (r) tekintsük a következőképpen
$$r = d\left((x^m, y^m), (x^p, y^p)\right) - d\left((\hat{x}, \hat{y}), (x^p, y^p)\right) . \tag{14}$$
Az így definiált eltérés esetén, amennyiben $r<0$, a becsült pozíció javított a méréshez képest, $r>0$ esetén pedig rontott.
8. Az adott felhasználóra a különböző pozíciókban, különböző mérések mellett meghatározzuk a megbízhatóságot. Esetünkben a megbízhatóságot a következőképpen értelmezzük: az eltéréseket, mint valószínűségi változót tekintjük, és előállítjuk annak sűrűségfüggvényét $P(r)$. A megbízhatóság megállapításához a $(\infty,0]$ konfidencia-intervallumot használjuk
$$rel = P(r \le 0) . \tag{15}$$
Ennek oka, hogy csak azon kedvező esetek érdekesek, melyeken a módszert alkalmazva javulásokat értünk el ($r_i \le 0$).
9. A továbbiakban ezen szimulációs eljárást alkamazva határozzuk meg módszerünk megbízhatóságának alakulását a paraméterek változtatása mellett.

4 Eredmények és paraméterek vizsgálata

4.1 Eltérések eloszlása

A különböző felhasználók esetén meghatároztuk az eltérések eloszlás- és sűrűségfüggvényét. Az 1-es felhasználó hisztogramját és kumulatív hisztogramját 400 méter szórású mérés esetén az 5. ábra mutatja. A (9)-nek megfelelően egy vizsgálat egy adott felhasználóra vonatkozó megbízhatóságát szintén az ábrán jelöltük (*Rel*). Ez a megbízhatóság nem más, mint a kumulatív hisztogramon az $r=0$ helyhez tartozó értéke.

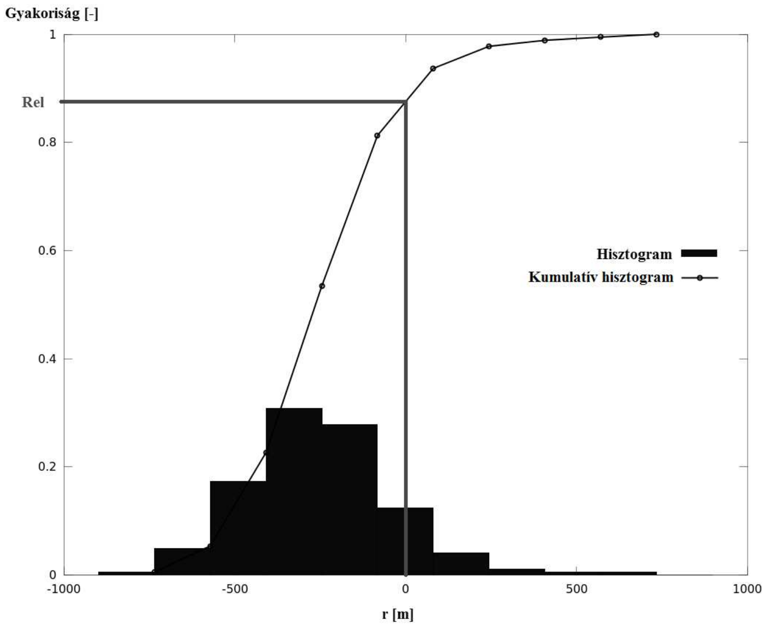


4. ábra. A vizsgálati módszer sémája

Más felhasználókra végzett meghatározások során 60-95% közötti megbízhatósági értékeket kaptunk. Ezért a további vizsgálataink során arra kerestük a választ, módszerünk mely paraméterei befolyásolják módszerünk megbízhatóságát.

4.2 Diszkretizációs cella mérete

A Bayes becslést befolyásolhatja a diszkretizációs cella mérete, erre vonatkozóan tehát vizsgálatokat szükséges végeznünk. Megvizsgáltuk, hogy különböző *n* oldalhosszúságú cella méret esetén hogyan valtozik a megbízhatóság. Az eredményeket a 6. ábra mutatja. A cellák vizsgált oldalainak hosszai 1, 2, 5, 10, 20, 50, 80 és 100 méter voltak. Az ábrából látható, hogy a cella méretek nem befolyásolják jelentősen az elérhető megbízhatóságot. Továbbá azt is észrevehetjük, hogy egyes felhasználók esetén, bizonyos cella méret fölött már nem tudjuk alkalmazni a becslést, mivel a cella mérete ekkor már olyan nagy, hogy a Bayes-becslés során csak egy cellányi adat áll rendelkezésre. Természetesen ez a méret határ függ a felhasználó által leírt mozgástól is.



5. ábra. Az 1-es felhasználó pozíciói eltéréseinek hisztogramja

4.3 Redukált mozgásminta méretének vizsgálata

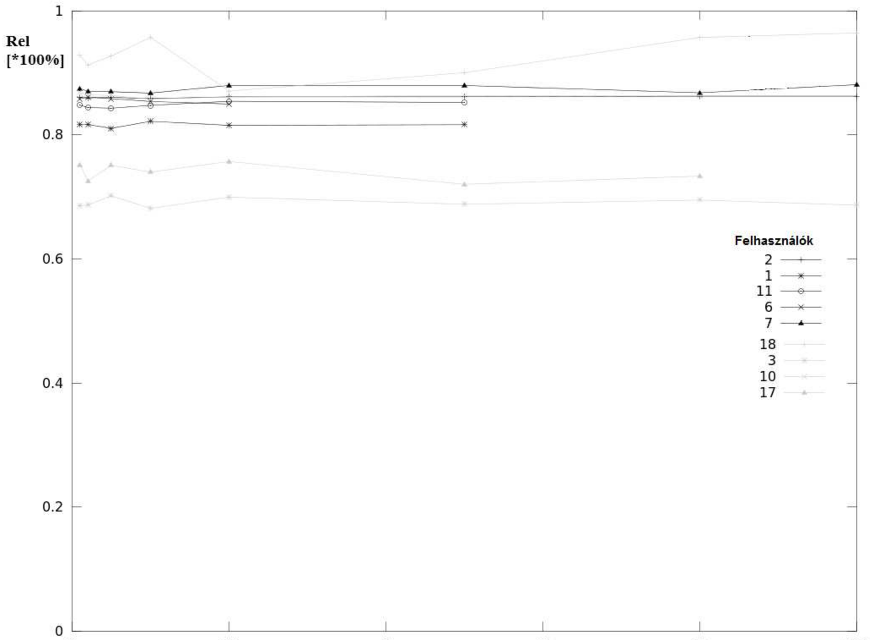
Ahogy korábban ismertettük, a tartózkodási mintából a mérési pont környezetében bizonyos távolságra ($N\sigma$) található pontokat gyűjtjük össze, melyből meghatározzuk az *apriori* eloszlást, ezt hívjuk redukált mozgásmintának. Fontos a redukált minta nagyságának vizsgálata, mivel megválasztása befolyásolhatja a becslés megbízhatóságát. Ezt a kérdést *N* függvényében vizsgáltuk.

Minél nagyobb a terület, annál több információt adunk a becslés számára, ám a futási idő növekszik. Túl nagy méret esetén az is előfordulhat, hogy olyan területeket is figyelembe vesz a becslési eljárás, melyekről tudjuk, hogy ott a felhasználó az adott mérés során kis valószínűséggel tartózkodhat, és abban az esetben, ha nincs a területen más pozíció, ez a terület nagy súlyt kaphat, így rontja a megbízhatóságot. Ellenkező esetben, ha túl kicsire választjuk a redukált mozgásmintához tartozó területet, akkor a becslésnek nincs elég információja lényeges területekről, olyan helyekről, ahol a felhasználó esetleg valójában tartózkodhat.

Ebben a szakaszban vizsgáljuk azt is, hogy a redukált mozgásmintában található pozíciók száma (pozíció szám kritérium) hogyan befolyásolja a becslést. Ez azt jelenti, hogy vizsgálatunk során nem végeztünk becslést azokban az esetekben, ahol a redukált területen található pontok száma nem érte el legalább a mozgásminta átlagos napi pontszámának 0, 25, 50, illetve 75%-át.

Előzetesen azt várjuk, hogy minél több pont található a redukált mintában, annál megbízhatóbb lesz a megoldás, mivel ekkor több információval rendelkezünk a felhasználó mozgásáról az adott területen. A 7. ábrán láthatóak a vizsgálatok az 1-es és 17-es felhasználóra. A vízszintes tengelyen a redukált terület mérete, a függőlegesen a korábban definiált megbízhatóság szerepel. Különböző pontábrázolásokkal jelöltük a redukált tartózkodási mintára előírt pozíció szám kritériumokat, zárójelben megadva, hogy hány mérés esetén sikerült a módszerünket alkalmazni. A redukált terület méretét a szórás *N*-szeresében állapítottuk meg. A vizsgálatot ebben az esetben 300 méter szórású mérésre végeztük el, azaz a környezet sugara rendre 300, 600, 900, 1200 és 1500 méter volt.

A bal oldali grafikon az 1-es felhasználóra vonatkozó elemzéseket mutatja; előzetes várakozásainknak megfelelően a redukált terület növekedésével a megbízhatóság is növekszik *n*=2 értékig. Ezután kis ütemben ugyan, de a megbízhatóság releváns csökkenésével kellett számolnunk.



6. ábra. A diszkretizációs cella méretének vizsgálata

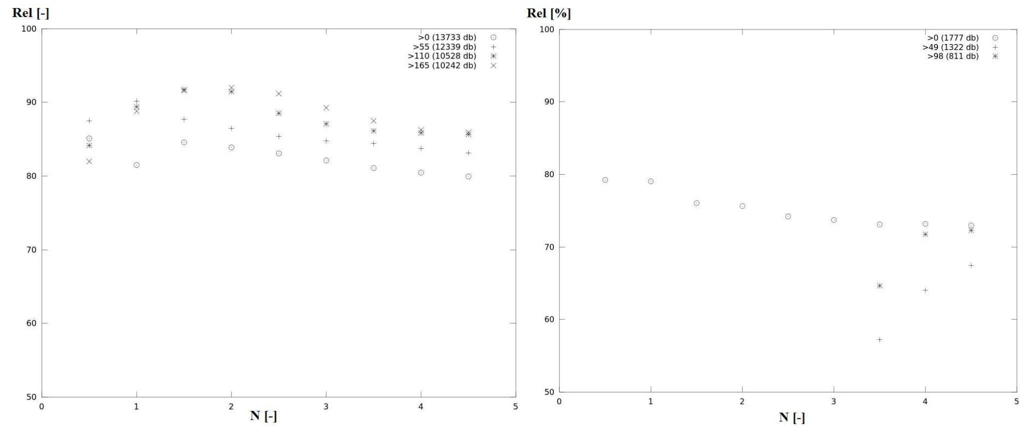
A pozíció szám kritérium esetén a megbízhatóságok szintén várakozásainknak megfelelően alakultak, ahogy a 7. ábrán is látható: amennyiben olyan esetben engedtük csak meg a becslésünk alkalmazását, ahol a redukált területen legalább az átlagos napi pontszám 75%-a volt található, magasabb megbízhatóságot értünk el. Az 1-es felhasználó esetén 7-9%-os javulást értünk el, azonban figyelembe kell venni, hogy a becslést ekkor lényegesen kevesebb pontban tudtuk csak alkalmazni. A 17-es felhasználó esetében (7. ábra jobb oldala) 1-2σ méretű redukált terület esetén kaptunk a megbízhatóságra maximális értéket. Azonban a pozíció szám kritérium növelésével éppen ellenkező eredményt kaptunk, mint az 1-es felhasználó esetére. Sőt, kis redukált minta terület esetén, nincs is eredményünk a 75%-os pozíció szám kritérium mellett. A két adathalmaz közötti lényeges különbség, hogy az 1-es felhasználó mozgásmintája 3-szor annyi pontból áll, mint a 17-es felhasználójé, így nagyobb a tartózkodási minta. További vizsgálataink azt mutatták ki, hogy az ábra bal oldali (1-es felhasználónál tapasztalt) eredményei érvényesülnek a sok pozíciót tartalmazó mozgásminták esetén. Ennek megfelelően a kiinduló mozgásminta halmaz pontjainak száma, azaz a tartózkodási helyre vonatkozó ismeret lényeges a módszer alkalmazhatóságát tekintve.

A fenti eredmények és elméleti megfontolások után a következőkben a redukált tartózkodási minta nagyságát 3σ-ban állapítottuk meg. Ennek meghatározásában figyelembe vettük, hogy a lehető legtöbb pontban szeretnénk módszerünket alkalmazni.

4.4 Előzetes ismeret vizsgálata

Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy az előzetes ismeret hogyan befolyásolja becslésünk megbízhatóságát. Két kérdésre keressük a választ: milyen időtartamú előzetes mozgásmintából kell kiindulnunk (I), és hogy a mintákban található ismeret azonos „minőségű-e”, azaz különböző időintervallumú mozgásminta szakaszokból kiindulva ugyanazt a megbízhatóságot érhetjük-e el (II)?

Az (I) kérdésre a felhasználó teljes mozgásmintájából vettünk egy napi és egy heti adatot; ez képezte a tartózkodási mintát. Az egyes felhasználókra így adódott megbízhatóságot az 1. táblázat mutatja 300 méter szórású mérést feltételezve. A fejlécben a felhasználók sorrendje a mozgásmintában található pozíciók számának csökkenő sorrendjében lett megadva. Látható, hogy az értékek többnyire megegyeznek, ami azt mutatja, hogy legtöbb esetben elegendő csupán egy napi ismeret a tartózkodási helyekről. A 2-es felhasználó esetén azonban az egy heti ismeret lényegesen jobb eredményt adott. Összességében megállapíthat, hogy csupán egy napos előzetes ismerettel kevesebb pontban tudjuk alkalmazni a módszerünket, mivel a validációs halmaz sok pozíciójának környezetében nincs egyáltalán előzetes ismeretünk (korábbi koordinátáink). Emiatt előfordulhat, hogy bizonyos esetekben egy napi adat felhasználásával magasabb megbízhatóságot mérhetünk, bár kevesebb pontban, valamint hogy a 10-es felhasználó esetén egyáltalán nem tudtuk a módszerünket alkalmazni, mivel az mindig az előzetes ismert mozgásmintán kívüli, új területeken járt, ahonnan korábbi koordináták nem voltak elérhetőek.



7. ábra. Redukált mozgásminta vizsgálata, bal oldalon az 1-es felhasználó, jobb oldalon a 17-es felhasználó

1. táblázat. Megbízhatóság változása egy napos és egy hetes előzetes ismerettel 300 méteres szórású mérés esetén

	Megbízhatóság felhasználónként									
Felhasználó	2	1	11	6	7	18	3	19	10	17
Egy hetes	86.3%	81.9%	84.9%	86.6%	87.3%	89.9%	69.6%	-	87.2%	75.3%
Egy napos	60.3%	84.3%	88.1%	89.7%	86.2%	91.3%	65.6%	81.2%	-	76.2%

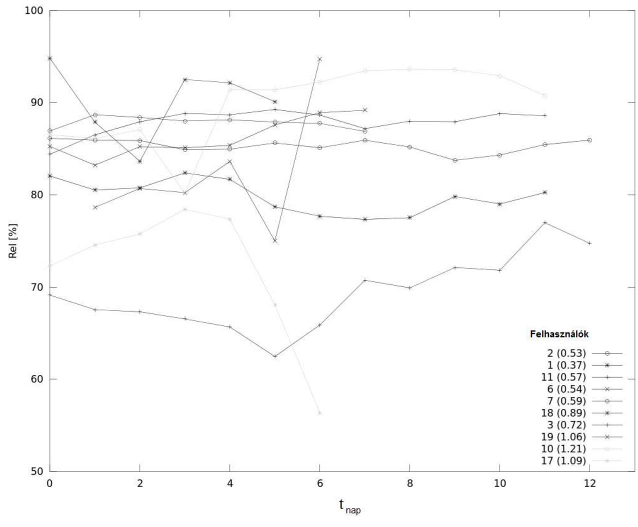
Mivel a 19-es felhasználóról csak egy heti adat állt rendelkezésre, így erre megbízhatóságot nem tudtunk meghatározni. A (II) kérdést vizsgálva különböző, egy hetes intervallumokat vizsgáltunk mind a tíz felhasználó esetére. Például a kedden kezdődő időablak záró időpontja a következő hét keddje, és a tartózkodási minta elemeit ebben az ablakban található pozíciók adják. Az egy hetes ablakot mindig egy nappal toltuk el és meghatároztuk a módszerünk megbízhatóságát (*k* és *l* vizsgálata a (13)-ban). Az eredményeket a 8. ábrán láthatjuk.

Észrevehetjük, hogy nem minden felhasználó esetén folytonos a görbe, mely abból adódik, hogy bizonyos időintervallumba egyáltalán nem, vagy csak nagyon kevés pozíció esett. A jelmagyarázatban a zárójelek között a napi átlagos pontszám szórásának és átlagának arányát közöltük felhasználónként. Ezzel kívántuk mérni, hogy mennyire egyenletes a pontok számának eloszlása a napok között. Látható, hogy amikor ez az arány kisebb értékű, azaz az egyes napokon hasonló számosságú a pozíció halmaz, akkor stabilabb a kapott görbe, azaz szinte mindegy, melyik egy hetes intervallumból indulunk ki. Azonban magas arányszám mellett a megbízhatóság nagyban függ a kiinduló mozgásminta halmaztól, az eltérés 2-3 napos ablakcsúsztatás mellett akár 8-23% is lehet.

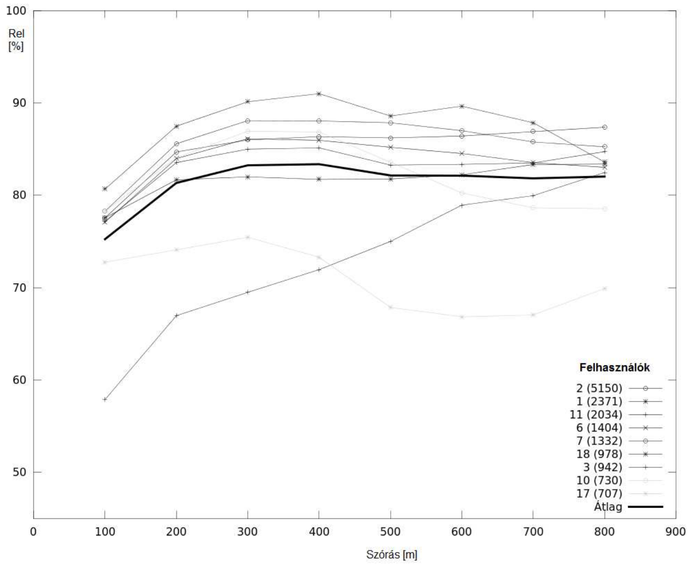
4.5 Szórás vizsgálata

Módszerünk nem működhet akármilyen mérési módszert alkalmazva. Ahhoz, hogy a mozgásmintákat, mint *a pirori* információt felhasználhassuk, a szimuláció során olyan nagy hibával (itt szórással) adott méréseket kell alkalmazni, ahol a felhasználó mozgása, korábbi tartózkodási helyei már releváns információt jelentenek. Annak érdekében, hogy meghatározzuk, milyen pontosságú mérések vehetők figyelembe, meg kell adnunk, milyen szórás mellett érvényesül ez a hatás. A 9. ábra a szórás változásával a megbízhatóságot mutatja, az egy hetes előzetes információból kiindulva az összes felhasználó esetén. Zárójelben látható a pontok száma a mozgásmintában az adott felhasználó esetén.

Az ábrából jól látható, hogy a mérés megbízhatósága a legtöbb esetben 200-300 méter szórás felett állandósul. Ezen kívül mutatja azt is, hogy a legtöbb esetben a konfidencia szint 70% felett van, a legrosszabb esetekben 58-80% közötti az érték, míg a legjobb esetekben 76-92%.



8. ábra. Megbízhatóság változása különböző kiinduló időpontú, egy hetes tartózkodási minták esetén



9. ábra. Megbízhatóság változása különböző szórású mérések esetén

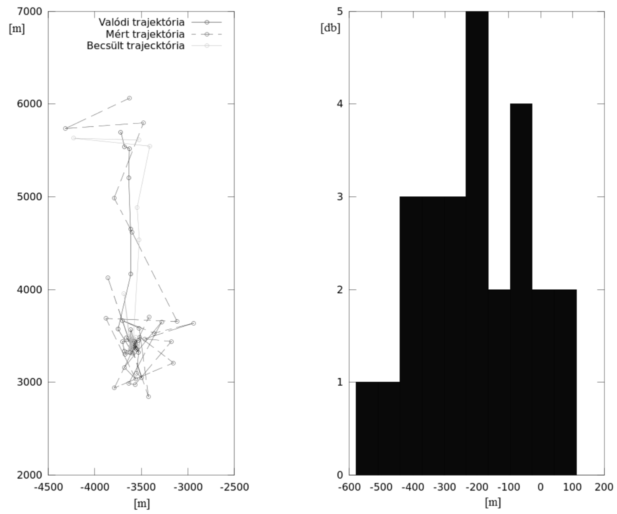
Mivel a vizsgált mintán az összes eset 50% fölötti, ezért elmondható, hogy az eredeti pozícióhoz képest többször tapasztalható javulás, mint rontás. Különösen jól teljesítettek azok a mozgásminták, melyek a többihez képest lényegesen több pozíciót tartalmaztak. Az ábrán vastag vonallal jeleztük a 9 felhasználó (19-es felhasználó esetén nincs egy hetes mozgásminta, lásd fent) átlagát, mely tulajdonképpen megadja a mintahalmazon módszerünk megbízhatóságának statisztikai átlagát több felhasználóra, mely a fenti adatok mellett 83-85%-ra adódott.

5 Konklúzió és összefoglalás

Cikkünkben bemutattunk egy Bayes-becslésen alapuló módszert, mellyel durva helymeghatározási technikák által szolgáltatott koordináták javíthatóak mozgásminták segítségével. Azonban ahhoz, hogy a mozgásmintákban jelen lévő előzetes tudás érvényesüljön, két feltételnek kell teljesülnie: a helymeghatározási módszernek nagy szórással kell rendelkeznie, valamint a felhasználó korábbi mozgását, tartózkodását leíró pozícióknak a mérési módszernél legalább egy nagyságrenddel pontosabb helymeghatározási megoldásból kell származniuk. Vizsgálataink során egy valós adathalmazon GPS mérésekből származó pozíciókat, mint tartózkodási mintákat vizsgáltunk meg úgy, hogy ezen méréseket „elrontottuk", ezt tekintve szimulált mérésnek.

A mozgásmintákban található predikciós képesség, mely segítségével a mérés javítható, vizsgálataink alapján 200-300 méter szórású méréseket feltételezve jelentkezik. A vizsgált 10 felhasználó többségében ezen tartományban a javítás megbízhatósága 80-90% közötti, azaz ennyi esetben javítunk a mérés pozícióján. A megbízhatóság azonban jelentősen függ a kiinduló tartózkodási minta nagyságától és az átlagos napi pozíciók számától. Azon felhasználók esetén, melyeknél ez az átlagos napi pozíciószám magas és annak szórása a napok között alacsony, módszerünk jó előzetes információt szolgáltat, megbízhatósága nagyobb volt. Így kijelenthető, minél részletesebb információnk van a mozgásról, a korábbi tartózkodási helyekről, annál nagyobb megbízhatóságot érhetünk el.

A 10. ábrán adathalmazunkból kiemeltünk egy trajektóriát. Az ábrán feltüntettük a valódi, mért és becsült pozíciókat és ábrázoltuk mint trajektóriát. Láthatjuk, hogy a becsült trajektória közelebb esik a mért trajektóriához. Ahogy az ábrán látható, módszerünk akkor a legjobb, amikor olyan helyen tartózkodunk, ahol gyakran megfordulunk. Végül válaszolva a cikk címében feltett kérdésre: a korábbiakban említett feltételek mellett kijelenthetjük, hogy korábbi mozgásainkat leíró mozgásminták az esetek többségében képes a durva pozícionálásból származó koordináták javítására.



10. ábra. Egy minta trajektória becslése (bal) és az eltérések hisztogramja (jobb)

Hivatkozások

Berthold M, Hand J D (2003): Intelligent Data Analysis – An Introduction. 2. kiadás, Springer, Berlin. 514.

Detrekői Á (1991): Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest. 685.

Eagle N, Pentland A (2006): Reality Mining: Sensing Complex Social Systems. Personal and Ubiquitous Computing, 10, 255-268.

Eagle N, Pentland A (2009): Eigenbehaviors: identifying strcture in routine. Behavioral Ecology and Sociobiology, 63, 1057-1066.

Koppányi Z (2012): GSM-alapú helymeghatározás, Az elmélet és a gyakorlat találkozása a térinformatikában. III: Térinformatikai konferencia és szakkiállítás, Debrecen. 209-223.

Küpper A (2005): Location-Based Services: Fundamentals and Operation. John Wiley. 365.

Lehmann E L, Casella G (2003): Theory of Point Estimation. 2. kiadás, Springer, 590.

Marc C, Barceló F, Cugno S (2006): Improving positioning capabilities for indoor environments with WiFi. Proceedings of the 4th ACM international workshop on Mobility management and wireless access, 121-125.

Musolesi M, Piraccini M, Fodor K, Corradi A, Campbell A T (2010): Supporting Energy-Efficient Uploading Strategies for Continuous Sensing Applications on Mobile Phones. Proceedings of the 8th International Conference on Pervasive Computing (Pervasive 2010), 355-372.

Song C, Qu Z, Blumm N, Barabási AL (2010): Limits of Predictability in Human Mobility. Science, 327, 1018-1021.

A KIBŐVÍTETT STOKES-FÉLE FÜGGVÉNY CSONKÍTÁSI EGYÜTTHATÓINAK HATÉKONY SZÁMÍTÁSA

Tóth Gyula, Fáncsikné Hamar Éva***

Fast computation of truncation coefficients for the extended Stokes function – *Recent high degree geopotential models and certain computational procedures in physical geodesy require the evaluation of integrals (truncation coefficients) that are products of high degree Legendre polinomials (or functions) with various kernels over a given domain. The oscillating character of integrands (several thousand zeros) makes it difficult to evaluate such integrals. A highly accurate quadrature has been developed for fast computation of these integrals based on the Glaser-Liu-Rokhlin root finding algorithm and Gauss-Lobatto quadrature between the roots. Our algorithm has successfully been applied to eliminate the instability of the recursive computation by M.K. Paul for high degrees.*

Keywords: truncation coefficients, Legendre functions, Glaser-Liu-Rokhlin root finding algorithm, Gauss-Lobatto quadrature

A fizikai geodéziában alkalmazott több számítási eljárás, illetve a legújabb nagy fokszámú geopotenciális modellek megkívánják különböző magfüggvények magas fokszámú Legendre-polinomokkal illetve -függvényekkel vett szorzatai adott tartományra vonatkozó integráljainak (a csonkítási együtthatóknak) a meghatározását. Ezeknek az integráloknak a kiszámítása nehézségekkel jár az integrandus oszcilláló jellege (többezer zérushely) miatt. A Glaser–Liu–Rokhlin gyökkereső algoritmus alapján a gyökhelyek között Gauss–Lobatto-integrálást végezve, nagy pontosságú numerikus kvadratúrát dolgoztunk ki az integrálok hatékony számítására. Az algoritmusunkat sikeresen alkalmaztuk az M.K. Paul által kidolgozott rekurzív számítási eljárásban a magas fokszámon jelentkező instabilitás kiküszöbölésére.

Kulcsszavak: csonkítási együtthatók, Legendre-függvények, Glaser–Liu–Rokhlin gyökkereső algoritmus, Gauss–Lobatto-integrálás

1 Bevezetés

A fizikai geodéziában nagy jelentőségük van azoknak az integráloknak, amelyek a nehézségi erőtér különböző paraméterei között teremtenek kapcsolatot. A legjellemzőbb példa erre a Stokes-féle integrál, amellyel geoidmagasságokat tudunk számítani mért nehézségi rendellenességek segítségével. Ennek alapján valamely területen a geoid ismeretében GNSS (Globális műholdas navigációs rendszer) méréseinkből tengerszint feletti magasságokat is számíthatunk. Az Eötvös-integrálok az Eötvös-inga méréseiből nehézségi rendellenességek és geoidundulációk, vagy éppen függőleges (vertikális) gradiensek kiszámítására használhatók fel (Tóth 2003, Tóth et al. 2006).

Ezen integrálok egyik közös jellemzője az, hogy az integrálás tartománya a teljes földfelszín. A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy a számítási ponthoz közeli terület (belső zóna) hatását numerikus integrálással állítjuk elő, a távolabbi területekről származó részt (külső zóna) viszont valamilyen geopotenciális modellből határozzuk meg. A távolabbi területek hatásának kiszámításához fel kell használnunk az ún. *csonkítási együtthatók*at, amelyek az integrálban szereplő magfüggvénynek a Legendre-polinomokkal vagy Legendre-függvényekkel vett szorzatintegráljai a külső zónára.

Értelemszerűen a csonkítási együtthatókat a felhasznált geopotenciális modell maximális fokszámáig kell ismernünk. A legújabb EGM2008-as geopotenciális modell maximális fokszáma 2160/2190 (Pavlis et al. 2012). A célunk tehát az, hogy a számunkra szükséges integrálokhoz tartozó csonkítási együtthatókat gyorsan, megbízhatóan ki tudjuk számítani több ezres vagy akár tízezres fokszámig.

**BME Általános és Felsőgeodézia Tsz, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: gtoth@agt.bme.hu
***Dunaújvárosi Főiskola Informatika Intézet, 2401Dunaújváros, Táncsics M. u. 1/A.*
E-mail: fhamare@mail.duf.hu

A szakirodalomban főleg a Stokes-féle integrálhoz tartozó csonkítási együtthatók számításával találkozhatunk, amelyben a Stokes-féle magfüggvény szerepel (Paul 1973), illetve Paul (1983) az ún. kibővített Stokes-féle integrálhoz ill. magfüggvényhez tartozó csonkítási együtthatók számítására dolgozott ki eljárást. Erre abban az esetben van szükségünk, ha az azonos potenciálértékű valódi és normál szintfelületek távolságát a Stokes-féle integráltól eltérően nem a tengerszinten, hanem a tengerszint felett *h* magasságban kívánjuk meghatározni.

Az említett eljárások az együtthatók rekurzív számításán alapulnak, és ezért igen könnyű számítógépes algoritmust írni a feladatra. Kézenfekvő lenne tehát egyszerűen a Paul (1983) által adott számítási eljárást felhasználni a csonkítási együtthatók magas fokszámáig (n = 10000). Ez azonban nehézségekbe ütközik, mert azt tapasztaltuk, hogy a számítás már n = 500-tól hibás eredményeket szolgáltatott, amit a későbbiekben be is fogunk mutatni. Maga Paul (1983) nem ellenőrizte az együtthatók számítását az n = 200-nál magasabb fokszámra. Chuanding et al. (1998) pedig átvette Paul (1983) számítási eljárásának lényegét, de ő sem ellenőrizte azokat n = 500-nál magasabb fokszám esetében.

Cikkünkben egy olyan új eljárást ismeretünk, amelynek segítségével igen nagy fokszámig pontos számítás végezhető a szükséges csonkítási együtthatókra, méghozzá tetszőleges magfüggvény esetében. Az eljárásunk legfontosabb része egy olyan numerikus kvadratúra, amellyel bármelyik csonkítási együttható az n fokszámával csupán lineárisan növekvő $O(n)$ számítási időben a szükséges pontossággal kiszámítható. Ezzel a kvadratúrával a szükséges legmagasabb fokszámú együtthatók meghatározhatók, amelyek kezdőértékként szolgálnak a többi együttható megoldására felírható inhomogén rekurzióból származó háromátlós egyenletrendszer számára. Ezek után az összes kisebb fokszámú csonkítási együttható a felírt háromátlós egyenletrendszer megoldásával gyorsan előállítható.

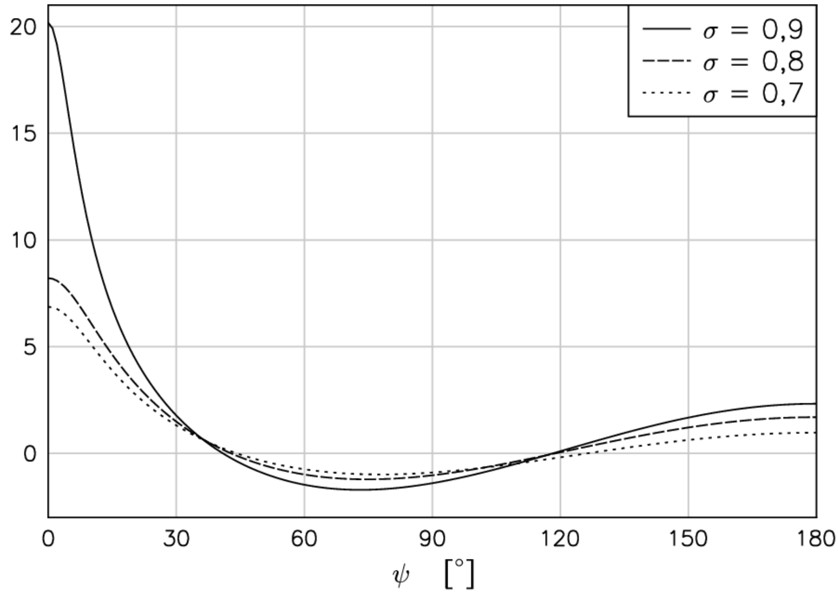
Először röviden áttekintjük a kibővített Stokes-féle függvényből származó csonkítási együtthatók Paul (1983) által kidolgozott rekurzív számítási eljárását, majd demonstráljuk, hogy miért válik instabillá Paul (1983) eljárása magasabb fokszámú csonkítási együtthatók esetében. Ezután ismertetjük az általunk kidolgozott numerikus kvadratúrát, amely Glaser et al. (2007) eljárását használja a Legendre-polinomok (vagy függvények) gyökhelyeinek megkeresésére, valamint a szükséges függvényértékek számítására. A következő részben azokat a vizsgálatokat tárgyaljuk, amelyeket elvégeztünk a kvadratúra pontosságának becslésére. Végül rámutatunk arra, hogy milyen további területeken lehetséges a számítási eljárásunk alkalmazása.

2 A kibővített Stokes-féle függvény csonkítási együtthatóinak számítása Paul (1983) módszerével

Amint már említettük, a kibővített Stokes-féle integrálra abban az esetben van szükségünk, ha az azonos potenciálértékű valódi és normál szintfelületek távolságát nem a tengerszinten, hanem a tengerszint felett *h* magasságban kívánjuk meghatározni. Ebben az integrálban a számítási és adatpont ψ gömbi szögtávolságától függő *kibővített* Stokes-féle függvény szerepel

$$S(\sigma, x) = \sigma - 5\sigma^2 x + \frac{2\sigma}{L} - 3\sigma L - 3\sigma^2 x \ln\frac{1-\sigma x + L}{2}\,, \tag{1}$$

ahol $L(\sigma, x) = \sqrt{1 - 2\sigma x + \sigma^2}$, $x = \cos\psi$, $\sigma = R/(R+h)$ és R valamilyen közepes földsugár érték (pl. 6371 km). Az 1. ábra bemutatja ezt a függvényt három különböző $\sigma(h)$ számítási magasságban. A kibővített Stokes-féle függvényhez tartozó csonkítási együtthatók számítására Paul (1983) adott eljárást. Mivel a Stokes-féle integrál kibővített alakja magában foglalja az eredeti integrált is, így elég ezzel az integrállal foglalkoznunk.



1. ábra. A kibővített Stokes-féle függvény ábrája három különböző *σ*(*h*) számítási magasságban

A kibővített Stokes-féle függvény csonkítási együtthatóit az alábbi integrálokkal definiáljuk

$$Q_n(\sigma, t_0) = \int_{-1}^{t_0} S(\sigma, x) P_n(x) dx, \qquad n = 2, 3, ... \tag{2}$$

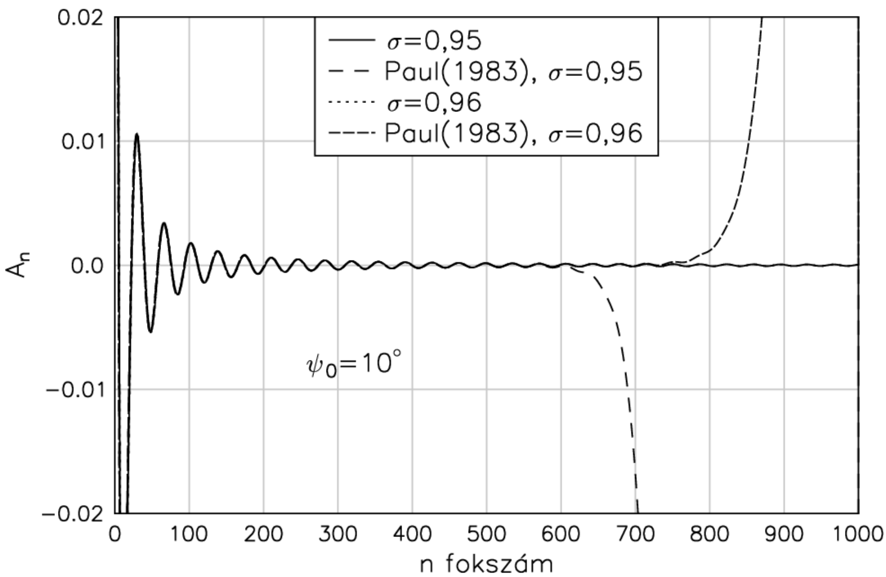
ahol $t_0 = \cos\psi_0$ és ψ_0 a csonkítási sugár, vagyis a gömbi sapka alakú belső zóna határához tartozó gömbi szögtávolság és $P_n(x)$ *n*-ed fokú Legendre-polinom.

Paul (1983) számítási eljárása azon alapul, hogy a (2) kifejezésbe beírjuk a kibővített Stokes-féle függvényt (1) és tagonként integrálunk az *x* változó szerint. Így $Q_n(\sigma, t_0)$ számítása sorrendben az alábbi rész-integrálok számítására bomlik szét:

$$Q_n(\sigma, t_0) = \sigma I_n(t_0) - 5\sigma^2 J_n(t_0) + 2\sigma A_n(\sigma, t_0) - 3\sigma D_n(\sigma, t_0) - 3\sigma^2 E_n(\sigma, t_0), \tag{3}$$

ahol I_n, J_n, A_n, D_n, E_n a megfelelő rész-integrálokat jelölik. Ezután mindegyik rész-integrál kiszámításához Paul (1983) rekurzív eljárást és kiinduló értékeket ad, amelyekkel a növekvő *n* fokszámok irányában elvileg tetszőleges fokszámig ezek meghatározhatók, és segítségükkel $Q_n(\sigma, t_0)$ számítása is megoldható a (3) kifejezésből. (Megjegyezzük, hogy Paul (1983) cikkében az E_1-re közölt (38′) kifejezés harmadik tagja hibás, mert hiányzik egy 9-es osztó; ezen kívül a D_n és E_n értékek is A_n-től függnek.) A Paul (1983) által közölt rekurziós összefüggéseket fogjuk használni a (3) egyenletben szereplő összes rész-integrál gyors kiszámítására, az A_n-ek kivételével.

Magasabb *n* fokszámokra vizsgálva az algoritmust ugyanis az látható, hogy A_n számításával problémák vannak (2. ábra). Ennek az a jelentősége, hogy ha nem tudjuk pontosan kiszámítani az A_n együtthatókat, akkor a (3) képlet is hibás eredményt fog adni. A következőkben részletesen megvizsgáljuk ezt a kérdést és megmutatjuk, hogy 1-nél kisebb σ értékekre az eljárás miért válik szükségszerűen instabillá kellően magas *n* fokszám esetében.



2. ábra. Az A_n együtthatók Paul (1983)-féle rekurziós számításának magasabb fokszámon jelentkező instabilitása a σ = 0,95 és σ = 0,96 paraméter értékekre. A rekurzióval számított értékek n = 600 illetve n = 750 után nyilvánvalóan rosszak

3 A_n rekurzív számításának stabilitásvizsgálata

A közölt rekurziós számítási összefüggés (Paul 1983) az alábbi módon teremt kapcsolatot három egymás után következő fokszámú A_{n-1}, A_n és A_{n+1} együttható között

$$A_{n-1}(\sigma,t_0)=\frac{2n+1}{2n-1}\frac{(1+\sigma^2)A_n(\sigma,t_0)-I_n(t_0)\,L}{\sigma}-\frac{2n+3}{2n-1}A_{n+1}(\sigma,t_0)\,, \tag{4}$$

ahol

$$I_n(t_0)=\int_{-1}^{t_0}P_n(x)dx\,,\qquad A_n(\sigma,t_0)=\int_{-1}^{t_0}\frac{P_n(x)}{L(\sigma,x)}dx\,. \tag{5a, b}$$

A lineáris differenciaegyenletekre vonatkozóan igen kevés magyar nyelvű szakirodalom áll rendelkezésre, ezért a következőkben tömören áttekintjük a szükséges alapfogalmakat Wimp (1984) és Elaydi (2005) nyomán. Az érdeklődő olvasó magyar nyelven Bege (2005) és Rózsa (1974) műveiben találhat további részleteket.

Valamely m-edrendű ($m \geq 1$) *inhomogén* lineáris differenciaegyenlet

$$\sum_{i=0}^{m}A_i(n)y(n+i)=f(n) \tag{6}$$

az alábbi kezdeti feltételeket kielégítő egyértelmű megoldással rendelkezik bármely α_0, α_1, … , α_{k-1}, állandók és tetszőleges $j \geq 0$ egész esetén

$$y(j+m)=\alpha_k\,,\qquad 0\leq i\leq m-1\,. \tag{7}$$

A (6)-nak megfelelő *homogén* (zérus jobboldalú) differenciaegyenlet lineárisan független megoldásainak $\{y^{(h)}(n)\}$, $1\leq h\leq m$ halmazát *alapmegoldás*nak nevezzük és a homogén rendszer bármelyik megoldása kifejezhető ezek lineáris kombinációjaként. Egy ilyen alaprendszert például így adhatunk meg

$$y^{(h)}(n) = \delta_{h-1,n}\,, \qquad 0 \le n \le m-1\,, \qquad 1 \le h \le m\,, \tag{8}$$

ahol $\delta_{i,j}$ a Kronecker-féle delta. A (6) inhomogén egyenlet bármelyik $y(n)$ megoldása kifejezhető az alapmegoldás elemeinek lineáris kombinációja és (6) valameny $p(n)$ *partikuláris megoldás*a összegeként. Az általunk vizsgált (4) rekurzió is (6) alakú, másodfokú (k = 2) inhomogén lineáris differenciaegyenlet, amelyet az alábbi mátrixos alakba írhatunk át (Wimp 1984)

$$\boldsymbol{y}(n) + \boldsymbol{A}(n)\boldsymbol{y}(n+1) = \boldsymbol{f}(n)\,, \tag{9}$$

ahol $n \ge 1$ esetében

$$\boldsymbol{A}(n) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2n+1}{2n-1}\dfrac{1+\sigma^2}{\sigma} & \dfrac{2n+3}{2n-1} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(n) = \begin{bmatrix} A_n(\sigma,t_0) \\ A_{n+1}(\sigma,t_0) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(n) = \begin{bmatrix} -\dfrac{2n+1}{2n-1}\dfrac{L}{\sigma} I_n(t_0) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Legyen most

$$\boldsymbol{Y}(n) = \left[\boldsymbol{y}^{(1)}(n) \quad \boldsymbol{y}^{(2)}(n)\right] \tag{11}$$

a (9) egyenlethez tartozó homogén egyenlet (8) alapmegoldásaiból álló ún. *alapmátrix* (*Casorati-mátrix*), ahol $\boldsymbol{y}^{(1)}(n)$ és $\boldsymbol{y}^{(2)}(n)$ a két alapmegoldás, valamint $\boldsymbol{w}(n)$ a (6) rekurzió számítani kívánt egzakt megoldása, továbbá jelöljön $\|\cdot\|$ valamilyen alkalmas vektor normát. Az

$$\alpha(k) := \sup_{n>k} \alpha(k,n) = \sup_{n>k} \frac{\|\boldsymbol{w}(k)\|}{\|\boldsymbol{w}(n)\|} \left\|\boldsymbol{Y}(n)\boldsymbol{Y}^{-1}(k)\right\| \tag{12}$$

stabilitási index megmutatja mind a homogén, mind az inhomogén rekurzió stabilitását, az $\alpha(k,n)$ pedig azt, hogy a rekurzió n fokszámnál jelentkező relatív hibája hogyan viszonyul a k fokszámnál levő kezdeti relatív hibához. Ennek az összefüggésnek a levezetését lásd Wimp (1984, 6-7. o.). Ha $\alpha(k) < \infty$, akkor a (6) rekurzió stabil $\boldsymbol{w}(n)$ *előretartó* számítására a k pontban.

A minket érdeklő esetben a (11) alapmátrixot a k = 0 értékhez tartozó $\boldsymbol{Y}(0)$ alapmátrixból vezethetjük le. Legyen az $\boldsymbol{Y}(0)$ alapmátrix egységmátrix, tehát ez a két (8) szerinti alapmegoldás, vagyis $\boldsymbol{y}^{(1)}(0) = [1 \quad 0]^T$ és $\boldsymbol{y}^{(2)}(0) = [0 \quad 1]^T$ oszlopvektoraiból áll. A homogén rendszer $\boldsymbol{y}^{(1)}(n)$ és $\boldsymbol{y}^{(2)}(n)$ alapmegoldásait levezettük az $\boldsymbol{y}^{(1)}(0)$ és $\boldsymbol{y}^{(2)}(0)$-ból a rekurzió számítógépes algebrai rendszerrel történő megoldásával, a kapott megoldásokat ellenőriztük, és azt találtuk, hogy mindegyik kielégíti a (6)-nak megfelelő homogén differenciaegyenletet. Az így kapott alapmátrix n > 1-re

$$\boldsymbol{Y}(n) = \begin{bmatrix} \dfrac{P_{n-2}(t)}{2n-1} & \dfrac{P_{n-1}(t)}{2n-1} \\ \dfrac{P_{n-1}(t)}{2n+1} & \dfrac{P_n(t)}{2n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1/\sigma^{n-2} - \sigma^n}{(2n-1)(1-\sigma^2)} & \dfrac{1/\sigma^{n-1} - \sigma^{n+1}}{(2n-1)(1-\sigma^2)} \\ \dfrac{1/\sigma^{n-1} - \sigma^{n+1}}{(2n+1)(1-\sigma^2)} & \dfrac{1/\sigma^{n} - \sigma^{n+2}}{(2n+1)(1-\sigma^2)} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

ahol $t = (1+\sigma)^2/\sigma$. Az $\boldsymbol{Y}(n)$ mátrix második alakja nagyobb n fokszámok (n > 50) esetében numerikusan kedvezőbb tulajdonságú, így a továbbiakban ezt használtuk.

Az A_n együtthatók számítása kapcsán meghatároztuk a $\log_{10}\alpha(0,n)$ mennyiségek alakulását két különböző t_0 csonkítási sugárra a $\sigma(h)$ számítási magasság és az n fokszám függvényében

(2. ábra). Ez a mennyiség a rekurzív számítás során az adott fokszámig elvesző értékes decimális számjegyek számát mutatja. Az ábrákról jól látszik az, hogy $\sigma = 0{,}96$ paraméter értékre (aminek h = 265 km magasság – nagyjából a GOCE mesterséges hold pályamagassága – felel meg) a számítás során a vizsgált csonkítási sugár értékekre és n = 750 fokszámra már az összes IEEE 754 szabvány szerinti duplapontos (16) számjegy elvész, az eredmény egyetlen értékes jegyet sem tartalmaz. Ez az n érték jó összhangban van azzal, amit a 3. ábrán láthatunk. Azt is megállapíthatjuk, hogy a pontosságromlás kevésbé függ a választott csonkítási sugártól, sokkal inkább a számítási magasság függvénye. A vizsgálatunk szerint az alapfelülethez (geoidhoz) közeli pontokban a számítás lényegében stabilnak tekinthető, viszont jelentősebb magasságban az előretartó rekurziós számítás teljesen használhatatlanná válik.

Azt gondolhatnánk, hogy visszafelé (azaz csökkenő n-ek irányában) haladva a rekurzió szükségszerűen stabillá válik. Amos és Burgmeier (1973) azonban megállapítja, hogy bizonyos esetekben sem az előretartó, sem a visszafelé haladó rekurzió nem stabil. Ebben az esetben a megoldást *peremérték-feladat* megoldásával határozhatjuk meg. Rózsa (1974) a 464. oldalon tárgyalja a másodrendű lineáris differenciaegyenletekre vonatkozó peremértékfeladatot és a megoldandó háromátlós (kontinuáns) egyenletrendszert. Ezt az eljárást fogjuk mi is követni, mert a vizsgálataink szerint az A_n együtthatók számítása numerikusan egyik irányban sem stabil.

Tekintsük tehát a (4) másodrendű inhomogén lineáris differenciaegyenletet. Ezt megfelelő együtthatókkal az $a_n y_{n+1} + b_n y_n + c_n y_{n-1} = -d_n$ alakban írhatjuk fel, ahol y_n a differenciaegyenlet keresett megoldása. Legyenek az y_0 és y_N ismert értékek. Rózsa (1974) és Gautschi (1967) nyomán a másodrendű egyenletet felírhatjuk valamely adott N fokszámig lineáris algebrai egyenletrendszerként, amelynek együttható mátrixa kontinuáns

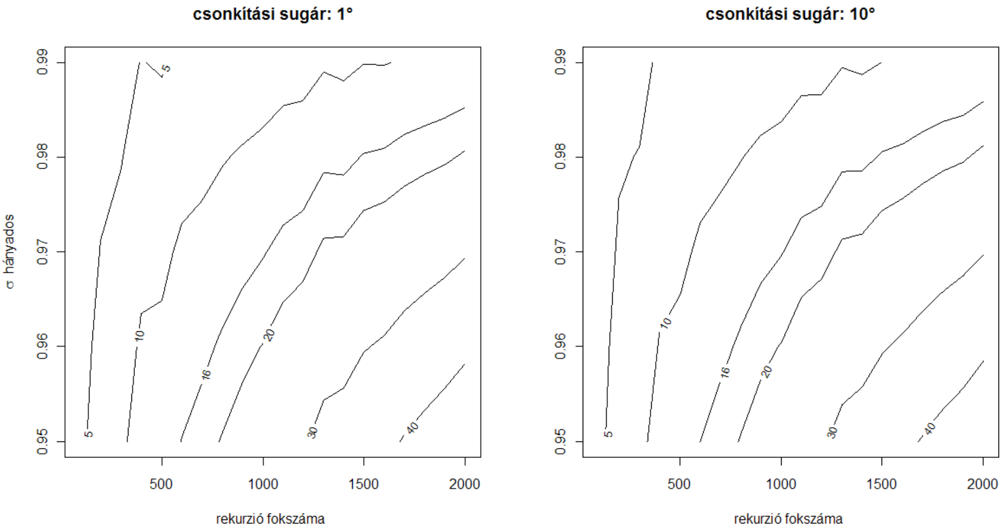
$$\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & b_2 & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & c_{N-2} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & c_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 y_0 d_1 \\ -d_2 \\ \vdots \\ -d_{N-2} \\ -a_{N-1} y_N - d_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

A megoldáshoz nyilván szükségünk van az y_0 és y_N kezdőértékek ismeretére. Az y_N kezdőérték esetünkben az (5b) kifejezéssel adott $A_N(\sigma, t_0)$ rész-integrál. Ennek többezres N fokszámra történő előállítására célszerűen alkalmazható az a kvadratúra eljárás, amelyet a következő részben ismertetünk. A vizsgálataink szerint tízezres fokszámig a peremérték-feladatból a (14) egyenletrendszer megoldásával kapott A_n együtthatók dupla pontosságig számszerűen egyeznek a kvadratúrából számított értékekkel.

Ez az eljárás természetesen nem csak az összes $A_n(\sigma, t_0)$ rész-integrál, hanem a $Q_n(\sigma, t_0)$ csonkítási együtthatók számításához is megfelelő. Viszont a számítási idő csökkentése érdekében előnyben részesítjük majd a $Q_n(\sigma, t_0)$-ek meghatározása során a Paul (1983) által közölt rekurziós összefüggéseket, és a mondottak szerint csak az $A_n(\sigma, t_0)$ rész-integrálok stabil számítását végezzük el a peremérték-feladatból származó (14) lineáris egyenletrendszer megoldásával.

4 Numerikus kvadratúra a csonkítási integrálok számításához

A kibővített Stokes-féle függvény (2) összefüggéssel adott csonkítási együtthatóinak számítása a [-1, t_0] tartományban olyan függvény integrálását jelenti, amely ebben a tartományban akár többezer zérushellyel is rendelkezhet. Ehhez hasonló integrálok adódnak számos matematikai és fizikai problémában, és a szakirodalomban többféle eljárást találunk ezek kiszámítására (Milovanović 1998, Keller és Woźny 2010). Ezek a módszerek két fő csoportba sorolhatók. Az egyikben az integrandusban szereplő n fokszámmal jellemzett függvények sajátos összefüggéseit hasznosítják a kvadratúra számszerű megoldása során. A másikban a numerikus integrálás általános eljárásainak az



3. ábra. Az A_n együtthatók számítása során adott n fokszámig elvesző értékes számjegyek száma

integrandus sajátos szerkezetéhez igazított változatait alkalmazzák. Ez utóbbi módszer esetében az egyik járható út az, hogy az integrandus zérushelyei között integrálunk. Mi is ezt az egyszerűbb módszert használjuk a csonkítási integrál tetszőleges n fokszámhoz tartozó értékének számszerű előállításához.

Általánosságban elmondhatjuk, hogy ha az integrandus zérushelyei az $[a, b]$ tartományban az x_k pontokban vannak ($k = 1, 2, ..., n$), ahol $a \leq x_1 < x_2 \ldots < x_n \leq b$, akkor minden egyes $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallumban valamilyen megfelelő kvadratúra szabállyal kiszámíthatjuk az integrált, és a teljes integrált ezek összegeként állíthatjuk elő. Erre a célra a Lobatto-szabály a Gauss–Legendre-szabálynál jobbnak tűnik, mivel ez a szabály az integrálási intervallumok végpontjaiban felvett függvényértékeket (ez esetünkben zérus) is felhasználja, így nagyobb pontosságot érhetünk el vele (Krommer és Überhuber 1998).

A (2) csonkítási együtthatók számításához a mondottak alapján a $P_n(x)$ Legendre-polinomok zérushelyei közötti Lobatto-szabály szerinti integrálást választottuk.

A numerikus analízisben gyakran szükséges a Legendre-polinomok gyökeinek számítása a Gauss-szabály szerinti kvadratúra osztópontjainak meghatározásához (Glaser et al. 2007). Magas fokszámú Legendre-polinomok esetében hatékony gyökkereső algoritmussal a numerikus integráláshoz szükséges számítási idő nagymértékben lecsökkenthető. Erre a célra dolgozták ki Glaser et al. (2007) a gyökkereső algoritmusukat, amely a korábban ismert eljárásokkal szemben a Legendre-polinomok fokszámával nem négyzetesen, azaz $O(n^2)$, hanem egyenes arányban növekvő $O(n)$ számítási időben képes meghatározni egy adott $P_n(x)$ Legendre-polinom *összes* gyökét. Ez az eljárás akkor válik fontossá, ha magasabb n polinom fokszámra kell meghatároznunk számszerűen az összes gyök értékét.

Ennek az eljárásnak további, számunkra fontos sajátossága az, hogy a számítás során minden esetben előállítja a Taylor-sorát az éppen kiszámított gyökhely közelében. Ez a Taylor-sor a gyökkereséssel párhuzamosan felhasználható az $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallum Lobatto-szabály szerinti osztópontjaiban a Legendre-polinom függvényértékeinek számításához, így rögtön az adott részintervallumra vett integrál is számszerűen meghatározható.

A következő részben röviden áttekintjük Glaser et al. 2007 gyökkereső eljárását. Ez az eljárás ugyan általánosabb érvényű, és többfajta függvény (pl. Bessel-függvények, Hermite- és Laguerre-polinomok gyökkereséshez is használható) de most csupán a számunkra érdekes Legendre-polinomokra vonatkozó változatával foglalkozunk.

4.1 Glaser, Liu és Rokhlin gyökkeresési eljárása Legendre-polinomokra

Röviden összefoglalva, a Glaser et al. 2007 algoritmus a következő lépésekből áll:

1. az *első* pontos gyökhely meghatározása
2. a *következő* pontos gyökhely meghatározása (n-szer ismételve):
   a) következő gyökhely *közelítése*
   b) m-edrendű *Taylor-sor számítása* a pontos gyökhelyen
   c) *pontos gyökhely* keresése Newton-Raphson módszerrel

Mivel az első pontos gyökhely meghatározása (az 1) lépés) speciális esete 2)-nek, ezért először az algoritmus második lépésével foglalkozunk.

A közelítő gyökhely meghatározása azon alapul, hogy a Legendre-polinomok – különösen magasabb fokszám esetén – két egymást követő $\tilde{x}_k$ és $\tilde{x}_{k+1}$ gyökhelyük között valamilyen p körfrekvenciájú $P_n(x) \approx a\sin(px)$ trigonometrikus függvénnyel helyettesíthetők.

Ezt a kifejezést háromszor deriválva

$$P_n'(x) \approx ap\cos(px),\; P_n''(x) \approx -ap^2\sin(px),\; P_n'''(x) \approx -ap^3\cos(px) \tag{15}$$

kapjuk, és az $\tilde{x}_i$ gyökhelyen (ahol $P_n(\tilde{x}_i) = 0$) a p körfrekvencia kiszámítható

$$p = \sqrt{\frac{-P_n'''(\tilde{x}_k)}{P_n'(\tilde{x}_k)}}\;. \tag{16}$$

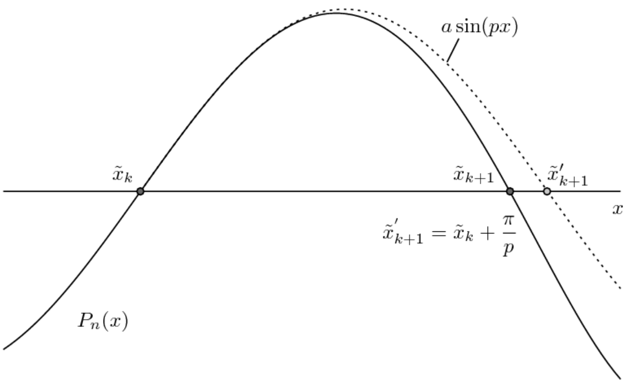
A következő $\tilde{x}_{k+1}$ gyökhely $\tilde{x}'_{k+1}$ közelítése (4. ábra)

$$\tilde{x}'_{k+1} = \tilde{x}_k + \frac{\pi}{p}\;. \tag{17}$$

A Newton-Raphson gyökkereséshez mind a függvényértékek mind az első deriváltak számítására szükség van, ezért fel kell írni a Legendre-polinomok és első deriváltjaik m-ed rendű Taylor-sorait a pontos $\tilde{x}_k$ gyökhelyen

$$P_n(x) \approx \sum_{j=0}^{m} \frac{P_n^{(j)}(\tilde{x}_k)}{j!}(x-\tilde{x}_k)^j\,, \tag{18}$$

$$P_n'(x) \approx \sum_{j=1}^{m} \frac{P_n^{(j)}(\tilde{x}_k)}{(j-1)!}(x-\tilde{x}_k)^{j-1}\,. \tag{19}$$



4. ábra. A Legendre-polinomok közelítő gyökhelyének meghatározása

A szükséges deriváltak számítása m-ed rendig a pontos $\tilde{x}_k$ gyökhelyen ismert 0. és 1. rendű deriváltakból történik, az alábbi rekurziós összefüggéssel (Glaser et al. 2007):

$$(1-x^2)P_n^{(j+2)}(\tilde{x}_k) = 2(j+1)\,x\,P_n^{(j+1)}(\tilde{x}_k) - [n(n+1) - j(j+1)]\,P_n^{(j)}(\tilde{x}_k)\ . \tag{20}$$

A Taylor-sorfejtés m maximális rendje numerikusan határozható meg. Az eredményekhez duplapontos számítás esetében Glaser et al. (2007) szerint m = 30 elegendő pontosságot nyújt.

A következő pontos gyökhely megkeresése a jól ismert Newton-Raphson módszerrel történik, az alábbi összefüggés szerint (5. ábra)

$$x_{i+1} = x_i - \frac{P_n(x_i)}{P_n'(x_i)}, \tag{21}$$

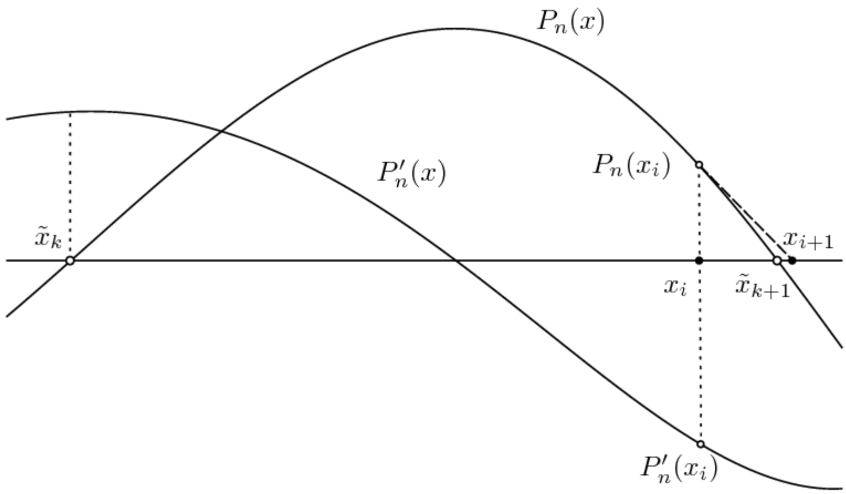
ahol x_i, x_{i+1} a gyökhely két egymás utáni közelítése.

A tapasztalataink szerint a numerikus gyökkereséshez 10^{-20} pontossággal átlagosan csak 4 iteráció szükséges. A Legendre-polinom Taylor-sorát a gyökkeresés után felhasználjuk az $[x_k, x_{k+1}]$ részintervallum Lobatto-szabály szerinti osztópontjaiban a polinom függvényértékeinek számításához. Így rögtön az adott részintervallumra vett integrál is számszerűen meghatározható.

Az első pontos gyökhely számítása a fentiekhez hasonlóan történik. Eltérés csak abban van, hogy páros ill. páratlan n fokszám esetében az x = 0 pontban a polinom deriváltja ill. a polinom maga vesz fel zérus értéket. Ezen kívül a páros ill. páratlan fokszámú Legendre-polinomok az origóban koszinusz ill. szinusz függvényekkel közelíthetők. Ebből következik az, hogy páros fokszámú polinom esetén nem a (13)-as összefüggés érvényes, hanem helyette eggyel alacsonyabb rendű deriváltakkal kell számítani a p körfrekvenciát. Páros és páratlan fokszám esetén tehát

$$p = \sqrt{\frac{-P_{2n}''(0)}{P_{2n}(0)}}\ , \qquad \text{illetve} \qquad p = \sqrt{\frac{-P_{2n+1}'''(0)}{P_{2n+1}'(0)}}\ . \tag{22a, 22b}$$

Az x = 0 pontban a Taylor-sorhoz szükséges magasabb deriváltakat a (20)-es kifejezés értelemszerű alkalmazása szolgáltatja.



5. ábra. A Legendre-polinomok gyökhelyének meghatározása Newton-Raphson módszerrel

5 Számszerű vizsgálatok

A numerikus integrálás pontosságvizsgálata tekintetében az egyik lehetőség a kibővített Stokes-féle függvényre vonatkozó

$$Q_n(\sigma,1) = \int_{-1}^{1} S(\sigma,x)\, P_n(x)dx = \frac{2}{n-1}\sigma^{n+1}, \qquad n = 2, 3, \ldots \tag{23}$$

ismert összefüggés alkalmazása (Chuanding et al. 1998). Ez esetben a számítható csonkítási együtthatók maximális fokszáma a gyakorlatban a σ^{n+1} tényező miatt korlátozott a duplapontos aritmetikával még ábrázolható legkisebb szám miatt (IEEE 754 szabvány szerint ez kb. $2{,}2\cdot 10^{-308}$). A numerikus integrálással kiszámított együtthatók eltérése a (23) összefüggéssel meghatározható ellenőrző értékektől az elvégzett vizsgálataink szerint 12 osztópontos kvadratúrával megfelel a számábrázolás pontosságának. Viszont kisebb n fokszám mellett szükséges lehet az osztópontok számának növelése.

A fenti megállapítások a ψ_0 = 0° csonkítási sugár esetén érvényesek. Ettől eltérő csonkítási sugarat felvéve már nem tudjuk zárt alakban kiszámítani a csonkítási együtthatókat. Ellenben azt meg tudjuk vizsgálni, hogy a Gauss–Lobatto osztópontok számát változtatva mennyit változik a kiszámított érték. Amennyiben ez a változás megfelel a duplapontos számábrázolás pontosságának, akkor az eredményt elfogadhatónak tekinthetjük.

A csonkítási sugár és a csonkítási együttható fokszámának függvényében vizsgáltuk az együtthatók számításához szükséges Gauss–Lobatto osztópontok számát. A részleteket mellőzve azt mondhatjuk, hogy általában elegendő volt 12 osztópont felvétele, de alacsony fokszám és kisebb csonkítási sugár mellett szükséges volt megnövelni az osztópontok számát. Ugyanez mondható el a σ paraméter értékének növeléséről. Megjegyezzük, hogy a Gauss–Lobatto pontok számának növelése (12-ről 40-re) csupán mintegy 5-10%-al növelte a csonkítási együtthatók számítási idejét.

A Taylor-sor maximális m fokszámát változtatva azt tapasztaltuk, hogy a javasolt m = 30 valóban még az n = 10000 fokszámú együttható számításához is elegendő pontosságot nyújt. A Taylor-sor m fokszámát 15-re csökkentve a relatív pontosság még mindig 1,5% alatt maradt, és az n értékét csökkentve ez csak tovább javult (pl. n = 100 esetén $2{,}3\cdot 10^{-4}$).

A 2. pontban tárgyalt, az I_n, J_n, A_n, D_n, E_n rész-integrálok Paul (1983)-féle rekurziós számításán alapuló eljárás pontosságát is megvizsgáltuk. Természetesen a 3. pontban mondottak szerint az A_n együtthatókat nem Paul eljárásával, hanem a (14) kontinuáns mátrixú egyenletrendszer segítségével állítottuk elő. Kiszámítottuk minden vizsgált n fokszámra a (3) összefüggés bal oldalát az ismertetett numerikus kvadratúrával, és a jobb oldalt Paul (1983) I_n, J_n, D_n, E_n rész-integrálokra vonatkozó rekurziós eljárásával. Az így nyert két értéket összevetettük egymással.

Az 1. táblázatban látható abszolút hibák azt mutatják, hogy az alacsony fokszámú együtthatók (n < 20) kivételével a rekurzív úton illetve numerikus integrálással kiszámított eredmény összhangja megfelel a duplapontos számábrázolás pontosságának.

Amint láttuk, az elérhető pontosság több tényezőtől is függ, a számunkra szükséges konkrét esetekben ezért mindig tanácsos a számítás pontosságát a számítandó legkisebb csonkítási sugarat, a legnagyobb σ paraméter értéket, valamint a legkisebb n fokszámot tekintetbe véve megvizsgálni, és ez alapján megállapítani a Gauss–Lobatto pontok számát.

1. táblázat. Rekurzív úton illetve numerikus integrálással kapott csonkítási együtthatók valamint eltéréseik különböző n fokszámok és ψ_0 = 10°-os csonkítási sugár esetén (σ = 0,95)

fokszám	rekurzióval	numerikus integrálással	eltérés
10	-0.07904714216828351	-0.07904714208990553	$7.84\cdot 10^{-11}$
20	-0.02146583768883698	-0.02146583768883655	$4.34\cdot 10^{-16}$
50	-0.01135267159672885	-0.01135267159672892	$7.11\cdot 10^{-17}$
500	0.0003620570900584294	0.0003620570900582837	$1.46\cdot 10^{-16}$
1000	0.0001122758028367139	0.0001122758028364619	$2.52\cdot 10^{-16}$
10000	$3.559671083027893\cdot 10^{-6}$	$3.559671082829714\cdot 10^{-6}$	$1.98\cdot 10^{-16}$

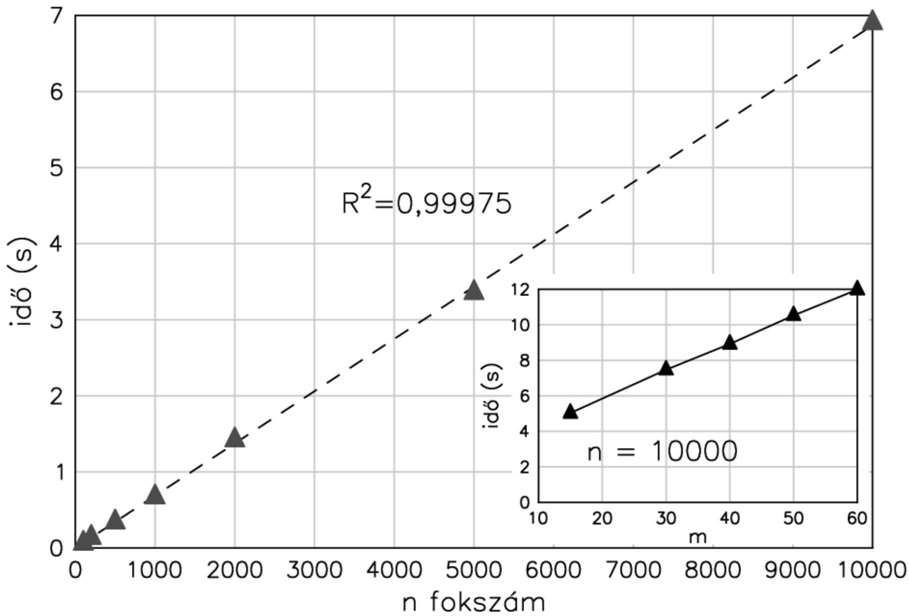
A csonkítási együtthatók kvadratúrával történő kiszámításának ideje az elvégzett vizsgálataink szerint (ahogyan várható volt) egyenesen arányos az együttható *n* fokszámával. Ezt mutatja a 6. ábra. Az általunk javasolt rekurziós számítással az *összes* együttható kiszámítása valamely maximális *n* fokszámig az ábrán látható *n*-hez tartozó időnél csupán kb. 30%-al több időt igényel. Az ábrán az is látható, hogy a Taylor-sor fokszámának növelése milyen mértékben befolyásolta a számítás idejét.

6 Összefoglalás

A jelen tanulmányban ismertetett számítási eljárás lehetőséget biztosít a kibővített Stokes-féle függvény csonkítási együtthatóinak pontos és stabil számításához egészen magas fokszámig (n = 10000). A cikkben hatékony eljárást javasoltunk erre a számításra. Kimutattuk, hogy a Paul (1983)-féle rekurzív számítási eljárás azért válik instabillá a paraméterek megválasztásától függő (többnyire néhányszor száz) fokszámra, mert a számításhoz szükséges A_n rész-együtthatók számítása pontatlan. Ezeknek a rész-együtthatóknak a számításához kidolgoztunk egy kontinuáns mátrixú lineáris egyenletrendszer megoldásán alapuló eljárást, amelyhez a peremértéket magas fokszámú Legendre-polinomokkal felírt kvadratúra szolgáltatja.

A kibővített Stokes-féle függvény magas fokszámú csonkítási együtthatóinak kiszámításához kidolgoztunk egy olyan numerikus kvadratúrát, amelynek fontos része a Legendre-polinomok fokszámával lineárisan növekvő számítási idejű gyökkereső algoritmus és a gyökhelyeken felírt Taylor-sorfejtések alkalmazása a Legendre-polinomok számítására. Megvizsgáltuk különböző csonkítási sugár és fokszám értékekre a numerikus kvadratúra pontosságát.

A módszer a bemutatottnál általánosabb esetben is használható. Valamely adott függvény igen magas fokszámú Legendre-polinommal vett szorzatintegráljának számítására is alkalmas lehet tetszőleges alaptartományon. Ilyen integrálok, mint említettük, gyakran előfordulnak a fizikai geodéziában.



6. ábra. A kibővített Stokes-féle függvény csonkítási együtthatóinak számítási ideje m = 30 fokszámú Taylor-sorral, 12 osztópontos Gauss–Lobatto numerikus kvadratúrával, σ = 0.7 és ψ_0 = 30° csonkítási sugár esetén. Az R^2 determinációs együttható azt mutatja, hogy a számítási idő jól követi szaggatott vonallal jelölt origón átmenő kiegyenlítő egyenest. A jobb alsó kisebb ábrán a számítási idő látható a Taylor-sor m fokszáma függvényében az n = 10000 együtthatóra

Másik lehetőségként utalunk a Legendre-polinomok *deriváltjai*val vett szorzatintegrálok számítására tetszőleges tartományon. Bár a Glaser és mások (2007) a gyökkereső algoritmust elsősorban ortogonális polinomokra, többek között Legendre-polinomokra dolgozták ki, de a polinomok deriváltjainak gyökkeresésére is alkalmas. Mivel bármely j-edrendű hozzárendelt (asszociált) Legendre-függvény kifejezhető a megfelelő n-edfokú Legendre-polinom j-edrendű deriváltjával, így az eljárás felhasználható ezek gyökkereséséhez is.

Amikor az Eötvös-inga mérési eredményeit – amelyek a nehézségi erő deriváltjai, illetve ezek kombinációi – bevonjuk a fizikai geodézia peremértékfeladataiba, hasonló csonkítási integrálokhoz jutunk. Fontos példa a függőleges (vertikális) gradiens meghatározása az Eötvös-ingával mérhető vízszintes gradiensek felhasználásával. Így a bemutatott számítási eljárás ezek esetében is jól alkalmazható. A jövőbeni kutatásaink céljai között ez is szerepel.

Köszönetnyilvánítás. Köszönjük bírálóink, Bartha Gábor és Benedek Judit értékes javaslatait, amelyek hasznosnak bizonyultak a cikk javított változatának elkészítése során.

Hivatkozások

Amos DE, Burgmeier JW (1973): Computation with three-term, linear, nonhomogeneous recursion relations. SIAM Review, 15(2), 335-351.

Bege A (2005): Differenciaegyenletek. Kolozsvári Egyetemi Kiadó, Kolozsvár, 191.

Chuanding Z, Zhonglian L, Xiaoping W (1998): Truncation error formulae for the disturbing gravity vector. Journal of Geod., 72, 119-123.

Elaydi S (2005): An Introduction to Difference Equations. 3rd Edition, Springer, 539.

Gautschi W (1967): Computational aspects of three-term recurrence relations. SIAM Review, 9(1), 24-82.

Glaser A, Liu X, Rokhlin V (2007): A fast algorithm for the calculation of the roots of special functions. SIAM Journal on Sci. Comp., 29(4), 1420-1438.

Keller P, Woźny P (2010): On the convergence of methods for indefinite integration of oscillatory and singular functions. Applied Math. and Comput. 216, 989-998.

Krommer AR, Überhuber CW (1998): Computational integration. SIAM, Philadelphia, 238.

Milovanović GV (1998): Numerical Calculation of Integrals Involving Oscillatory and Singular Kernels and Some Applications of Quadratures. Computers Math. Applic. 36(8), 19-39.

Paul MK (1973): A method of evaluating the truncation error coefficients for geoidal height. Bull. Géod., 47, 413-425.

Paul MK (1983): Recurrence relations for the truncation error coefficients for the extended Stokes function. Bull. Géod., 57, 152-166.

Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). Journal of Geophys. Res., 117, B04406, doi:10.1029/2011JB008916.

Rózsa P (1974): Lineáris algebra és alkalmazásai. Műszaki Könyvkiadó, 685.

Tóth Gy (2003): Az Eötvös geodéziai peremértékfeladat. Geomatikai Közlemények, 5, 163-174.

Tóth Gy, Földváry L, Tziavos IN, Ádám J (2006): Upward/Downward Continuation of Gravity Gradients for Precise Geoid Determination. Acta Geod. Geoph. Hung., 40(1), 21-30.

Wimp J (1984): Computation with recurrence relations. Pitman, Boston, 336.

OPTIMÁLIS GEOMETRIA KIALAKÍTÁSA DELAUNAY-HÁROMSZÖGELÉSSEL FÜGGŐVONAL-ELHAJLÁS INTERPOLÁCIÓ CÉLJÁRA

Ultmann Zita, Völgyesi Lajos**

Creating optimal geometry by Delaunay triangulation for interpolation of deflection of the vertical – *Creating the optimal geometry of the interpolation net is an important part of the computation of deflection of the vertical based on Torsion balance measurements. The triangle chain fitting to the torsion balance stations should be designed to be adequate for the interpolation, and the distances between the adjacent points should be minimal and the curvature gradients between that selected torsion balance points should be as linear as it possible. So far this task has been performed manually with a huge slave work furthermore we did not always succeed in finding the optimal geometry. Delaunay triangulation offers a new opportunity to solve the problem by computer. Selecting the most suitable pairs of points the automatic creation of the interpolation network has been succeeded by an appropriate modification of the Delaunay triangulation.*

Keywords: Torsion balance, deflection of the vertical, triangle chain, interpolation, Delaunay triangulation

Az interpolációs hálózat geometriájának megfelelő kialakítása fontos lépése az Eötvös-inga mérések alapján végzett függővonal-elhajlás interpolációnak. A mérési pontokra illesztett háromszög láncolatokat úgy célszerű kialakítani, hogy a lehető legrövidebb távolságok adódjanak, és a háromszögoldalak mentén a görbületi gradiensek megváltozása a lehetőségekhez képest leginkább lineáris legyen. Eddig az interpolációs eljárás során ezt a lépést manuálisan oldottuk meg, ami egyrészt óriási munkát jelentett, másrészt nem minden esetben sikerült kialakítani az optimális geometriát. A probléma számítógépes megoldására a Delaunay-háromszögelés kínál lehetőséget. Ennek megfelelő módosításával sikerült a legalkalmasabb pontpárok keresésével automatizálni a hálózati geometria kialakítását a függővonal-elhajlás interpoláció céljára.

Kulcsszavak: Eötvös-inga, függővonal-elhajlás, háromszög láncolat, interpoláció, Delaunay-háromszögelés

1 Függővonal-elhajlás interpoláció Eötvös-inga mérések alapján

Az 1. ábrán látható tetszőleges P_i és P_k pont között a függővonal elhajlás összetevők $\Delta\xi_{ki}$ és $\Delta\eta_{ki}$ megváltozása (Biró et al. 2013) és az Eötvös-ingával mérhető W_Δ és W_{xy} görbületi gradiensek kapcsolatát az

$$\int_{ni}^{nk} \frac{\partial^2 W}{\partial n \partial s} \cong \frac{1}{2}\left[\left(\Delta W_{ns}\right)_i + \left(\Delta W_{ns}\right)_k\right] n_{ik} = g\left(\Delta\xi_{ki}\sin\alpha_{ik} - \Delta\eta_{ki}\cos\alpha_{ik}\right) \tag{1}$$

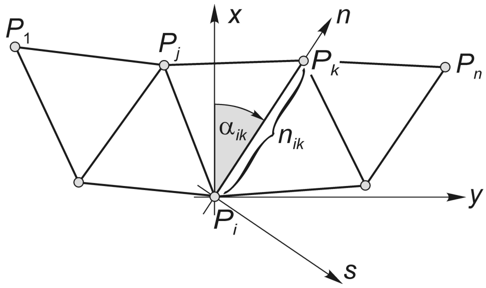
összefüggés adja meg, ahol a

$$\Delta W_{ns} = \frac{1}{2}\left(W_\Delta - U_\Delta\right)\sin 2\alpha_{ik} + \left(W_{xy} - U_{xy}\right)\cos 2\alpha_{ik}\,, \tag{2}$$

amelyben az U_Δ és az U_{xy} az Eötvös-ingával mérhető W_Δ és W_{xy} görbületi gradiensek normálértékei (Völgyesi 1993, 1995). Az (1) integrálnak a trapéz integrálformulával közelítése azonban csak akkor lehetséges, ha a két pont között a gradiensek változása lineárisnak tekinthető. Amennyiben nem csak két pont között, hanem nagyobb összefüggő területen szeretnénk függővonal-elhajlás interpolációt végezni, akkor a területet háromszöghálóval lefedve további két

$$\Delta\xi_{ki} + \Delta\xi_{ij} + \Delta\xi_{jk} = 0 \quad \text{és} \quad \Delta\eta_{ki} + \Delta\eta_{ij} + \Delta\eta_{jk} = 0 \tag{3}$$

[*]BME, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.
E-mail: ultmann@gmail.com, volgyesi@eik.bme.hu



1. ábra. Az interpolációs hálózat pontjai

összefüggés írható fel valamennyi háromszögre (Völgyesi 1993), mivel az egyes háromszögeken körbehaladva a $\Delta\xi_{ki}$ és $\Delta\eta_{ki}$ összegeknek zérust kell adniuk.

Nagyobb összefüggő területen, ahol a P_1 és a P_n ponton ismertek a függővonal-elhajlás összetevők értékei (1. ábra), az alábbi összefüggések is felírhatók (Völgyesi 1993):

$$\sum_{i=1}^{n-1} \Delta\xi_{i+1,i} = \xi_n - \xi_1 \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{n-1} \Delta\eta_{i+1,i} = \eta_n - \eta_1 \,. \tag{4}$$

Ekkor, ha az adott területen megfelelő pontsűrűségben állnak rendelkezésre Eötvös-inga mérések, elvégezhető a függővonal-elhajlás interpoláció.

Az interpoláció fontos lépése az Eötvös-inga mérési pontokhoz illeszkedő olyan interpolációs hálózat kialakítása, melyet alkotó háromszögpontok a lehető legközelebb helyezkednek el egymáshoz képest úgy, hogy a háromszögoldalak mentén a görbületi gradiensek megváltozása a lehetőségekhez képest leginkább lineáris legyen. Korábban a modern számítástechnika által kínált lehetőségeket kihasználva olyan szoftvert készítettünk, amely az Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges nagyobb területet beborító hálózatokra képes a függővonal-elhajlás értékeket automatikusan meghatározni (Völgyesi 1993, 1995, 2012). A szoftver használata során az egyetlen nehézséget az jelentette, hogy az interpolációs hálózat pontjait az adatbázisból nekünk kellett kiválogatni, és a háromszöghálózat oldalait alkotó pontpárok kiválasztása is csak manuálisan volt lehetséges. Ez nagyobb területek esetén hatalmas munka, ráadásul így nehezen biztosítható az optimális hálózati geometria kialakítása.

Mostani célunk olyan algoritmus elkészítése volt, amely a Delaunay-háromszögelés alapelvét felhasználva képes az interpolációs hálózati geometria automatikus kialakítására.

2 A Delaunay-háromszögelés

A Delaunay-háromszögelés a számítógépes grafikában illetve a térinformatikában alapvetően elterjedt felületképző algoritmus, számos sikeres korábbi geodéziai alkalmazását ismerjük felület-interpolációra (pl. Kalmár 1994, 2000; Nagy et al 1999). Bemenetként minden esetben két- vagy háromdimenziós pontfelhő szolgál, kimenetként pedig a pontokra illesztett ideális háromszögek csúcspontjainak azonosítóit kapjuk. Mostani esetünkben elegendő a kétdimenziós esettel foglalkoznunk, mivel most nem felületet szeretnénk kialakítani, hanem csak pontpárokat keresünk, amelyekkel egyszerű síkbeli háromszög-hálózatot kívánunk létrehozni.

Az ideális Delaunay-háromszögek létrehozására sokféle módszer terjedt el, viszont valamennyi algoritmus közös tulajdonsága, hogy:

- a kapott háromszögek köré írt körön belül nem helyezkedhet el a pontfelhőnek egyetlen további eleme sem, legfeljebb a körökön lehet maximum 4 pont,
- az eljárások a háromszögek legkisebb belső szögét maximalizálják az ún. Delaunay-feltétel szerint (Lee és Schachter 1980), törekedve szabályos háromszögek kialakítására,
- a Delaunay-háromszögek köré írható körök középpontjainak összekötésével kapjuk az ún. Voronoi-cellákat (Lee és Schachter 1980).

A 2. ábra a Delaunay-háromszögelés alapelvét szemlélteti, ahol az *A*, *B*, *C*, ..., *F* a pontfelhő pontjai, 0_i pedig a háromszögek köré írható körök középpontját jelöli.

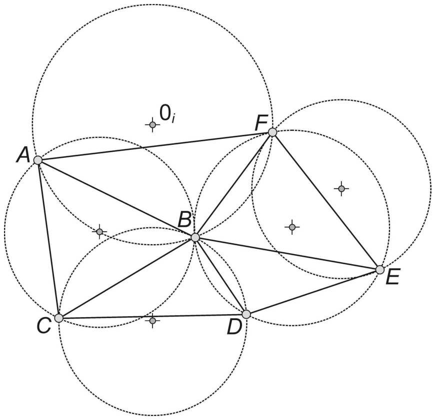
A Delaunay-háromszögek keresésekor a legfontosabb lépés annak eldöntése, hogy valamely *D* pont a vizsgált *ABC* háromszög köré írható körökön belül vagy kívül helyezkedik-e el. Ez a kérdés a

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

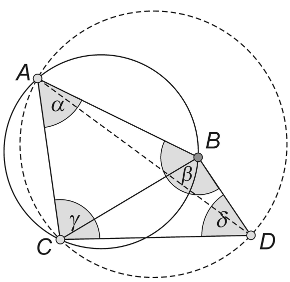
mátrix determinánsának kiszámításával dönthető el (x_i, y_i a pontok vízszintes koordinátái). Amennyiben a determináns értéke pozitív, akkor a *D* pont a körön belül fekszik, és a létrehozott háromszög nem tekinthető Delaunay-háromszögnek.

A háromszögek kialakítására leginkább elterjedt algoritmusok az *élcsere*, az *inkrementális* és az *oszd meg és uralkodj* algoritmusok (Shewchuk 1997). Ezeknek számos továbbfejlesztett változata is született.

Az élcsere (flipping) algoritmus a kezdeti háromszögek létrehozása után vizsgálja a Delaunay-feltételeket. A 3.ábrán látható *A*-*B*-*C*-*D* pontok alapján két szomszédos háromszög összekapcsolásával létrejövő négyszögekben összehasonlítja az egymással szemben levő ($\alpha+\delta$ illetve $\beta+\gamma$) belső szögek összegét. A kétféle *ABC* és *BDC* vagy *ACD* és *BAD* háromszögpár közül azt a felbontást választja, ahol a szemben levő belső szögek összege kisebb mint 180° (esetünkben ez az *ABC* és *BDC* háromszög, mivel az $(\alpha+\delta)<180°$, $(\beta+\gamma)>180°$). Ezt a választást megerősíti, hogy a 3. ábrán láthatóan a *D* pont az *ABC* háromszög köré írt folytonos vonallal jelölt körön kívül esik, míg a *B* pont az *ACD* pontok köré írt szaggatott vonallal jelölt körön belül helyezkedik el.



2. ábra. A Delaunay-háromszögelés alapelvének magyarázata



3. ábra. Delaunay belső szög kritériuma

Amennyiben a 4 pont egyetlen körön helyezkedik el (pl. a 2. ábrán a *B*, *D*, *E*, *F* pontok), akkor mindkét felosztás egyaránt megfelelő.

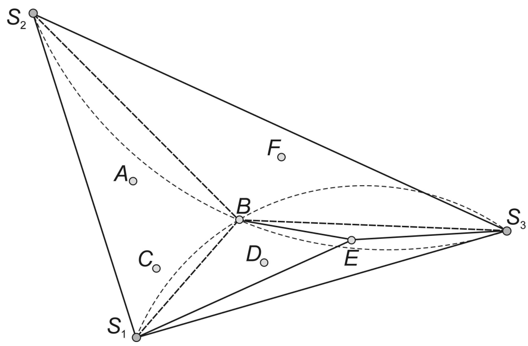
Az inkrementális (Bowyer-Watson) algoritmus (Bowyer 1981) szerint a pontfelhőt teljesen magába foglaló $S_1S_2S_3$ háromszög (4. ábra) létrehozása után a ponthalmaz egyik pontját (pl. a *B* pontot) választva a szaggatott vonallal határolt további háromszögek jönnek létre. Az új háromszögek köré írható körök metsző halmazában található új (pl. *E*) ponton keresztül képződnek az új S_1BE, BS_3E illetve S_1ES_3 háromszögek, miközben a megelőző S_1BS_3 háromszöget törölni kell. A folyamat ismétlődő (rekurzív) módon folytatható, míg az összes pontra nem illeszkedik háromszögháló.

Az oszd meg és uralkodj alapelven működő algoritmus a ponthalmazt az 5. ábrán látható módon két (esetleg több) kisebb részre osztja, utána az egyes (S_1 és S_2) részeken előállítja a Delaunay-háromszöghálót, végül a részek összekapcsolása következik.
A vizsgálataink szerint az esetünkben mindhárom algoritmus jól alkalmazható, némi különbség a számítógépes futási időben mutatkozott.

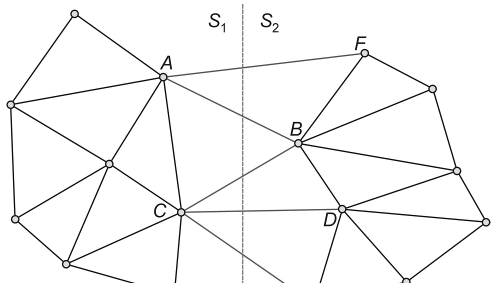
A bemutatott három alaptípust Ruppert (1995) alapelvén többen továbbfejlesztették. A fejlesztések mindegyike további (ún. Steiner-) pontokkal bővíti az adott ponthalmazt, így optimalizálva a háromszöghálózat kialakítását. Az egyes módszerekkel előállított sűrített háromszöghálók kismértékben különböznek egymástól.

3 Vizsgálatok a Cegléd-környéki teszt-területen

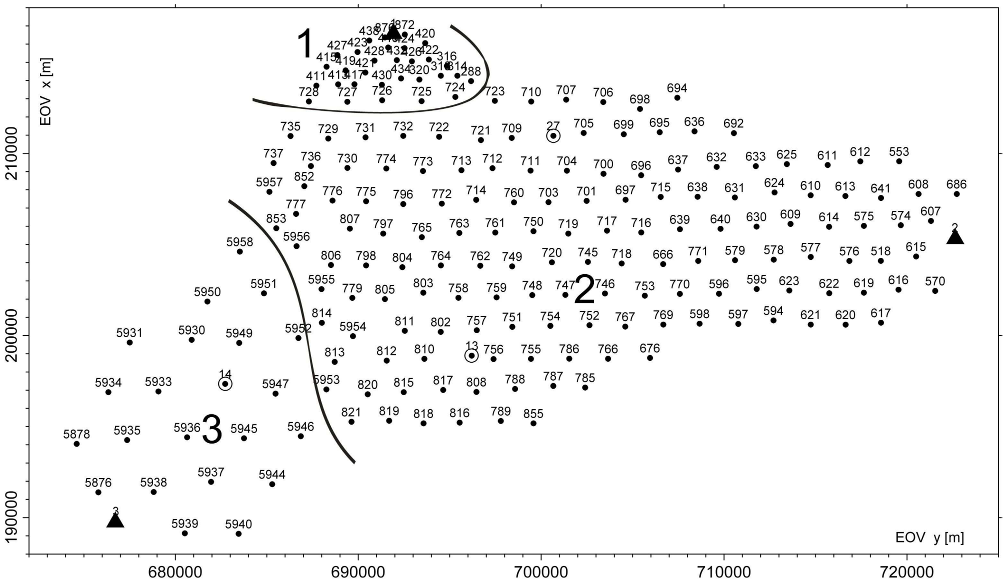
Korábban számos vizsgálatot végeztünk az Eötvös-ingával részletesen felmért Cegléd környéki teszt-területen a függővonal-elhajlás interpolációra vonatkozóan. A 6. ábrán látható mintegy 1200 km^2 kiterjedésű területen az ELGI főleg 1949-1950. évi méréseiből származó 206 Eötvös-inga mérési pont, 3 asztrogeodéziai és 3 asztrogravimetriai pont található. Az Eötvös-inga állomások helyét kerek pontok jelölik (felettük a mérési pont számával), a háromszögek az asztrogeodéziai, a kettős körök pedig az asztrogravimetriai pontok. A kereten EOV koordináták láthatók. Azért választottuk ezt a területet a vizsgálataink céljára, mert az ábrán látható változó pontsűrűség miatt magyarországi



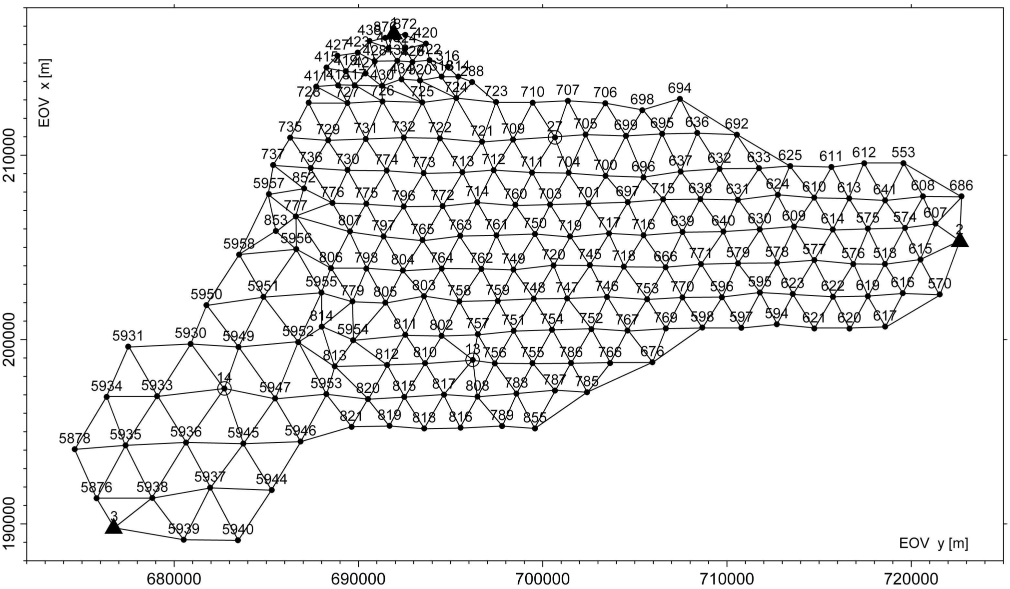
4. ábra. Az inkrementális algoritmus magyarázata



5. ábra. Az *oszd meg és uralkodj* algoritmus alapelve viszonyok között itt a legnehezebb az interpolációs hálózat automatikus előállítása. A terület a pontsűrűség tekintetében három különböző részre osztható. A 6. ábrán a „2” és a „3” számmal jelzett területen a pontok egymástól mért távolsága és a területi eloszlása megfelel az átlagos magyarországi síkvidéki viszonyoknak (itt az átlagos pontsűrűség 2, illetve 3-3.5 km), azonban az ábra felső részén az „1” jelű területen Pilis és Albertirsa közelében az Eötvös-inga mérési állomásokat az átlagos alföldi gyakorlattól eltérően nagyobb pontsűrűséggel telepítették. Ez a rész Gödöllői-dombság déli nyúlványa, ahol az Eötvös-ingával mérhető gradiensek változása markánsabb, így ezen a tagoltabb topográfiájú, "zavartabb" területen az észleléseket nagyobb (átlagosan 1-1.5 km) pontsűrűséggel végezték. Az adott mérési pontokra a korábban manuálisan illesztett interpolációs hálózat a 7. ábrán tanulmányozható.



6. ábra. Az Eötvös-inga mérési pontok területi eloszlása a Cegléd környéki teszt-területen

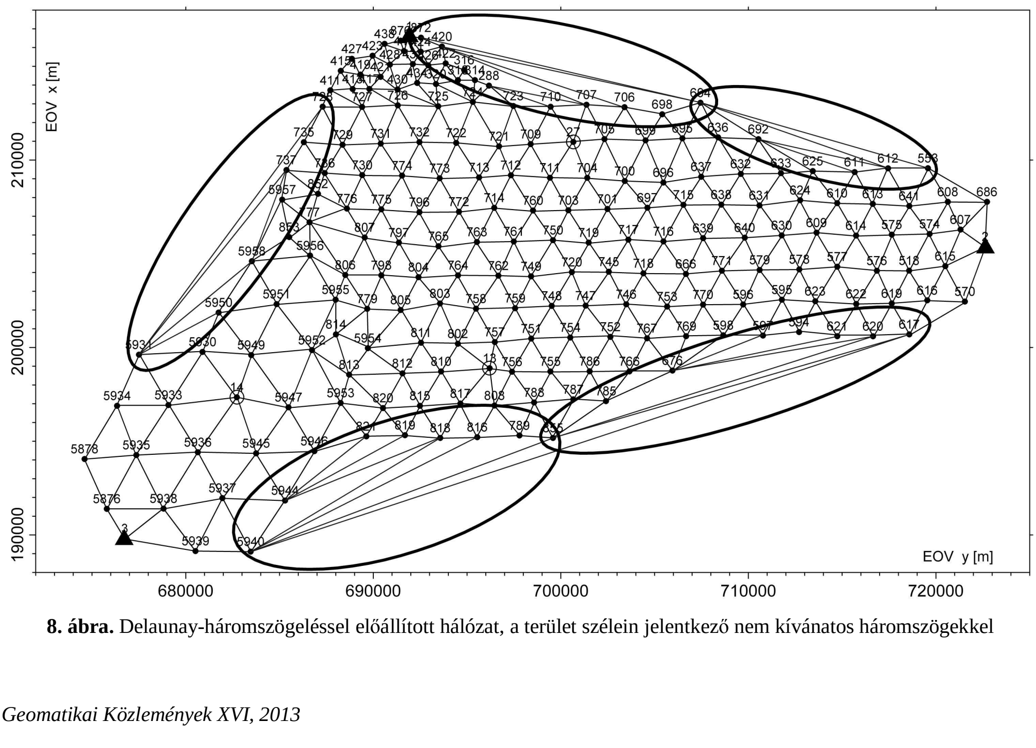


7. ábra. A korábbi manuálisan kialakított interpolációs hálózat

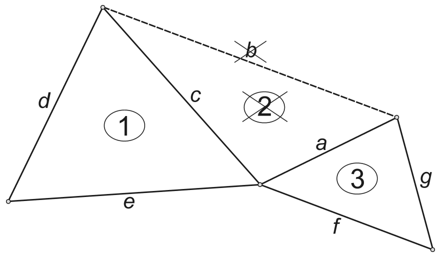
A Delaunay-háromszögelés alapelvét alkalmazó, tetszőleges pontfelhőt felületté alakító szoftverek-nek több fajtája létezik – mi a MATLAB programot használtuk. Ennek bemenő adatai a pontok kétdimenziós koordinátái, kimenete pedig a Delaunay háromszögek csúcspontjai. A MATLAB szoftverbe épített Delaunay-háromszögelést végző modul által a teszt-területünkre előállított hálózatot a 8. ábrán mutatjuk be. A terület szélein jelentkező nem kívánatos háromszögek arra figyelmeztetnek, hogy a módszer további finomításokat igényel, ugyanis a széleken kialakított háromszögek pontjai között olyan nagy távolságok adódtak, amelyek esetében egészen biztosan nem teljesül az interpoláció legfontosabb követelménye, miszerint két szomszédos pont között a görbületi gradiensek megváltozásának lineárisnak kell lenniük. Ráadásul a fölösleges háromszögoldalakra további egyenleteket írunk fel újabb információ (mérés) nélkül, ami valamilyen mértékben biztosan torzítja az alakmátrix súlyviszonyainak megváltozásán keresztül az ismeretlen függővonal-elhajlások értékét.

A problémát egyébként az okozza, hogy a MATLAB Delaunay-algoritmusa mindenképpen létrehozza a ponthalmaz konvex burkoló görbéjét, ezért ebből elő kell állítanunk a konkáv burkoló görbét, a nem kívánatos háromszögek elhagyásával.

A konkáv burkológörbe előállítására a szakirodalom alapján több lehetőség kínálkozik (pl. Ruppert 1995). Hazai példaként Kalmár (1994) a széleken keletkező elnyújtott háromszögek kiküszöbölésére a ponthalmazt kiegészítette 4 (keret)ponttal úgy, hogy ez a négyszög az összes alappontot már tartalmazza, és a 4 ponttal kiegészített ponthalmazra végezte el a háromszög-lefedést, majd az összes, keretpontokra illeszkedő háromszöget kihagyta a végső háromszöglefedésből. Mi inkább a háromszögoldalak hossza arányának vizsgálatán alapuló eljárást alkalmaztuk (ezzel az egyszerűbb eljárással ugyanis nem csak a terület szélein, hanem a terület belsejében adódó kedvezőtlen háromszögoldalak is kiszűrhetők). A háromszögoldalak hossza arányának vizsgálatán alapuló eljárásnak az a lényege, hogy valamennyi előállított Delaunay-háromszögekre megállapítható egy $p = a/b$ (minimális / maximális oldalhossz) arány, amely alapján ki lehet szűrni az olyan háromszögeket, amelyek alakja jelentősen eltér az Eötvös-inga mérési állomások területi eloszlására leginkább jellemző egyenlő oldalú háromszögek alakjától. Ezt a 9. ábrán szemléltetjük, ahol pl. a 2-es jelű háromszög legkisebb a oldala és a legnagyobb b oldala hosszának aránya meghaladja a felvett $p = 1/2$ küszöbértéket, így ezt a háromszöget ezen szűrés alapján kizárhatjuk az előzetesen előállított háromszögek közül.



8. ábra. Delaunay-háromszögeléssel előállított hálózat, a terület szélein jelentkező nem kívánatos háromszögekkel

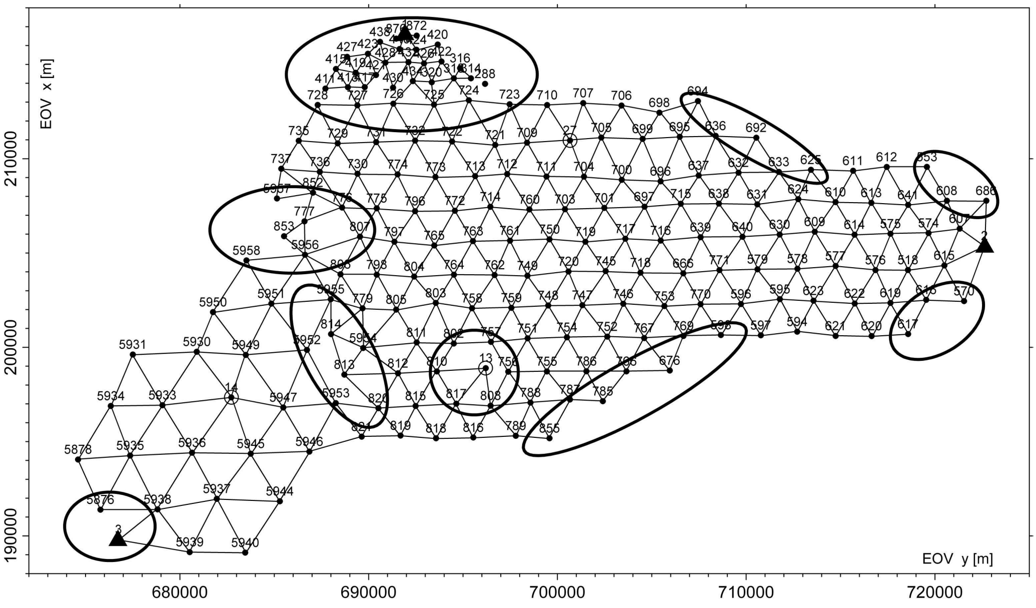


9. ábra. Alkalmatlan formájú Delaunay-háromszög kiszűrése az oldalhosszak aránya alapján

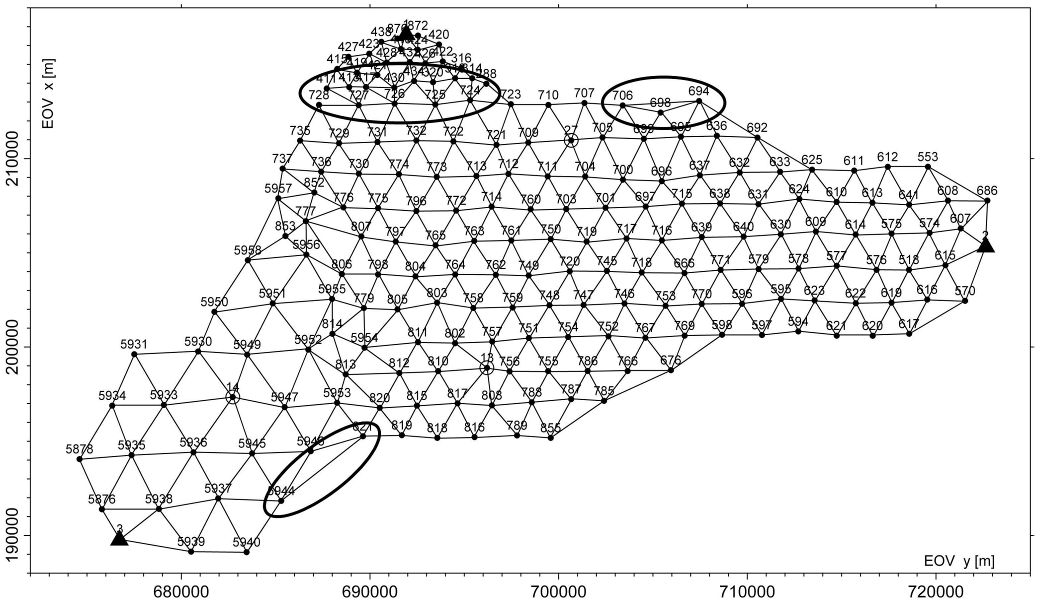
Az oldalhosszak arányán alapuló szűrés esetében legnehezebb feladat a megfelelő *p* oldalarány megállapítása. A teszt-területünkön többféle oldalarányú szűréssel próbálkoztunk. A 10. és a 11. ábrán a *p* = 2/3, illetve a *p* = 1/2 küszöbértékhez illeszkedő hálózati konfigurációt hasonlíthatjuk össze. A két hálózat jelentősen különbözik egymástól, a 10. ábrán látható hálózat a „túlszűrés” áldozata lett, míg a *p* = 1/2 értékhez tartozó kép gyakorlatilag megegyezik a 7. ábrán bemutatott manuálisan meghatározott hálózattal. Ráadásul itt a Delaunay-háromszögeléssel kialakított nagyobb pontsűrűségű felső hálózatrész jobban is illeszkedik az alatta elhelyezkedő ritkább pontsűrűségű hálózatrészhez, mivel rövidebb oldalakkal csatlakozik a kettő egymáshoz.

4 Függővonal-elhajlás interpoláció a különböző kialakítású hálózatokon

Az első részben már említett szoftverünkkel összehasonlító számításokat végeztünk a különböző geometriai kialakítású hálózatokra. Korábban a szoftver használata során nehézséget jelentett, hogy az interpolációs hálózat pontjait az adatbázisból nekünk kellett kiválogatni, és a háromszöghálózat oldalait alkotó pontpárok kiválasztását sem tudtuk automatizálni. Ez nagyobb területek esetén igen nagy munka volt és eddig nem vizsgáltuk behatóbban azt sem, hogy a hálózat geometriai elrendezése milyen hatással van az interpolációra. Most először nyílt lehetőségünk Delaunay-háromszögeléssel automatikusan előállított interpolációs hálózatra is elvégezni a számításokat és összehasonlítani az eredményeket a korábbi hálózatra interpolált értékekkel.



10. ábra. A *p*=2/3 oldalarányú szűréssel adódó háromszög-vesztés a jelölt részeken



11. ábra. A *p*=1/2 oldalarányú szűréssel adódó megoldás eltérése a jelölt részeken a 7. ábrán látható manuálisan készített változattól

Összehasonlító számításainkat a 7. ábrán látható korábban manuálisan létrehozott hálózatra és a 11. ábrán látható Delaunay-háromszögeléssel a nem kívánatos háromszögek megfelelő kiszűrésével kialakított interpolációs hálózatra végeztük el. A területen található (háromszögekkel jelölt) három asztrogeodéziai pontban ismert függővonal-elhajlás adatok az interpoláció kiinduló értékei, míg a dupla körökkel jelölt 13, 14 és 27 jelű asztrogravimetriai pont (Biró és mások 2013) ismert függővonal-elhajlás értékei ellenőrzésre szolgáltak. A függővonal-elhajlások ξ és η összetevőinek az ellenőrző pontokban ismert, és a két különböző hálózatra interpolált értékeit az 1. és a 2. táblázatban foglaltuk össze. Az első oszlopban az ellenőrző pont számát, a másodikban az asztrogravimetriai úton meghatározott ellenőrző értékeket, a többi oszlopban pedig a számított függővonal-elhajlás értékeket, illetve az eltéréseket láthatjuk szögmásodperc értékben. Mindkét táblázat utolsó sorában az interpolált és az ismert összetevők különbségének abszolút értékéből számított átlagos eltéréseket tüntettük fel.

1. táblázat. A függővonal-elhajlások ξ összetevőjének adott és interpolált értékei, valamint ezek eltérései egymástól

ξ [”]	Asztrograv.	Manuális hálózatra		Delaunay hálózatra	
Pont	Adott	Számított	Eltérés	Számított	Eltérés
13	5.31	5.64	0.33	5.62	0.31
14	5.27	4.27	-1.00	4.42	-0.85
27	4.80	6.04	1.24	5.95	1.15
			0.86		0.77

2. táblázat. A függővonal-elhajlások η összetevőjének adott és interpolált értékei, valamint ezek eltérései egymástól

η [”]	Asztrograv.	Manuális hálózatra		Delaunay hálózatra	
Pont	Adott	Számított	Eltérés	Számított	Eltérés
13	3.12	1.83	-1.30	2.01	-1.11
14	3.30	1.90	-1.40	2.09	-1.21
27	5.42	1.56	-3.86	1.59	-3.83
			2.18		2.05

A táblázatok adatai alapján megállapítható, hogy a korábban manuálisan és a Delaunay-háromszögeléssel kialakított hálózatra elvégzett interpolációs számítások eredményei alig térnek el egymástól. Ez egyértelműen bizonyítja, hogy sikerült megfelelően automatizálni az interpolációs hálózat kialakítását, hiszen az erre meghatározott függővonal-elhajlások gyakorlatilag megegyeznek a korábban manuálisan kialakított hálózatra számított értékekkel. Ugyanakkor – ha minimális mértékben is, de a Delaunay-háromszögeléssel kialakított interpolációs hálózat esetében kaptuk a legkisebb eltéréseket az adott és az interpolált értékek között. Ez azt jelenti, hogy esetünkben a Cegléd környéki teszt-területen a Delaunay-háromszögeléssel kedvezőbb interpolációs geometriát sikerült kialakítanunk, mint manuálisan.

Ebből azonban még általánosan nem következtethetünk arra, hogy a Delaunay-háromszögeléssel minden esetben kialakítható az optimális interpolációs geometria, ennek igazolásához kevésnek tűnik a rendelkezésre álló három ellenőrző pont. Ugyanakkor az is igaz, hogy ez tükrözi az általános magyarországi viszonyokat, ennél nagyobb pontsűrűségben egyelőre sehol nem állnak rendelkezésre függővonal-elhajlás adatok. Ennek vizsgálatára további számítások szükségesek, az összehasonlító vizsgálatokat érdemes más területen, más elrendezésű Eötvös-inga mérési állomások esetén is elvégezni.

Végeztünk kísérleti számításokat szintetikus adatok felhasználásával is, amelyben megfelelő mennyiségű pontot biztosítottunk az ellenőrzésre. Más irányú kutatásaink mérési anyagából rendelkezésünkre állt a budapesti Mátyás-hegy területének részletes topográfiai térképe és ismertük a barlangüregek által okozott tömeghiányok gravitációs hatását is (Ultmann 2009), így erre a modellre ki tudtuk számítani mind a nehézségi erő gradienseit mind a függővonal-elhajlás összetevők értékeit. A szükséges gradiensek és a függővonal-elhajlás összetevők számítását a PolyGrav programmal hajtottuk végre (Tóth és Égető 2010). Az így meghatározott mintegy 113 szintetikus adattal több különböző kombinációban is elvégeztük a függővonal-elhajlás interpolációt, és az ellenőrző pontokban minden esetben tized másodperc körüli egyezéseket kaptunk a manuálisan, és a Delaunay-háromszögeléssel kialakított hálózati geometria esetére. Ez is az automatizált módszerrel kialakított interpolációs geometria használhatóságát igazolta, mivel számottevő különbség nem adódott a számítások között.

Hátra van még annak igazolása, hogy a Delaunay-háromszögeléssel minden esetben kialakítható olyan optimális hálózati geometria, amelyre a legjobb függővonal-elhajlás értékek interpolálhatók. Ennek igazolásához a Cegléd környéki teszt-területen ellenőrzés céljára még számos pontban mérésekkel kellene meghatározzuk további függővonal-elhajlás értékeket. Erre előre láthatóan rövid időn belül jó lehetőség fog kínálkozni.

5 Összefoglalás

Az Eötvös-inga mérések alapján végezhető függővonal-elhajlás interpoláció eddigi legmunkaigényesebb fázisa és egyben a leggyengébb láncszeme az interpolációs hálózat optimális geometriájának kialakítása volt. Ezt a lépést sikerült automatizálnunk a Delaunay-háromszögelés alapelvének felhasználásával és speciális finomításával. További részletes vizsgálatokat tervezünk arra vonatkozóan, hogy a hálózat geometriájának kialakításakor figyelembe véve az Eötvös-inga mérések területi eloszlását, választási lehetőség esetén azokat a háromszögoldalakat részesítsük előnyben, amelyek mentén jobban biztosított a W_Δ és a W_{xy} görbületi gradiensek két pont közötti lineáris változása. Ehhez már ki kell lépnünk a MATLAB környezetéből és saját fejlesztésű szoftver megírására lesz szükség.

Köszönetnyilvánítás. Kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak. Az Eötvös-inga adatok az ELGI (ma már MFGI) 1949. és 1950. évi méréseiből származnak. A munka szakmai tartalma kapcsolódik a „Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben” című projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását a TÁMOP-4.2.2.B-10/1–2010-0009 program támogatja. Kapcsolódik továbbá a „Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen” című projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az UMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR–2010-0002 program támogatja.

Hivatkozások

Biró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata. HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest.

Bowyer A (1981): Computing Dirichlet Tessellations. Computer Journal, 24(2), 162–166.

Ruppert J (1995): A Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. Journal of Algorithms, 18(3), 548-585.

Kalmár J (1994): A digitális terepmodell kutatások új eredményei. Kandidátusi értekezés. MTA GGKI, Sopron.

Kalmár J (2000): Gömbi trianguláció globális GPS hálózatok lefedésére. Geomatikai Közlemények 3, 89-93.

Lee DT, Schachter BJ (1980): Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation. International Journal of Computer and Information Sciences, 9(3), 219-242

Nagy D, Franke R, Battha L, Kalmár J, Papp G, Závoti J (1999): Comparison of various gridding methods. Acta Geod. et Geoph., 34, 1-2, 41-57.

Shewchuk JR (1997): Delaunay regnement mesh generation. PhD School of Computer Science, Computer Science Department, Carnegie Mellon University.

Tóth Gy, Égető Cs (2010): A Mátyáshegyi Gravitációs és Geodinamikai Obszervatórium átfogó gravitációs modellezése. Geomatikai Közlemények, 13(2), 113-122.

Ultmann Z (2009): Gravitációs tömeghatás számítása a Mátyás-hegyi barlang környezetében. XXIX. OTDK Műszaki Szekció Tanulmányai, 45-49.

Völgyesi L (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C. E., 37(2), 137-166.

Völgyesi L (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica C.E., 39(1), 37-75.

Völgyesi L (2012): Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában. Geomatikai Közlemények, 15, 9-26.

A DUNASZEKCSŐI FÖLDCSUSZAMLÁS MOZGÁSI TENDENCIÁJA ÉS MODELLJE KOORDINÁTA IDŐSOROK ALAPJÁN

Bányai László[*], Mentes Gyula[*], Újvári Gábor[*], Gribovszki Katalin[*], Papp Gábor[*]

Motion tendency and model of the landslide in Dunaszekcső deduced from coordinate time series – *The monitoring network established on the high bank of river Danube at Dunaszekcső was measured 22 times in the last five years. The integrated 3D adjustment of GPS baselines levelled height differences and total station measurements allow for qualifying the applied observation technique, furthermore the investigation and modelling of movement tendencies using the coordinate time series. This time series of monitoring points properly characterize the movements of primary and secondary rapture zones. The movement tendencies of properly defined phases are characterised by the accelerations and velocities determined by least squares adjustment and Kalman-filter approach as well. Based on geodetic data the dynamic model of movements is proposed.*

Keywords: landslide, geodetic monitoring, movement tendency, dynamic model

A dunaszekcsői magasparton létesített geodéziai mozgásvizsgálati hálózatot az elmúlt öt év során huszonkét alkalommal mértük meg. A GPS vektorok, a szintezett magasságkülönbségek és a mérőállomás méréseinek integrált háromdimenziós kiegyenlítése lehetővé teszi az alkalmazott mérési technológia minősítését, továbbá a koordináta idősorok elemzéséből származó mozgási tendenciák vizsgálatát és modellezését. A mozgásvizsgálati pontok koordináta idősorai jól jellemzik az elsődleges és a másodlagosan kialakuló törési zóna mozgásait. A mozgási tendenciákat a jól definiálható mozgási szakaszok sebességének és gyorsulásának legkisebb négyzetes meghatározásával és Kálmán-szűréssel is modelleztük. A geodéziai adatok alapján a mozgások dinamikai modelljére teszünk javaslatot.

Kulcsszavak: földcsuszamlás, geodéziai monitoring, mozgás tendencia, dinamikai modell

1 Előzmények

A dunaszekcsői partcsuszamlásokkal kapcsolatos vizsgálatokról több magyar és angol nyelvű anyagban is rendszeresen beszámoltunk. A geológiai és geomorfológiai hátteret, a tervezett vizsgálatokat, valamint az első eredményeket Újvári et al. (2009a, 2009b, 2009c) tanulmányai foglalták össze. A különböző geodéziai mérések integrált 3D kiegyenlítésére kidolgozott eljárást Bányai (2011a, 2011b) tanulmányai mutatják be.

A geodéziai mérések számának növekedésével (a megfigyelési idő múlásával) egyre több ismeretre tettünk szert a mozgások jellemzőivel kapcsolatban. A mozgási vektorok idő és térbeli változásaiból valamint a dőlésmérő adatok elemzéséből további beszámolók készültek (Mentes et al. 2011, 2012; Újvári et al. 2011).

Ebben a tanulmányban a koordináta idősorok kinematikai és dinamikai elemzésére kidolgozott eljárásokat és a levonható tapasztalatokat foglaljuk össze. Az adatok alapján felvázolható dinamikai modellt nemzetközi konferencián is bemutattuk (Bányai et al. 2012).

2 A vizsgálatok adatai és módszerei

2012 végére 22 mérési kampányt hajtottunk végre. Az intenzív leszakadás miatti pontpusztulásokkal és az időközben szükségessé váló új pontokkal együtt 5 darab vasbeton mérőpillér és 35 mozgásvizsgálati pont koordináta változásait határoztuk meg az első időponthoz viszonyítva úgy, hogy a mérőpillérek koordináta változásainak négyzetösszegét minimalizáltuk. Az így meghatározott változások alapján a hálózat horizontális megbízhatóságát 2 mm, a magassági megbízhatóságot 3 mm

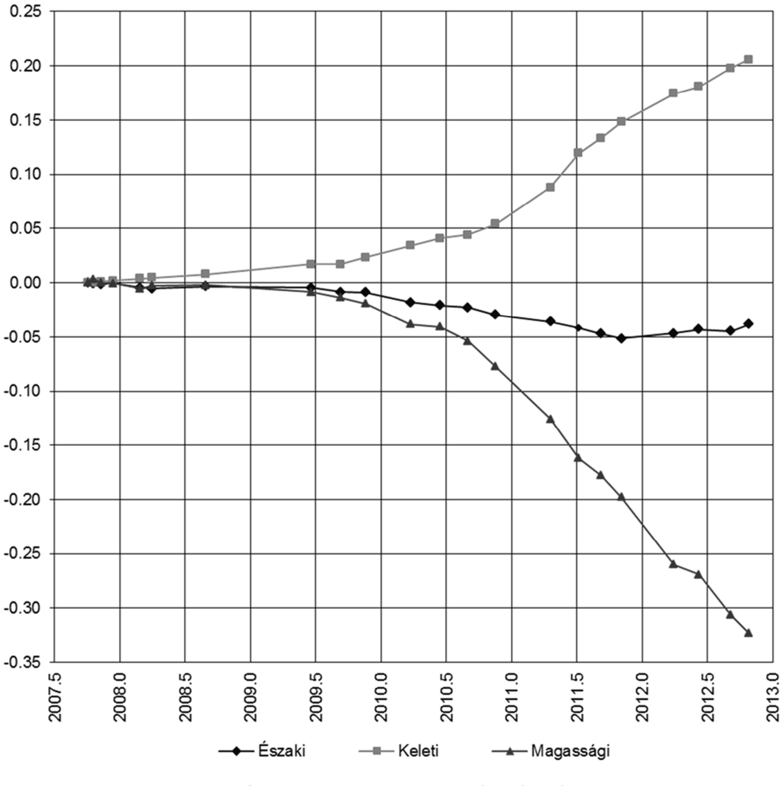
[*]*MTA CSFKI GGI, 9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.*
E-mail: banyai@ggki.hu

középhibával jellemezhetjük a WGS-84 koordináta rendszerben. Egy mérési időponton belül azonban a pontok koordinátáiból számítható magasságkülönbségek a szabatos szintezés következtében jóval kedvezőbb értékek.

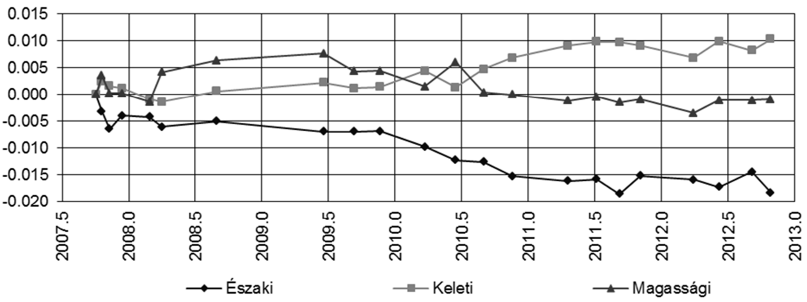
Annak ellenére, hogy az idősorok már önmagukban is sok mindent elárulnak, a mozgástendenciákat kinematikai modell (másodfokú polinom) illesztésével és Kálmán-szűréssel is megvizsgáltuk.

2.1 A jellegzetes pontok koordináta idősorai

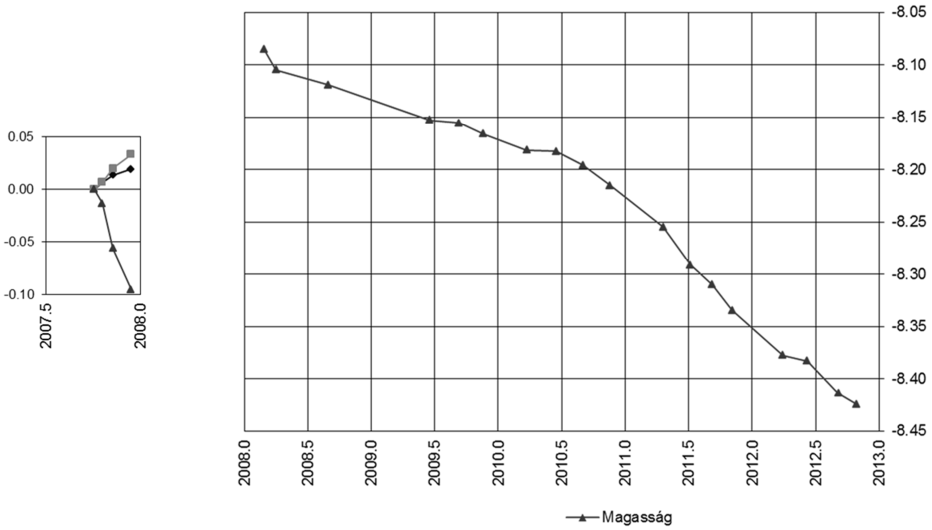
Ebben az anyagban a déli terület három jellegzetes pontjának vizsgálatát mutatjuk be. Az 1000 számú pont kezdetben a déli törési zóna mozdulatlannak tekintett részét jellemezte. Az új törési zóna megjelenését követően azonban ez a pont is mozgásnak indult. Az 1002 számú pont még most is mozdulatlannak tekinthető. Ugyanakkor a 2003 számú pont részt vett az intenzív leszakadási fázisban, és az utómozgásokat is jól reprezentálja. A jellegzetes mozgásgörbéket a 1-3. ábrák mutatják be. A 2. ábrán az 1002 pont változásait a kicsi mozgások miatt eltérő méretarányban mutatjuk. A 3. ábrát két részre bontottuk, az intenzív leszakadás előtti (2008. február 22 = 2008.145) és utáni intervallumokra. Mivel a pont északi irányba 1.50 m-t, keleti irányba 2.52 m-t mozdult el az ábra jobboldalán csak a részletes vizsgálatunk tárgyát képező magassági változást ábrázoltuk. Mivel az 1003 pont változásai ellentétben az 1000 és 2003 pontokéval csak 1-2 cm értéken belül mozognak a mérési bizonytalanságok is jobban felismerhetők. A magassági görbén a 2. és 12. időpontok kiugranak a görbe jellegzetes lefutásából, ezért a numerikus vizsgálatokból is kimaradtak, annak ellenére, hogy az értékek a becsült megbízhatóság tartományába esnek. Ugyanez igaz az 1000 pont 2. időpontbeli értékére is, ami a méretarány miatt kevésbé látható.



1. ábra. Az 1000 pont koordináta változásai (m)



2. ábra. Az 1002 pont koordináta változásai (m)



3. ábra. Az 2003 pont magassági változásai (m) – a bal oldali ábra jelölései azonosak az 1. és 2. ábráéval

Az intenzív leszakadás előtt mindhárom pont süllyedő tendenciát mutatott, az 1000 és 1003 pontok esetében néhány mm, a 2003 pontnál a 10 cm tartományban. A leszakadás után az 1000 és 1003 pontok kezdetben megemelkedtek (!), majd ismét süllyedő tendenciát mutattak, amely a 1003 pontnál az eredeti nulla kezdőértékhez konvergál. Az 1000 pontnál a 2008.5-2009.5 intervallumban, ellentétben a 2003 ponttal, csak nagyon kis süllyedést tapasztaltunk. A 2009.5 időpontot követően azonban az 1000 és 2003 pontok szinte azonos módon gyorsuló süllyedést mutattak, ami az 1000 pont mellett egy újabb törési zóna kialakulásához vezetett. Maga a törési zóna, amit előre jeleztünk, csak 2010-ben jelent meg a felszínen.

A 1. és 3. ábra magassági görbéi még egy jellegzetességet mutatnak. 2010 és 2012 nyarán a süllyedések jelentősen csökkentek, 2011-ben ez nem ilyen egyértelmű, de a görbén itt is kisebb törés mutatkozik. Ez a jelenség valószínűleg a nyári szárazabb, kevésbe nedves időszakkal magyarázható, amikor a Duna vízállása is jóval alacsonyabb.

2.2 Az idősorok numerikus vizsgálatának módszerei

Valamely mennyiség időbeli változását általában algebrai polinomok segítségével lehet leírni. A kinematikában másodfokú polinomokat alkalmaznak, ahol az út idő szerinti első deriváltja a sebesség, a második a gyorsulás és a harmadik a kezdő érték. A polinom három függvény összegéből irható fel

$$\begin{aligned} s_1 &= s \ , \\ s_2 &= v\, t \ , \\ s_3 &= \tfrac{1}{2} a\, t^2 \ , \\ s_k &= s + v\, t + \tfrac{1}{2} a\, t^2 \ , \\ \dot{s}_k &= v + a\, t \ , \end{aligned} \tag{1}$$

ahol s a konstans kezdőérték, v a konstans sebesség, a a konstans gyorsulás, s_k a kinematikus polinom, $\dot{s}_k$ a pillanatnyi sebesség egyenese (a polinom első deriváltja) és t az idő. Az egyes paraméterek és az idő között nagyon szoros az összefüggés. A $t = 0$ időpontban $s_k = s$, $\dot{s}_k = v$ és az s_3 függvény itt veszi fel a szélsőértékét. Az a előjelétől függetlenül az s_k és s_3 függvénynek is van csökkenő és növekvő szakasza is. Pozitív a esetében a függvény felülről homorú (konvex) és a pillanatnyi sebesség egyenese emelkedő, negatív a esetében a függvény domború (konkáv) és a pillanatnyi sebesség egyenese lejtős. A függvények legérdekesebb tulajdonsága azonban az, hogy az s_3 és s_k függvények lefutása teljesen azonos, de az s_k parabola szélsőértéke a többi ponttal együtt $[-v/a\ ;\ s - v^2/2a]$ vektorral eltolt helyzetbe kerül az s_3 függvényhez viszonyítva. Ennek a gyakorlati alkalmazás során nagyon fontos következményei vannak.

Valamely mérésből (vagy meghatározásból) származó mennyiségekhez azonban csak önkényesen megválasztott időpontokat tudunk hozzárendelni (nem ismerjük azt az t_k időpontot, amihez az s és v konstansok tartoznak), ezért az adatsorhoz csak az

$$s_k = s_0 + v_0\, \Delta t + \tfrac{1}{2} a\, \Delta t^2 \tag{2}$$

függvényt tudjuk illeszteni, ahol $\Delta t = t - t_0$, t_0 a kezdő időpont, s_0 a pillanatnyi függvény érték és v_0 a pillanatnyi sebesség a t_0 időpontban. A becsült értékek

$$\begin{aligned} s_0 &= s + v\,(t - t_k) + \tfrac{1}{2} a\,(t - t_k)^2 \ , \\ v_0 &= v + a\,(t - t_k) \end{aligned} \tag{3}$$

tartalmazzák az s és v konstans értékeket is, de t_k ismeretének hiányában ezek nem becsülhetők. A pillanatnyi értékek azonban akkor is léteznek, ha s és v értékek is nullák. Ha $a = 0$, vagyis a függvény egyenessé fajul, akkor (3) alapján s és v is meghatározható (egyenes vonalú egyenletes mozgás).

A mozgási folyamat becsülhető paramétereit a vizuálisan definiálható intervallumokban a hagyományos legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel tudjuk meghatározni. A kidolgozott eljárásnál az intervallumok kezdőpontjában keressük az s_0, v_0 és a értékeket. Az együttes kiegyenlítésben előírhatjuk, hogy valamely időintervallum utolsó és a következő intervallum kezdőpontjának felezőjében

- a függvény értékek azonosak legyenek (metsződés),
- a függvény értékek és az első deriváltak (a pillanatnyi sebességek) is azonosak legyenek (simuló átmenet), vagy
- a két intervallum között ne legyen kényszerkapcsolat (rámpa, szakadás).

Alternatívaként megvizsgáltuk a kinematikus mozgásegyenlet paramétereinek dinamikus Kálmán-szűréssel történő meghatározását is, ahol mérési időpontonként új s, v, és a pillanatnyi értékeket becsülhetünk. Statikus Kálmán-szűrésnél időben nem változó paramétereket becsülnénk lépésenként egyre pontosabban.

A Kálmán-szűrésnél (Husti et al. 2000, Teunissen 2001) az átviteli függvényt (2) alapján az

$$\boldsymbol{x'}_i = \begin{bmatrix} s_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0.5\,\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_{i-1} \\ \hat{v}_{i-1} \\ \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}\, \hat{\boldsymbol{x}}_{i-1} \tag{4}$$

összefüggéssel írhatjuk le, ahol $\boldsymbol{T}$ az átviteli mátrix, $\hat{\boldsymbol{x}}_{i-1}$ az előző időpontban becsült állapotvektor, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ az időintervallum és $\boldsymbol{x'}_i$ az átvitelből számított érték. A variancia-kovariancia mátrix

$$\boldsymbol{Q}_{x'_i} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_{i-1}}\boldsymbol{T}^t + \boldsymbol{Q}_m\,, \tag{5}$$

ahol $\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_{i-1}}$ az előző időpontban becsült variancia kovariancia mátrix, t a transzponált mátrixot jelöli, és a $\boldsymbol{Q}_m$ mátrixszal a másodfokú modell bizonytalanságát lehet fegyelembe venni. A közvetlen méréseket és azok pontosságát a

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x'}_i \quad \text{és} \quad \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}} \tag{6}$$

lineáris megfigyelési egyenlettel és a $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}}$ variancia-kovariancia mátrixszal lehet figyelembe venni, ahol $\boldsymbol{b}_i$ az ismeretlenekhez kapcsolódó méréseket és $\boldsymbol{A}$ az együttható mátrixot jelöli. Az állapot vektor a következő összefüggésekkel frissíthető

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{x}}_i &= \boldsymbol{x'}_i + \boldsymbol{K}(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x'}_i) \\ \boldsymbol{Q}_{\hat{x}_i} &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{Q}_{x'_i} \qquad , \\ \boldsymbol{K} &= \boldsymbol{Q}_{x'_i}\,\boldsymbol{A}^t\,(\,\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{Q}_{x'_i}\,\boldsymbol{A}^t)^{-1} \end{aligned} \tag{7}$$

ahol $\boldsymbol{K}$ a Kálmán- vagy nyereségmátrix és $\boldsymbol{I}$ az egységmátrix.

A gyakorlati vizsgálatok során mindig csak a következő időponttal frissítjük a becslést, ezért $\boldsymbol{b}_i$ csak egy mennyiséget tartalmaz és $\boldsymbol{A^T} = [1 \quad 0 \quad 0]$, ami lényegesen megkönnyíti a (7) összefüggések kiszámítását. A modell alkalmazhatósága többek között az $\hat{\boldsymbol{x}}_0$ kezdőértékek, a $\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_0}$, $\boldsymbol{Q}_m$ és a $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}}$ mennyiségek megfelelő kiválasztásától, a „hangolástól” is jelentősen függ. Esetünkben a kezdőparamétereket a hagyományos kiegyenlítés első intervallumának becsült értékei alapján is figyelembe vehetjük. Az egyik legfontosabb tényező a $\boldsymbol{Q}_m$ és $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}}$ mennyiségek felvétele. Ha a $\boldsymbol{Q}_m$ értékeit nullának választanánk, a mérésenkénti összegződés során a $\boldsymbol{Q}_{\hat{x}_i}$ mátrixban a középhibák egyre kisebbek lennének és a $\boldsymbol{x'}_i$ értékek egyre kisebb korrekciókat kapnának. Az időpontonként alkalmazott $\boldsymbol{Q}_m$ mátrixszal ez a hatás csökkenthető.

2.3 A numerikus vizsgálatok eredményei

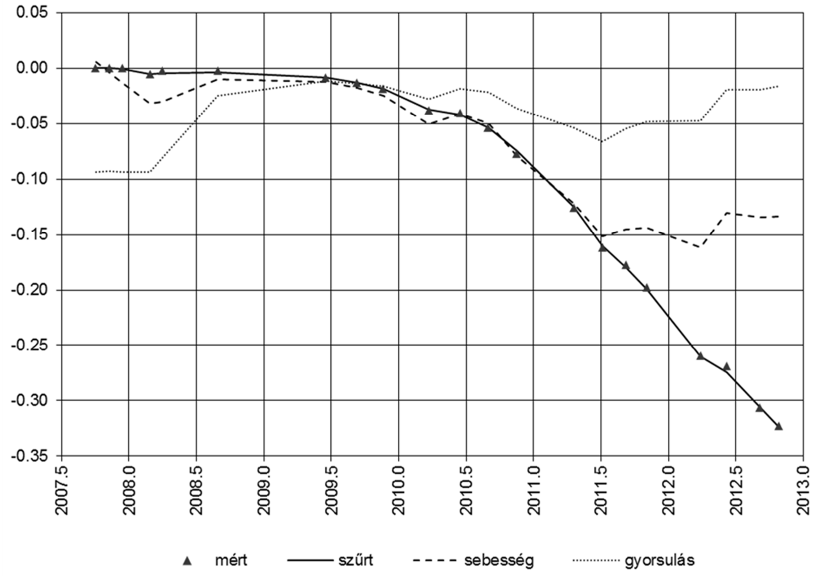
Ebben az anyagban csak a magassági változások vizsgálatát foglaljuk össze, mivel ezek a legjellegzetesebbek, annak ellenére, hogy a vízszintes változások is hasonló szakaszosságot mutatnak (1-3. ábrák).

Első lépésben a vizuálisan kijelölt szakaszokat vizsgáltuk a hagyományos kiegyenlítéssel, majd az első intervallum kezdő értékeivel elvégeztük a Kálmán szűrést. A hangolásnál a következő varianciákat alkalmaztuk: $\boldsymbol{Q}_m = \langle 0.003^2; 0.005^2; 0.010^2\rangle$ és $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{b_i}} = \langle 0.003^2\rangle$. A 4-6. ábrákon mutatjuk be a Kálmán-szűrés eredményeit.

Az eljárást lényegében az adatsorok szűrésére, simítására és előre jelzésére találták ki. Esetünkben a szűrőhatás csak részben jelentkezett, de a sebesség és gyorsulás görbék számszerűen is kiemelték azokat a helyeket, ahol az adatokban a törések vizuálisan is feltételezhetők. Azokon a szakaszokon, ahol a pillanatnyi sebességek közel egyenesek és a gyorsulások is kicsit változnak, az adatpontok hasonló viselkedését tételezhetjük fel. Két adatpont közötti gyors változások eltérő tulajdonságú szakaszokat, szakadásokat jeleznek.

A 4-6. ábrák alapján lényegében hasonló tulajdonságú szakaszokat definiálhatunk, még akkor is, ha azok nem azonos mértékben jelentkeztek az egyes pontoknál. Ezekben a szakaszokban a hagyományos kiegyenlítéssel meghatároztuk a (2) összefüggésben definiált paramétereket. Azokat az adatpontokat, amelyek vizuálisan is kiugró értéknek tekinthetők kihagytuk az adatfeldolgozásból.

Az 1000 és 1002 pontoknál az intenzív leszakadás után 4 nappal még süllyedést, 9 nappal később már emelkedést tapasztaltunk. Ez az első intervallum, ahol szakadást tételeztünk fel. A 2003 pontnál ez a szakasz egy időponttal rövidebb.

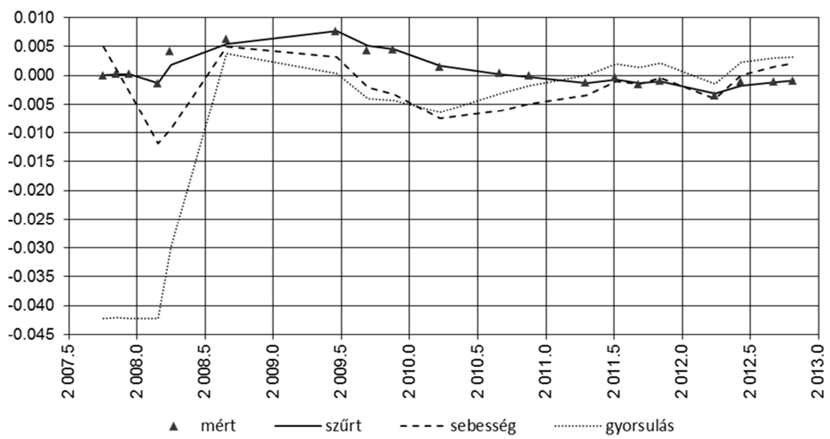


4. ábra. A 1000 pont magassági változásainak vizsgálata Kálmán-szűréssel,
mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek $(m/év)$ és gyorsulások $(m/év^2)$

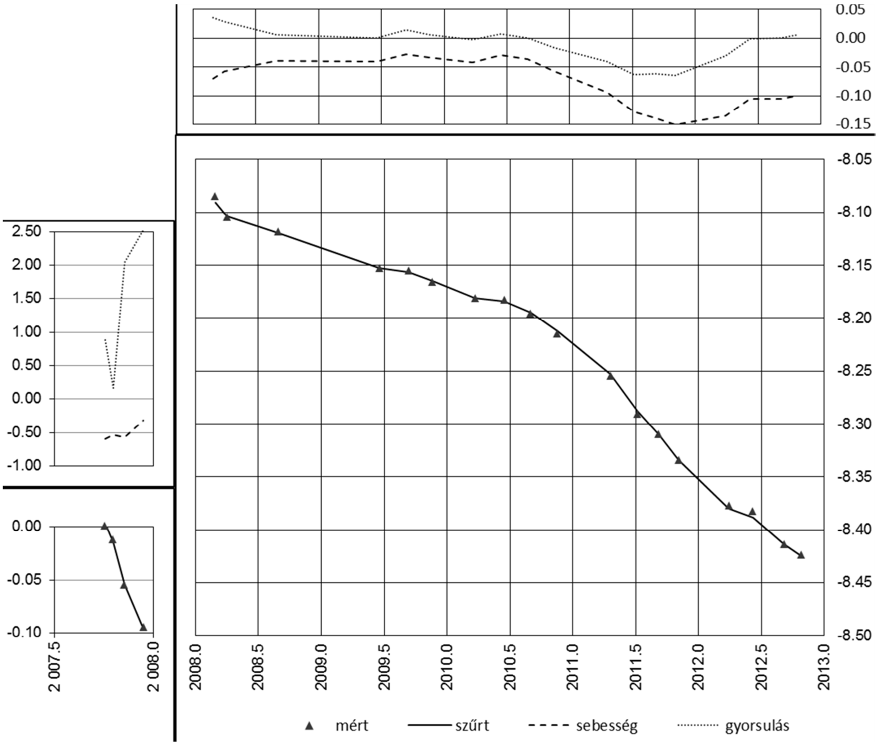
Az 1000 és 2003 pontok következő két intervallumánál a közel egy éves adathiányt simuló átmenettel modelleztük. Az utolsó intervallum csak három adatot tartalmaz, ezért itt nincsenek fölös mérések.

Az illesztések számszerű eredményeit, a szakaszok kezdő időpontjára vonatkozó pillanatnyi sebességeket és a konstans gyorsulásokat középhibáikkal együtt az 1-3. táblázatok tartalmazzák. A süllyedési görbéket és a pillanatnyi gyorsulásokat a 7-9. ábrák mutatják be.

A táblázatok és az ábrák értelmezésénél az előző részben mondottak mellett a következő szempontokat célszerű figyelembe venni. Ha a geodéziában szokásos módon feltételezzük, hogy a mérési javítások normális eloszlásúak, akkor a becsült értékek és középhibáik aránya Student-eloszlást követ. Minél nagyobb ez az érték, annál szignifikánsabb, pontosabban meghatározható a paraméter. Ezeket az arányokat azonos intervallumra vonatkozóan célszerű összehasonlítani.



5. ábra. A 1002 pont magassági változásainak vizsgálata Kálmán-szűréssel,
mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek $(m/év)$ és gyorsulások $(m/év^2)$



6. ábra. A 2003 pont magassági változásainak vizsgálata Kálmán-szűréssel, mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek $(m/év)$ és gyorsulások $(m/év^2)$

1. táblázat. Az 1000 pont magasságváltozásainak kinematikai paraméterei σ_v és σ_a a kezdő paraméterek, σ az egység súlyú mérések középhibája

no.	idő intervallum decimális évben (y)	adatok száma	v_0 (m/y)	σ_v	a_0 (m/y^2)	σ_a
1	2007.756 – 2008.156	4	0.0052	0.0100	-0.0935	0.0465
2	2008.249 – 2009.463	3	0.0040	0.0032	-0.0153	0.0042
	simuló átmenet					
3	2009.693 - 2010.225	3	-0.0257	0.0016	-0.0810	0.0095
4	2010.455 - 2011.299	4	-0.0663	0.0047	-0.0837	0.0104
5	2011.512 - 2012.241	4	-0.0872	0.0057	-0.1309	0.0143
6	2012.433 - 2012.819	3	-0.1687	0.0113	0.1517	0.0591
	$\sigma =$ 0.0008 (m)					

2. táblázat. Az **1002** pont magasságváltozásainak kinematikai paraméterei σ_v és σ_a a kezdő paraméterek, σ az egység súlyú mérések középhibája

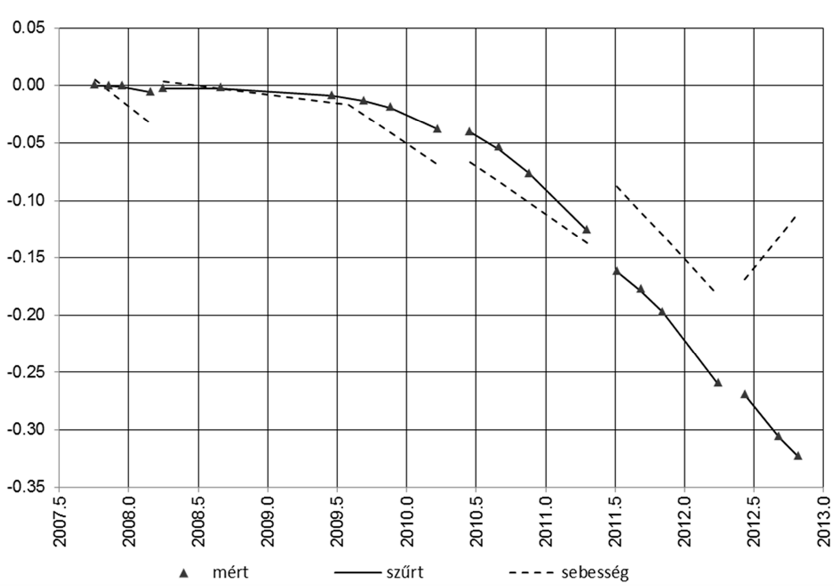
no.	idő intervallum decimális évben (y)	adatok száma	v_0 (m/y)	σ_v	a_0 (m/y^2)	σ_a
1	2007.756 - 2008.156	4	0.0050	0.0065	-0.0422	0.0301
2	2008.249 - 2009.693	4	0.0079	0.0012	-0.0097	0.0011
	simuló átmenet					
3	2009.885 - 2011.299	5	-0.0067	0.0006	0.0044	0.0008
	simuló átmenet					
4	2011.512- 2012.819	6	-0.0000	0.0005	-0.0000	0.0011

$\sigma = 0.0005$ (m)

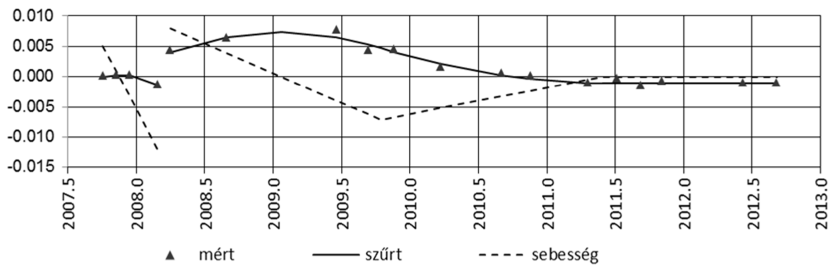
3. táblázat. A 2003 pont magasságváltozásainak kinematikai paraméterei
σ_v és σ_a a kezdő paraméterek, σ az egység súlyú mérések középhibája

No.	Idő intervallum decimális évben (y)	Adatok száma	v_0 (m/y)	σ_v	a_0 (m/y^2)	σ_a
1	2007.756 - 2007.951	4	-0.5939	0.0988	0.8814	0.9481
2	2008.156 - 2008.660	3	-0.0744	0.0172	0.0508	0.0280
	simuló átmenet					
3	2009.463 - 2010.225	4	-0.0349	0.0043	-0.0163	0.0172
4	2010.455 - 2011.299	4	-0.0644	0.0223	-0.0518	0.0491
5	2011.512 - 2012.241	4	-0.1352	0.0267	0.0419	0.0674
6	2012.433 - 2012.819	3	-0.1608	0.0535	0.2759	0.2792

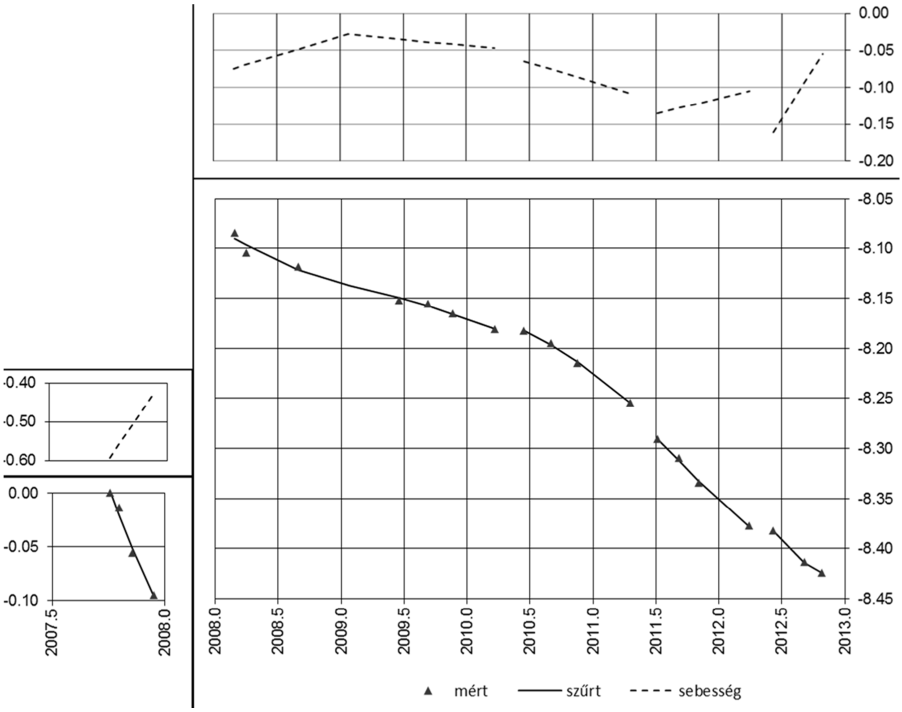
$\sigma = 0.0039$ (m)



7. ábra. Az 1000 pont magassági változásai hagyományos kiegyenlítéssel,
mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek $(m/év)$



8. ábra. Az 1002 pont magassági változásai hagyományos kiegyenlítéssel,
mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek $(m/év)$



9. ábra. Az 2003 pont magassági változásai hagyományos kiegyenlítéssel, mért és szűrt értékek (m), pillanatnyi sebességek ($m/év$)

Az arányok mellett azt is célszerű megnézni, hogy egységnyi idő alatt a v_0 vagy az $a_0/2$ érték okoz-e nagyobb változást. Ezek alapján vizsgálhatjuk, hogy melyik a dominánsabb komponens.

A táblázatokból kitűnik, hogy az egység súlyúnak tekintett mérések középhibája (σ) a 2003 pontnál a legnagyobb. Ez az első két intervallum adatainak a hatása, amely közvetlenül az intenzív leszakadás előtti és utáni szakasz.

Az 1000 és 1002 pontok első szakasza nagyon hasonló képet mutat, mindkét esetben a negatív gyorsulás a szignifikáns komponens (domború lefutás), amit kis pozitív sebesség csökkenés követ.

A következő szakasz kezdeténél mind a két pont pozitív ugrást (emelkedést) mutat. A viselkedésük innét már eltérő. A 1002 pont az emelkedést követően süllyed, majd az eredeti értékhez konvergál (8. ábra).

A 2003 pont első szakaszánál a nagy negatív sebesség a domináns, a számszerűen nagy, de a kiegyenlítés szempontjából nem szignifikáns pozitív gyorsulás (homorú lefutás) csökkenő tendenciára utal. Ez a megállapítás az utolsó szakaszra is igaz, de a negatív sebesség jóval kisebb, és az adatpontok száma is csak három.

Az 1000 pont 2. szakaszánál egy kismértékű negatív gyorsulás (domború lefutás) a domináns, ami 5mm/év süllyedést mutat. A 2003 pont 2. szakaszánál még a negatív süllyedés a domináns, amit jelentősebb pozitív gyorsulás (homorú lefutás) részben kompenzál. Az 1000 és 2003 pont 3. és 4. szakaszai hasonlóak, a nyári csökkenést negatív sebességek és gyorsulások jellemzik (domború lefutás), ami süllyedés fokozódására utal. Az 1000 pontnál az 5. szakasz még a süllyedés fokozódását jelzi, mivel mind a két negatív paraméter szignifikáns. Ennek az időszaknak a tavaszán a pont mellett már az új törési zóna is láthatóvá vált. A 2003 pontnál a negatív sebesség a domináns, amit kisebb pozitív gyorsulás lassít. Az utolsó szakaszok is hasonlóak, de a három adatpont miatt még jelentős következtetéseket nem célszerű levonni.

3 Összefoglalás és szintézis

A dolgozatban részletesen bemutattuk a kinematikai függvény tulajdonságait és a használhatóságát kinematikai folyamatok modellezésére hagyományos kiegyenlítéssel és Kálmán-szűréssel.

A Kálmán-szűrés kiváló eszköznek bizonyult a vizuálisan is feltételezhető tendenciák, a jelentősebb szakadások számszerű kiemelésére, amit a pillanatnyi sebesség és gyorsulás görbék jeleznek. Az így definiálható intervallumok jellegzetes paramétereit hagyományos kiegyenlítéssel határoztuk meg.

A paraméterek alapján felvázolt jellegzetes tendenciák közvetlenül nem alkalmasak dinamikai modell felállítására, de közvetve hasznos információkat szolgáltatnak. Ha a sebesség a domináns (egyenes vonalú egyenletes mozgás) a folyamatokat egy konstans erő okozza, az eltérő gyorsulások ennek az erőnek a csökkenését vagy növekedését jelzik. Az 1000 és 2001 pontoknál a 2. szakaszban tapasztalt emelkedés nagyon hasonlít az elasztikus viszkózus modell viselkedésére. Mivel 2001-es pont emelkedése egy idő után az eredeti értékhez konvergált, az emelkedést nem a rugalmasság, hanem a belső tömegmozgások okozhatták. Annak ellenére, hogy a lösznek ismert a rugalmassági tényezője, a változások irreverzibilis folyamatokat eredményeznek, ezért csak kvázi elasztikus viszkózus modellt tételezhetünk fel. Ennek lényege a következő. A Duna vízszintje alatti vörösagyag rétegek plasztikussá, folyóssá válnak, ami már nem bírja eltartani a merev lösz rétegek önsúlyát. A merev rétegek ezért lassan meggörbülhetnek, dőlhetnek, és mikro repedések alakulhatnak ki, amit a felszíni vizek is befolyásolhatnak. A plasztikus rétegek anyaga a Duna irányába mozoghat, amit a víz folyamatosan elszállít. Ha a repedések menti súrlódás és a plasztikus rétegek csökkent szilárdsága már nem tudja lassítani a folyamatot, intenzív leszakadás történik, a plasztikus tömegek nagy része kitorlódva a Dunában szigetet képez, más része a magas part peremét is megemelheti. Az ezt követő lassú változások az egyensúly ismételt kialakulásáig folytatódnak.

A valódi dinamikai modellezés végeselem módszerrel lehetséges, ahol az ismert fizikai és geometriai paramétereket is figyelembe kell venni.

Köszönetnyilvánítás. Ez a tanulmány az OTKA K 78332 pályázatának támogatásával készült.

Hivatkozások

Bányai L (2011a): Geodéziai mérések integrált 3D kiegyenlítése, Geomatikai Közlemények, 14(1), 45-54.

Bányai L (2011b): Rigorous 3D Integrated Adjustment of GPS Baselines, Geodetic Total Station and Levelling Measurements, Proceedings, FIG web site, ISBN 978-87-90907-92-1.

Bányai L, Újvar G, Mentes Gy (2012): Kinematics and dynamics of a river bank failure determined by integrated geodetic observations - Case study of Dunaszekcső Landslide, Hungary. Proceeding of the annual International Conference on Geological & Earth Sciences (GEOS 2012), ISNN 2251-3361. DOI: 10.5176/2251-3361_GEOS12.36 pp. 51-54.

Husti Gy, Ádám J,Bányai L, Borza T, Busics Gy, Krauter A (2000): Globális helymeghatározó rendszer (bevezetés), Nyugat-magyarországi Egyetem.

Mentes Gy, Bányai L, Újvári G, Papp G, Gribovszki K, **Bódis V B** (2011): Recurring Mass Movements On The Danube's Bank at Dunaszekcső (Hungary) Observed by Geodetic Methods., Proceedings of the Joint International Symposium on Deformation Monitoring. Hong Kong, China, 2-4. November 2011.

Mentes Gy, Bányai L, Újvari G, Papp G, Gribovszki K, Bódis V B (2012): Recurring mass movements on the Danube's bank at Dunaszekcső (Hungary) observed by geodetic methods. Journal of Applied Geodesy, 6(3-4). 203-206.

Teunissen PJG (2001): Dynamic data processing. Delft University Press.

Újvári G, Mentes Gy, Bányai L, Kraft J, Gyimóthy A, Kovács J (2009a): Evolution of a bank failure along the River Danube at Dunaszekcső, Hungary. Geomorphology 109, 197-209 doi:10.1016/j.geomorph.2009.03.002.

Újvári G, Bányai L, Mentes Gy, Gyimóthy A. Holler I (2009b): A dunaszekcsői csuszamlás mozgásviszonyai. Geomatikai Közlemények, 13, 233-239.

Újvári G, Bányai L, Gyimóthy A, Mentes G (2009c): A dunaszekcsői földcsuszamlás geodéziai mozgásvizsgálatának eredményei. Geodézia és Kartográfia 61(7), 11-17.

Újvári G, Bányai L, Mentes Gy, Papp G, Gribovszki K, Bódis VB, Bokor Zs (2011): Utómozgások a dunaszekcsői magasparton. Geomatikai közlemények 14(1), 105-110.

KÉPSZEGMENTÁLÁSI ELJÁRÁSOK ALKALMAZÁSA A TÁVÉRZÉKELÉSBEN

Barsi Árpád[*]

Application of image segmentation techniques in remote sensing – *The paper illustrates the most widely used operation group in digital image analysis. To ease the understanding of the point, edge and surface segmentation methods, two image samples were used for evaluating some special algorithms, so the image segmentations are illustrated in practice, too. One can find also the parameter settings in the paper, which are often settings in the commercial (black-box) software packages.*

Keywords: segmentation, photogrammetry, remote sensing, operators

A cikkben a digitális képek elemzésének egyik leggyakrabban használt eljáráscsoportját mutatom be. A pont-, él és felület-szegmentálási eljárások széles tárházából azok megértéséhez két kép egy-egy részletén lefuttattam néhány jellemző algoritmust, így a képek ezen tulajdonságok szerinti szegmentálását a gyakorlatban is illusztráltam. Cikkemben megadom azokat a paramétereket is, amelyeket sokszor a fekete-doboznak tekinthető kereskedelmi szoftverek is beállítási lehetőségként felkínálnak.

Kulcsszavak: szegmentálás, fotogrammetria, távérzékelés, operátorok

1 Bevezetés

A digitális fotogrammetria terjedésével és rendkívüli fejlődésével, valamint a távérzékelt felvételek minőségének gyors javulásával egyre pontosabb osztályozó – sőt fogalmazhatunk úgy is – képelemző/képértő eljárásra van szükség. A modellalapú képelemzés általános folyamatának főbb lépéseit az 1. táblázat tartalmazza a legegyszerűbb megoldástól a bonyolultabbak felé haladva (Rottensteiner 2011).

A folyamatban jól látható, hogy a fizikai valóság egyes jelenetei hogyan képződnek le, hogyan történik meg a képet alkotó elemek elhatárolása, majd azok „értése”, azaz felismerése. Ebben az általánosan leírt folyamatban a képekből a majdani objektumok jellemzőinek (*feature*) megállapítása, illetve az azok alapján végzett képfelosztás tekinthető szegmentálásnak. Ha a gondolatmenetünk az objektum alapú vagy objektum-orientált képelemzést (angolul Object Based Image Analysis – OBIA) írja le, akkor a szegmentálásról könnyen belátható, hogy milyen kiemelkedő fontossággal bír.

Blaschke (2010) a szegmentálás során létrejövő képdarabokat, az ún. szegmenseket a következő módon definiálja: „A szegmensek olyan régiók, amelyek a tulajdonságtér egy vagy több dimenziójában a homogenitás egy vagy több kritériumának eleget tesznek”. A meghatározás kiemeli, hogy a képhez ún. tulajdonságtér (*feature space*) rendelhető, amely akár többdimenziós is lehet, továbbá a szegmensek legfontosabb tulajdonsága, hogy ezen jellemzőket tekintve (közel) homogén egységeket képeznek.

1. táblázat. A modellalapú képelemzés általános folyamata

felismerés (jellemző → objektum)	magas szintű (*high level*)
szegmentálás (kép → jellemző)	közepes szintű (*mid level*)
előfeldolgozás (kép → kép)	alacsony szintű (*low level*)
képelőállítás (jelenet → kép)	

[*]*BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: barsi@eik.bme.hu

A cikk szerzője megállapítja továbbá, hogy a szegmentálással a képet szemantikailag szignifikáns csoportokba sorolt pixelekre bontjuk, vagyis olyan összefüggő képrészleteket alkotunk, amelyek önálló jelentéssel bírhatnak, s amelyek a következő feldolgozási fázisban objektumokká alakíthatók.

Haralick és Shapiro (1992) könyvükben a szegmentálással szemben négy elvárást fogalmaznak meg:

- az eredményül kapott képrégiók (foltok) egységesek és homogének legyenek valamilyen jellemző (*feature*), pl. intenzitás vagy textúra szerint,
- egyszerű és lyuk nélküli foltok keletkezzenek,
- a közvetlenül egymás melletti foltok szignifikánsan különbözzenek az alapul szolgáló jellemző szerint (különben egyetlen szegmensnek kell lenniük),
- a foltok határvonala egyszerű, ne durván tagolt és helyzetét tekintve pontos legyen.

Megjegyzem, hogy az elvárások alapján a szegmentálást kizárólag a felületi szegmentálásra értelmezték. Gonzalez és szerzőtársai (2004) egyenesen objektumoknak nevezik a szegmentálás eredményét.

2 A szegmentálási módszerek fajtái

A szegmentálási módszerek a kinyert elemek alapján csoportosíthatók pont-, él- illetve felületszegmentálásra. Szokás ezen megoldásokat pont-, él- és felület-kinyerő (extraháló) eljárásoknak is nevezni.

A **pontszegmentálás** során kapott pontok lehetnek egyenesek végpontjai, metszéspontjai, kiterjedt elemek sarokpontjai esetleg kereszteződési pontok. A szegmentálás két főbb típusa pontok esetében a lokális elemzésen alapuló és a méretarány-független detektorok használata.

A lokális elemzés legtöbb ma használt módszere az autokorrelációs mátrixot vezeti le, majd annak használatával határozza meg a pontokat. Ismertebb algoritmusok a Harris-, a Moravec- és a Förstner-operátorok (Luhmann 2000). A lokális elemzésben a görbület vizsgálatára épül a Beaudet (Hesse)-operátor (Rottensteiner 2011).

A méretarány-független (*scale invariant*) detektorok között találhatók a Harris-Laplace operátor, a DoG (*Difference of Gaussian*), a SIFT (*Scale Invariant Feature Transform*), valamint az affin-invariáns detektorok (Rottensteiner 2011).

Az **él/vonalextrakció**ra alkalmas szegmentálási eljárások használatánál tudni kell, hogy kétféle él/vonal létezik. Az első csoport a fizikai élek csoportja, amibe az anyagváltozás és a felület tájolásának változása tartozik. A második csoport az optikai éleké, ahova a megvilágítás és árnyék változása, a szín megváltozása vagy a textúra változása tartozik.

A lehetséges módszerek ez esetben a kép deriváltjaira épülő, parametrikus él-modellt használó, mintaillesztéses (*template matching*) vagy egyéb módszer lehet. Az első derivált használatára támaszkodik az ismert Sobel- vagy a Roberts-módszer, továbbá a Gauss-függvény deriváltját használó operátor, valamint a Canny-operátor. A második derivált szükséges a Laplace-operátorhoz, valamint a LoG (*Laplacian of Gaussian*) megoldáshoz. A mintaillesztéses módszerek legismertebbike a Kirsch-algoritmus. Az egyéb éldetektáló módszerek között a Hough-transzformációt említem meg (Rottensteiner 2011).

A **felület-extrakció**s módszerek igen jó csoportosítása olvasható Haralick és Shapiro (1992), és Russ (1999) könyvében: küszöbérték szerinti vágás (*thresholding*), területnövesztés (*region growing*), klaszterezés (*clustering*), tulajdonság-tér alapú szegmentálás (*feature space segmentation*), daraboló- összevonó szegmentálás (*split&merge segmentation)*, szabály alapú szegmentálás (*rule based segmentation*), mozgás alapú szegmentálás (*motion based segmentation*). A sok szempontból különlegesnek tekinthető bináris képekre két további szegmentálás is említhető: a csatlakozó komponens címkézés (*connected components labelling*), valamint a tulajdonság alapú szegmentálás (*signature segmentation*).

Rottensteiner (2011) ezeket a módszereket még kiegészíti a kontúrkereséses felületszegmentálási módokkal (pl. az él-kinyerést követő kitöltés vagy a vízválasztó-eljárások (*watershed*), valamint a gráfmetszéses (*graph cut*) megoldásokkal. Tizhoosh (1998) a szegmentálásokról is szót ejt fuzzy-módszerekről szóló könyvében: jórészt a tulajdonság-tér alapú szegmentálás fuzzy megoldását ismerteti, de a szabály alapú megoldást is bemutatja. A fuzzy integrálással szerinte akár különböző forrásból származó, különböző típusú információforrások szerint is elvégezhető a szegmentálás.

A fenti felsorolásból két eljárást érdemes kiragadni. A területnövesztés eljárás kiinduló eleme egyetlen pixel, az ún. mag (*seed*), ami mellé a hasonlósági kritériumot teljesítő szomszédos pixelek hozzárendelésre kerülnek. Ez az eljárás tipikus *bottom-up* eljárás, azaz a képet alkotó legkisebb elemből halad a nagyobb egység felé. Ennek ellentétes eljáráscsoportja a *top-down* csoport, aminek jó képviselője a *split&merge* eljárás. Ennek futása a teljes képből indul, majd fokozatosan darabolja a képet, később annak mezőit, esetleges hasonlóság esetén a szomszédos mezőket összeolvasztja.

A felületi szegmentálás folyamán kapott foltok háromféle tulajdonságkörrel rendelkeznek. A geometriai tulajdonságok közé tartoznak a határvonalak jellemzői, a méretadatok, a formára, a súlypontra vonatkozó számértékek, stb. A radiometriai tulajdonságok között találjuk az átlagintenzitást, az intenzitás-szórást, a textúra-paramétereket, az indexeket, stb. Végül a relációs tulajdonságok alkotják a harmadik csoportot, köztük a szomszédsági jellemzőkkel.

Megjegyzem, hogy a magassági modellek (pl. digitális felszínmodell) is szegmentálhatók a felületszegmentáláshoz hasonló eljárásokkal; tulajdonképpen a magasságértékek az intenzitásértékekhez hasonló jellemzőként viselkednek. Az eredmény magassági értelemben összetartozó foltok sorozata, köztük olyan különleges elemek említhetők, mint a síkok (a gyakorlatban a tetősíkok nevezhetők meg példának).

3 A szegmentálási eljárások: mintaalkalmazások

A távérzékelt és azon belül a fotogrammetriai felvételek feldolgozása során nyújtanak segítséget a szegmentálási megoldások. Ebben a szakaszban néhány képen lefuttatott algoritmussal szeretném illusztrálni, hogy a szegmentálások milyen eredményekre vezetnek. Természetesen csak pár kiragadott eljárás ismertetésére van mód terjedelmi korlátok miatt.

A gyakorlati példák illusztrálására két felvételt, illetve azok egy-egy kivágatát használtam. Az első felvétel a Nemzetközi Fotogrammetriai és Távérzékelési Társaság (ISPRS) szervezésében elvégzett kamerakalibrációs teszt során készült a németországi Stuttgart melletti Vaihingenről. A felvételt Z/I Imaging DMC kamerával készítették 2008. július 24-én infravörös, vörös és zöld sávokban. A digitális fotogrammetriai felvétel megközelítőleg 900 m terep feletti repülési magasságból készült 120 mm-es fókusztávolságú objektívvel. A repülés ötsoros, két keresztsoros tömbben történt. A képek megközelítő terepi felbontása 8 cm, a radiometriai felbontás sávonként 11 bit. A kamerateszt céljaira letölthető állományok 16 bites TIFF formátumban állnak a kutatók rendelkezésére. A kép 7680 × 13824 pixelből áll. A tesztfelvételeket a kamerateszten kívül egy másik, képelemző tesztben is felhasználják (Rottensteiner et al. 2011).

A második felvétel egy pilóta nélküli repülőgépről (UAV) készült Sopronban 2012. március 24-én. A kamera egy Canon EOS 5D Mark II tükörreflexes digitális fényképezőgép volt, az objektív fókusztávolsága 50 mm. A modellrepülőgép relatív repülési magassága mintegy 130 m. A felvételt RAW formátumban rögzítettük valódi-színes (24 bit színmélység) kivitelben. A teljes kép 5616 × 3744 pixelből áll.

A mintaalkalmazásokat Mathworks Matlab 2012b környezetben fejlesztettem.

A pontszegmentálás első lépésében az RGB-színes képet egy másik színmodellbe, az ún. Lab-modellbe transzformáltam át. Ennek a szintén szabványos színmodellnek kidolgozója a CIE nevezetű Nemzetközi Megvilágítási Bizottság (*Commission Internationale de l´Eclairage*). A CIELAB-színmodell összetevői a fényerősség (*L*), a vörös/bíbor és zöld közötti színpozíciót kifejező *a*-komponens és a sárga-kék színpozíciót jelentő *b*-komponens. Az eredménykép tehát ugyanúgy háromcsatornás, azonban a további műveletekben – a tapasztalatok szerint – jobban megkülönböztethető jellemzőkre bonthatók. Az egyes csatornák értékeit egy Gauss-féle alul-áteresztő szűrővel szűrtem, amelynek kernelmérete 15×15 pixel volt, a szűrés mértékét befolyásoló szórás értékét 1.5-szeresre állítottam. A szigma beállítása az irodalom alapján, tapasztalati úton történt (Gonzalez 2004).

A tényleges pontszegmentálásra a Harris-operátort használtam, amelynek futásához az érzékenység és a minőségi szint megadása szükséges. A többszöri futtatás alapján az érzékenységre az alapértelmezett 0,01 érték helyett ennek háromszorosát állítottam be, mely csekély mértékben csökkentette a kapott pontok számát (hibaredukció). Az érzékenység 0 és 1 közötti szám lehet. A minőséget szabályozó paraméter 0 és 0,25 közötti szám; értékét meghagytam az alapértelmezettnek (0,04). A pontszegmentálást mindhárom csatornára elvégeztem, így látható, hogy az egyes eljárás milyen jellegű sarokpontokat, önálló pontokat vagy intenzitásugrásokat képes megtalálni (1. ábra).

A pontszegmentálási eljárásokkal kapható önálló képpontok legfőbb hasznosítása például a tájékozási műveletekben jelentkezik. A több képen végzett szegmentálással kapott pontok közötti további vizsgálattal választhatók ki a tájékozáshoz szükséges halmaz elemei, amelyekkel képkoordinátáira támaszkodva lehet számítani a tájékozási elemeket.

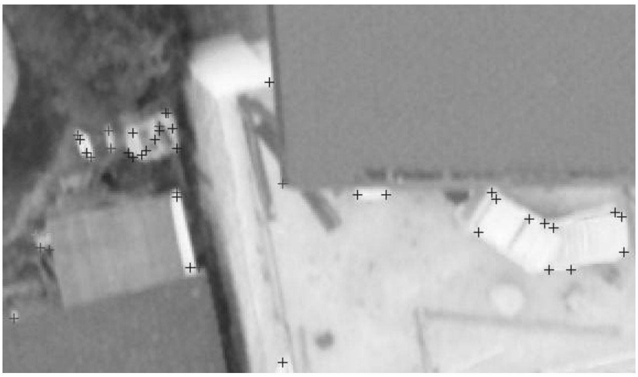
A vonalszegmentálás első lépésében küszöböléssel és szűréssel kombinált Canny-éldetektálást alkalmaztam. A küszöböléssel megadott alsó és felső limit közé eső intenzitásértékek kiválasztásával szűkíthető a lehetséges pixelek köre. Esetemben a küszöböket a kép maximális gradiensére vonatkoztatva állítottam be 0,05 és 0,13 értékekre. Az eljárás hátránya, hogy a küszöbök tapasztalati úton választhatók ki. A Canny-eljárás is tartalmaz egy beépített Gauss-szűrőt, aminek vezérléséhez kell egy szórás-paraméter, melynek segítségével a kapott élek számát lehet jelentősen befolyásolni. A jobb hatásfok érdekében a szigma értékét 5-re állítottam. Hangsúlyozni kell, hogy a Canny-operátor eredménye pixeles kép; csak az ember számára jelentkeznek ezek a pixelek vonalként az agyunkban!

A számítás második lépésében a lehetséges éleket Hough-transzformációval vizsgáltam tovább. Ez a transzformáció az élkeresés eredményképén megfigyelhető vonalszerű elemeket átalakítja olyan reprezentációra, amelyben a vonalak polár-koordinátákkal adottak. A teljes kép végigszámításával egymásra halmozódnak a hatások. A transzformáció eredményét jelentő ún. akkumulátor-kép elemzéséből lehet kiválasztani a nagy valószínűség szerinti egyeneseket, melyek az akkumulátorban egyfajta lokális csúcsként jelentkeznek. A kiválasztásnál is mód van szűrésre egy küszöb megadásával. Előzetes elemzések alapján a legnagyobb értékű csúcs 95%-ára tettem a küszöbszintet. A kiválasztott csúcsokat ezután visszatranszformáltam a szokásos reprezentációba, majd a legalább 30 pixel hosszú és legfeljebb 30 pixel folytonossági hiánnyal rendelkező éldarabokat őriztem meg. A leírt műveleteket mindhárom sávra elvégeztem, végül azokat kombináltam (2. ábra).

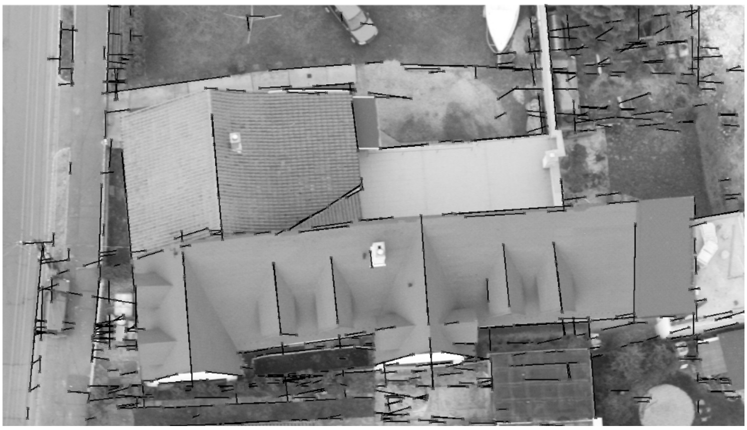
A vonalszegmentálással a képen láthatóan olyan élek jelennek meg, melyek alapját képezik az objektumrekonstrukciónak, vagyis a képértésben eredményül várt terepi objektumok (például épületek) vázát kapjuk meg. Ezek az élek tehát további vizsgálattal tereptárgyakká szerkeszthetők.

A felületi szegmentálás talán a legismertebb eljárás a képszegmentálások között. Egyik legegyszerűbb eljárása a négyesfa-eljárás (*quadtree*) egyfajta *split&merge* műveletnek tekinthető. Ennek futtatása során a képet rekurzívan négyfelé vágjuk, majd minden kapott negyedre levezetünk egy homogenitási mérőszámot.

A mérőszámtól függően további darabolásról vagy egyben hagyásról dönthetünk. A 3. ábrán láthatunk egy DMC képrészletet, illetve annak négyesfa-szegmentálását.



1. ábra. Pontszegmentálás UAV-képrészleten



2. ábra. Vonalszegmentálással nyert élek UAV-képen

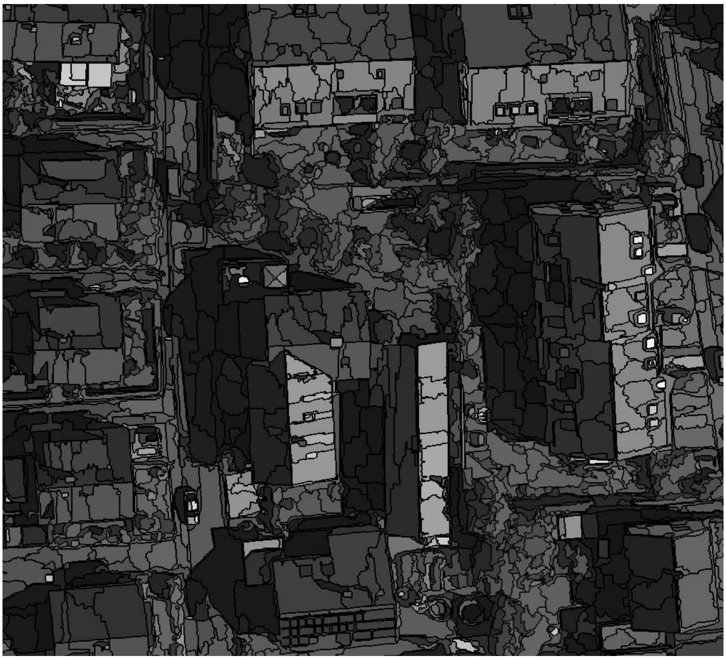
Az eljárásban a szegmens homogenitására 10% eltérést engedélyeztem, a maximális szegmensméret pedig 512 × 512 pixel volt. Az ábrán látható szegmenshatárvonalak is szépen kirajzolják a képtartalmat.

A négyesfa szegmentálás óriási jelentőséggel bír a képek tömörítésében, mivel a nagyobb, homogénnek tekinthető képrészletek kevés számú paraméterrel írhatók le, így nagy tömörítési fok érhető el.

A tereptárgyak rekonstrukciójához gyakran felület-kinyerést használnak, például klaszterezést. Néhány évvel korábban szerzőtársaimmal már közöltünk önszerveződő neurális hálózattal, SOM (Self Organizing Map) módszerrel végzett szegmentálásról cikket (Barsi et al. 2010). Most egy kereskedelmi forgalomban kapható szoftver (eCognition) beépített eljárásai közül mutatok be egy tipikus *bottom-up* eljárást, amelynek segítségével a homogenitást (pontosabban az ennek inverzét jelentő heterogenitást) tekintve vezérlőelvnek, továbbá figyelembe véve a szegmensek alak, méret és a benne található pixelek színváltozékonyságát lehet a képet szegmentálni.

Az implementált megoldás továbbá rekurzív, így többszörös felbontás mellett (*multiresolution*) kapjuk a végeredményt (4. ábra). A futtatáshoz a színcsatornák súlyát azonosan egységnyire, a méretarány-tényező értékét 30-ra állítottam, vagyis a homogenitás maximális szórását határoztam meg. További beállításra van szükség az alakparaméter tekintetében: ezt 0,3-re (30%) állítottam, amivel szemben a színek súlya így 0,7 (70%). A szegmensek alakján belül azok kompaktságát (*compactness*) és simaságát (*smoothness*) befolyásoló tényezők értékét 0,5-0,5-re (50-50%) állítottam. Az eredményül kapott szegmensek szépen követik a tereptárgyak, azaz az épületek, fák, utcák homogén foltjainak sima lefutású határait.

3. ábra. DMC képrészlet és négyesfa-szegmentálása



4. ábra. DMC-kép felületi szegmentálása bottom-up módszerrel

A szegmensekre levezethető jellemzők alapján megnyílik a lehetőség, hogy megadott szabályszerűségek figyelembevételével összeolvaszthatók legyenek, s az így követett objektum orientált képelemzésben eredményül magukat a terepi objektumokat kapjuk meg.

4 Összefoglalás

A cikkben ismertettem a képelemzés talán leggyakrabban használt műveletcsoportjának, a szegmentálásoknak fontosabb tagjait. Látható, hogy számos matematikai-műszaki megoldás használható fel a kép információtartalmának elemzésére. Ezen módszerekből úgy válogattam, hogy be lehessen mutatni minden nagyobb szegmentálás-csoport lényegét, egy-egy konkrét gyakorlati példán szemléltetve azok eredményeit. Az áttekintés remélhetőleg közelebb hozhatta az Olvasóhoz az objektum-orientált képelemzés világát jelentő felület-kinyerési megoldás működését.

Hivatkozások

Barsi Á, Gáspár K, Szepessy Zs (2010): Unsupervised classification of high resolution satellite imagery by self-organizing neural network. Acta Geographica ac Geologica et Meteorologica Debrecina, 4(1), 37-43.

Blaschke T (2010): Object based image analysis for remote sensing. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, Elsevier, 2010(65), 2-16.

Gonzalez R C, Woods R E, Eddins S L (2004): Digital Image Processing using Matlab. Prentice Hall.

Haralick R M, Shapiro L G (1992): Computer and Robot Vision I-II. Addison-Wesley, New York.

Jain A K, Farrokhnia F (1990): Unsupervised Texture Segmentation Using Gabor Filters. IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics, conference proceedings, 14-19.

Luhmann T (2000): Nahbereichsphotogrammetrie. Wichmann.

Remondino F (2006): Detectors and descriptors for photogrammetric applications. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, 36(3), 49-54.

Rottensteiner F (2011): Bildanalyse. Vorlesungsskriptum, Hannover.

Rottensteiner F, Baillard C, Sohn G, Gerke M (2011): ISPRS Test Project on Urban Classification and 3D Building Reconstruction. ISPRS - Commission III – Photogrammetric Computer Vision and Image Analysis, Working Group III / 4 - Complex Scene Analysis and 3D Reconstruction. http://www.commission3.isprs.org/wg4/.

Russ J C (1999): The Image Processing Handbook. CRC Press.

Tizhoosh H R (1998): Fuzzy-Bildverarbeitung, Einführung in Theorie und Praxis. Springer.

HADTÖRTÉNETI REKONSTRUKCIÓK ÚJ EREDMÉNYEI A TÁVÉRZÉKELÉS ÉS A GIS ALKALMAZÁSÁVAL

Juhász Attila, Winkler Gusztáv**

New achievements in military historical reconstruction supported by remote sensing and GIS *– The traditional data acquisition sources of military historical researches are basically the written and the map data, but the modern high-resolution remotely sensed data and the GIS can also be integrated into this discipline. This data acquisition and GIS processing methods connect the human scientific areas to the technical scientific fields. In case of written and map data usage, one of the most significant problem is the question of data reliability. However, the remote sensing technologies provide data that can be reliably considered as objective information. Based on these evaluated and interpreted information, authentical reconstructions can be carried out that can confirm or deny previous military historical examinations and theories. In our prior research a methodology, based on remotely sensed data and GIS analysis, was developed that makes the above mentioned aims feasible. We represent the functionality of the described methodology through three typical examples: the ethnical and cultural changes in Europe, the battle of Győr (1809) and the Margit-line (1944-45).*

Keywords: GIS, remote sensing, military historical reconstruction

A hadtörténet klasszikus forrásai a szöveges adatok és a térképi művek, de a modern távérzékelési eszközök és a GIS megjelenésével új adatforrások bevonása is lehetővé vált e területen. Ez jelenti a kapcsot a humán és a műszaki tudományterületek között. A klasszikus források esetében a legnagyobb problémát a megbízhatóság jelenti, míg a távérzékelt adatokat objektívnek tekinthetjük. Ezen adatok és a GIS segítségével már végrehajthatóak olyan elemzések, melyek megerősíthetnek, megcáfolhatnak korábbi hadtörténeti elképzeléseket. Kidolgoztunk egy olyan, a távérzékelésen és a térinformatikán alapuló módszert, mely alkalmas e vizsgálatok végrehajtására. A gyakorlati megvalósítást három példán keresztül mutatjuk be: Európa etnikai és kulturális változásai, a Győri csata (1809) és a Margit-vonal (1944-45).

Kulcsszavak: térinformatika, távérzékelés, hadtörténeti rekonstrukció

1 Bevezetés

A térinformatika és a távérzékelés humán területeken (régészet és a kulturális örökség) történő alkalmazásának ma már számos szép példája ismert. Korábbi kutatásinkban ezeknek a mérnöki tudományoknak a felhasználási lehetőségeit vizsgáltuk meg különböző korszakok eseményeinek és kapcsolódó objektumainak rekonstrukciójában. A kutatás eredményeképpen létrehoztunk egy módszertant, melyben a különböző távérzékelési eljárásokat, illetve a térinformatika lehetőségeit integráltuk, így megteremtve a régészeti és humán jellegű adatok egységes rendszerben történő kezelésének lehetőségét. A régészeti kérdések, problémák mérnöki szemléletű megközelítése olyan objektív eredményekhez vezethet, melyeket hitelesnek tekinthetünk és segítségükkel megerősíthetjük vagy módosíthatjuk a ma elfogadott tudományos elképzeléseket.(Juhász 2007)

A régészeti adatok térinformatikai feldolgozásában továbblépve az időadatok kezelése a következő érdekes kihívás. Különös tekintettel arra, hogy az idő szerepe kiemelten fontos ezen a tudományos szakterületen. Az időadatok alkalmazása történhet a klasszikus térinformatikai megközelítésben (objektum geometria és attribútumok), de speciális megoldásokon keresztül is (változások, mint önálló objektumok)(Juhász 2011). A mai GIS szoftverek egy része már alkalmas az időadatok figyelembe vételére is. Bemutatjuk, hogyan oldhatók fel a rekonstrukciókban gyakran előforduló tér- és időbeli ellentmondások, hiányosságok.

*BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: atjuhasz@eik.bme.hu, gwinkler@eik.bme.hu

2 A térinformatika és a távérzékelés alkalmazása a hadtörténeti rekonstrukciókban

Korábbi kutatásainkkal bizonyítottuk, hogy a távérzékelt adatok felhasználhatók a hadtörténeti és régészeti munkák során, illetve, hogy a térinformatika segítségével egy egységes rendszerben valósítható meg egy hadtörténeti rekonstrukciós folyamat. Ennek három fő lépése a korabeli környezet, az objektumok és végül a hadtörténeti folyamatok és események rekonstrukciója. (Juhász és Mihályi 2006)

2.1 A környezetrekonstrukció

A környezet ábrázolása az esetek döntő többségében indokolt, sőt szükségszerű. Mint külső tényező, befolyásolja az objektumok elhelyezését, méretét, valamint hatással van az események kimenetelére is. Különösen igaz ez a hadászatban, ahol a földrajzi környezetnek kulcsszerep jut, így szükséges a rekonstrukciója. A gyakorlatban ez egy digitális alaptérkép az aktuális területről a vizsgált időszak környezeti jellemzőivel. Ez megkönnyíti a felhasználó tájékozódását és segítséget nyújthat olyan esetekben, amikor környezeti elemekhez kötött információkkal rendelkezünk (1. ábra).

2.2 Az objektumrekonstrukció

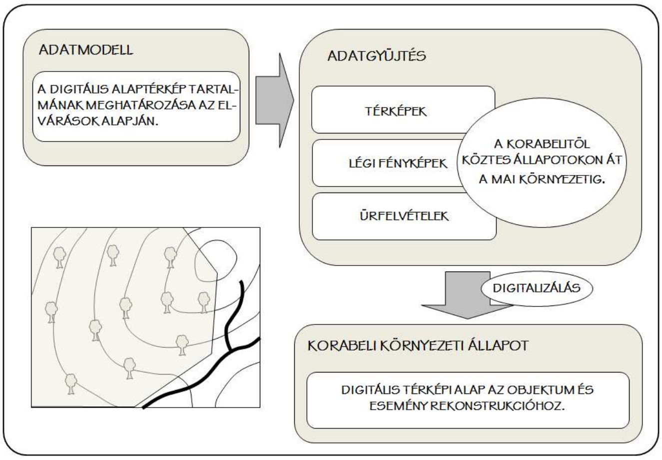
A környezeti rekonstrukció lesz az alapja a további lépéseknek, melyek során térképezzük a vizsgált területek felderített erődítéseit. Ez a teljes rekonstrukciós feladat legnagyobb és talán legérdekesebb része. Az objektumok előzetes vizsgálata, majd azonosítása és illesztése a térinformációs rendszerbe, változatos, szerteágazó munka eredményeképpen valósul meg. A környezeti elemekkel ellentétben, az erődítések esetében már nem csak a geometriai, hanem a leíró adatok is fontosak. Előbbiekhez döntően archív anyagokat használhatunk fel.

A tényleges felderítés előtt érdemes tanulmányozni egyéb forrásokat is: egyszerűbb, ha tudjuk mit és hol keresünk. Már ennek az előzetes tájékozódásnak az adatforrásai is igen változatosak lehetnek: a történelem, a hadtörténelem, a régészet, a hadművészet, a fegyvertan, az építőmérnöki tudományok, a térképészet vonatkozó részei. Nagyon hasznosak voltak például, a II. világháborúval foglalkozó munkánk során azok az erődítési utasítások, amelyek megbízható és pontos geometriai információkat tartalmaztak az erődítésekről, és emellett attribútum adatokkal is szolgáltak.

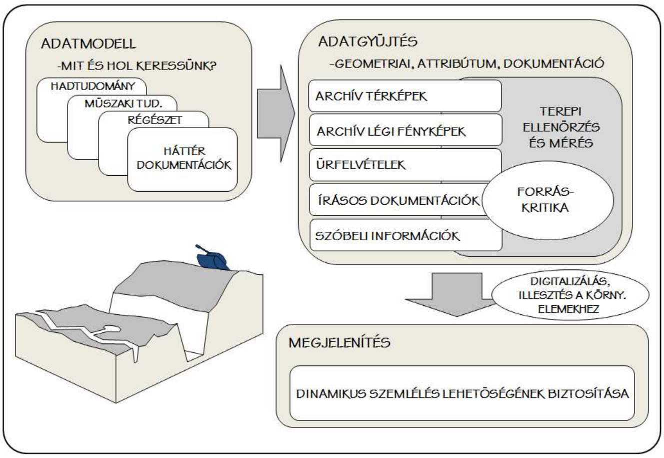
A következő lépés a konkrét erődítési elemek azonosítása és kiértékelése. Ezek nagyságától függően az archív térképek, archív és mai légi fényképek, illetve mai űrfelvételek lehetnek a források. Felszín alatti erődítési elem esetében az interpretáció végrehajtásához szakmai ismeretekre és tapasztalatra van szükség, mert ráutaló jelek alapján kell a kiértékelést végrehajtani. Az attribútum adatok forrásai döntően ugyanazok, mint a geometriai adatok esetében: tematikus térképek, a légi fényképek, az űrfelvételek (2. ábra).

2.3 Az eseményrekonstrukció

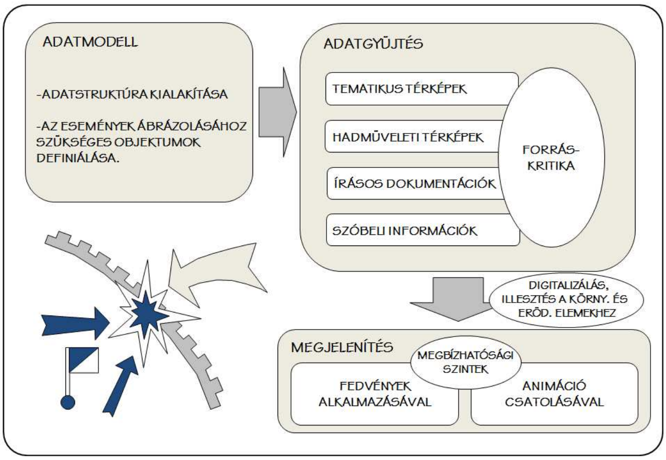
A környezeti és objektum rekonstrukció sikeres végrehajtása után, olyan térképi alap áll rendelkezésünkre, amelyen megkísérelhetjük, az események rekonstruálását is. Az események ábrázolásának pontosságát, megbízhatóságát alapvetően két tényező befolyásolja. Az első, hogy a vizsgált események, mikor történtek, a második pedig az, hogy milyen minőségű és mennyiségű információt lehet összegyűjteni vele kapcsolatban. Ez utóbbi tényező természetesen függ az elsőtől. Általánosságban elmondhatjuk, hogy az időben visszafelé haladva, a rendelkezésre álló adatok mennyisége és minősége is csökken. A három fő információszerző lehetőség: a különböző térképi művek, az írásos dokumentációk és a személyes szóbeli visszaemlékezések (ha erre van lehetőség). Ennél a lépésnél sokszor találkozhatunk ellentmondásos információkkal, így az esemény rekonstrukció a legkritikusabb folyamat. Az esetek többségében kevés és megbízhatatlan információ áll csak rendelkezésre, ezért a forráskritika alkalmazása talán itt a legfontosabb. (3. ábra)



1. ábra. Környezeti rekonstrukció



2. ábra. Objektum rekonstrukció



3. ábra. Esemény rekonstrukció

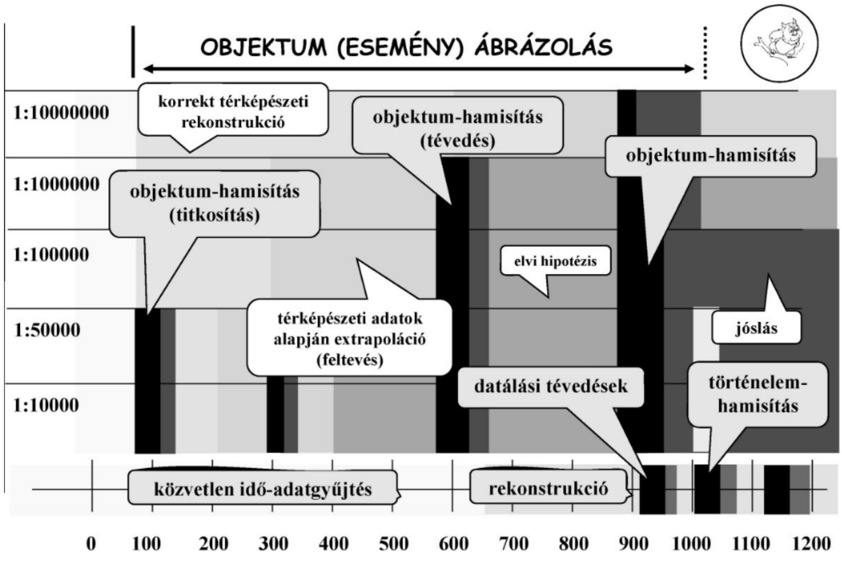
A korábban említetteknek megfelelően, most vizsgáljuk meg az időadatok kezelésének lehetőségét. A térinformatika kutatásának egyik divatos kérdése napjainkban a tér és az idő ábrázolása, a változások követése, térképpel való kifejezése. Ennek a problémának a lehetséges megoldásáról sok tanulmány készült, megoldási algoritmusok, javaslatok is születtek. Az objektumok, események elhelyezkedését, változását az időben mindeddig azonban úgy kezelik, mint „abszolút értékű" valóságot, pedig, mint kiindulási adatok, szintén hibával terheltek lehetnek. Dolgozatunkban éppen ezért megkíséreljük bemutatni azokat a lehetőségeket, amelyek segíthetnek az adatszolgáltató szakterületeknek az anomáliák, kérdéses jelenségek, időpontok korrigálásában, kiegészítésében, valamint esetleg újszerű adatok megalkotásában.

Mindenekelőtt, abból indulunk ki, hogy a „szokásos" térképészeti adatgyűjtési műveletek mellett térképeket a múltra vonatkozóan is elő tudunk állítani. Ezt nevezünk rekonstrukciónak. Az igaz, hogy a termékek korrektsége az idő kiterjesztésével csökken (tehát hiba, esetleg tudatos elhanyagolás léphet fel). Ha nem lenne probléma a rendelkezésre álló forrásokkal, akkor (Magyarországot tekintve) ez az úgynevezett rekonstrukciós időszak, természetesen a feldolgozási méretarány (részletesség, pontosság) függvényében belenyúlhat a nagy természeti szabályozások előtt időszakba is (Winkler 2004). Ebből következne, hogy az így ábrázolt objektumok, jelenségek, események tér és idő kapcsolata megfelelő.

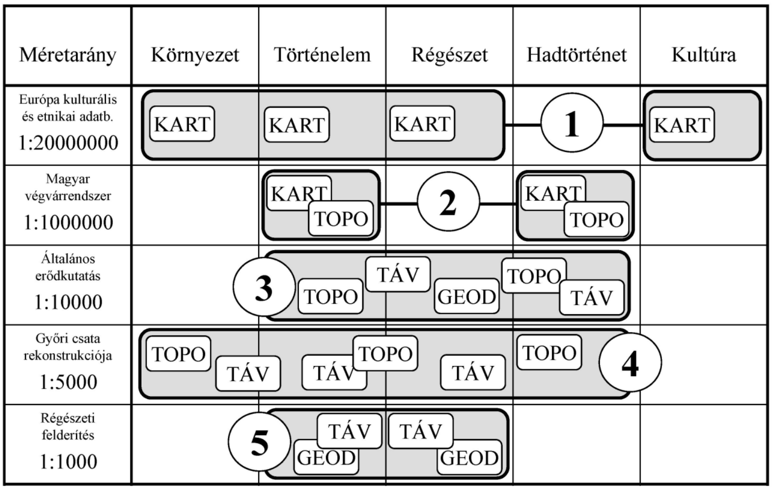
Mivel azonban ezek a végtermékek általában valamilyen fokon az egész társadalom számára készülnek kulturális, oktatási vagy műszaki célokra, a hibák miatt tovább kell lépnünk. Ugyanis a fent említett hibák, torzítások módosítják az egész rekonstrukciós rendszert (4. ábra). Rövidtávon a közelmúlt titkosítási célú változtatásai, míg régebben az elhanyagolások, tévedések okozhatnak geometriai problémákat. Ha távolabb megyünk az időben, akkor pedig eljutunk a teljes információhiányhoz, a konkrét hamisításhoz (amit esetleg nem is olyan régen követtek el) (Winkler 2004, 2007). Sajnos ugyanez vonatkozik magára az idő meghatározására is.

Ha megvizsgáljuk a két jelenség kölcsönhatását, akkor esetenként komoly anomáliákra is számíthatunk (szerencsére ezek ritkák). Ezeknek az 4. ábrán látható „fekete mezőknek" kiküszöbölésére, a megoldások kiegészítésére több, a gyakorlatban is alkalmazható megoldást ismertetünk.

Az alábbiakban példákon keresztül bemutatott, és térinformatikai eszközökkel végzett vizsgálatok alapján kijelenthetjük, hogy a kartográfia, topográfia és a távérzékelés mindegyike alkalmas és fontos módszer lehet a humán szakterületek adatainak kiegészítésében (Winkler és Juhász 2007) (5. ábra).



4. ábra. Zavarok a tér és idő kapcsolatában



5. ábra. Példák az adatok kiegészítésére

Továbbá az így nyert eredmények ezeken túlmenően olyan újszerű megoldásokat, kérdéseket is felvethetnek, amelyek megválaszolása, integrálása a tudományba előremozdíthatja magának a humán területnek is a fejlődését (Winkler 2006). Ilyen adatok lehetnek:

1. Helyszínek, objektumok felderítése, térképezése (új jelenségek, objektumok lokalizálása, datálás elősegítése).
2. GIS adatbázis létrehozása (különböző adatok elemzése, összehasonlítása, térbeli kapcsolatok)
3. Történeti információk összekapcsolása az időben (folyamatosság kimutatása, vizsgálata, időbeli kapcsolatok).
4. Környezetrekonstrukció (események leírása, módosítása, új megoldások keresése).
5. Objektumrekonstrukció(objektumok-események összefüggése, modellezése, datálás).

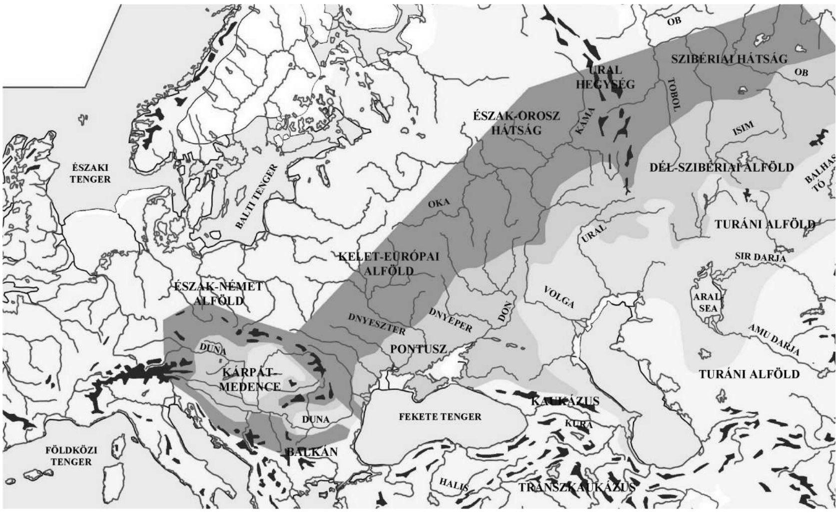
3 Mintapéldák bemutatása

3.1 Európa etnikai, földrajzi és kulturális változásai

Itt megkíséreltünk egy folyamatosan változó földrajzi környezethez több folyamatosan változó tematikát kapcsolni azzal a céllal, hogy a történeti hézagokat összekapcsolva kiegészítő információkat nyerjünk (Winkler 2009) (6. ábra). Ezek a kiegészítő információk főként a kulturális-etnikai kapcsolatokra vonatkoznak, a korai (kb. Kr.e. 2000-ig) időszakokban szinte kizárólag régészeti információk, később vegyesen, jórészt a történettudomány és az antropológia adatai.

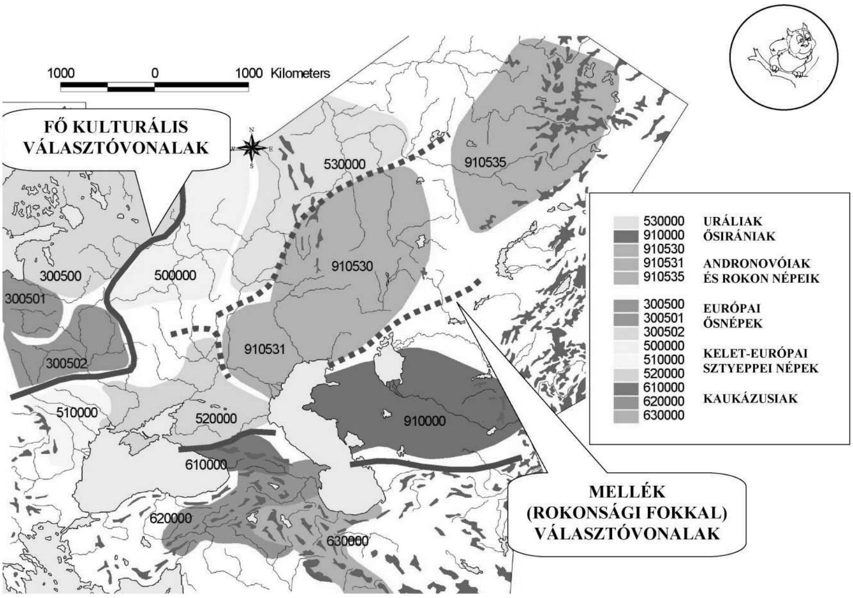
A térképmű folyamatosan változó geometriája alapvetően három tényezőtől függött: a tengerszint folyamatos emelkedésétől, a földkéreg mozgásaiból és a belső kontinentális földrajzi változásoktól. Ezek miatt a geometriai adatrendszer homogenitása a belső vízhálózat alapján volt csak biztosítható.

Továbbá ahhoz, hogy a figyelembe vett legkorábbi időszakoktól kezdve folyamatos tematikus adatfeltöltést lehessen elérni, illetve az elkészített anyagok között a rendszerben összehasonlításokat, elemzéseket lehessen végrehajtani, a meghatározó régészeti kultúrákat (jellemzően az eljegesedés végén meghatározhatókat) számszerű kódrendszerrel láttuk el (7. ábra). Ennek oka a későbbi etnikai keveredések rögzítési lehetősége, és az elemzés elősegítése volt. A kódolás a matematikai műveletek elvégzésének lehetőségén kívül még a térképek megjelenítésénél az egységes jelkulcsos ábrázolást is elősegítette, hiszen így az egész vizsgálat időszakra azonos jelkulccsal, az értelmezést nem zavarva lehetett térképeket, egységes adatrendszer-megjelenítést előállítani.

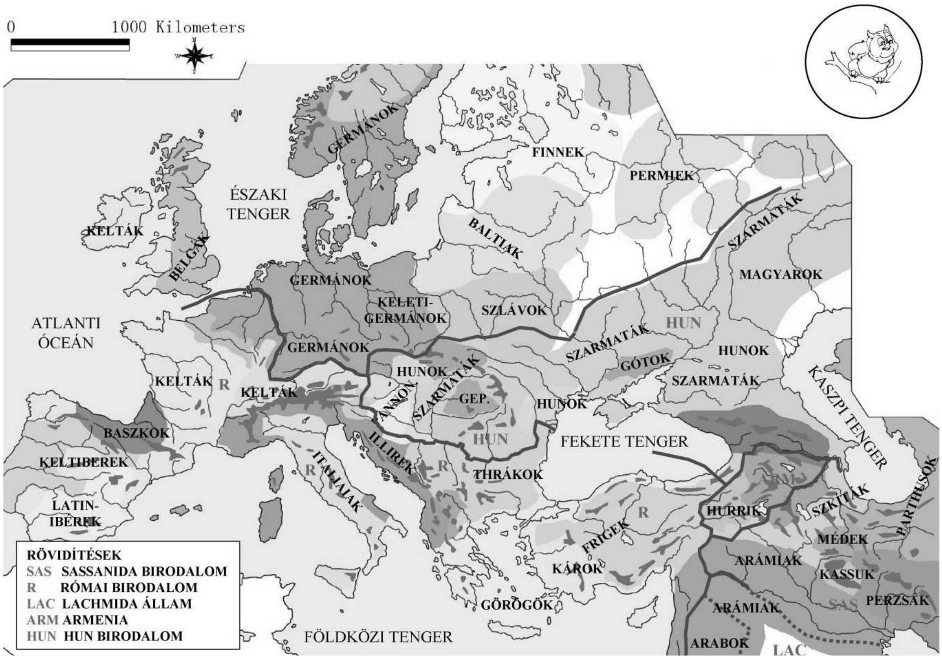


6. ábra. Példa a rekonstrukció fedvényeiből: környezeti rekonstrukciós folyamat, partvonal Kr.e. 9000-Kr. u. 1000,vegetációs régiók a sztyeppén

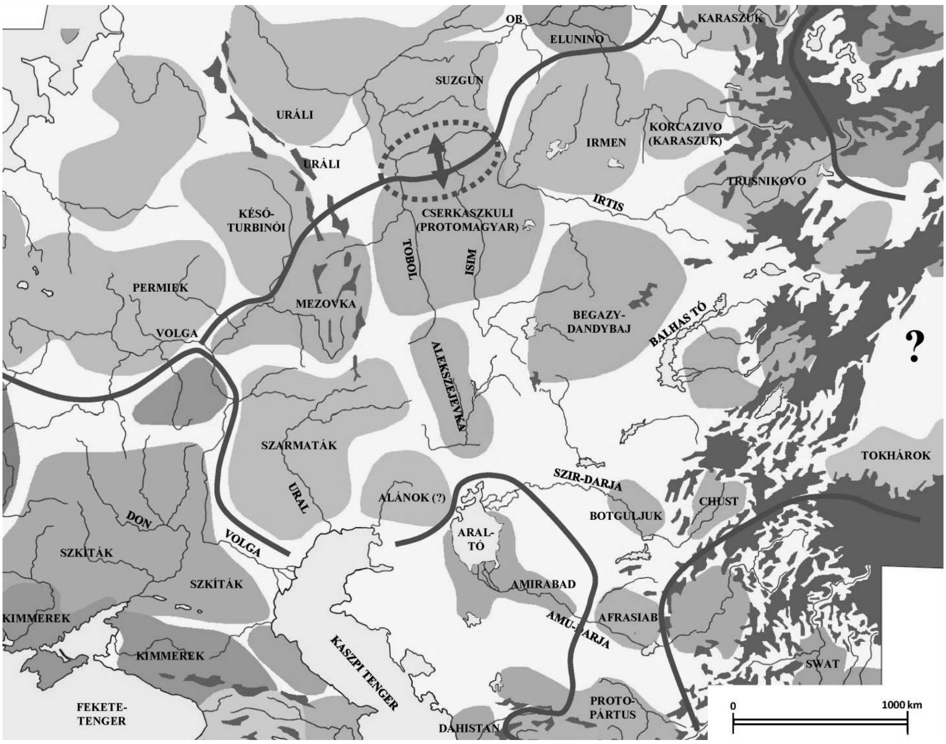
Az így elkészített rendszer alkalmas volt a régészetileg nem kutatott időszakok részbeni lefedéséhez, illetve a történeti és régészeti kultúrák megfeleltetéséhez (8. ábra).
Ugyanezt az alapot használtuk fel a magyarság kialakulásának vizsgálatához is, amely esetben a kiindulást és az időközi információkat a biztos régészeti emlékek adták, ezek után már csak térinformatikai (mérnöki) eszközökkel oldottuk meg a feladatot. Ebben az esetben más eredményre jutottunk a Kr.e. 500- Kr.u. 500 közötti időszakra, mint az „elfogadott” történettudomány (9. ábra).
Továbbá ezeken az alapokon megvizsgáltuk a sztyeppei népek vallási fejlődését és kapcsolatait a nagy monoteista vallásokkal. Sikerült az ősmagyarság hitbeli helyzetét meghatározni az idő függvényében, és rámutatni, hogy például a kereszténység megismerése és felvétele sokkal korábban, és főképp a Kelet-európai sztyeppéken történt (10. ábra).



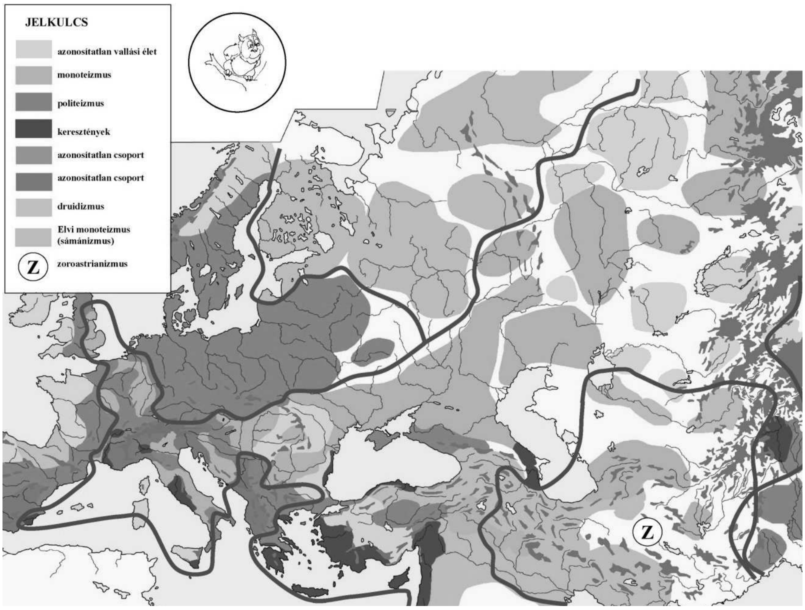
7. ábra. Az etnikai és kulturális viszonyok kódolása



8. ábra. Részlet az etnikai-politikai térképrendszerből (Kr.e. 400 körül)



9. ábra. A magyarság kialakulásának időszaka (részlet), Dél-nyugat Szibéria Kr.e. 1000 körül

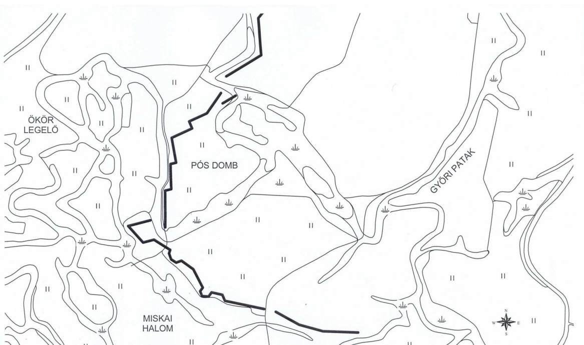


10. ábra. Példa a rendszer vallási információkkal való feltöltésére (Kr.e. 200 körül)

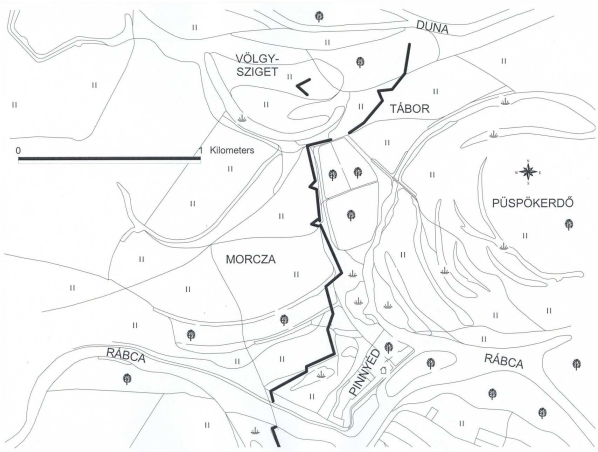
3.2 A győri csata

A következő kiragadott (az 5. ábrán 4. számmal jelzett) téma a Napóleon ellen vívott győri csata körülményeinek kutatása, ami kiterjedt a korabeli (1809) környezet, valamint a már nem létező sánctábor rekonstrukciójára. Ennek fő oka, hogy a történeti evidencia ellenére gyakorlatilag nincs nyoma az erődítéseknek a térképeken, és a fontos terepelemek jó része is megváltozott, így már nem alkalmas az akkori események magyarázatára.

A kutatás folyamán megkíséreltük a sánctábor elemeit azonosítani, topográfiai térképek, légifényképek és terepi mérések segítségével. Az alapvető módszer az így nyert eredmények beintegrálása volt egy egységes térinformatikai rendszerbe. Majd az integrált információk értékelése után a kijelölt, érdekes terepszakaszokon terepi felméréseket is végeztünk, 10-20 cm-es szintvonalakkal, hogy a még esetleg így azonosítható objektumok pontos alakját meghatározzuk (11. és 12. ábrák). Így az egész vonalból (elméletileg kb. 7 km) mintegy 4 km-es szakaszt sikerült lokalizálni.



11. ábra. Sánctábor déli szakasz



12. ábra. Sánctábor, északi szakasz rekonstrukció

A felderített és felmért szakaszokon többfajta erődelemet sikerült elkülöníteni. Valószínűsíthető egy majdnem folyamatos (a mocsarak kihagyásával épített) törtvonalú sánc, amit önálló erődök szakítanak meg.

Külön érdekesség volt a sánctábort nagyrészt határoló mocsárvidék kutatása. Röviden az állapítható meg, hogy ezek a mocsarak (régi patakmedrek) az elmúlt 200 évben nem változtatták alakjukat, helyüket, még a Rába szabályozásának hatására sem. Az összes fellelhető térkép ábrázolja őket, így az időben való vizsgálat viszonylag könnyű volt. Ezen kívül a légifényképek tanulmányozása is azt mutatja, hogy nem csak, hogy nem változtak meg, hanem időleges emberi beavatkozás sem történt, tehát az esetlegesen betemetett, áthidalt mocsaras szakaszokat nem ásták ki újra. Ezt a terepbejárás is megerősítette. Ez alapján végül kimondhattuk tehát, hogy a sánctábor egymástól különálló részekből állt. Ezeket a részeket az ágyúállások kötötték össze esetleges pásztázó tűzvezetésükkel. Ez a vizsgálat részben kiegészítette a történelmi ismereteket, részben azonban olyan új kérdéseket is fölvetett, amelyekre választ csak a további történeti kutatások adhatnak.

3.3 Margit-vonal

A Margit-vonal szerves részét képezte a második világháborúban kiépített országos védelmi rendszernek Magyarországon. A fővárostól a Velencei-tó és a Balaton mentén húzódott a Dráváig. Az általunk vizsgált terület a Balaton és a Duna között található. Mivel a szovjetek áttörése után, a „Konrad” és a „Tavaszi ébredés” hadműveletek is ezen a területen zajlottak, így igen érdekes feladatnak tűnt a kapcsolódó objektumok felderítése.

Az alapot a meglévő leírások jelentették:

Fő ellenállási öv 1. vonala:

Duna – Nagytétény vasútállomás – Szent László puszta – Baracska-D – Kápolnásnyék-D – Kisvelence-D – Velencei-tó északi partvonala (15. ábra „A” vonal).

2. vonala (12-20 km távolságban):

Kismarton-É – Martonvásár-D – Baracska vasútállomás – Pázmánd-D (14. ábra „B” vonal).

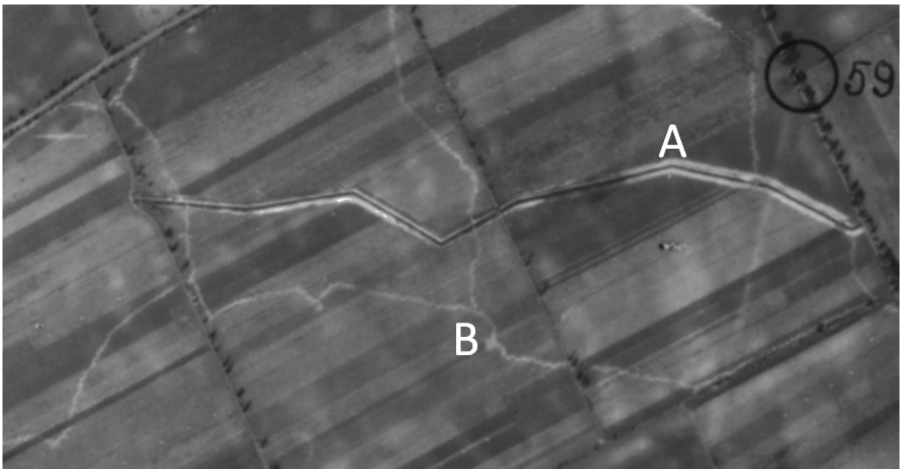
Az írásos dokumentációk arra utalnak, hogy a Margit-vonal áttörésekor, ezen a területen a támadó szovjet csapatok nem ütköztek komoly ellenállásba, viszonylag könnyedén tudták a Budapest körüli gyűrűt kialakítani.

A környezeti rekonstrukció alapjául a terület nagyságát, és a későbbi folytatás lehetőségét is figyelembe véve az 1:50000 méretarányú topográfiai térképet választottuk. A védelmi vonal objektumainak (döntően gyalogsági és harckocsi árkok) rekonstruálására az 1950-53-ban készült légi felvételeket használtuk, melyeken a gyenge minőség ellenére igen jól azonosíthatók voltak az erőd elemek(13. ábra). A kialakított térinformációs rendszert alapvetően a különböző adatforrások információinak egységes feldolgozására és megjelenítésének céljából hoztuk létre.

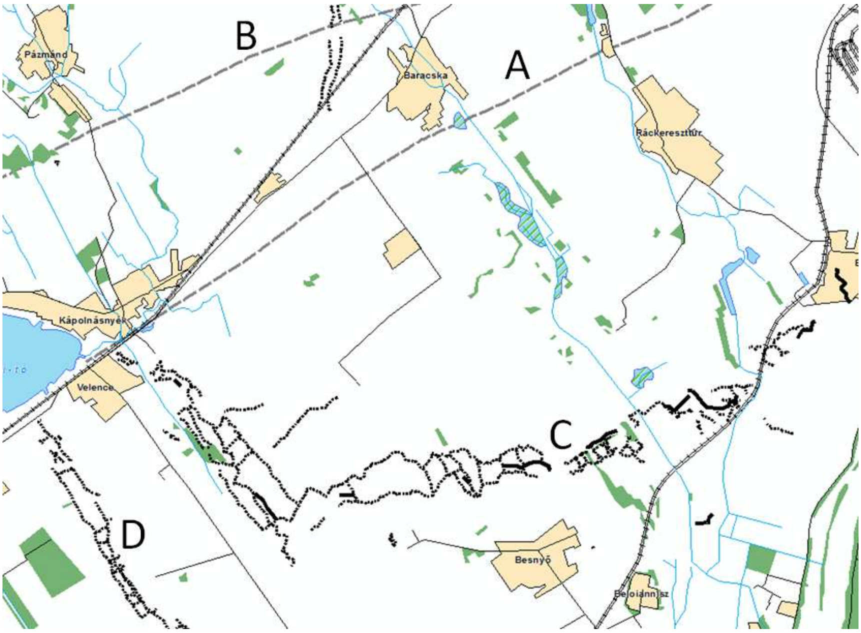
Természetesen az elemzések lehetőségét sem vetettük el, de ehhez további adatok bedolgozására lesz szükség (pl. 3D-s láthatósági vizsgálatok, egyes alakulatok mozgásának követése). Az adatmodell alapvetően a rekonstrukció hármas tagozódását követi. A definiált objektumokat elsősorban a környezeti-, katonai objektum-, és eseményrekonstrukcióhoz köthetjük. A környezeti elemek alkotják tulajdonképpen a digitális alaptérképünket (folyók, patakok, tavak, települések, utak, vasutak, erdők, szőlők, mocsarak, iparterületek, stb.). A második csoportba a vizsgált korszak erődítési objektumtípusait definiáltuk (harckocsi árok, gyalogsági árok, gyalogsági-, tüzérségi-, légvédelmi-állások, bolygatott-, lőtt-területek, laktanyák), míg az események rekonstruálásához a hagyományos kartográfiai megoldást választottuk (alakulatok mozgásnyilai, frontvonalak, alakulatjelek). Ez utóbbiak esetében megjegyezhetjük, hogy a térinformatika alkalmazása szinte csak az események korszerűbb megjelenítésében (animáció) jelent előrelépést.

Az elemzések tekintetében inkább közvetett módon nyújthat segítséget, a környezeti elemek és a védelmi rendszerek objektumainak együttes vizsgálatával. A rekonstrukciók céljából adódóan a geometriának van kiemelt szerepe, hiszen a változatos források adatainak geometriai szempontból egységes kezelése is újszerű, levezetett információkhoz vezethet. Az attribútum adatok jelentősége az elsődleges cél miatt nem túl nagy. Természetesen érdekes elemzési, lekérdezési lehetőségeket kínálnak a GIS rendszerek a szakadatok tekintetében is. Azonban egy országos jellegű rendszer esetében ez egy olyan nagyságrendű adatgyűjtést és feldolgozást követelne meg, amelyre nincsen kapacitásunk, így mintaterületek kiválasztásával kisebb példákon keresztül van lehetőség az alkalmazható GIS funkciók bemutatására.

Az egységes rendszerben történő térképezés már önmagában új eredményeket jelentett. A Margit-vonal e szakaszán nincs egybefüggő, mélységben tagolt védelmi rendszer, csak a települések védelmére készültek a védekező erők, idő és építőkapacitás hiányában. Azonban délebbre egy komoly védelmi vonal van (14. ábra „C” vonal), amely nagy valószínűséggel nem a Margit-vonal része, inkább a későbbi harcokhoz kapcsolható. Ezt erősítette meg az általunk megkérdezett hadtörténész is, aki a témakör jó ismerője. Gyanús, hogy a vonal nyugati része párhuzamos a Velencei tó alatt húzódó több kilométer hosszúságú közel É-D irányú gyalogsági vonalrendszerrel (14. ábra „D” vonal). Mélységi kialakításuk is megfelel a korabeli szokásoknak. Ezek arra utalhatnak, hogy a szovjetek építették ki az árkokat a Konrad hadműveletek idejében, vagy részben, vagy teljes egészében. Az is elképzelhető, hogy a meglévő nyugati részekhez hozzáépítették a későbbiekben a Dunáig terjedő szakaszokat, mert azt sejtették a szovjetek, hogy még várható német ellentámadás (Tavaszi ébredés hadművelet) és így le tudták zárni a főváros felé vezető irányt.



13. ábra. A védelmi vonal elemeinek kiértékelése (A: harckocsi árok, B: gyalogsági árok)



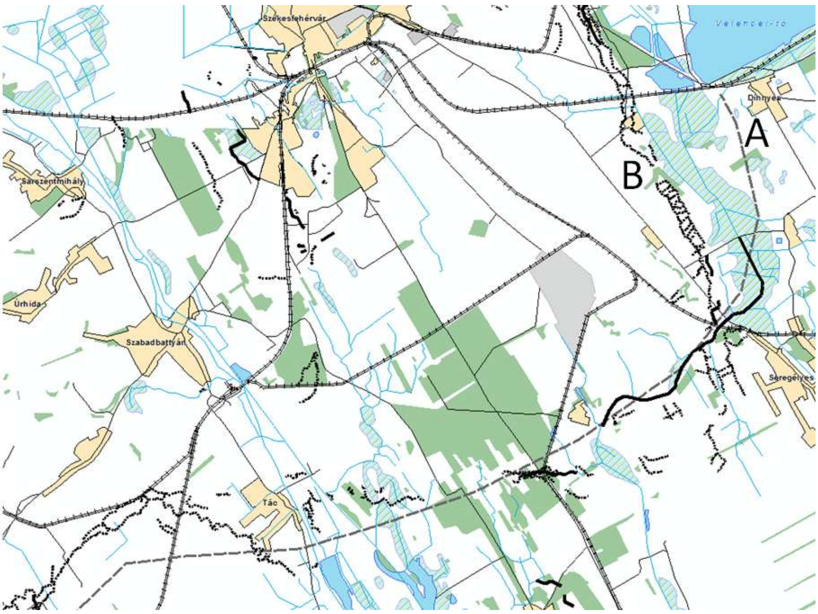
14. ábra. A Margit-vonal keleti szektora a leírások (A,B) és a rekonstrukció (C,D) alapján

A védelmi vonal Velencei-tó és Balaton közötti részét is sikerült rekonstruálni. Az eredmény (15. ábra „A" vonal) nagyon jó egyezést mutat az előzetesen felhasznált leírásokkal (15. ábra „B" vonal).

Ennek a vonalrésznek az elhelyezkedéséről az alábbi leírás állt rendelkezésünkre:

Fő ellenállási öv:

Velencei-tó északi partvonala – Dinnyés – Nádor-csatorna nyugati magaslatai – Belsőbáránd – Pötölle – Tác-D – Polgárdi-D – Füle-D – Balatonfőkajár-D – Balatonakarattya-DK.



15. ábra. A Margit-vonal a Velencei-tó és a Balaton között a leírások (A) és a rekonstrukció (B) alapján

Amellett, hogy ez az egyezés szembetűnő, meg kell jegyeznünk, hogy szinte kizárólag gyalogsági árokrendszerek alkotják a védelmi vonal most tárgyalt részét és a harckocsi árkok hiányoznak. Ezt a keleti szektorhoz hasonlóan magyarázhatjuk az építési kapacitások és idő hiányával, illetve az erre a területre jellemző sűrű csatornahálózat (Séd, Sárvíz) és mocsaras területek kihasználásának lehetőségével is.

Összességében azt mondhatjuk, hogy a rekonstruált árokrendszerek a keleti szektorban nem felelnek meg a korábban leírtaknak, ellentétben a Balatonhoz közelebb eső részekkel. A védelmi rendszer kiépítettsége nem olyan magas szintű a vizsgált helyeken, mint például a fővárost védő Attila-vonal esetében, így ezeken a szakaszokon a Margit-vonal elnevezés is megkérdőjelezhető. Szerencsésebb az állás vagy állásrendszer meghatározás használata.

4 Összefoglalás

A fenti kiragadott példák alapján összegezve megállapíthatók az alábbiak:

1. A térképész szakma sajátos módszerei eredményesek a történeti folyamatok elemzésénél
2. Ugyanezek a lehetőségek segíthetik a kiegészítéseket, új kérdések felvetését, némely homályos hátterű jelenségre a válaszadást
3. A siker eléréséhez nem szükséges a történettudományok módszereit alkalmazni. A térinformatikai vizsgálatok eredményei meggyőzőbbek, ha mindenki a saját szakterületének kutatási lehetőségeivel foglalkozik
4. A térinformatika és a térképészet olyan potenciális lehetőségeket biztosít a történettudomány és a régészet számára, amely nagyon sok esetben továbblendítheti a kutatásokat, felpezsdítheti a fejlődést (természetesen mérnöki szakmai segítséggel)
5. A humán területek igénye a mérnöki jellegű vizsgálatokra növekszik, a negatív hozzáállás általában csökken.

Hivatkozások

Winkler G (2004): Erődítés- és környezetrekonstrukció térinformatikai eszközökkel. Geomatikai Közlemények, 7, 127-133.

Selinger S, Winkler G, Juhász A (2004): Kolozsvár-Belváros térinformatika alapú építészettörténeti adatbázisa. Geomatikai Közlemények, 7, 127-133.

Winkler G (2004): Reneszánsz erődépítészet Magyarországon. Tinta Könyvkiadó, Budapest.

Winkler G (2006): A pilismaróti erődítmény kutatása. Várak, kastélyok, templomok, 2006(5), 18-20.

Winkler G (2007): Erődvárosok, városerődítések. Műegyetemi Kiadó, Budapest.

Winkler G, Juhász A (2007): Nagyfelbontású űrfelvételek használatának lehetőségei hadtörténeti rekonstrukciókban. Geodézia és Kartográfia 2007(6), 23-26.

Winkler G (2009): Elfelejtett kapcsolatok (tér, idő, magyarság, kereszténység). Gergely Kft (Anima),Budapest.

Juhász A, Mihályi B (2006): Object and eventreconstruction (WW II) with GIS. The International Archives of Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 36(2/II), 145-149.

Juhász A (2007): The reconstruction of the Attila-line. New Developments and Challenges in Remote Sensing, Proceedings of the 26th Symposium of the European Association of Remote Sensing Laboratories, Millpress, 161-169.

Juhász A (2011): Managing temporal data in military historical GIS. Proceedings of the 31th Symposium of the European Association of Remote Sensing Laboratories, ISBN: 978-80-01-04868-9, 43-53.

OBJEKTUMREKONSTRUKCIÓ NAGYFELBONTÁSÚ RÖNTGENFELVÉTELEKBŐL

*Kapitány Kristóf, Négyessy László, Barsi Árpád**

Object reconstruction from high-resolution X-ray images – *The latest imaging devices are the results of long-term developments and there are several applications for accurate geometric modeling. Apart from macromolecular structure analysis, application of synchrotron X-ray microtomography (XMT) is a new and promising area of biosciences. XMT includes the analysis of images, however, prior to application in simulation or in diagnostics intensive research is required, especially in the case of huge datasets created by high geometric and radiometric resolution applications. One of our objectives is the automatic processing of image series taken by a synchrotron based XMT, the TOMCAT experimental instrument. Each image series contains more than thousand high resolution pictures that are not easy to manage. This paper presents the above mentioned images and their subjects, some processing methods to extract the valuable information from the images, and the results. The main purpose of this method is to obtain enough data to create a geometrically accurate and topologically correct model of the cerebral cortical microvascular network using the XMT images.*

Keywords: image processing, image series, X-ray microtomography (XMT), TOMCAT, vessel network, microcirculation, cerebral cortex

Napjaink képalkotó berendezései jelentős fejlesztések eredményeként jöttek létre. A makromulekuláris szerkezetek elemzésétől eltekintve, a szinkrotron röntgen mikrotomográfiás (XMT) berendezések új és ígéretes lehetőségeket nyújtanak a biotudományok területein. Az egyes eszközök gyártói számos alkalmazást fejlesztettek ki, azonban a térbeli objektumok pontos geometriai modellezése, majd annak szimulációs és diagnosztikai célú felhasználása még mindig intenzív kutatást igényel. Különösen fontos ez a nagy geometriai és radiometriai felbontású eszközök által előállított hatalmas adatállományok miatt. Célkitűzéseink egyike a ma még kísérleti jellegű, szinkrotron röntgen mikrotomográfiás (XMT) berendezés, a TOMCAT segítségével készült felvételsorozatok automatikus kiértékelése. Egy-egy ilyen felvételsorozat ezres nagyságrendű nagyfelbontású digitális képállományt foglal magába, melyek kezelése idő- és számításigényes feladat. A cikkben bemutatásra kerülnek a felvételek és tárgyuk, a feldolgozás különböző eljárásai, valamint az elért eredmények is. A cél egy összefüggő, geometriailag pontos és topológiailag korrekt agykérgi mikroérhálózat modelljének megalkotása a kapott felvételek feldolgozásával.

Kulcsszavak: képfeldolgozás, felvételsorozat, XMT, TOMCAT, érhálózat, mikro-cirkuláció, agykéreg

1 Bevezetés

Az agy működésének megértéséhez nagyon pontosan ismernünk kell a belső szerkezetét, az érhálózatok illetve idegsejtek szerveződését. Az orvosi képalkotás egyik hagyományos módszere, hogy a szövetekből kimetszett speciálisan előkészített mintákat, a vizsgálat tárgyától függően, fény- vagy elektronmikroszkóp használatával dolgozzák fel. Ezen eszközök sajnos a minta vastagságához képest kis struktúrák nem érzékelhetőek, az átfedések miatt ezek eltűnhetnek, így egy-egy mintát nagyon vékony szeletekre kell bontani. Erek esetén 1-2 mikron vastag, dendritek vizsgálatakor pedig 50nm-70nm (Denk és Horstmann 2004), de akár 15-40 nanométeres metszetekre is fel kell osztani a vizsgálandó szövetet (Knott et al. 2008). Ez az eljárás rendkívül nagy munkaigényű, és kis hatásfokú, valamint a minták felszeletelése azt is eredményezi, hogy egy mintát csak egyszer lehet felhasználni.

**BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék, 1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: kapitany.kristof@fmt.bme.hu

A CT (Computed Tomography), vagyis komputertomográfia a minták elforgatásával és megröntgenezésével vetületek sorozatát állítja elő, így nyújtva mélyreható betekintést a vizsgált anyagba. A szövetek ilyen módon való átvilágításakor festést alkalmazva, a különböző határfelületek, illetve anyagok jól kimutathatóak a mintában (Mizutani et al. 2008).

Ezen cikk egy felvételsorozat feldolgozásának módszereit ismerteti, illetve az elért eredményeket is feltünteti. A folyamat célja a mintában található agyi vérerek detektálása, valamint kellő információ gyűjtése a felvételekből, hogy egy geometriailag pontos érhálózatmodellt lehessen kialakítani belőlük.

2 Az alapadatok

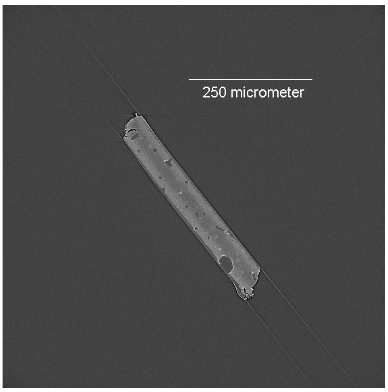
A röntgen mikrotomográfiás felvételeket patkány agykérgi szövetekből mintavételezték, melyek speciális előkezelésen estek át. A szövetek előkészítése még az élő szervezetben kezdődik meg, ugyanis stabilizálni kell a vizsgált szervet a minta elkészítése előtt. Ez trans-cardialis perfúzióval történik, amely során az érhálózatból kimossák a vért, majd fixálófolyadékkal rögzítik a szövetek struktúráját, és meggátolják a bomlási folyamatok elindulását. Ezután a kívánt területről néhány tíz, tipikusan 20µm-60µm vastag metszetet készítenek, majd kimossák és festéssel látják el azokat. A festés sokféle lehet a szövetek, illetve a vizsgálat tárgyától függően; jelen esetben foszfo-wolfram savas (angol rövidítése: PTA) festést alkalmaztak.

Ezután a szöveteket víztelenítik vízelvonószerekkel, majd gyantába ágyazzák, mely után akár ultravékony metszetek is készíthetőek belőlük. Az így előkészített metszetekből 300µm-500µm átmérőjű henger alakú blokkokat vágtak ki.

Az elkészített mintákat a svájci Paul Scherrer Intézetben egy nagyteljesítményű elektromágneses sugárzásra képes szinkrotron (Swiss Light Source, SLS) – mely a részecskegyorsítók egyik fajtája – segítségével vizsgálták (Kapitány 2012a).

3 A felvételek

A felvételeket az SLS egyik kísérleti berendezésével, a TOMCAT-tel (TOmographic Microscopy and Coherent rAdiology experimenTs) készítették el. Ez az eszköz 10 keV energiával, a röntgensugarak energiájával elemezte a mintákat, melyeket egy körbeforgatható állványon helyeztek el (Stamponani et al. 2006). Az állvány forgatásával egy-egy mintáról 1401 darab vetületi képet készítettek, melyek 2048×1356 pixel méretűek. A felvételek névleges pixelmérete 0.38µm, így részletgazdag képekhez juthatunk. A kapott képek viszont áthatásos képek, melyek értelmezése bonyolult lenne, így a felvételeket átalakították 2048×2048 pixeles keresztmetszeti felvételekre, melyhez a Radon-transzformáció matematikáját használták (Kapitány 2012a). Egy ilyen felvételt illusztrál az 1. ábra.



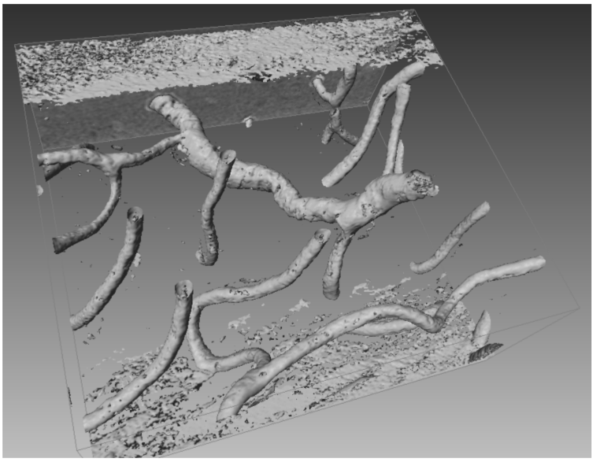
1. ábra. Egy keresztmetszeti felvétel a mintáról

4 Objektumrekonstrukció

A felvételek feldolgozása több lépésben zajlott. Először egy orvosi képalkotó szoftver, a Visualization Sciences Group Amira szoftverének lehetőségei kerültek kivizsgálásra, majd Matlab környezetben történt kétféle eljárással a képfeldolgozás (Kapitány 2012a). Az Amira szoftver igazán szép eredményt nyújtott, melyet a 2. ábra szemléltet. A program részletes és pontos felületet képzett a felvételekből, de komoly problémát jelentett a nagymennyiségű adat kezelése. A szoftver nem volt képes a teljes 1400 felvételt feldolgozni, így csak a képsorozat egy kisebb része került feldolgozásra, mindössze 175 felvétel, azoknak is csak egy csökkentett méretű része. Ez a szűkített adatállomány a Matlab használatával jött létre, egy egyszerű téglalap alakú kivágás során. Bár a kapott eredmény (Kapitány 2012a) ígéretes, ez a módszer nem volt igazán alkalmas a nagyszámú, nagyfelbontású felvétel feldolgozására. Az elemzések egy egyszerű személyi számítógéppel készültek, így lehetséges, hogy komolyabb hardveres eszköztár használatával alkalmazható lenne az eljárás, ennek ellenőrzésére azonban nem nyílt lehetőség.

A Matlab környezetet használó elemzés két elv szerint zajlott. Az egyik élkereső eljárást vett alapul, mely lényege, hogy aszerint keresné meg a felvételeken az erek kétdimenziós keresztmetszeteit, hogy a képen hol vannak éles határfelület váltások (Kapitány 2012a). Ehhez a Matlab beépített *Canny* élkereső függvénye került alkalmazásra. A módszer hátránya, hogy a beépített függvény egyetlen paraméterrel vezérelhető, mely egyszerű ugyan, de meghatározása empirikus alapon nyugszik és nagyon nagy a hiba valószínűsége. Ha egy-egy érszakasz nem festődött meg eléggé, akkor akár el is tűnhet a feldolgozás során. Az így kapott eredmények ugyan nem nyújtottak ugyanolyan minőséget, mint az Amira, de mivel a felvételek beolvasása és elemzése egyesével történt, a nagyszámú felvétel sorozat feldolgozása nem jelentett akkora nehézséget.

A másik elv az Amira alapjait követte, de egyszerűsített megoldásokkal Matlab környezeten belül. Az Amira a felületeket, és ezáltal például az ereket aszerint detektálja, hogy az adott felület milyen intenzitás értékeket vesz fel. Vagyis a felvételeket az intenzitás értékek szerint szegmentálja. Ez a Matlab környezetében nagyon gyors művelet a szükséges értékek ismeretében. Az intenzitás értékek az Amira használatával is kitapasztalhatóak, de elkerülésére egy ingyenes, nyílt forráskódú szoftver is alkalmazásra került, mely a kapott eredmények ellenőrzésére is alkalmas. Ez a program (ImageJ) Java nyelven íródott, mely egy kicsi és egyszerű eszköz a képfeldolgozáshoz. A felvételek könnyen beolvashatóak vele, több képet képes egy kötegelt tiff formátumú fájlban eltárolni, melyekre megtekinthető a felvételek intenzitásértékeinek egyéni és összesített hisztogramja is. Ezen adatokat látva könnyen meghatározhatóak a szegmentáláshoz szükséges értékek. A szegmentált állomány pedig háromdimenziós nézetben megtekinthető, akár felületmodellként, akár a voxelek összesimításával. Utóbbi viszont nem képez valódi modellt, csupán megjelenítésre, gyors ellenőrzésre biztosíthat jó lehetőséget.



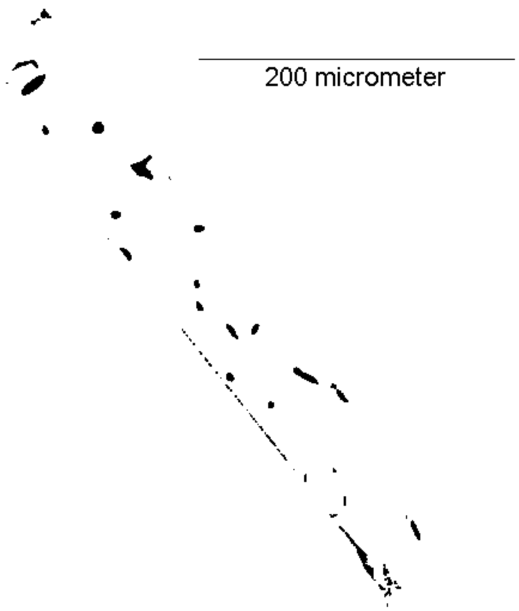
2. ábra. Amirával készült felületmodell

A tényleges képfeldolgozás Matlabbal történt, a felvételekről az adatok jobb kezelhetősége végett egyfajta nézet készült, mely egy képben kimutatta azt a felületet, ahol a teljes sorozaton hasznos információ látható. Ez azért volt szükséges, mert ahogy az 1. ábrán is látható, a képek kis részén találhatóak meg csak a minta metszetei. Ezután a teljes állományról, minden egyes felvételből kivágat készült a szűkített tartományról, így az adatok kezelhetősége is könnyebbé vált. A 2048×2048-as képméret 859×1096-ra csökkent.

Ezután minden egyes felvételen az erek keresztmetszeteinek felületei kerültek leválogatásra, majd egy külön bináris állományba kimentésre. Az 1. ábra felvételére vonatkozóan a rögzítésre került felületelemek láthatóak a 3. ábrán. A Matlab környezet lehetőséget biztosít felületek statisztikai adatainak kigyűjtésére is, ezáltal meghatároztuk az egyes detektált keresztmetszetek súlypontjának képkoordinátáit, a felületekhez tartozó felvétel sorszámát, a felületelemek területeit, a legkisebb és legnagyobb tengelyátmérőket, a tengelyek irányítottságait, valamint az egyes felületek egyedi azonosítót kaptak. A szegmentálás nyomán felesleges felületek is rögzítésre kerültek, ezek jelentős része a henger alakú minta külső felületénél jelentkeztek. A mintavételezéskor keletkező apró foszlányok, a durva felület miatt a képekből kinyert információból egy szabályos henger alakú blokk került kivágásra (Kapitány 2012b).

Ez az eljárás azért is előnyös, mert a felvételekből az erek keresztmetszeteire vonatkozó statisztikai adatainak leválogatásával az objektumrekonstrukcióhoz szükséges hasznos információk kezelhető méreteket és táblázatos formát kapnak.

Az érhálózat kialakítása egy olyan csőhálózatként történt meg, mely csonka kúp formájú összekapcsolt elemekből épül fel. Ezek kialakítása a Matlab beépített parancsának használatával történt, alapesetben 20 pontból álló, sokszögekkel közelített körök által határolt csonka kúpokkal. A felületelemek statisztikai adatai adták meg ezen alapok sugarait, valamint azok súlypontjait és az egyes alkotóelemek magasságát. Ahhoz hogy ezek az erek így kialakíthatóak legyenek, fel kell állítani a kapcsolatot az egyes felületelemek között. A kapcsolati rendszer kiépítése egy plusz azonosítószám kiosztásával történt. Ez a folyamat úgy zajlott, hogy az adott felületelem a következő felvételre lett átvetítve, majd a környezetébe eső felületek kerültek kivizsgálásra. Amennyiben a súlypontja a következő réteg egy felületelemére esik, a két elem összetartozónak tekinthető. Ez a számítás az összes detektált felületelemen végigfut, és megtörténik az azonosítók kiosztása.



3. ábra. Az 1. ábra felvételének szegmentálása

Ha egy ér elágazik, akkor problémák adódhatnak, mivel az erek alakjai amorf formát öltenek és a tengelyátmérők adatai nem annyira szemléletesen mutatják a kapcsolatot. Az ilyen eseteket külön kellett kezelni, vagyis többféle saját fejlesztésű elágazás kereső szűrés is bevezetésre került ezen helyzetek felismerésére. Végül kettős azonosító kiosztást alkalmaztunk, mely az összetartozó érszakaszokat együttesen és külön-külön is ellátta egy-egy egyedi jelzéssel. A kapcsolatok jellemzésére szolgál a 4. ábra.

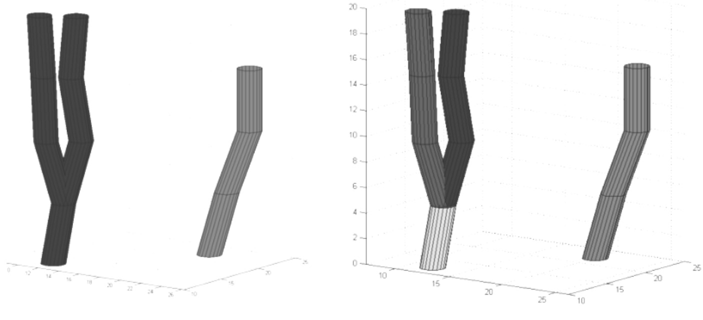
A tengelyátmérők közül a legkisebb tengelyátmérő került felhasználásra, mivel ha egy ér a felvételekkel nem derékszöget zár be, vagyis laposan halad át rajtuk, akkor a keresztmetszetek alakja elnyújtott lesz. Ennek geometriáját mutatja be az 5. ábra, melyen az eret egy henger testesíti meg. A képen az *A* síkon a henger tengelyére merőleges síkvetület, a *B* síkon pedig egy ferde metszet látható. Amennyiben egy hengert egy síkkal metszünk el, a legkisebb tengelyátmérő mindig a henger sugarának kétszerese lesz, a legnagyobb tengelyátmérő pedig a henger sugarának és a metsző sík szögének szögfüggvénye szerint alakul. Az erek modellezéséhez a legkisebb tengely átmérő felhasználható adat, mivel ha a felvétel tetszőleges ferde síkkal metszi az adott eret, az akkor is a tényleges érátmérőt jellemzi. Az erek simítása érdekében az összetartozó érszakaszokra jellemző átlagos érátmérő került alkalmazásra.

A feldolgozás során kimentésre kerültek a detektált felületelemek legszélső pixelei is. A 6. ábrán a felületelemek körvonalai láthatóak. Jól érzékelteti az ábra a csőszerű hálózatot, valamint komplex formáit és bonyolult, szerteágazó rendszerét. Ennek pontos adatai, mérőszámai rögzítésre kerülnek, hogy elemzésekhez precíz eredményeket biztosíthassanak, de a modell vizualizációjához egy generalizált modell került alkalmazásra. Az egyes érszakaszokra jellemző átlagos érátmérő, valamint az erek szabályos kör alakú keresztmetszete került bevezetésre.

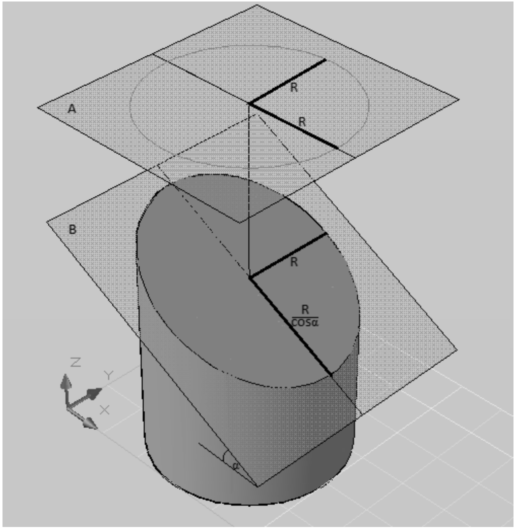
A 7. és 8. ábrán látható a felvételekből kigyűjtött adatok alapján készült modell, valamint az ImageJ szoftver által összesimított voxelek képe. Mindkettő azonos alapadatokat használ fel, csak míg az előbbi geometriai primitívekből épít fel egy háromdimenziós modellt, addig az ImageJ az összes megtalált pixelt helyezi el a térben, voxelekké alakítva. A két ábrán jól látható, hogy az erek vezetése az ImageJ esetén sokkal simább, és jobban szemlélteti a valóságot, ámbár előállításának ideje és teljesítményigénye is nagyobb.

A kapott eredmény sokkal nehezebben kezelhető, főleg a minta méretének növelésével válik egyre nehézkesebbé. Az ImageJ tényleges felületképzésére a teljes állomány esetében nem nyílt lehetőség, mert túl nagy memóriakapacitást igényelne. A felvételek Matlabbal történő elemzése, valamint az egyszerűsített megjelenítés viszont percek alatt megtörténik, a számítógép komoly igénybevétele nélkül is.

Kihangsúlyozandó, hogy a Matlab illetve az ImageJ segítségével létrehozott eredmények között lényeges különbségek vannak. A Matlab megoldása egy olyan hálózat kialakítását teszi lehetővé, mely során az egyes érszakaszokhoz később fiziológiás adatokat kapcsolhatunk, és tényleges modellképzésről beszélhetünk. Az ImageJ (illetve a korábban említett Amira) eredménye ellenben tisztán csak vizualizációt enged. Azonban mindkét eljárással érdemes foglalkozni, mert az egyik megoldás nagyban segíti a minták elemzését, és a modell kialakítását, a másik pedig megjelenítésül, valamint ellenőrzésül szolgálhat, így kiegészítve egymás hiányosságait.



4. ábra. A kettős azonosító-kiosztás elve

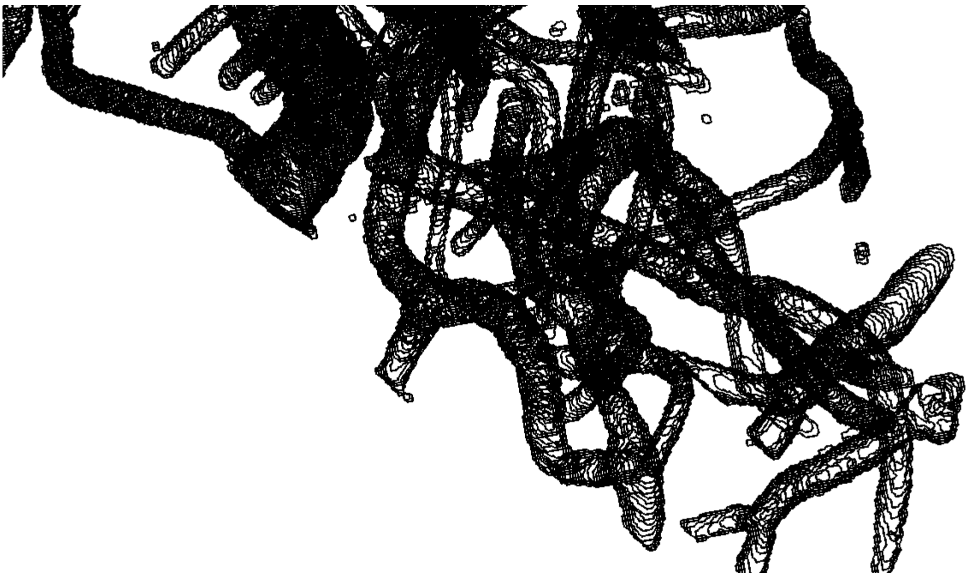


5. ábra. Henger vízszintes és ferde metszete

5 Összefoglalás

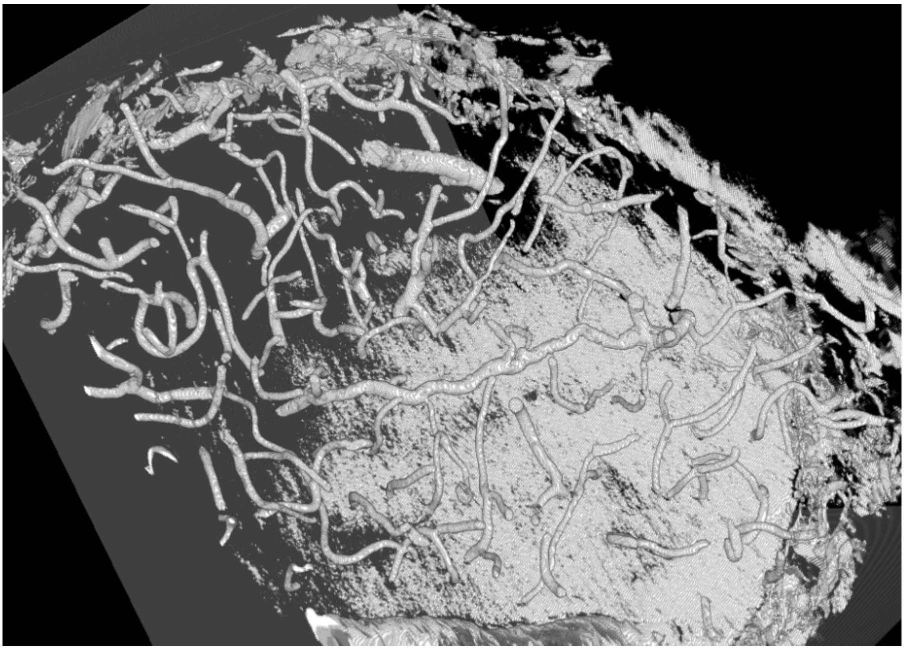
A nagyfelbontású röntgenfelvételeket felhasználva lehetőség nyílhat a szövetek mélyreható vizsgálatára, akár egy egyszerű személyi számítógép segítségével is. A cikkben leírt módszert alkalmazva kiválaszthatjuk a felvételek releváns információtartalmát, majd azokat felhasználva egy kisebb kapacitásigényű, könnyen kezelhető, adatállományhoz juthatunk, mely lehetővé teszi a szövetminta részletes elemzését. A bemutatott vizualizációs alkalmazás pedig megkönnyíti az eredeti felvételek lényegének megjelenítését, valamint megértését.

A cikk szerzői tervezik az elkészített alkalmazás továbbfejlesztését a kinyert adatok további statisztikai elemzésével, a kapcsolódási viszonyok részletes vizsgálatával, továbbá a megjelenítési módszer finomításával. Ezeken kívül a fejlesztési tervben szerepel még a különböző festési módok vizsgálata, illetve a különböző eredetű minták összevetése.



6. ábra. A detektált felületelemek körvonalai a Matlab szoftver megjelenítésében

7. ábra. Matlab segítségével előállított, geometriai primitívekből felépülő modell



8. ábra. ImageJ használatával létrehozott modell

Köszönetnyilvánítás. A munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Új tehetséggondozó programok és kutatások a Műegyetem tudományos műhelyeiben" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását a TÁMOP-4.2.2.B-10/1--2010-0009 program támogatja.

Hivatkozások

W. Denk, H. Horstmann (2004): Serial block-face scanning electron microscopy to reconstruct three-dimensional tissue nanostructure. PLoS Biol 2(11), 329.

Kapitány K. (2012a): Objektumrekonstrukció nagyfelbontású röntgenfelvételekből. MSc Diplomamunka, Budapest. 39.

Kapitány K (2012b): Geometric reduction of high amount histological image data. Conference of Junior Researchers in Civil Engineering, Budapest. 77-82.

Knott G, Marchman H, Wall D, Lich B (2008): Serial Section Scanning Electron Microscopy of Adult Brain Tissue Using Focused Ion Beam Milling The Journal of Neuroscience, 28(12): 2959-2964

Mizutani R, Takeuchi A, Akamatsu G, Uesugi K, Suzuki Y (2008): Elementspecific microtomographic imaging of Drosophila brain stained with high-Z probes. J Synchrotron Radiat., 15, 374-377.

Stamponani M, Groso A, Isenegger A, Mikuljan G, Chen Q, Bertrand A, Henein S, Betemps R, Frommherz U, Böhler P, Meister D, Lange M, Abela R (2006): Trends in synchrotron-based tomographic imaging: The SLS Experience, Proc. of SPIE 6318.

MS KINECT – FLASH LIDAR PONTOSSÁGI VIZSGÁLAT ÉS GÖMBILLESZTÉS

Molnár Bence[*], Charles K. Tóth[**]

MS Kinect – Flash LiDAR accuracy test and sphere fitting – *Flash LiDAR emits infrared light pulses and captures the reflected signal by a sensor, thus resulting in a real-time 3D modeling device. Spatial coordinates of the reflecting points are calculated by triangulation. MS Kinect is actually a Flash LiDAR and a motion sensor add-on for computer game consoles. This study introduces an indoor navigation method with Kinect; dealing with specialty of Kinect's quantized point cloud. For higher accuracy a new sphere fitting method was developed for the quantized point clouds.*

Keywords: MS Kinect, sphere fitting, quantized point cloud, positioning

A lézerszkennerek egy csoportja az úgynevezett Flash LiDAR, mely a hagyományos lézerszkennerekkel ellentétben egy infravörös impulzust bocsájt ki, majd a mérendő felületről visszaverődő jelet egy mátrix szenzor segítségével felfogja. A visszaverődő jelek alapján előmetszéssel kiszámítható a felület háromdimenziós felületmodellje. A MS Kinect egy játékkonzolhoz kifejlesztett Flash LiDAR és egy színes kamera együttese, mellyel számítógépes játékok irányítása válik lehetővé emberi mozgás segítségével. Tanulmányomban az eszköz által készített pontfelhő alapján történő navigációs eljárást szeretném bemutatni. A Kinect különlegessége, hogy a pontfelhőt erősen kvantálja, ezért különleges gömbillesztési eljárást fejlesztettünk ki a mérési eredmények pontosságának növelése érdekében.

Kulcsszavak: MS Kinect, gömbillesztés, kvantált pontfelhő, helymeghatározás

1 Bevezetés

A Microsoft XBOX360 számítógépes játékkonzol kiegészítőjeként elérhető Kinect mozgásérzékelő a számítógépes játékokat még interaktívabbá teszi. Azonban a Kinect valójában egy Flash-LiDAR, mely a teljes látómező másodpercenként 30 térbeli mérését teszi lehetővé egy infravörös projektor és egy CMOS infravörös érzékelő segítségével.

Az előmetszés elvén működő Flash LiDAR-ok már évek óta elérhetőek (Shan és Toth 2008), azonban pontossági okokból nem terjedt el a használatuk. Az infra tartományú fénymérés miatt főként csak beltérben használható eljárás, emellett magas a zaj/jel aránya. Nagy előnye, hogy a látómező minden pontjáról nagy frekvenciával ad vissza mélység információt, így a fejlesztések tovább folytak. Napjainkban a jel-zaj viszony javításával nagy eredményeket értek el, azonban a berendezések magas költsége nehezíti az elterjedésüket.

A mérnöki igényeket maximálisan kielégítő Flash LiDAR eszközök mellett érdekes alternatíva a Kinect (Khoshelham 2011), hisz ára jóval kedvezőbb a tömeggyártás miatt és megbízhatósága nem tér el jelentősen a céleszközöktől (Weinmann et al. 2011). Mérnöki modellezésre és helymeghatározásra való alkalmazhatóságát korábbi tanulmányainkban vizsgáltuk (Toth et al. 2012, Molnár et al. 2012a). A Kinect által szolgáltatott adatok különlegessége, hogy a távolságadatokat kvantált formában adja vissza, ráadásul a kerekítés mértéke a tárgytávolsággal együtt nő úgy, hogy a kerekítésből adódó szabályos hiba mértéke jelentősen nagyobb, mint a méréseket terhelő zaj. Ez a pontillesztési és objektummodellezési technológiák egy új módját követeli meg, ezért gömbök esetében egy új illesztési eljárást fejlesztettünk ki (Molnár et al. 2012b), melynek jelen dolgozatban képelemző módszerekkel történő továbbfejlesztését mutatjuk be.

A pontos gömbmérést lehetővé tevő algoritmus segítségével több gömb mérését követően meghatározhatóvá válik a szenzor pillanatnyi helyzete. A gömbök automatikus detektálása Canny-

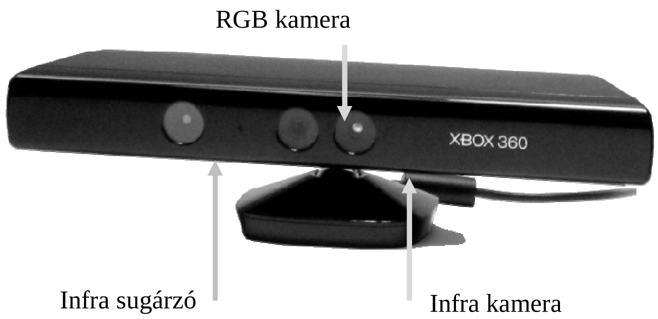
[*]*BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék,1111 Bp, Műegyetem rkp. 3.*
E-mail: molnar.bence@fmt.bme.hu
[**]*The Center for Mapping, The Ohio State University, Columbus, OH 43210*
E-mail: toth@cfm.ohio-state.edu

élkeresést (Canny 1986) követő Hough-transzformációval (Hough 1959) valós időben megoldható, majd a gömbillesztési algoritmus segítségével a gömbök szenzor-koordinátarendszerbeli helyzetének meghatározása is lehetővé válik. A tárgyoldali és szenzor-koordinátarendszerek közti kapcsolat meghatározását követően a szenzor koordinátáit transzformálva meghatározhatóvá válnak a szenzor pillanatnyi koordinátái, mindez valós időben. Így végeredményben a Kinect szenzor segítségével megoldhatóvá válik a beltéri navigáció és térképezés.

2 Kinect szenzor

A MS Kinect egy színes kamera, valamint egy infra sugárzó és kamera egységekből épül fel (1. ábra). Az infra vetítő egy strukturált mintázatot vetít, melyet az infra kamera érzékel és a távolság adatokat a parallaxisból számítja ki, tehát szögmérési elven működik. Az érzékelők CMOS szenzorok, így a kiolvasásuk nagy sebességgel lehetséges, ennek köszönhető a 30 Hz-es frekvenciával történő modellalkotás.

A színes kamera és a mélységszenzor kalibrációjával elérhető, hogy az eredményként szolgáltatott térbeli pontfelhő valós színadatokkal is rendelkezzen. Az érzékelők összesen 3 képet adnak nyers mérési eredményként: a 3 sávot tartalmazó színes képet, a mélységadatokat tartalmazó 11 bit felbontású szürkeárnyalatos, illetve a visszaverődött infrajelek intenzitását mutató szürkeárnyalatos képet (2. ábra). Egyre több olyan alkalmazás lát napvilágot, mely a Kinectet használja fel különböző feladatokra, aminek oka egyrészt a Microsoft által adott, jól dokumentált fejlesztőkörnyezet, de legalább ilyen fontosak a nyílt forráskódú fejlesztői környezetek, melyek felhasználása és fejlesztése mindenki számára engedélyezett és ingyenes. A tanulmányban ismertetett mérésekhez a Matlab környezetbe beépülő OpenNi függvénykönyvtárat használtuk. A Kinect jelenlegi korlátja, hogy a mérési tartománya maximálisan 10 méter körül van, de a később részletezett kvantálás miatt távolságadatai körülbelül 3 méteres hatósugárban teszik használhatóvá.



1. ábra. MS Kinect

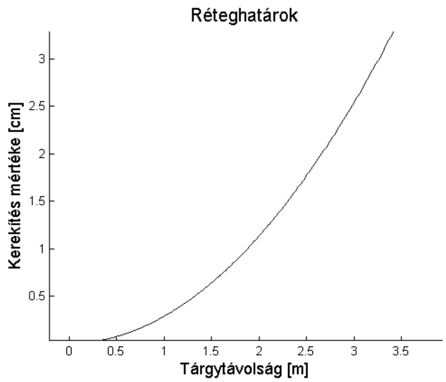
2. ábra. A Kinect által szolgáltatott adatok: színes, mélység és az intenzitás kép

3 Kvantálásból adódó szabályos hiba

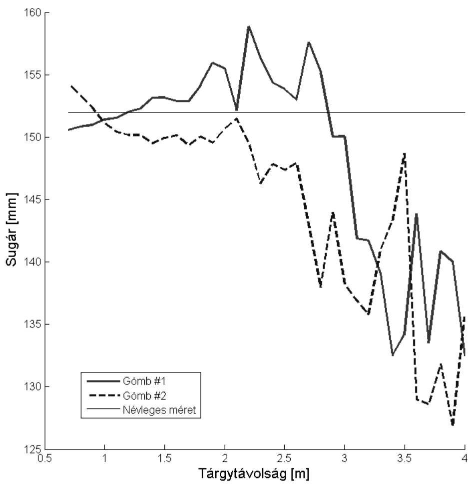
A Kinect USB 2.0 porton keresztül csatlakoztatható a számítógéphez, melynek maximális adattovábbítási sebessége korlátozott (480 Mbps). Mivel a másodpercentként 30 adatrögzítés adatait (30db 640x480-as kép) továbbítani kell, ezért a mélységadatokat már a szenzor maga kerekíti, és úgy továbbítja 11 bit-es formátumban. A Kinect tervezői az eredeti felhasználási céloknak megfelelően a kerekítési határokat a távolság függvényében határozták meg, így párhuzamos rétegek alakulnak ki a pontfelhőben. A közelebb lévő objektumok távolságértékei kisebb mértékű kerekítést szenvednek el, míg 3 méter felett ez a kerekítési érték elérheti az 3 cm-es nagyságrendet is (3. ábra). A kerekítési hiba szabályos hibának tekinthető és hatása síkillesztés esetén általában a kiegyenlítés miatt nem jelentkezik. Fontos megjegyezni, hogy a kerekítésből adódó szabályos hiba mértéke legalább egy nagyságrenddel meghaladja a nyers távmérési adatokat terhelő zaj mértékét.

Összetettebb felületeknél – mint például egy gömb – azonban a kerekítés komolyabb hibát eredményezhet. Gömbfelületek esetén ez általában alulméretezést jelent (4. ábra), melynek hatása a távolsággal növekszik a nagyobb kerekítések miatt.

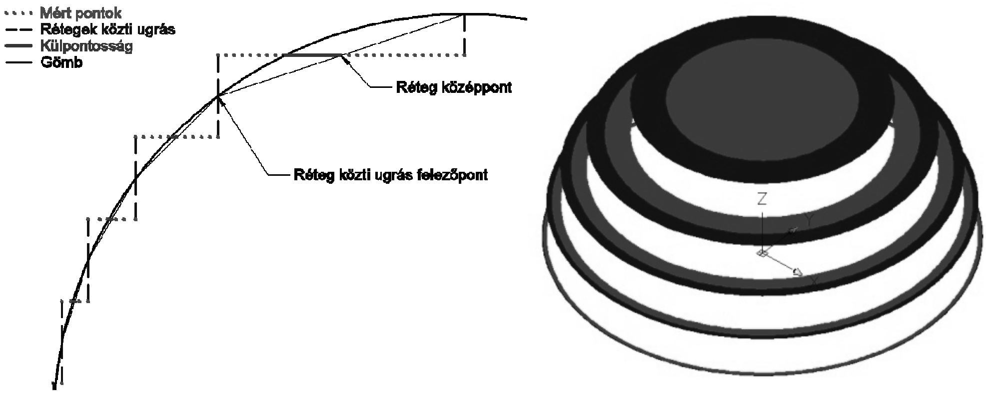
A szabályos hiba forrását jól szemlélteti az (5. ábra), ugyanis a hagyományos gömbillesztő algoritmusok a sugárirányú hibák eloszlása alapján számítják ki a sugarat, mely az egyes rétegek középvonalát mutatják várható értéknek. A gömb belsejébe eső pontok száma azonban a morfológia miatt mindig nagyobb lesz, mint a kívülre eső pontok száma, ezért az alulméretezés.



3. ábra. Rétegek közötti távolság a tárgytávolság függvényében



4. ábra. Kvantálási hibát nem figyelembe vevő gömbillesztés eredménye



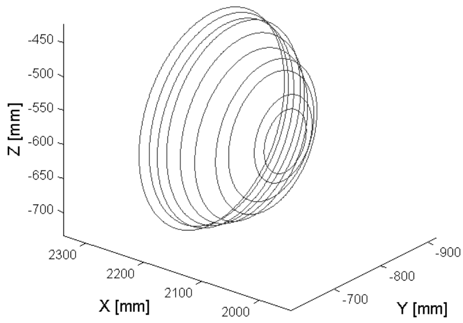
5. ábra. A gömbre eső rétegek elméleti vázlata

4 Gömbmérő algoritmus

A pontosabb eredmények érdekében a szabályos hibát geometriai megfontolások alapján kiküszöbölő gömbillesztési algoritmust fejlesztettünk ki. A rétegek matematikai középvonalait tehát nem gömbfelületi pontok összességei alkotják, de a rétegek közti ugrások felezőpontjai elméleti gömbi pontok (5. ábra). Két réteg közti ugrás egy, a kameratengelyre merőleges kört kell, hogy meghatározzon, távolsága a két határoló réteg távolságának átlagaként adható meg. Ezen térbeli görbék összességére való gömbillesztés már megfelelő, a kvantálásból adódó szabályos hibáktól mentes végeredményt szolgáltat. A körökre való gömbillesztés során súlyozással figyelembe vettük az egyes rétegekre eső pontok számát, illetve a beesési szöget. A réteghatárok körének meghatározását Hough-transzformáció segítségével oldottuk meg, mely bináris képeken alkalmas függvénnyel adott görbék – jelen esetben kör – detektálására. A Hough-transzformáció megbízhatósága 10 pixel alatti sugarú körök esetén azonban nem megfelelő, így ezek hatását a gömbillesztés során szintén súlyozással csökkentettük. A kvantálási hiba hatását csökkentő illesztés a következő lépésekkel hajtható végre:

1. Élkeresés a mélységadatokon (6a. ábra) Canny-algoritmus segítségével (6b. ábra).
2. A potenciális gömbök helyének meghatározása Hough-transzformációval.
3. Az elkülönített gömbre vetülő rétegek szétválogatása.
4. Réteghatárok detektálása Hough-transzformációval (6c. ábra).
5. Réteghatár körök képi koordinátákról valós térbeli rendszerbe transzformálása a mélységadatok segítségével.
6. Legkisebb négyzetes gömbillesztés a térbeli körökre (7. ábra).

6. ábra. a) Mélységkép b) élkeresés és kördetektálás eredménye c) réteghatár detektálás



7. ábra. Azonosított körök

A kidolgozott algoritmus jó hatásfokkal és nagy sebességgel képes a teljes mélységadatokat tartalmazó képből automatikusan azonosítani és meghatározni a látómezőben lévő gömbök térbeli helyzetét és sugarát. Amennyiben kisebb gömbökre történik a mérés vagy 3 méternél távolabb eső gömböket mérünk, a Hough-transzformáció nehézségei miatt a korábbi tanulmányban alkalmazott (Molnár et al. 2012b), síkra vetítést alkalmazó eljárás használandó.

5 Szenzor pozíciójának meghatározása

Beltéri navigáció és térképezés esetén szükséges a Kinect pillanatnyi pozíciójának pontos ismerete. A mozgásban lévő Kinect pillanatról pillanatra változó vonatkoztatási rendszere és a referencia rendszer közötti kapcsolatot illesztőpontokkal – esetünkben a pontfelhőre illesztett gömbök – lehet meghatározni. A rendszerek transzformációja történhet 9 paraméteres, affin illesztéssel – ekkor 3 illesztőpontra van szükség – illetve feltételezve a következőket: egyező méretarány, csak Z tengely körüli forgatás (κ) történik, illetve az illesztőpontok különböző Z magasságon helyezkednek el, akkor 2 illesztőpont is elegendő. Ezen feltételek beltéri navigáció esetén biztosíthatóak. A szenzor- és referencia koordinátarendszer közti kapcsolat leírását követően bármely Kinect által rögzített pont koordinátája átszámítható az illesztőpontok által definiált rendszerbe, illetve elvégezhető a pontfelhő szekvenciák egymáshoz illesztése is. A transzformációs paraméterek meghatározására a feltételi egyenletek linearizálását követően egyszerű legkisebb négyzetes kiegyenlítést (Detrekői 1991) használtunk. Ismerve a Kinect megbízhatóságának változását a tárgytávolság függvényében, a kiegyenlítés során érdemes az illesztőpontok szenzortól való távolsága alapján súlyozni.

6 Eljárás hitelesítése

A fent bemutatott eljárás alkalmazhatóságának vizsgálatára tesztterületet építettünk. 152 mm sugarú expandált polisztirol („hungarocell”) gömböket használtunk illesztőpontokként, melyek koordinátáit FARO Focus3D lézerszkenner segítségével (8. ábra) határoztunk meg (a szkenner feldolgozó szoftverének beépített gömbillesztő algoritmusa segítségével).

A lézerszkennelt állományt a műszerben elérhető legnagyobb pontossággal készítettük, hogy egyben a Kinect által mért pontfelhőt is minősíteni tudjuk. A Kinecttel mért gömbök középpontjainak távolsága maximálisan 2 mm-re tért el a lézerszkennelt adatokból nyert távolságokkal. A lézerszkenner gyári adatai szerint 10 méter alatt 2 mm középhibával dolgozik pontonként, míg a pontfelhőre illesztett gömb a zajszerű hibákat átlagolással kiszűri, így nagyobb megbízhatósággal vehető figyelembe, összességében tehát a Kinect mérésekhez képest hibátlan mérésnek tekinthető.

A Kinect pozíciója hátrametszéssel történő számításának ellenőrzése a lézerszkennelt adatok alapján csak nagyságrendileg lehetséges (a mélységszenzor fókuszpontja nem mérhető), így azokat ismételt mérések alapján statisztikai módszerekkel minősítettük.

8. ábra. A tesztterület mérése Kinecttel és lézerszkennerrel

Minden álláspontból legalább 7 mérést végeztünk, ez alapján kimondható, hogy a gömbök középpontjának meghatározásában 3 méteres tárgytávolságnál is maximálisan 1 centiméteres szórás tapasztalható (1a. táblázat), a gömb sugarának meghatározásánál 3 mm-es szórás (1a. táblázat), míg a Kinect pillanatnyi pozíciójának meghatározása maximálisan 2,5 cm-es szórással történt a teljes (0,5-3 m) mérési tartományon (1b. táblázat).

Az eredmények sematikus megjelenítése a 9. ábrán tekinthető meg. Az ismétléses méréseket 4 különböző helyről végeztük el, melyek összefoglaló eredményeit a 2. táblázat tartalmazza. Az adatnyeréstől a szenzor pozíciójának meghatározása a jelenlegi Matlab környezetben 1,5 mp futási időt vesz igénybe (i7-2720 CPU, 8GB RAM, 64bit), mely dedikált program fejlesztése esetén jelentősen csökkenthető.

A meghatározott transzformációs paraméterek segítségével a teljes Kinect által gyűjtött pontfelhőt áttranszformáltuk az illesztés ellenőrzése érdekében (10. ábra). Az illesztőpontok által közrezárt területen a felületek közti különbség nem haladja meg az 1 centimétert, az egész modellt tekintve Z tengely körüli elfordulás tapasztalható.

1. táblázat. a) Egy gömbillesztési eredmény b) Hátrametszéssel számított Kinect pozíció

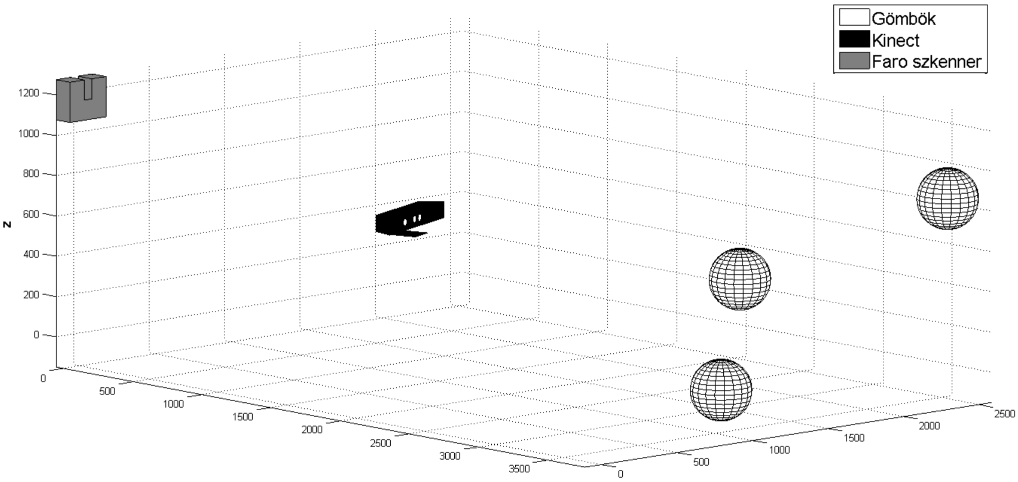
	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	R [mm]
1	2807.9	309.8	281.0	148.3
2	2825.7	301.0	283.4	154.9
3	2822.4	302.0	287.9	152.6
4	2825.5	300.9	283.1	155.4
5	2814.9	302.0	282.3	150.6
6	2823.8	302.4	283.0	154.8
7	2821.6	300.7	283.3	153.3
Szórás	6.552	3.218	2.135	2.621
Átlag	2820.3	302.7	283.4	152.8

	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]
1	1059.7	1221.1	575.4
2	1086.2	1149.3	573.0
3	1084.2	1154.1	570.9
4	1077.7	1169.1	573.3
5	1079.8	1171.6	573.7
6	1079.3	1168.6	574.1
7	1078.5	1172.9	572.7
Szórás	8.625	23.322	1.382
Átlag	1077.9	1172.4	573.3

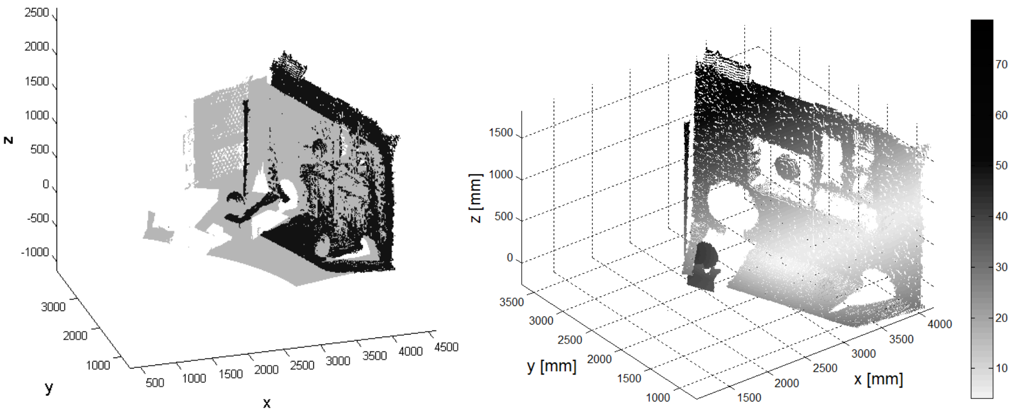
2. táblázat. Ismétléses szenzorpozíció meghatározás eredménye és szórása

	X [mm]	Y [mm]	Z [mm]	κ [°]	STD(X) [mm]	STD(Y) [mm]	STD(Z) [mm]	STD(κ) [°]
1	1076.9	1197.9	572.1	19.5	3.5	12.4	0.8	0.32
2	1359.2	487.7	597.0	44.2	10.4	14.3	2.3	0.42
3	1512.0	881.3	488.5	20.1	0.4	7.1	1.8	0.16
4	1364.3	1298.3	447.5	21.5	1.6	9.9	1.4	0.27

A mozgási trajektória (pálya) helyreállítható a pozíciók egymás utáni meghatározásából. A helymeghatározás pontossága függ az azonosított gömbök számától és a mélységképen való elhelyezkedésétől. Ezért a trajektória meghatározás során változó feltételek mellett helyeztük el a szenzort, hogy a hatásokat ennek függvényében tudjuk elemezni. Az eredményeket a kiegyenlített értékek középhibái alapján értékeltük (3. táblázat). A várakozásoknak megfelelően a legtávolabbi pontnál tapasztalható a legnagyobb hiba (6 cm), míg az átlagos középhiba 2 cm. A Kinect mozgását leíró trajektória a 11. ábrán látható.



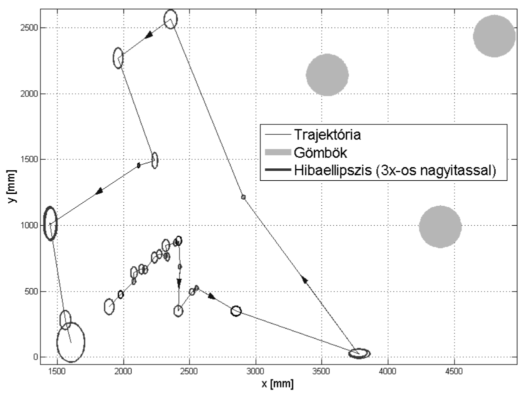
9. ábra. Az eredmények sematikus megjelenítése: gömbök, Kinect és a külső referencia rendszer



10. ábra. a) A lézerszkennelt (szürke) és a transzformált Kinect (fekete) pontfelhő valamint b) az illesztés hibája

3. táblázat. A különböző pozíciók számításának középhibái

	σ_X [mm]	σ_Y [mm]	σ_Z [mm]	σ_t [mm]
1	12.7	20.2	6.6	24.8
2	6.5	9.9	3.4	12.3
3	4.8	7.5	2.6	9.3
4	8.8	15.1	5.3	18.2
5	7.5	12.7	4.6	15.5
6	6.9	10.7	3.9	13.3
7	8.5	13.8	5.2	17.1
8	7.1	11.5	4.4	14.2
9	4.6	7.1	2.8	8.9
10	4.6	7.1	2.8	8.9
11	4.5	7.0	2.7	8.8
12	5.3	10.5	3.3	12.2
13	9.6	15.4	6.0	19.1
14	5.4	8.6	3.5	10.7
15	7.5	11.8	4.8	14.8
16	4.4	6.2	2.5	8.0
17	11.6	14.1	5.9	19.2
18	7.1	8.5	3.7	11.7
19	4.7	5.7	2.5	7.8
20	13.2	12.5	6.3	19.2
21	27.4	12.1	11.7	32.2
22	22.9	10.1	9.8	26.9
23	4.6	5.2	2.4	7.4
24	16.7	24.0	9.6	30.8
25	16.7	24.0	9.6	30.8
26	12.4	26.4	8.7	30.4
27	7.8	20.5	7.8	23.3
28	3.1	6.4	1.9	7.4
29	15.4	41.1	11.3	45.3
30	16.1	42.6	11.8	47.1
31	16.5	42.0	11.8	46.6
32	14.4	24.5	6.9	29.2
33	35.1	50.3	15.1	63.1
Átlag	10.7	16.5	6.1	21.0
Max	35.1	50.3	15.1	63.1



11. ábra. A Kinect mozgási trajektóriája

Összefoglalás

A Kinect nagyon ígéretes eszköz objektumok térbeli modellezésére kis tárgytávolságok esetén. Amennyiben a tárgy morfológiája ismert, a kvantálásból adódó szabályos hiba hatása kiküszöbölhető. Ez lehetőséget ad a Kinect mérnöki gyakorlatban való felhasználására. Beltéri navigációra és térképezésre is alkalmassá tehető az eszköz automatikus képfeldolgozó és felületillesztő algoritmusok segítségével. A tanulmányban bemutatott gömbillesztő algoritmus lehetővé teszi azok milliméter nagyságrendű mérését és centiméter nagyságrendű pozícionálását. Élkeresési és kördetektálási eljárások felhasználásával a gömbök azonosítása nagy megbízhatósággal elérhető a mélységadatokat tartalmazó képen.

Méréseinket több Kinect szenzorral is sikerrel megismételtük, hogy az elérhető pontosság eszköz-függetlenségét is megmutassuk. A hírek szerint hamarosan várható a Kinect2 megjelenése, mely várhatóan kiterjeszti a mérési hatótávolságot, hiszen az érzékelői kétszeres geometriai felbontást nyújtanak, és az adattovábbításért felelős protokoll változása miatt a kvantálásból adódó korlátok is csökkenni fognak.

Köszönetnyilvánítás. A dolgozatot Dr. Detrekői Ákos professzor úr emlékére ajánlom köszönetképpen a több éven át tartó témavezetői irányításáért.

Hivatkozások

Canny J, (1986): A Computational Approach To Edge Detection, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence, 8(6): 679–698.

Detrekői Á (1991): Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest. 685.

Hough P V C, (1959). Machine Analysis of Bubble Chamber Pictures, Proc. Int. Conf. High Energy Accelerators and Instrumentation, 7, 554-556.

Khoshelham K (2011): Accuracy Analysis of Kinect Depth Data, International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences, 38(5/W12), 133-138.

Molnár B, Toth C K, Grejner-Brzezinska A D, (2012b): Sphere fitting on MS Kinect point cloud, MAPPS/ASPRS 2012 Specialty Conference. Tampa, United States of America 2012.10.29-2012.11.01. In print.

Molnár B, Toth C K, Detrekői Á, (2012a): Accuracy test of Microsoft Kinect for human morphologic measurements, Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci., 39(B3), 543-547.

Shan J, Toth C K, (Ed.) (2008): Topographic Laser Ranging and Scanning: Principles and Processing. CRC Press. 590.

Toth C K, Molnár B, Zaydak A, Grejner-Brzezinska A D, (2012): Calibrating the MS Kinect Sensor, ASPRS 2012 Annual Conference. Sacramento, 538-546.

Weinmann M, Wursthorn S, Jutzi B, (2011): Semi-automatic image-based co-registration of range imaging data with different characteristics: ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. 38-3/W22, pp. 119-124.

ERATOSZTHENÉSZ FÖLDSUGÁR-MÉRÉSÉNEK VIZSGÁLATA

*Szűcs László**

Examination of Eratosthenes's method for Earth radius determination – *Eratosthenes was the first scientist who determined the Earth radius. We try to reconstruct the measurement technologies. We re-compute the ancient results, considering the errors of the ancient theories, measurements and computations.*

Keywords: Eratosthenes, radius of the Earth, Alexandria, Syene

A cikk az első földsugár-méréssel foglalkozik, amelyet i.e. 240 táján Eratoszthenész végzett el. Az ókori földrajztudósok könyvei alapján megpróbáljuk rekonstruálni Eratoszthenész mérési módszerét, és vizsgáljuk az eredmények értelmezését is. Az elvi, a mérési és a számítási hibák figyelembevételével összehasonlítjuk az ókori eredményeket a mai földsugár értékkel.

Kulcsszavak: Eratoszthenész, földsugár, Alexandria, Syéne

1 Bevezetés

Eratoszthenész Pentatlosz (i.e. 276-194) az ókor egyik kiemelkedő alakja, a tudományos földrajz megalapítója. Zenész, költő, filozófus, matematikus, csillagász és földrajztudós. Tanulmányait az egyiptomi Alexandriai könyvtárban, majd Athénban végezte. I.e. 246-ban III. Ptolemaiosz Euergetész fáraó meghívta, hogy irányítsa az Alexandriai Könyvtár munkáját és legyen a trónörökös tanítója. Öreg korára elvesztette látását, és mivel így már dolgozni nem tudott, halálra éheztette magát. Legfontosabb földrajzi műve a három kötetből álló „Geógraphika", amelyből sajnos nem maradt fenn példány. Azonban ókori szerzők műveiből megismerhetjük annak tartalmát és Eratoszthenész munkásságát. A kor földrajztudósaitól eltérően, új szemlélettel állt elő, miszerint a földleírásba bele kell vonni a matematikai és a fizikai alaptételeket.

Eratoszthenész idejében elfogadott tény volt a Föld gömb alakja. A világot 5 zónára osztották. A középső volt a lakhatatlanul meleg „forró" öv az egyenlítő táján. Ettől északra és délre is a sarkkörökig tart egy-egy lakható „mérsékelt" öv. Végül a sarkkörökön túl következnek a sarki övek, melyek annyira hidegek, hogy ott nem lehet életben maradni. Ezért a kor földrajztudósai az északi lakható zónára korlátozták tevékenységüket. Azonban ahhoz, hogy a földrajzi leírásokban, a térképeken és földgömbökön a földrajzi helyek távolságai értelmezhetők legyenek, jó lett volna ismerni a Föld sugarát.

2 Eratoszthenész alapfeltevései

1. *„Alapföltevés az, hogy a föld a tengerekkel együtt gömb alakú, s egy és ugyanazon felszíne van a tengerekkel. A föld kiemelkedései ugyanis ilyen nagyság mellett, mint csekélységek, észrevétlenül maradnak, s figyelmen kívül hagyhatók, úgyhogy a gömbalakot nem úgy kell értenünk, mintha azt körzővel rajzolták volna...*" (Strabón 1977. II.5.7.)
   Ehhez kapcsolódik a helyi függőleges értelmezése is: *„a súlyos tárgyak mozgása a középpont felé tart, e körül gömb alakúra összesűrűsödve áll a Föld...*" (Strabón 1977. II.5.2.)
2. *„A térítőnek szükségképpen Syénénél kell lennie, mert itt a nyári napfordulat idején a napóra mutatójának délben nincs árnyéka...*". (Strabón 1977. II.5.7) Syéne a mai Asszuán területén található a fáraó-korban jelentős kereskedőváros volt. Jelentőségét bizonyítja, hogy a városban a fáraók palotát építtettek maguknak.

**E-mail: szucs.laszlo@ybl.szie.hu*

3. *„A syénei délkör pedig főképp a Nílus folyásirányába esik Meroétól Alexandriáig...”* (Strabón 1977. II.5.7) – azaz Syéne és Alexandria ugyanazon délkörön (meridiánon) fekszik.
4. *„A Nap küldötte fénysugarak a világ különböző részein egymással párhuzamosak...”* (Ziegler 1891. I.10).

3 A földsugár meghatározásának elve

Eratoszthenész az alapfeltevések után a Syénét és Alexandriát tartalmazó meridián által kivágott legnagyobb gömbi körrel foglalkozik. Átvette a matematika azon tételét, miszerint a körív kerülete (*m*) úgy aránylik a kör kerületéhez, mint a körív középponti szöge (α) aránylik a kör teljes középponti szögéhez (2π) (Ziegler 1891).

$$\frac{m}{2R\pi} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad . \tag{1}$$

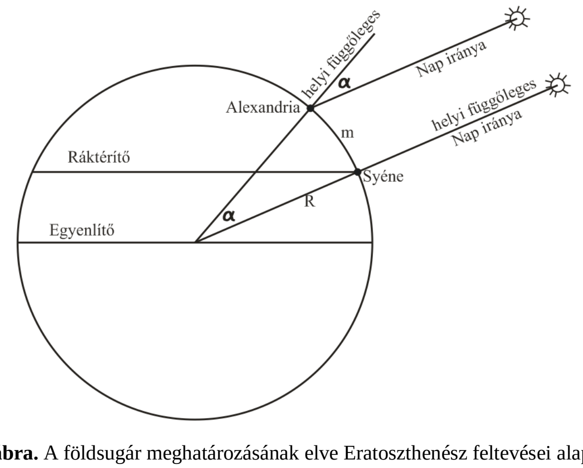
Ha meghatározzuk a körív hosszát és középponti szögét, kiszámítható a Föld sugara. Ezt a két mérést kellett Eratoszthenésznek is végrehajtania. Mivel az alapfeltevések között szerepelt, hogy Syéne és Alexandria azonos meridiánon fekszik, ezt a két várost választotta a körív végpontjainak. Szintén alapfeltevés volt, hogy Syéne a Ráktérítőn fekszik, ezért ott a helyi függőleges iránya a nyári napforduló idején délben egybe esik a Nap irányával. Elegendő megmérni ugyanebben az időpontban Alexandriában a Nap irányának α zenitszögét, mert az megegyezik az ív középponti szögével (1. ábra).

4 A két város távolságának meghatározása

Az ókori írásokban fennmaradt, hogy Eratoszthenész a két város távolságát 5000 stadionra becsülte. Becslését a korabeli karavánokra alapozta, melyek mozgásáról precíz nyilvántartásokat vezettek. Vizsgálatai alapján egy átlagos karaván naponta 100 stadion távolságot tesz meg. Az út általában 50 napig tart. Így a két város távolsága 5000 stadion. Azonban a „stadion”, mint hossz mértékegység, nem volt „nemzetközi” szinten szabványosítva. A különböző területeken alkalmazott „stadion”-ok méterre átszámítva az 1. táblázatban találhatók (Kürti 1948, Forisek 2003).

A rómaiak is átvették a görög stadiont, mint mértékegységet, azonban saját rendszerükhöz igazították: 1 római stadion = 10 000 digitus (hüvelyk=0.0185 m) = 125 passus (kettőslépés=1.4798 m). Így tudjuk, hogy 1 római stadion = 184.98 m ≈ 185 m.

Egyiptomban is alkalmazták a stadion mértékegységet: 1 egyiptomi stadion = 300 egyiptomi öl. Az egyiptomi öl hossza 0.524 m, így az egyiptomi stadion 157.20 méternek felel meg.



1. ábra. A földsugár meghatározásának elve Eratoszthenész feltevései alapján

1. táblázat. A legrégebbi stadion mértékegységek méterben kifejezett hosszai

Stadion fajtája	1 láb hossza	stadionban/láb	1 stadion hossza
attikai	32.8 cm	500	164.00 m
olympiai	32.0 cm	600	192.00 m
delphoi	29.7 cm	600	178.20 m
görög és római	29.6 cm	625	185.00 m
egyiptomi	52.4 cm (1 öl)	300	157.20 m

Már az ókorban is zavart okozott, hogy ugyanazon mértékegység hossza területenként más-más, így a rómaiak szabályozták az átváltási értékeket, pl. meghatározták, hogy 1 római stadion = 625 delphoi láb (közelítőleg), ezt Plinius (Holland 1847) és Censorinus (Joannis 1810) műveiben is megtalálhatjuk.

Eratoszthenész távolságával az első probléma, hogy nem ismerjük, hogy melyik mértékegységrendszert használta. Ennek kiderítéséhez segítséget nyújthat, ha az általa megadott 5000 stadiont összehasonlítjuk a két város távolságával. Nem ismerjük, hogy a karavánok pontosan honnan indultak és hová érkeztek, így a méréseket és számításokat a továbbiakban a syénei palota és az egykori alexandriai könyvtár helye között végezzük. Google Föld (GF) programmal meghatározva a két pontot összekötő legrövidebb vonal hossza 841.8 km (GF a WGS84 ellipszoidot használja, minden GF-ből levett adat erre az ellipszoidra vonatkozik). A különböző stadionfajtákból számított távolságoknak a GF eredményével való összehasonlítását a 2. táblázat tartalmazza.

Biztosat nem tudhatunk, így a következőkben csak elgondolkodhatunk az eredményen. Az első három stadionfajta nem volt elterjedt, csak szűkebb környezetükben használták, így valószínű, hogy egy ilyen munkánál Eratoszthenész nem azokkal dolgozott. Eratoszthenész élete nagy részét Alexandriában és Athénban élte le, így használhatta a görög ill. egyiptomi stadiont is. Azonban művei görög és római közvetítéssel maradtak ránk, ahol a fordítók akár át is számíthatták görög vagy római stadionra. A görög és a római stadionok alkalmazása gyakorlati szempontból nem jelent különbséget. Így azt mondhatjuk, hogy a görög-római, vagy az egyiptomi mértékegység használata nagyságrendileg azonos hibát mutat, csak ellenkező előjellel. Ez alapján eldönthetetlen, hogy görög-római, vagy egyiptomi stadiont használt.

A távolság mérésével kapcsolatos második probléma, hogy Eratoszthenész figyelembe vette-e azt, hogy a Nílus kanyargós medre miatt a karavánok hosszabb utat tettek meg, mint a legrövidebb távolság lenne. A jelenlegi autóút az ókori karavánutaknak megfelelő helyen fut. GF-el meghatározott, autóval végigjárható távolság kb. 1080 km. Viszont ha a karavánok levágták a Nílus luxori kanyarulatát, azzal kb. 80 km-t meg tudtak spórolni. Azonban annak valószínűsége, hogy a kereskedelmi karavánok kihagyják Egyiptom egyik legfontosabb városát, meglehetősen kicsi. Eratoszthenész távolságának az útvonaltervvel való összehasonlítása a 3. táblázatban található.

Mivel a legrövidebb vonal esetében jóval kisebb hibát kapunk, mint a karavánút nyomvonala esetében, gyanítható, hogy Eratoszthenész valamilyen módon figyelembe vette a karavánút szabálytalanságai miatti hibát és redukálta a távolságot, így kapta az 5000-es értéket, vagy nem redukált, és a karavánok a valóságban több mint 100 stadion utat tettek meg naponta, amit közelítőleg 100-nak tekintett.

Ezek alapján még mindig nem tudjuk, hogy Eratoszthenész melyik stadion mértékegységet használta. Azonban a görög Strabón és Hipparkhosz is átveszik Eratoszthenész mérési adatait, a távolságok másik stadion mértékegységre való konverziója nélkül (ezt onnan tudjuk, hogy mindketten elfogadják Eratoszthenész eredményét, miszerint az Egyenlítő hossza 252 000 stadion).

2. táblázat. Az 5000 stadion távolság összehasonlítása az Alexandria-Syéne legrövidebb távolsággal (GF- Google Föld)

Stadion fajtája	5000 stadion	Eltérés GF-től	Eltérés GF-től %
görög és római	925 km	83 km (hosszabb)	10.0 %
egyiptomi	786 km	56 km (rövidebb)	- 6.5 %

3. táblázat. Az 5000 stadion távolság összehasonlítása az Alexandria-Syéne útvonalon mért távolsággal

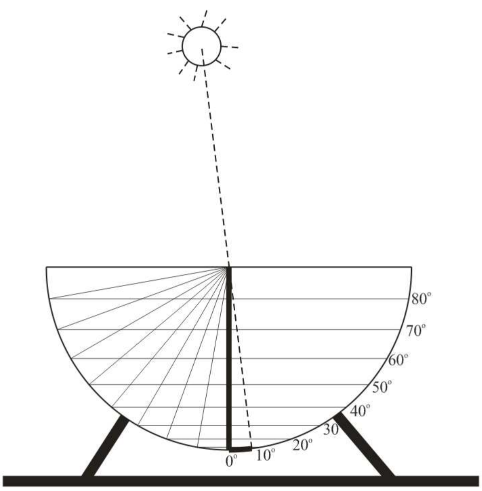
Stadion fajtája	5000 stadion	Eltérés GF útvonaltervtől	Eltérés GF útvonal-tervtől %
görög és római	925 km	155 km (rövidebb)	14.4 %
egyiptomi	786 km	294 km (rövidebb)	27.2 %

Ilyen hibát Strabón idejében (amikor már szabványosították a stadion átváltásokat) remélhetőleg nem vétettek volna. Így azt gyaníthatnánk, hogy a görög stadion mértékegységre vonatkozik a mérés. Ellenben azt is tudjuk, hogy a karavánutakról készült, Eratoszthenész által felhasznált feljegyzéseket egyiptomi hivatalnokok készítették, ezért elképzelhető, hogy a távolság mégis csak egyiptomi stadionra vonatkozik. Az eddigiekre támaszkodva ezt a kérdést egyelőre nem tudjuk megoldani.

5 Az ív középponti szögének meghatározása

Eratoszthenész két alapfeltevése, miszerint a Nap sugarai mindenhol párhuzamosan érik el a Föld felszínét, és az, hogy Syéne a Ráktérítőn helyezkedik el, megoldhatóvá tették a Syéne-Alexandria ív középponti szögének meghatározását. A legendák szerint Eratoszthenész a Nílus vízszintjét mérő kútban (nilométer) vette észre, hogy nyári napforduló idején délben a Nap fénye visszacsillan a víz felszínéről. Ez a valóságban nem állja meg a helyét, mivel a nilométerek nem kútszerű építmények, hanem inkább ferdén kiépített, lépcsővel ellátott alagutak voltak, másrészt Eratoszthenész idejében Syéne helyzetéről ez az ismeret már elfogadott tény volt. Ennek megfelelően Eratoszthenész nem határozta meg a delelő Nap zenitszögét a nyári napforduló idején Syénében, hanem elfogadta azt 0°-nak.

A tényleges zenitszög mérése Alexandriában történt, a nyári napforduló idején, amikor a Nap delelt. A zenitszög meghatározásához nem a „függőlegesen felállított bot és árnyéka” alapján felírható trigonometriai összefüggést használták, hanem speciális műszert építettek, amely azonnal a zenitszög értékét adta meg. Ez egy felül nyitott, üres félgömb alakú edény (2. ábra), amelyben sugár irányban egy mutató (gnómon) indul a gömb középpontjától az edény aljáig (scaphé). A félgömb belsejének palástját szabályos távolságonként paralelkörökkel látták el. A mérőeszköz akkor állt helyesen, ha a gnómon függőleges volt. Méréskor folyamatosan követték a gnómon árnyékát a félgömb belsejében. Amikor az a legrövidebb volt, akkor delelt a Nap. Ilyen módon határozta meg Eratoszthenész, hogy a gnómon árnyéka a nyári napforduló idején 1/50-ed része a mérőműszer gömbje kerületének. Ha ezt fokokban akarjuk kifejezni: 360°/50 = 7.2° (Ziegler 1891).



2. ábra. A scaphé felépítése és mérés az eszközzel

6 A Föld sugarának meghatározása

Ha az ív középponti szöge a teljes legnagyobb gömbi kör középponti szögének 1/50-ed része, akkor a gömbi kör kerülete 50-szer akkorának kell lennie, mint Alexandria-Syéne távolsága, azaz 50 x 5 000 stadion = 250 000 stadion. A kapott eredmények alapján 1° szélességnek 250 000 stadion / 360° = 694.444 stadion hossz felelne meg a Föld felszínén. Azonban Eratoszthenész azt szerette volna, ha 1° földrajzi szélességnek kerek egész számú stadionban kifejezett hossz feleljen meg. Ezért a legnagyobb gömbi kör kerületét önkényesen 252 000 stadionra változtatta, ebben az esetben 1°-nak kereken 700 stadion távolság felelt meg. Ha a legnagyobb gömbi körök kerülete 252 000 stadion, akkor a Föld sugara 40 107 stadion (4. táblázat).

7 Eratoszthenész eredményének összehasonlítása napjaink eredményével

Mivel Eratoszthenész a méréseit Egyiptomban végezte, ezeket a földsugár értékeket egy olyan gömb sugarával érdemes összehasonlítanunk, amely Alexandria-Syéne íven simul legjobban a földet helyettesítő, föld-tömegközépponti elhelyezésű ellipszoidhoz. Ezért a WGS84 ellipszoid Gauss-féle igen kis hossztorzulású szögtartó gömbi vetületénél alkalmazott gömb sugarát határoztuk meg, ahol a normálparalelkört a két város közötti távolság felében vesszük fel. Az ókori syénei palota középpontjának földrajzi szélessége: 24°5’10”, az egykori Alexandriai Nagykönyvtár földrajzi szélessége: 31°12’00”, a normálparalelkör földrajzi szélessége a kettő középértékeként: 27°38’35”. A szükséges számítások elvégzése után (Varga 1988) 6 366 km-es gömbsugarat kapunk. Ennek Eratoszthenész eredményeivel való összehasonlítását az 4. táblázatban találjuk. A táblázat eredménye azt mutatja, hogy egyiptomi stadion használata esetén az elkövetett hiba mindösszesen 61 km, ami kb. 1%-a a számított gömbsugárnak. Kérdés, hogy Eratoszthenész tényleg ennyire jól határozta volna meg a Föld sugarát, a mérési módszer és az önkényes, 2000 stadionos kerületváltoztatás ellenére?

8 Eratoszthenész mérésének hibái

Eratoszthenész eredménye (akár görög, akár egyiptomi stadionban) a kor lehetőségeinek figyelembevételével mindenképp kimagaslónak tekinthető. Azonban látnunk kell, hogy a meghatározásban több ponton is kérdések merülnek fel. Ezek közül kettővel már foglalkoztunk:

1. Melyik stadionértelmezést kell használnunk? – egyelőre nem tudjuk, ezért mindkettővel számolunk.
2. A két város 5000 stadion távolságánál figyelembe volt-e véve, hogy a Nílust követő karavánok nem tökéletesen egyenes úton haladnak? – vagy igen, vagy a becslésbe szerencsés hiba esett.

A szögméréskor „műszerhiba” és a leolvasás bizonytalansága is okozhatott hibát:

3. Nem ismeretes, hogy a gnómont hogyan állították függőleges irányba, ténylegesen mennyire volt az függőleges (a műszer felállítási hibája).
4. Nem tudhatjuk, hogy a gnómon mennyire volt merőleges a mérővonalak síkjaira (gnómon merőlegességi hibája).
5. Nem tudhatjuk, hogy a félgömb belsején a mérővonalak helyzete mennyire volt megbízható (osztáshiba).

4. táblázat. Eratoszthenész eredményi összehasonlítva a simulógömb sugarával

Stadion fajtája	40 107 stadion földsugár	eltérés a simulógömbtől (km)	eltérés (%)
görög stadion szerint	7 412 km	1046 km (több)	16.4 %
egyiptomi stadion szerint	6 305 km	61 km (kevesebb)	1.0 %

6. A gnómon árnyéka nem teljesen egyértelmű. Ha Eratoszthenész félgömbjének sugara kicsi volt (1-2 dm), akkor az árnyék képe ugyan éles, azonban a szögmérés bizonytalan. Ha viszont a félgömb átmérője nagyobb volt (8-10 dm), a szögmérő vonalak helyzeti hibáira kevésbé érzékeny a műszer, viszont ilyen távolságban a gnómon árnyéka már elmosódott, nem éles (Ball 1942). Mivel az Eratoszthenész által használt műszer nem maradt fenn, a 3-6 kérdésekre nem lehet választ adni.
7. Nem ismerjük a légköri refrakció hatását Eratoszthenész idejében, Alexandriában. Az Alexandria feletti légréteget főképp az befolyásolja, hogy a város a tengerparton található.

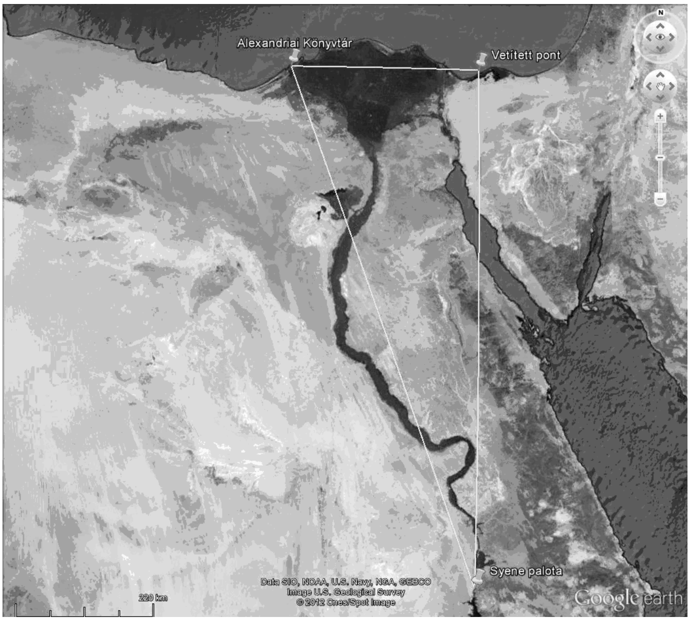
Azonban már az alapfeltevéseknél és a számításnál is találunk hibát:

8. Syéne és Alexandria nem ugyanazon a meridiánon található.
9. A meghatározott 250 000 stadionos kerületet Eratoszthenész 2 000 stadionnal önkényesen megnövelte.

A syénei palotát az Alexandriai Könyvtárral összekötő ív azimutja 340°14’24”. Vetítsük Alexandriát a szélességi vonalával a syénei meridiánra (3. ábra). Ezt akár gömbháromszögtani összefüggésekkel is megoldhatnánk, de a GF is alkalmas a feladatra. Ha leteszünk három jelölőt (Alexandria, Syéne, Vetített pont), megmérhetjük a köztük lévő távolságokat. (A vetített pont földrajzi szélessége megegyezik Alexandriával, hosszúsága pedig Syénével.) Alexandria-Syéne távolságra 841.8 km-t kapunk, de tudjuk, hogy ezt Eratoszthenész 5000 stadionnak vette. Aránypárral kiszámítható, hogy a Syéne-Vetített pont (meridiánra vetített távolság) GF-ben mérhető 788.5 km hosszának 4683 stadion fog megfelelni. Ennek 50-szerese a legnagyobb gömbi kör kerülete, azaz 234 150 stadion. Az ebből számítható sugár értéke 37 266 stadion (5. táblázat).

Görög-római stadion esetében az eredmény javulását tapasztalhatjuk, viszont egyiptomi stadionnal számolva a korábbi meglepően jó eredmény rosszabb lett. Mindkét esetben az eltérés nagyságrendileg azonos, viszont előjelében más. Tehát ebből eldönteni, hogy görög vagy egyiptomi stadionról van-e szó, lehetetlen lenne.

10. kérdés: Syéne földrajzi szélessége jelenleg kb. 35’-re különbözik a Ráktérítőtől, azaz a város nem a térítőn, hanem attól kb. 65 km-re, északra fekszik. Valójában nem Syéne, hanem a Ráktérítő helyzetét kell a számításoknál figyelembe venni. Ez az ív középponti szögének mérésében nem okozott hibát, mivel azt a Ráktérítő és Alexandria helyzete határozza meg. A hibát a két város távolságában fejti ki.



3. ábra. Az Alexandria-Syéne távolság vetítése az alexandriai paralelkörrel a syénei meridiánra

5. táblázat. A számított földsugár összehasonlítása a simulógömb sugarával, ha az Alexandria-Syéne ívhosszat a syénei meridiánra vetítve vesszük figyelembe

Stadion fajtája	37 266 stadion	Eltérés a simulógömb sugarától	Eltérés %
görög és római	6 887 km	521 km (nagyobb)	8.2 %
egyiptomi	5 858 km	508 km (kisebb)	8.0 %

Azonban figyelembe kell vennünk, hogy a planetáris precesszió hatására az ekliptika síkja és az egyenlítő síkja által bezárt szög (ε) az időben változó, így a tényleges Ráktérítő helyzete is változik. A két sík dőlésének kiszámítására a

$$\varepsilon = 23^{\circ}26'21.45'' - 46.818''T - 0.0006''T^2 + 0.00181''T^3 \tag{2}$$

összefüggést használhatjuk fel, ahol T a J2000 epochához képesti Julián évszázadokat jelenti (U.S. 1989).

Eratoszthenész mérésének idejében (kb. i.e. 235) az ekliptika dőlése 23°43’27” ≈ 23°43.5’ volt. Jelenleg (2012) ez az érték 23°26’15”, ami azt jelenti, hogy Eratoszthenész idejében a Ráktérítő földrajzi szélessége kb. 23°43.5’ volt. A syénei palota földrajzi koordinátái GF alapján 24°5.1’, a kettő eltérése 21.6’ ≈ 0.36°. Így a mérés idején Syéne kb. 40 km-rel északabbra volt a Ráktérítőnél. Ilyen kis szög a korabeli műszerrel gyakorlatilag kimutathatatlan volt, mivel egy 10 cm-es gnómon árnyéka ebben az esetben 0.6 mm, egy 100 cm-esé 6 mm lenne. Ennek köszönhető az alapfeltevés, hogy Syéne a Ráktérítőn helyezkedik el.

Könnyen ellenőrizni tudjuk az ív középponti szögét is, ami nem más, mint Alexandria és a korabeli Ráktérítő földrajzi szélességének különbsége, vagyis 7.48° fok. Ez alapján Eratoszthenész 0.28°-ot tévedett szögmérésének eredményében.

Mivel Syéne 40 km-rel a Ráktérítőtől északra helyezkedett el, ez a hiba a távolság meghatározásában jelentkezik. 40 km megfelel 216 görög, vagy 254 egyiptomi stadionnak. Ezekkel az értékekkel megjavítva az 5000 stadion távolságot, a 6. táblázatban látható eredményt kapjuk (az eredeti 7.2°-os középponti szöget használva). Ha a syénei meridiánra vetített távolsággal (4 683 stadion) számolunk, az eredmények kisebb javulást mutatnak (7. táblázat).

9 Az eredmények értékelése

Az, hogy Eratoszthenész nyers mérési adataiból kapjuk a legjobb eredményt, a szerencsének köszönhető. A számításhoz felhasznált távolság nagyobb, a középponti szög viszont kisebb volt a ténylegesnél, pont olyan mértékben, ami egyiptomi stadion mértékegységet feltételezve igen szerencsés egyezést mutat a WGS84 ellipszoidhoz Egyiptomnál illesztett Gauss-gömb sugarával.

A számításoknál elhanyagolásokkal éltünk, mivel nem milliméterek kimutatása volt a cél, 10-20 km eltérés most jelentéktelennek tekinthető Eratoszthenész távolságmérési eljárásához képest. Így nem tettünk különbséget a GF-ből levett ellipszoidi, és az illesztett Gauss-gömbi, valamint a szintfelületi koordináták és hosszak között. A GF-ből levett koordináták és távolságok alapján az Alexandria-Ráktérítő meridián-ív hossza (788.5 km + 40 km =) 828.5 km, az ív középponti szöge 7°28’33” (a két pont WGS84 ellipszoidi földrajzi szélessége különbségéből), az ebből számítható gömbsugár értéke 6 350 km, ami a módszer megbízhatóságát tekintve megegyezik a simulógömb sugarával (eltérés 16 km, azaz 0.3%).

6. táblázat. A számított földsugár és eltérése a simulógömb sugarától, ha az 5000 stadiont megjavítjuk Syéne-Ráktérítő távolságával

Stadion fajtája	Ráktérítő-Alexandria (stadion)	Kiszámított gömbsugár (stadion)	Kiszámított gömbsugár (km)	Eltérés (km)	Eltérés %
görög és római	5 216	41 508	7 671	1 305 (nagyobb)	20.5
egyiptomi	5 254	41 810	6 573	207 (nagyobb)	3.2

7. táblázat. A számított földsugár és eltérése a simulógömb sugarától, ha a syénei meridiánra vetített távolságot megjavítjuk Syéne-Ráktérítő távolságával

Stadion fajtája	Ráktérítő-Alexandria (stadion)	Kiszámított gömbsugár (stadion)	Kiszámított gömbsugár (km)	Eltérés (km)	Eltérés %
görög és római	4 899	38 985	7 204	838 (nagyobb)	13.2
egyiptomi	4 683	39 287	6 176	190 (kisebb)	3.0

Adott ívhossz mellett 7°27'24" középponti szögnél kapnánk a simulógömb sugarát, a hiba főleg az ellipszoidi és a gömbi földrajzi szélesség különbözőségéből ered.

A földsugár számításokat elvégeztük görög-római és egyiptomi stadion szerint is. Összehasonlítva a simulógömb sugarával, egyiptomi stadion használata esetén mindig sokkal jobb eredményt kaptunk, mint görög stadionnal számítva. Ezért feltételezhető, hogy Eratoszthenész egyiptomi stadiont használt a méréséhez. A mérés folyamatát és az eredményeit Geógraphika című művében ismertette, amely eredeti formájában nem maradt fenn, viszont ókori írók sok adatot átvettek belőle. Valószínű, hogy már ők sem tudták, vagy nem is foglalkoztak vele, hogy melyik mértékegységről írt Eratoszthenész, így a görögök is változtatás nélkül átvették eredményeit, az egyiptomi stadiont görög stadionnak tekintve.

Eratoszthenész a hibák ellentétes hatásainak eredményeképp 1%-os pontossággal ugyanazt az eredményt kapta, amelyet az Egyiptom területén illesztett Gauss-gömb szolgáltat. Valójában, ha felismerte volna, hogy a két város nincs azonos meridiánon, kb. 3%-os pontossággal határozhatta volna meg a gömb sugarát, ami a felhasznált módszerek és mérési eljárások figyelembevételével szélsőpontosságúnak tekinthető.

10 Eratoszthenész emléke

Ő volt az első, aki a földrajz leírásához matematikai és fizikai ismereteket is felhasznált. A Föld sugarának meghatározásán kívül, utazók leírásai alapján megadta az ismert „világ" méreteit, a fontosabb városok közötti távolságokat. Ezt szinte minden ókori földrajzi író átvette és kiegészítette a világra vonatkozó saját eredményeivel (nem minden esetben szerencsésen).

Az ókori és középkori utazók ezen műveket alapján tervezhették meg utazásaikat, ezért igen fontosnak tartották őket. Eratoszthenész megalapozta a fokmérés elvét, erről Eötvös Lóránd is megemlékezett az MTA 1901. május 12-i ünnepi közgyűlését megnyitó elnöki beszédében (Eötvös 1901). A hálás utókor a csillagászati munkásságának emlékére krátert neveztek el róla a Holdon.

Hivatkozások

Ball J (1942): Egypt in the classical geographers. Government Press, Bulaq. Cairo. 203.
Eötvös L (1901): Elnöki megnyitó beszéd. Akadémiai Értesítő, 261-269.
Forisek P (2003): Censorinus és műve a De Die Natali. PhD értekezés, Debrecen.
Holland P (1847): Pliny's Natural History. George Barclay, Cambridge. 718.
Joannis S G (1810): Censorinus: Die Natali. Apud J.L.S. Lechner, Norimbergae. 216.
Kürti V (1948): Az ókor mértékegységei. Geodéziai Közlöny, 14(11-12), 173-174.
Strabón (1977): Geógraphika. Gondolat kiadó, Budapest. 1002.
U.S. (1989)**:** Naval Observatory, Nautical Almanac Office - H.M. Nautical Almanac Office. The Astronomical Almanac for the Year 1990. U.S. Govt. Printing Office, Washington. 551.
Varga J (1988): Alaphálózatok I. (Vetülettan). Tankönyvkiadó, Budapest. 296.
Ziegler H (1891).: Cleomedis: De motu circulari corporum caelestium libri duo. In Aedibus D.B. Teubneri, Lipsiae. 273.