ÉVFOLYAM
Volume

XV

2012

GEOMATIKAI KÖZLEMÉNYEK

Publications in Geomatics

VENDÉGSZERKESZTŐ
Guest Editor

VÖLGYESI L

SZERKESZTŐK
Editors

ZÁVOTI J, BÁNYAI L, PAPP G

HU ISSN 1419-6492

MTA GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI KUTATÓINTÉZET
SOPRON

Geomatikai Közlemények

Publications in Geomatics

kiadja az

MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZETE

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.
tel.: 99 - 508-340 fax.: 99 - 508-355
e-mail: geomatika@ggki.hu
web: www.geomatika.ggki.hu
web programozó: Lovranits Tamás

felelős kiadó:

Závoti József
igazgató

szerkesztők:

Závoti József, Bányai László és Papp Gábor

technikai szerkesztő

Bischof Annamária

készült a
LŐVÉR PRINT Kft. nyomdájában
9400 Sopron, Ady Endre u. 5.
tel.: 99 - 329-977

megjelent 150 példányban
Sopron, 2012

HU ISSN 1419-6492

GEOMATIKAI

KÖZLEMÉNYEK

XV.

"Minden nemzet a maga
nyelvén lett tudós,
de idegenen sohasem."

(Bessenyei György)

ÁLTALÁNOS INFORMÁCIÓK ÉS ÚTMUTATÓ

A Geomatikai Közlemények 1998 óta rendszeresen, általában évenként egy alkalommal megjelenő folyóirat. A kiadvány célja, hogy elsősorban magyar és esetenként angol nyelvű fórumot biztosítson a hazai ill. külföldi kutatóknak és szakembereknek, akik a geodézia, fotogrammetria, térinformatika, fizikai geodézia, geodinamika, tágabb értelemben véve a geomatika szakterületén elért tudományos eredményeiket szeretnék közzétenni. A kiadványban megjelenő cikkek és tanulmányok a mai normáknak megfelelő lektorálási folyamaton mennek keresztül, azaz mielőtt publikálásra kerülnek legalább kettő független bíráló véleményt alkot a közlésre benyújtott kéziratról. A bírálók nevét alaphelyzetben csak a szerkesztőbizottság ismeri, de a bírálók kérhetik anonimitásuk felfüggesztését. A bírálatok alapján a szerkesztőbizottság eldönti, hogy az adott kézirat megfelel-e a Geomatikai Közlemények formai és tartalmi követelmény-rendszerének, illetve, hogy az esetlegesen felmerülő hibák és hiányosságok kijavíthatók és pótolhatók-e a kézirat kisebb-nagyobb átdolgozásával.

A Geomatikai Közlemények szerkesztését, amelyet 2011-től már egy az Interneten keresztül elérhető és működtethető web felület is támogat (www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek ©Lovranits Tamás és Papp Gábor), társadalmi munkában végző szerkesztőség nagy hangsúlyt fektet a lehető leggyorsabb minőségi munkára. Ez mind a szerzőktől, mind a bírálóktól erőfeszítéseket és fegyelmet kíván, amit a szerkesztőség előre is tisztelettel megköszön. Ennek biztosításához javasoljuk áttanulmányozni a következő anyagokat:

Geomatikai_Közlemények_instrukciók_szerzőknek.doc,
Geomatikai_Közlemények_instrukciók_bírálóknak.pdf,

amelyek a már fent megadott címre belépve letölthetők. A regisztrált felhasználók ugyanezen a címen keresztül végezhetik el a rendszer által koordinált aktuális feladataikat akár szerzői akár bírálói szerepkörben. Az új felhasználók ugyanitt regisztrálhatnak, felhasználói név és e-mail cím megadásával.

A feltöltött kéziratokat a szerkesztőség előbírálja, elsősorban az instrukciókban megfogalmazott formai szempontok szerint. Ha a kézirat formailag kielégítőnek bizonyul, akkor elindul a bírálati folyamat, amely általában több ciklust is képez és egészen addig tart, ameddig a bírálók ill. a szerkesztőség ezt tartalmi-formai indokok miatt szükségesnek tartják. A bírálati fázisokról és az aktuális teendőkről mind a szerzők mind a bírálók automatikus üzenetekben értesülnek.

A Geomatikai Közleményeket jelenlegi elnevezése szerint az MTA CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete adja ki. A kiadás anyagi hátterét egyrészt a kétévente Sopronban megrendezésre kerülő Geomatika Szeminárium másrészt különböző pályázatok és tudományos szervezetek (pl. Soproni Tudós Társaság) támogatásai biztosítják.

A Geomatikai Közlemények szerkesztőségének tagjai az aktuális kötet lezárásakor:
Bányai László, Benedek Judit, Bischof Annamária, Bódis Virág Bereniké, Eperné Pápai Ildikó, Gribovszki Katalin, Kalmár János, Lovranits Tamás, Papp Gábor, Szűcs Eszter, Újvári Gábor, Völgyesi Lajos, Závoti József

A KÖTETBEN MEGJELENT CIKKEK BÍRÁLÓI

Ádám	József
Bányai	László
Barsi	Árpád
Busics	György
Füsi	Balázs
Grenerczy	Gyula
Győri	Erzsébet
Homolya	András
Jancsó	Tamás
Nagy	Dezső
Noéh	Ferenc
Novák	Attila
Paláncz	Béla
Rózsa	Szabolcs
Tóth	Gyula
Turczi	Gábor
Virág	Gábor
Völgyesi	Lajos
Weidinger	Tamás
Závoti	József

TARTALOMJEGYZÉK
CONTENTS

Ádám József 7
Köszöntés

Völgyesi Lajos 9
Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában
Application and importance of the torsion balance measurements in geodesy

Závoti József 27
A számítógépes algebrai rendszerek alkalmazási lehetőségei a fizikai geodéziában
Application possibilities of computer algebraic systems in geodesy

Busics György 43
Geodéziai hálózatok Magyarországon – múlt, jelen és jövő
Geodetic Networks in Hungary – the past, present and future

Kenyeres Ambrus 55
4D-geodézia: Az időbeli változások kezelése a geodéziai hálózatokban – jelen és jövő
4Dgeodesy: the handling of the time-dependent effects in geodetic networks – present and future

Tóth László 67
Alkalmazott geodézia – katonai felmérések
Applied geodesy - military surveys

Paláncz Béla 85
Dixon-rezultáns alkalmazása a fotogrammetriai külső tájékozás megoldása során
Solution of the exterior orientation in photogrammetry applying Dixon resultant

Ádám József 95
A GNSS/RNSS rendszerek átfogó hálózatának létrehozása
On the Development of GNSS/RNSS System-of-Systems

Grenerczy Gyula 109
Magyarország jelenkori felszínmozgásai optimális feltérképezésének koncepciója
A concept for the optimal mapping of present-day surface motions of Hungary

Kiszely Márta 119
A hullámforma korreláció használata mikrorengések elemzésére – 2012. április 6., Vértes
Application of the waveform correlation method in the analysis of micro-earthquake sequences – April 6. 2012, Vértes

Kugler Zsófia 129
Sarkköri folyók jégolvadási változásainak vizsgálata passzív mikrohullámú űrfelvételek felhasználásával
Analysis of ice break-up changes on arctic river ice from passive microwave images

Bartha Gábor, Szebényi Géza, Benő Dávid, Kocsis Sándor 141
Radiológiai monitoring térinformatikai modellje
GIS model of a radiological monitoring system

KÖSZÖNTÉS

A jelen kötettel *Dr. Biró Péter* Professor Emeritust, az MTA rendes tagját, a Kalsruhei Egyetem tiszteletbeli doktorát köszöntjük 80. születésnapja alkalmából. Ebből az alkalomból 2010. december 3-án a Magyar Tudományos Akadémia (MTA) székházában ünnepi tudományos előadóülést szerveztünk, amelyen az MTA X. Földtudományok Osztályának vezetése és tagjai, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) Általános- és Felsőgeodézia Tanszék munkatársai, és további vendégek vettek részt. Jelenlétünkkel elismerésünket, nagyrabecsülésünket és tiszteletünket fejeztük ki *Biró Péter* akadémikusnak a hazai és nemzetközi szinten is egyaránt ismert és elismert életpályája és alkotó tudományos munkássága, oktatói munkája, továbbá tudomány- és felsőoktatási szervezői tevékenysége iránt.

Az előadóülésen a következő előadások hangzottak el:

- Völgyesi Lajos: Az Eötvös-inga mérések alkalmazása és jelentősége a geodéziában,
- Závoti József: Javaslatok a számítógépes algebrai rendszerek fizikai geodéziai alkalmazásaira,
- Busics György: Geodéziai hálózatok Magyarországon – múlt és jövő,
- Kenyeres Ambrus: 4D geodézia – az időbeli változások kezelése a geodéziai hálózatokban,
- Tóth László: Alkalmazott geodézia – katonai felmérések.

Az MTA Földtudományok Osztálya és a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék részéről külön is kiemelem, és egyúttal megköszönöm *Biró Péter* akadémikus úrnak azt a számunkra példamutató oktatói és szakmai-tudományos közéleti munkásságát, amit a 70. és a 75. születésnapja tiszteletére szervezett ünnepi előadóülések óta kifejtett az eltelt 10, illetve 5 éves időszak folyamán:

- odaadó kitartással és lelkiismeretesen végezte a Felsőgeodézia és a Kozmikus geodézia tantárgyak előadásainak nagy részét. Az utóbbi tárgyat tematikailag átdolgozta a BSc-képzéshez illesztés céljából (az új tantárgy neve: Globális helymeghatározás), amelynek keretében korábban kidolgozott elektronikus jegyzetét is módosította;
- szervezi és irányítja a *„Felsőgeodézia elmélete és gyakorlata”* c. egyetemi tan- és szakkönyv írását és szerkesztését, amely várhatóan hamarosan elkészül és nyomtatásban is megjelenik;
- több fontos szakmai-tudományos testületben végez aktív munkát. Rendszeresen és lelkiismeretesen részt vesz az MTA Földtudományok Osztályának munkájában, mindig megjelenik (semmiféle kifogást nem keresve a távolmaradásra) az osztályüléseken, amelyeken következetesen kifejti véleményét és ezzel is nagy mértékben segíti az Osztály munkáját.

Biró Péter akadémikus úrnak kívánunk további jó erőt, egészséget, alkotókedvet és munkájában sok sikert! Bízunk benne, hogy tanácsaira és tapasztalataira még nagyon sokáig számíthatunk!

A továbbiakban közöljük *Biró Péter* akadémikusnak 2000. év óta végzett szakirodalmi tevékenységét. (A 2000. évig megjelent publikációinak felsorolását az *Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica* című szakmai folyóirat tartalmazza: Vol. 35(4), pp. 475-480 (2000)).

A kötetben ezt követően az előadóülésen elhangzott előadások szerkesztett szövegét adjuk közre az elhangzás sorrendjében, valamint professzor úr tiszteletére további tanulmányokat is közlünk.

Dr. Ádám József

BIRÓ PÉTER PROFESSOR EMERITUS SZAKIRODALMI TEVÉKENYSÉGE 2000. ÉVTŐL

Egyetemi jegyzetek

Biró P (2000): Felsőgeodézia. BME egyetemi jegyzet, változatlan utánnyomás. Műegyetemi kiadó, Budapest.
Biró P (2003): Kozmikus geodézia I.rész. Elektronikus jegyzet, Budapest.
Biró P (2004): Felsőgeodézia BSc. Elektronikus jegyzet, Budapest.
Biró P (2006): Felsőgeodézia BSc. Elektronikus jegyzet, Budapest.
Biró P (2007): Felsőgeodézia - oktatási segédlet (14 hetes tantárgyprogram és óravázlat a Felsőgeodézia BSc előadásaihoz) Elektronikus jegyzet, Budapest. (http://www.agt.bme.hu/→Tantárgyak→Felsőgeodézia)
Biró P (2007): Globális helymeghatározás. Oktatási segédlet, Budapest.

Könyvrészlet

Biró P (2003): Ideas to the use of the International Terrestrial Reference System. Festschrift zum 70. Geburtstag von Helmut Moritz. Institut für Geodäsie, Technische Universität Graz. 31-38.

Tanulmányok

Biró P (2002): Hazay István. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest. 1-12.
Biró P (2002): Kozmikus geodéziai alapfogalmaink újragondolása. Geomatika Közlemények, 5, 7-24.
Biró P (2004): A csillagászati geodézia helye a XXI. században. Geodézia és Kartográfia 56(2), 3-11.
Biró P (2005): A vonatkoztatási rendszerek és a geodéziai dátum. Geomatika Közlemények 8, 5-12.
Biró P (2011): 110 éve született Hazay István. Geodézia és Kartográfia, 63(6), 4-6.

Szemlecikkek

Biró P (2000): Dr. Ódor Károly. Geodézia és Kartográfia, 52(2), 44-45.
Biró P (2000): Dr. Hőnyi Ede. Geodézia és Kartográfia, 52(11), 29-31.
Biró P (2000): 100 éve született Karl Ledersteger. Geodézia és Kartográfia, 52(12), 32-33.
Biró P (2003): 50 éves a Német Geodéziai Bizottság. Geodézia és Kartográfia, 52(4), 30-31.
Biró P (2004): 225 Jahre Lehrstuhl für Vermessungskunde und höhere Geodäsie in Budapest. Allgemeine Vermessungs-Nachrichten, 2004(6), 238-239.

AZ EÖTVÖS-INGA MÉRÉSEK ALKALMAZÁSA ÉS JELENTŐSÉGE A GEODÉZIÁBAN

Völgyesi Lajos[*]

Application and importance of the torsion balance measurements in geodesy – The 80th birthday of professor Péter Biró was celebrated together with his students, university colleagues and scientific friends at the Hungarian Academy of Sciences on the 3rd December 2010. In honour of the Professor a ceremonial scientific conference was held, and we gave account of all the successful scientific research studies connected to Him, in one or another form, which he had started, supported and managed as a head of the department, or he participated in. The application of the torsion balance measurements in geodesy is by far important within His research topics. A summary on it is given in this paper.

Keywords: Torsion balance, gravity gradients, gravity anomalies, curvature data, deflection of the vertical, geoid, vertical gradients, inversion method

Biró Péter professzor úr 80. születésnapját tanítványaival, egyetemi kollégáival és tudós barátaival együtt ünnepeltük a Magyar Tudományos Akadémián 2010. december 3-án. A professzor úr tiszteletére ünnepi tudományos ülést tartottunk, és beszámoltunk azokról a kutatási eredményekről, amelyekhez az ünnepelt valamilyen módon kapcsolódott; tanszékvezetőként elindította és támogatta a kutatásokat, vagy maga is részt vett a munkákban. Az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításával kapcsolatos kutatások kiemelkedően fontosak ebben a sorban. A tanulmányban összefoglaljuk az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazási lehetőségeit, és röviden bemutatjuk az ezzel kapcsolatos eddigi kutatási eredményeinket.

Kulcsszavak: Eötvös-inga, nehézségi gradiensek, görbületi értékek, függővonal-elhajlás, geoid, nehézségi rendellenességek, vertikális gradiensek, inverziós módszer

1 Bevezetés

Eötvös Lorándot a gravitációs kutatásainak kezdetén elsősorban a Föld alakjának kérdése izgatta. Torziós ingájának kifejlesztésekor éppen az a cél vezette, hogy műszerének segítségével nagy pontossággal meghatározza a nehézségi erőtér szintfelületének alakját. Eötvös első terepi méréseivel egy időben olyan számítási eljárást dolgozott ki, melynek segítségével torziós-inga mérések adataiból meghatározható két közeli pont között a függővonal-elhajlás változása. Ha torziós ingával felmért terület néhány pontján asztrogeodéziai módszerekkel meghatározzuk a függővonal-elhajlásokat, akkor az ingamérések adataiból minden egyes mérési pontra levezethetjük a függővonal-elhajlás értékét. Ily módon lehetőség nyílt arra, hogy torziós-inga mérések segítségével részleteiben tanulmányozhassuk a geoid alakját. Eötvös Arad környéki méréseire alapozva a világon elsőként készített részletes geoid térképet torziós-inga adatok felhasználásával (Völgyesi et al. 2006).

Nagyobb, összefüggő területre ez a módszer igen számításigényes, ezért az 1950-es években Renner (1957) egyszerűsítő négyszöghálózat kialakításával megpróbálta ezt a fajta függővonal-elhajlás interpolációt a gyakorlati felhasználás céljára alkalmassá tenni. Megfelelő számítástechnikai eszközök hiányában azonban még korai volt a próbálkozása.

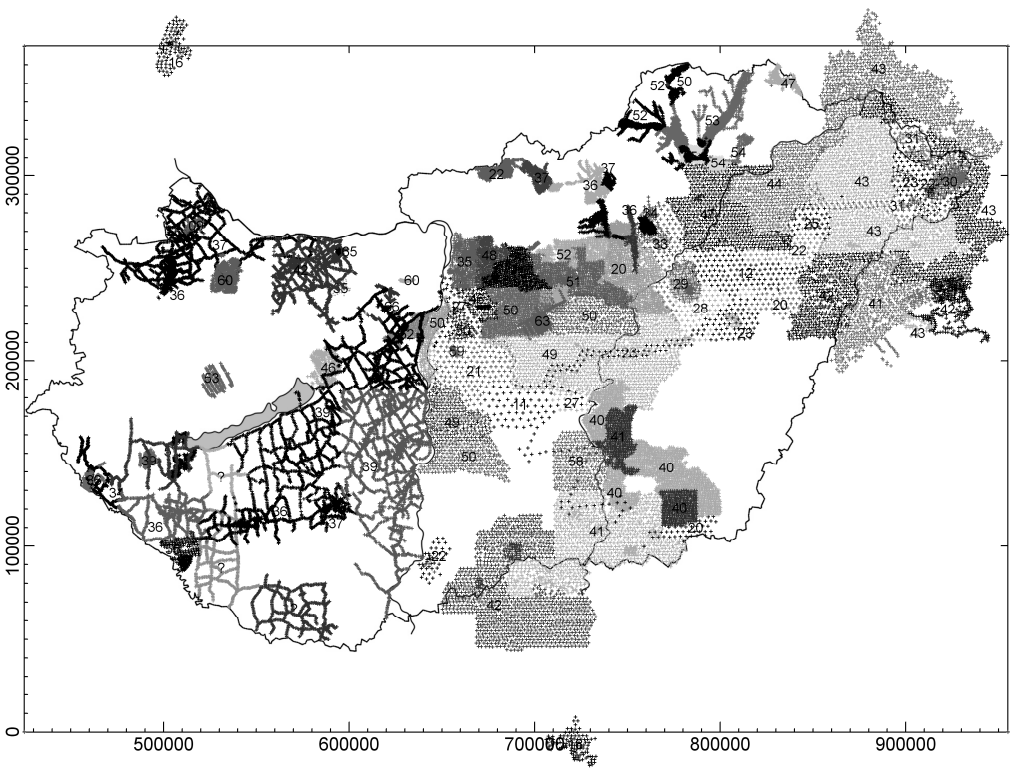
Az 1970-es évek elejére Magyarországon is hozzáférhetővé váltak az első nagyobb számítógépek (Razdan, Odra, R32, stb.), és *Biró Péter* elsőként ismerte fel az ezekben rejlő óriási lehetőséget a továbblépésre. Kezdeményezésére elindultak az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításával kapcsolatos kutatások a BME akkori Felsőgeodézia Tanszékén.

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék*
H-1111 Budapest, Műegyetem rkp.3.
E-mail: volgyesi@eik.bme.hu

2 Magyarországi Eötvös-inga mérések

Eötvös Loránd kezdeti kutatásait követően a magyarországi ingamérések döntő részét ásványi nyersanyagok kutatása céljából végezték. Ennek megfelelően a mérések során nyert adatok közül csak a W_{zx}, W_{zy} horizontális gradienseket használták fel, a W_{Δ} és a W_{xy} görbületi adatok többnyire feldolgozatlanok maradtak. A geodéziai felhasználás céljára viszont éppen ezek a görbületi adatok a fontosak. Hazánkban az 1900-as évektől egészen 1967-ig terjedően a MAORT, az ELGI, valamint az OKGT összesen mintegy 60000 ingamérést végzett – ennyi méréssel a Kárpát-medence a Föld egyik legjobban felmért területe lett.

Biró Péter kezdeményezésére a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszéke és az ELGI az 1990-es évek közepén kutatási együttműködési szerződést kötött. Ennek keretében, valamint különböző pályázatok elnyerésével 1995 óta rendszeresen folyik a korábbi Eötvös-inga mérések anyagának digitális adatbázisba mentése. Az adatbázis kialakítása a különböző formában ma még fellelhető mérési anyagok (észlelési lapok, mérési jegyzőkönyvek, térképek, vagy fénymásolt gradiens térképek) alapján történik. A 2011. év végéig digitalizált adatok területi eloszlását az 1. ábrán láthatjuk. Az 1. ábrán az egyes területrészeken látható számok 1900 hozzáadásával a mérések évszámát mutatják. A digitális adatbázis jelenleg 41562 Eötvös-inga mérés adatait tartalmazza, így az összesen mintegy 60000 magyarországi Eötvös-inga mérés több mint kétharmada már közvetlenül alkalmas a további – elsősorban geodéziai célú – hasznosításra. Az adatbázisban a mérési állomások száma, a mérés éve, az állomás Kraszovszkij ellipszoidra vonatkozó φ és λ földrajzi koordinátája, a vízszintes gradiens W_{zx} *É*-i és a W_{zy} *K*-i összetevője, a W_{Δ} és a $2W_{xy}$ görbületi komponensek, és sorra a W_{zx} , W_{zy} , W_{Δ} , $2W_{xy}$ értékekhez tartozó topografikus javítások szerepelnek. A 60000 ingamérésből mintegy 5000 pont éppen azokra a trianoni határon túli területekre esik, amelyekről egyébként nincsenek részletes graviméteres adataink, így a magyarországi geoidkép finomszerkezetének meghatározásához ezeknek nagy jelentőségük van.

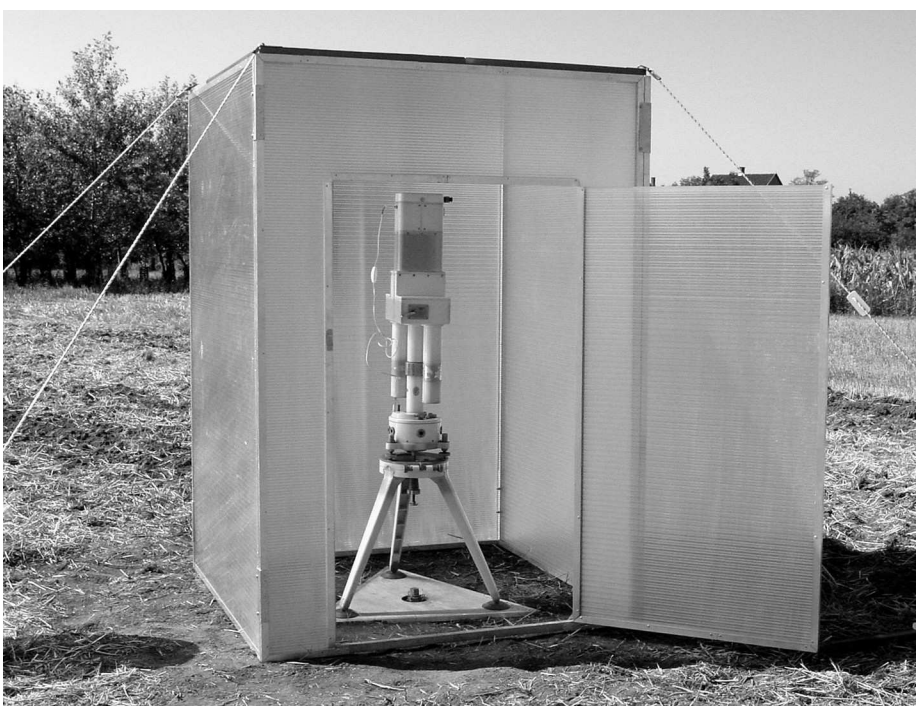


1. ábra. A digitális adatbázisban szereplő 41562 Eötvös-inga mérés területi eloszlása 2012. januárban

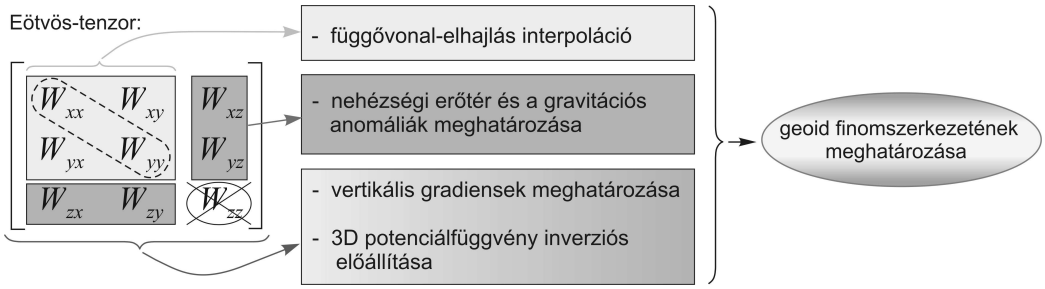
Az 1960-as évek végére gyakorlatilag befejeződtek Magyarországon a földtani kutatás céljából végzett inga-mérések. Az ezt követő hosszabb szünet után azonban napjainkban a geodézia tudománya újabb igényekkel jelentkezett további mérések végzésére. A korábban gyártott Eötvös-ingák közül jelenleg két műszert sikerült felújítani és mérésekre alkalmassá tenni. Az egyik a BME Általános és Felsőgeodézia Tanszékének Eötvös-Rybár (Auterbal) ingája (Völgyesi et al. 2009a), a másik ennek az 1950-es évekre továbbfejlesztett változata, az ELGI E54 típusú műszere. A terepi Eötvös-inga mérések – éppen 50 éves szünetelése utáni – 2007 évi újraindítását a 60657, illetve a 76231 számú OTKA pályázatok anyagi támogatása tette lehetővé (Völgyesi et al. 2009b). A szükséges vizsgálatok elvégzésére részben a budapesti Mátyás-barlang, részben a Csepel-sziget déli része, Makád község külterülete látszott a legalkalmasabbnak, ahol már az ötvenes években is végeztek Eötvös-inga méréseket. A 2. ábrán a felújított E54 inga látható az észlelőházban mérésre kész állapotban a Makád környékén végzett mérések egyik pontján 2007-ben. A közeli jövőben ezeknek a méréseknek és kutatásoknak a folytatását tervezzük.

3 Az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazási lehetőségei

Az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazása esetén bármilyen fajta adatot is határozunk meg, a végső cél szinte minden esetben a Föld elméleti alakjának, a geoidnak a meghatározása (Völgyesi et al. 2005b). A 3. ábrán röviden összefoglaltuk az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosításának jelenlegi lehetőségeit. Az ábra bal oldalán az Eötvös-tenzor elemeit három csoportba osztottuk: a világosabb árnyalattal jelölt területen az ingával mérhető görbületi adatokat emeltük ki, a sötétebb résszel a horizontális gradienseket jelöltük, míg az áthúzott W_{zz} függőleges gradiens a torziós-ingával közvetlenül nem mérhető tenzorelem. Ugyanezen ábra jobb oldalán azt szemléltettük, hogy az Eötvös-tenzor különböző elemeinek felhasználásával milyen geodéziai vonatkozású számítások végezhetők, illetve a geodézia szempontjából milyen fontos adatok határozhatók meg. Az alábbiakban ezeket a lehetőségeket tekintjük át röviden.



2. ábra. Eötvös-inga mérésre kész állapotban Makád határában 2007-ben



3. ábra. Az Eötvös-inga mérések geodéziai hasznosítási lehetőségei

4 A függővonal-elhajlás interpoláció

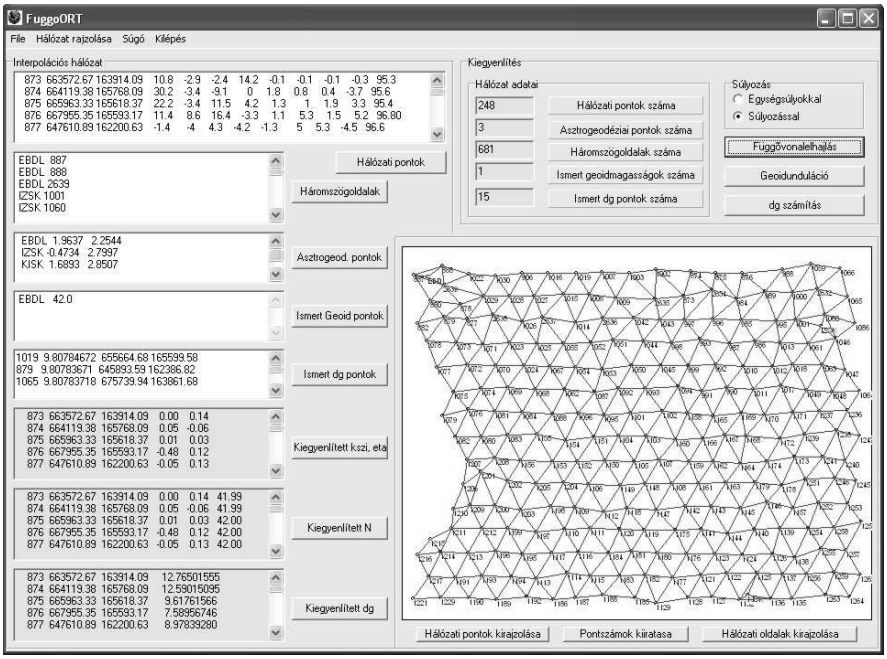
Amint a bevezetőben már említettük, a módszer alapelvét Eötvös Loránd dolgozta ki. A ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők két tetszőleges *i* és *k* pont közötti $\Delta\xi_{ik}$ és $\Delta\eta_{ik}$ megváltozása valamint az Eötvös-ingával mérhető $W_\Delta = W_{yy} - W_{xx}$ és $2W_{xy}$ görbületi gradiensek között az alábbi összefüggés írható fel:

$$\Delta\xi_{ik}\sin\alpha_{ik} - \Delta\eta_{ik}\cos\alpha_{ik} = \frac{s_{ik}}{4g}\left\{\left[\left(W_\Delta - U_\Delta\right)_i + \left(W_\Delta - U_\Delta\right)_k\right]\sin 2\alpha_{ik} + \left[\left(W_{xy} - U_{xy}\right)_i + \left(W_{xy} - U_{xy}\right)_k\right]2\cos 2\alpha_{ik}\right\}, \quad (1)$$

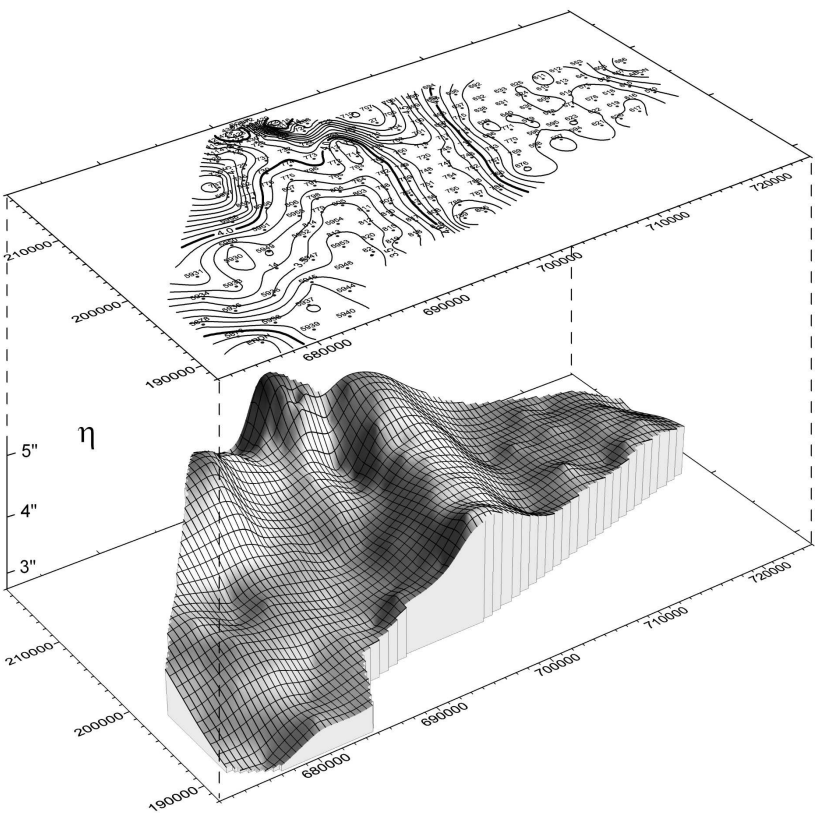
ahol $U_\Delta = U_{yy} - U_{xx}$, s_{ik} az *i* és a *k* pont közötti távolság, *g* az átlagos nehézségi gyorsulás értéke a pontok között, U_{xx}, U_{yy} és az U_{xy} a görbületi gradiensek normális értéke, α_{ik} pedig az *ik* vonal azimutja (Völgyesi 1993, 1995). A számítás alapvetően vonal menti integrálás, amely a gyakorlatban a trapéz integrálközelítő formulával abban az esetben oldható meg ha az Eötvös-ingával mérhető görbületi gradiensek két szomszédos pont közötti megváltozása az (1)-ben lineárisnak tekinthető (Völgyesi 1993).

A BME Általános- és Felsőgeodézia (korábbi Felsőgeodézia) Tanszékén közel húsz éves kutatómunka eredményeképpen kidolgoztuk a nagyobb összefüggő területre alkalmazható és a modern számítástechnika által kínált lehetőségeknek leginkább megfelelő függővonal-elhajlás interpolációs módszert (Völgyesi 1993, 1995). Erre a módszerre készítettük többek között a *FuggoORT* szoftvert, amely Eötvös-inga mérések felhasználásával akár láncolat mentén, akár tetszőleges területet beborító hálózatokra képes a függővonal-elhajlás értékeket meghatározni, ki tudja rajzolni az interpolációs hálózatot és az interpolált függővonal-elhajlások vektorábráját. Ezen túlmenően csillagászati szintezéssel ki tudja számítani a geoidmagasságokat, meg tudja rajzolni a kérdéses területre a geoid akár perspektív, akár szintvonalas ábráját, majd egy további fejlesztés eredményeképpen a nehézségi erőtér és a nehézségi rendellenességek meghatározására is alkalmas a W_{zx} és a W_{zy} gradiens értékek alapján. Mivel nagyméretű mátrixokat is képes kezelni, ezért egyszerre nagy területen is végezhetők vele számítások. A *FuggoORT* szoftver input-output ablakának képe a 4. ábrán látható.

Két nagyobb próbaterületen történtek kísérleti számítások. Mind a Cegléd környéki mintegy 1200 km^2, mind a Szabadszállás–Kiskőrös környéki közel 800 km^2 kiterjedésű teszterületen elvégzett számítások eredményei szerint a ξ és az η függővonal-elhajlás összetevők közel fél szögmásodperces pontossággal számíthatók. Az 5. ábrán példaként az említett teszterületen számított első vertikális irányú η függővonal-elhajlás összetevő területi eloszlása látható.



4. ábra. Az interpolációs szoftver input-output ablaka



5. ábra. Az interpolált η függővonal-elhajlás összetevő területi eloszlása a Cegléd környéki tesztterületen

5 Lokális geoidformák meghatározása

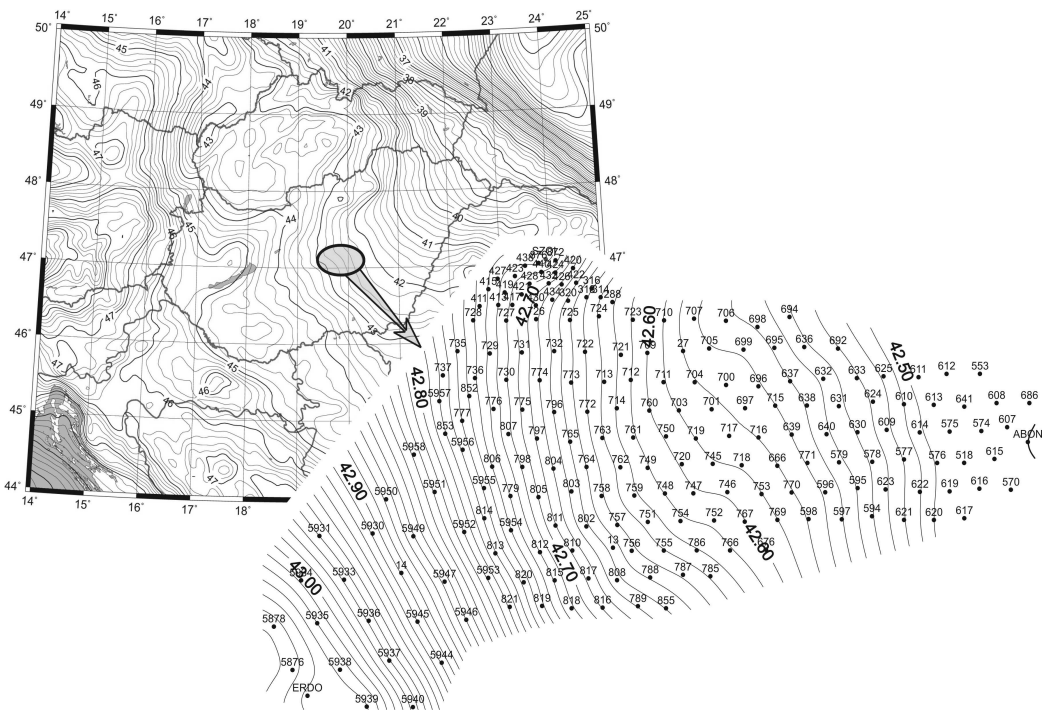
A P_i és a P_k pont között a geoid-ellipszoid távolság ΔN_{ik} különbsége az (1) felhasználásával számított ξ, η függővonal-elhajlás összetevők ismeretében a csillagászati szintezés módszerét alkalmazva a

$$\Delta N_{ik} = \left(\frac{\xi_i + \xi_k}{2} \cos\alpha_{ik} + \frac{\eta_i + \eta_k}{2} \sin\alpha_{ik} \right) s_{ik} \tag{2}$$

összefüggés segítségével határozható meg.

Kiküszöbölve a hagyományos csillagászati szintezés négyzetháló sarokpontjaira történő számításának problémáját, közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontok helyét választottuk a geoid számítások céljára. Így a ΔN_{ik} különbségeket a csillagászati szintezésnek nem az ismert négyzethálózat sarokpontjaiban É-D illetve K-Ny irányban, hanem közvetlenül az Eötvös-inga mérési állomások pontjai között, tetszőleges α azimutban határoztuk meg (Völgyesi 1998, 2001, 2005).

A Cegléd környéki teszterületen az Eötvös-inga mérések mellett hat pontban álltak rendelkezésre a geoid-ellipszoid távolság értékek. A kísérleti számítások során ezek közül három asztrogeodéziai pont rögzített kényszerként, további egy asztrogeodéziai és két asztrogravimetriai pont pedig a számított értékek ellenőrzésére szolgált. Az ellenőrző pontokban tapasztalt eltérések alapján az Eötvös-inga mérések felhasználásával számított geoidundulációkra ±4 cm-es középhiba adódott. A 6. ábra jobb alsó részén a teszterületen közvetlenül az Eötvös-inga mérési pontokra csillagászati szintezéssel meghatározott geoid képét láthatjuk. Az így meghatározott geoidkép szépen illeszkedik az ábra bal felső részén látható magyarországi HGTUB2008 geoidképhez.



6. ábra. A Cegléd környéki teszterület részletes geoidképének illeszkedése a magyarországi HGTUB2008 geoidhoz

6 Nehézségi erőtér és a gravitációs anomáliák meghatározása

Kutatásaink során világossá vált, hogy az Eötvös-ingával mérhető vízszintes gradiensek kiváló hozzájárulást adnak a nehézségi erőtér finomszerkezetének-, különösképpen a 30 km-nél rövidebb hullámhosszú változásoknak a meghatározására (Völgyesi et al. 2005a, 2007).

A fizikai geodézia

$$\Delta g = g - \gamma = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2T}{R} \tag{3}$$

alap differenciálegyenletéből kiindulva ($T=W-U$ a potenciálzavar, R a közepes földsugár) összefüggés vezethető le, amellyel a nehézségi rendellenességek számítása a függővonal-elhajlás interpolációhoz hasonló logikával történhet. Megfelelő mennyiségű Eötvös-inga mérési pont esetén interpolációs hálózat alakítható ki, amelynek két tetszőleges pontja között a W_{zx} és a W_{zy} vízszintes gradiensek ismeretében a

$$\Delta g_k - \Delta g_i = s_{ik}\left\{\frac{(W_{zx}-U_{zx})_i + (W_{zx}-U_{zx})_k}{2}\cos\alpha_{ik} + \frac{(W_{zy})_i + (W_{zy})_k}{2}\sin\alpha_{ik}\right\} \tag{4}$$

összefüggés alkalmazásával lehetőségünk nyílik a nehézségi rendellenességek (gravitációs anomáliák) sűrítésére – ahol s_{ik} az i és a k pont közötti távolság, U_{zx} a W_{zx} horizontális gradiens normális értéke, α_{ik} pedig az ik vonal azimutja (Völgyesi et al. 2005a). A feladat logikájának megfelelően az Eötvös-inga mérések mellett az egyértelmű megoldásához itt is szükségünk van további információra – ebben az esetben ismernünk kell az interpolációs hálózat legalább egy pontjában a Δg nehézségi rendellenesség értékét. Általános esetben nem csak egy, hanem több pontban is adottak a nehézségi rendellenességek, ekkor a Δg ismeretlenek legvalószínűbb értékét kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

A fent leírtak kisebb módosításával nem csak a nehézségi rendellenességek, hanem maguk a nehézségi erő (nehézségi gyorsulás) értékek is meghatározhatók az Eötvös-ingával mérhető vízszintes gradiensek felhasználásával (Völgyesi et al. 2007).

Ekkor a $\boldsymbol{g} = -\overrightarrow{gradW}$ összefüggésből kiindulva a nehézségi erőtér P_i és P_k pont közötti megváltozása olyan koordinátarendszerben, amelynek x tengelye északi, y tengelye keleti irányba, a z tengelye pedig függőlegesen lefelé mutat:

$$g_k - g_i = -\left[\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_k - \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)_i\right]. \tag{5}$$

A g nehézségi erő teljes differenciálja $\boldsymbol{dr}$ elemi elmozdulásvektor esetén:

$$dg = \nabla(g)\cdot\boldsymbol{dr} = \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy + \frac{\partial g}{\partial z}dz = W_{zx}dx + W_{zy}dy + W_{zz}dz\ , \tag{6}$$

ebből pedig levezethető a

$$g_k - g_i \approx \frac{s_{ik}}{2}\left\{[(W_{zx})_i + (W_{zx})_k]\cos\alpha_{ik} + [(W_{zy})_i + (W_{zy})_k]\sin\alpha_{ik}\right\} + \Delta h_{ik}U_{zz} \tag{7}$$

összefüggés, ahol Δh_{ik} a két pont közötti magasságkülönbség, U_{zz} pedig a vertikális gradiens (VG) normálértéke (Völgyesi et al. 2007). (Amennyiben a VG normálértéke jelentősen különbözik a valódi értéktől, a valódi érték használata szükséges.)

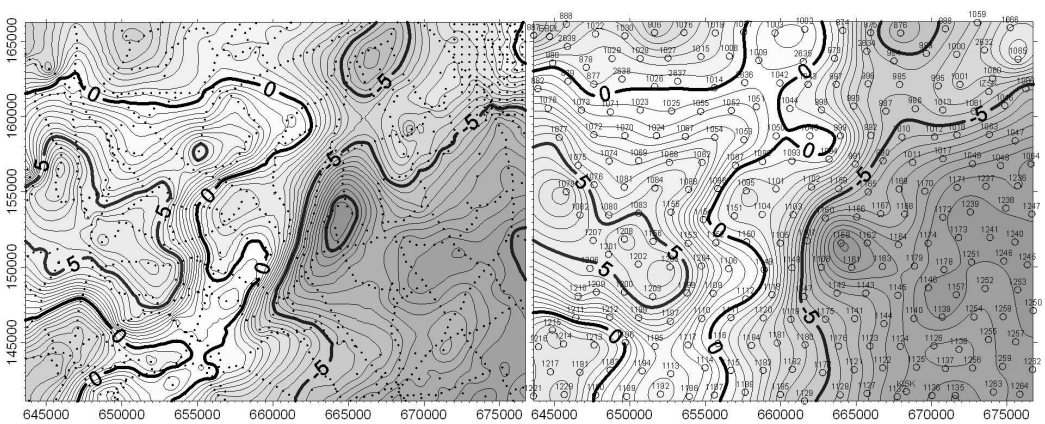
A módszer alkalmazhatóságának vizsgálatára a Szabadszállás-Kiskőrös környéki közel 800 km^2 kiterjedésű közel sík területen végeztünk kísérleti számításokat, ahol 248 Eötvös-inga mérés mellett 1197 graviméteres mérés eredményei álltak rendelkezésre. A 248 Eötvös-inga mérési pontból 18 pontban volt lehetőség az anomália értékek rögzítésére, a fennmaradó 230 pontban pedig az Eötvös-

ingával mért W_{zx} és W_{zy} vízszintes gradiensek alapján interpolációval határoztuk meg a nehézségi rendellenességek értékét. Az így interpolált anomáliák izovonalas térképét a 7. ábra jobb oldalán, az eredeti graviméteres mérések alapján szerkesztett képet pedig a bal oldalán láthatjuk. Az ábrán az inga-mérések helyszínét körök, a graviméteres méréseket pedig apró pontok jelölik, a kereten feltüntetett számok EOV koordináták. Összehasonlítva a jobb és a bal oldali képet, megfelelő egyezés látható a mért és az interpolált nehézségi rendellenességek között. 230 Eötvös-inga mérési pontban összehasonlítva a graviméteres mérésekből meghatározott $\Delta g^{mért}$ és a W_{zx}, W_{zy} Eötvös-inga mérések alapján interpolált Δg^{int} nehézségi rendellenességeket ±1.28 mGal középhiba adódott, ami nagy valószínűséggel jelentősen pontosítható lenne a valódi és a normál vertikális gradiensek különbségének figyelembe vételével, amit a (7) összefüggés levezetésekor jobb lehetőség hiányában elhanyagoltunk (Völgyesi et al. 2005a).

7 Vertikális gradiensek meghatározása

A W_{zz} vertikális gradiens (VG) értékek ismeretének igen fontos szerepe és jelentősége van a geodéziában és a gravimetriában, viszont ez az egyetlen gradiens az Eötvös tenzorban, amely közvetlenül nem mérhető az ingával.

Haalck 1950-ben javasolt viszont egy eljárást, amelynek segítségével az Eötvös-inga mérési adataiból kiszámítható a W_{zz} függőleges gradiens értéke is (Haalck 1950, Tóth et al. 2005, Tóth 2007). Ez az eljárás, a csillagászati szintezéshez hasonlóan, a VG *különbségeit* állítja elő Eötvös-ingával mért legalább három pont között. Ebből következik, hogy a függőleges gradiens értékét egy adott terület néhány pontjában ismernünk kell ahhoz, hogy az eljárással a VG abszolút értelemben is meghatározható legyen. A módszer alkalmazhatóságát először szintetikus adatok felhasználásával, tesztszámításokkal igazoltuk, szükséges azonban ennek mért adatokkal történő ellenőrzése. Erre a célra olyan pontok kellenek, ahol mind Eötvös-inga adatok, mind függőleges gradiens mérések rendelkezésre állnak. Azonban a korábbi ingamérések helyszínén nem mértek függőleges gradiens értékeket, ráadásul a pontok koordinátáit sem ismerjük olyan pontossággal, hogy az egykori ingamérések helyszínén utólag megfelelő VG értékeket mérhessünk. A módszer terepi viszonyok közötti ellenőrzésére csak az a lehetőség maradt, hogy alkalmasan kiválasztott teszterületen ugyanazon ponthálózatban végezzünk egyidejűleg Eötvös-ingás és graviméteres VG méréseket. Valójában ez indokolta az Eötvös-inga mérések hosszú – mintegy fél évszázados – szünet utáni újraindítását az utóbbi években. Ennek érdekében két különböző helyszínen próbálkoztunk. Az egyik jó lehetőségnek az ELGI Mátyás-hegyi barlangjában 1990-ben *Csapó G.* által létrehozott 14 pontból álló gravitációs mikrobázis mutatkozott, amelynek pontjain ismertek a vertikális gradiens helyi értékei, ráadásul itt Eötvös-inga mérések is történtek (Csapó 1991).



7. ábra. Graviméteres mérések alapján számított, illetve az Eötvös-inga mérések alapján interpolált Δg anomáliák a jobb, illetve a bal oldalon. Az izovonalak lépésköze 0.5 mGal. A kereten feltüntetett számok EOV koordináták.

Mivel azonban a korábbi 3 azimutos ingamérésekből a függőleges gradiensek interpolációjához szükséges görbületi adatok nem határozhatók meg, ezért szükségessé vált az ELGI Mátyás-hegyi barlangjában található 14 pontból álló gravitációs mikrobázis Eötvös-ingás újramérése. Mivel a Mátyás-barlangban különlegesen nagy gradiens értékek vannak, célszerű volt egy másik területen, átlagos magyarországi terepviszonyok mellett is létesíteni teszthálózatot. Erre a célra a Csepel-sziget déli részén Makád közelében találtunk alkalmas területet. Erre a későbbiekben még visszatérünk.

8 A 3D potenciálfüggvény inverziós előállítása

Amennyiben meg tudjuk határozni a nehézségi erőtér potenciálfüggvényét, ebből megfelelő irányú első deriváltakkal elő tudjuk állítani az erőtér vektorának összetevőit, a második deriváltak pedig a teljes Eötvös-tenzor elemeit adják (beleértve a VG értékét is). Az első deriváltakból egyszerűen adódik a függővonal-elhajlás két összetevője és közvetlenül a g értéke. Ennélfogva igen nagy jelentősége van a potenciálfüggvény meghatározásával kapcsolatos kutatásainknak.

A *Dobróka M.* alpötlete alapján kidolgozott inverziós módszer lehetőséget ad az Eötvös-inga mérések alapján a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének és a potenciálfüggvény valamennyi fontos deriváltjának inverziós előállítására (Dobróka és Völgyesi 2008, 2009, 2010).

Amennyiben a nehézségi erőtér potenciálfüggvényét valamely $\Psi_1....\Psi_P$ bázisfüggvény rendszer szerinti

$$W(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}B_l\Psi_i(x)\Psi_j(y)\Psi_k(z)\,, \tag{8}$$

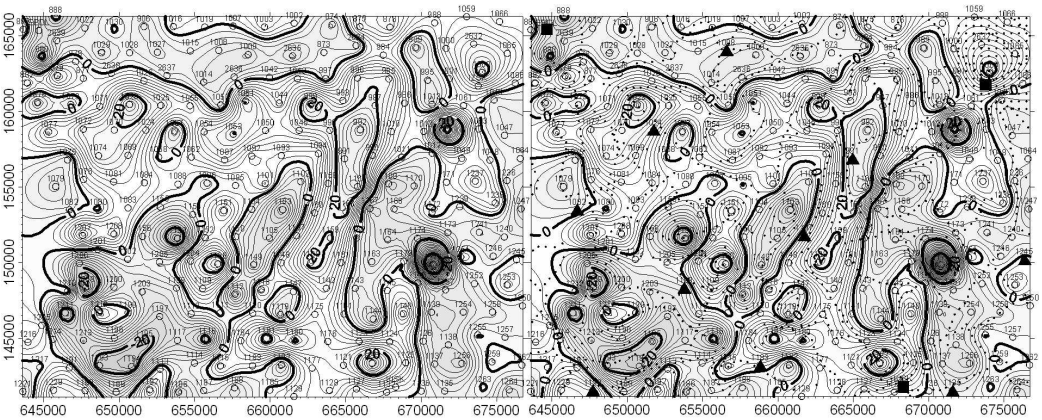
sorfejtés alakjában írjuk fel, akkor ebből az első és a második potenciálderiváltak egyszerűen számíthatók. (Bázisfüggvényekként pl. hatványfüggvényeket alkalmazhatunk.) A (8) potenciálfüggvény első és második deriváltjaiként egyszerűen előállíthatjuk a g és az Eötvös-ingával mérhető görbületi adatok (W_Δ, W_{xy}) -, illetve a horizontális gradiensek (W_{zx}, W_{zy}) elméleti értékeit. Például a W_Δ értéke:

$$W_\Delta=W_{yy}-W_{xx}=\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_y}\sum_{k=1}^{N_z}B_l\left\{\frac{\partial^2\Psi_j(y)}{\partial y^2}\Psi_i(x)-\frac{\partial^2\Psi_i(x)}{\partial x^2}\Psi_j(y)\right\}\Psi_k(z)\,. \tag{9}$$

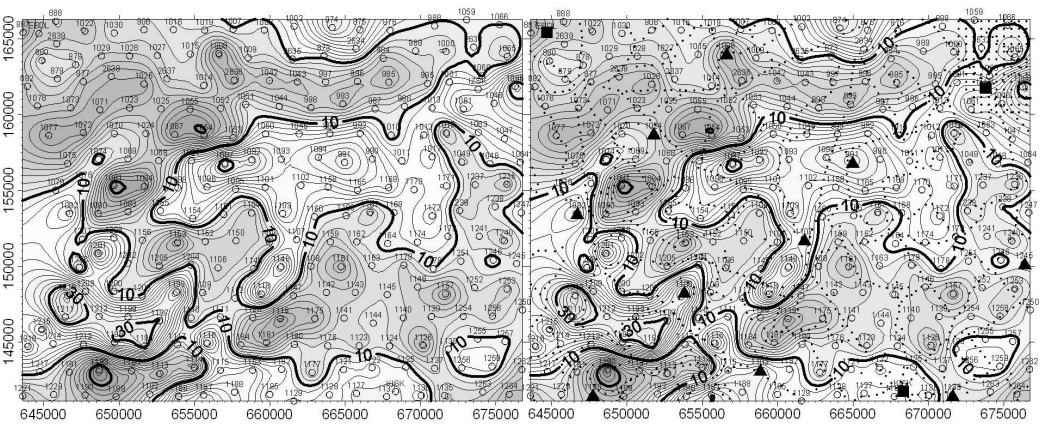
A feladat olyan B_l együttható-rendszernek a meghatározása, amely esetén a (9) mintájára számított W_Δ, W_{xy}, W_{zx}, W_{zy}, W_{zz}, W_x, W_y, W_z és az ugyanezen mért értékek eltérése minimális lesz (a W_x, W_y értékek ismert függővonal-elhajlásokból állíthatók elő).

A B_l együttható-rendszer ismeretében a teljes Eötvös-tenzor (beleértve az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető vertikális gradiens értékeket is), ezen kívül pedig a függővonal elhajlás számításához szükséges W_x, W_y mennyiségek továbbá a nehézségi erő értékek is egzaktul számíthatók nemcsak a mérési pontokban, hanem a teljes mérési területen.

A módszer alkalmazhatóságának vizsgálatára a már korábban említett Szabadszállás-Kiskőrös környéki területen végeztünk kísérleti számításokat. Itt az Eötvös-inga és a graviméteres mérések mellett három asztrogeodéziai (az ábrákon sötét négyszögek) és további tíz asztrogravimetriai pont (az ábrákon sötét háromszögek) álltak rendelkezésünkre, amelyekben ismertük a GRS80 rendszerre vonatkozó ξ, η függővonal-elhajlás értékeket. Az inverziós feladat megoldása során meghatároztuk mindazon sorfejtési együtthatókat, amelyek segítségével a teljes teszterületre előállítható mind a nehézségi erőtér potenciálfüggvénye, mind a potenciálfüggvény valamennyi első és második deriváltja. Összehasonlítva például a 8. és a 9. ábra a bal oldalán az Eötvös-ingával mért, a jobb oldalán pedig az együttes inverzióval előállított W_Δ és W_{zx} gradiensek izovonalas képét az egyezés igen jónak mondható, de ugyanez a jó egyezés tapasztalható a W_{xy} és a W_{zy} gradiensek esetében is, amelyeket itt külön nem ábrázoltunk. Az ábrákon az izovonalak lépésköze 2 E. (1 E = 1Eötvös egység = 10^{-9} s^{-2}).



8. ábra. Az Eötvös-ingával mért és az inverziós eljárással számított W_Δ *görbületi gradiens* területi eloszlása. Az izovonalak lépésköze 2 E egység. A kereten feltüntetett számok EOV koordináták



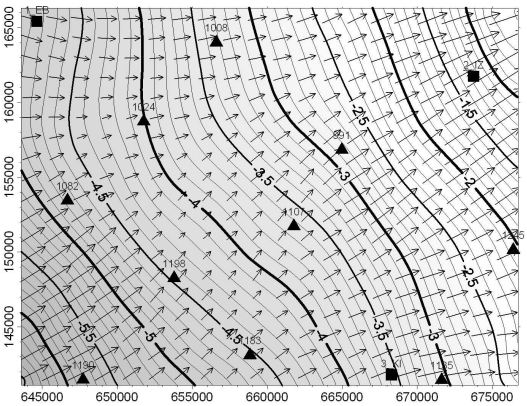
9. ábra. Az Eötvös-ingával mért és az inverziós eljárással számított W_{zx} *horizontális gradiens* területi eloszlása. Az izovonalak lépésköze 2 E egység. A kereten feltüntetett számok EOV koordináták

A sorfejtési együtthatók ismeretében lehetőség van a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének, valamint a potenciálfüggvény első deriváltjainak meghatározására is. A 10. ábrán egy additív állandó erejéig együttes inverzióval meghatározott potenciálmező látható. Az ábrán az izovonalak lépésköze 0.1 m^2/s^2. A 10. ábrán egyúttal a függővonal-elhajlások vektorait is bemutatjuk az együttes inverziós megoldásából, ahol a vektorok hosszát a

$$\theta = \sqrt{(W_x / g)^2 + (W_y / g)^2} \tag{10}$$

összefüggés alapján számítottuk.

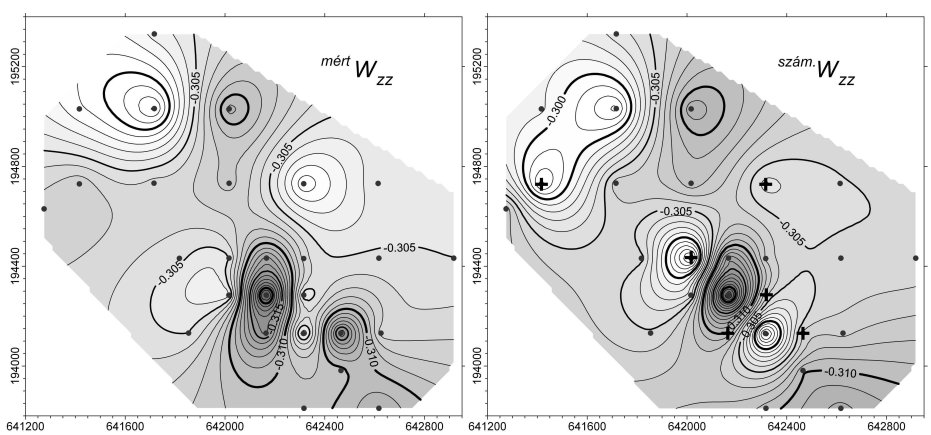
Végül, amint jeleztük, az inverziós eljárással lehetőség nyílik az Eötvös-ingával közvetlenül nem mérhető W_{zz} vertikális gradiensek meghatározására is. Mivel a Szabadszállás-Kiskőrös környéki tesztterületen méréssel meghatározott VG értékek nem álltak rendelkezésre, ezért a vertikális gradiensek meghatározására vonatkozó vizsgálatainkat más területen végeztük. Először a budapesti Mátyás-barlangban Haalck-módszerével próbálkoztunk (Ultmann 2012), majd a Csepel-sziget déli részén, a Makád környéki területen végeztünk kísérleti számításokat az inverziós eljárással (Völgyesi et al. 2012).



10. ábra. Az együttes inverzióval előállított potenciáltér (az izovonalak lépésköze 0.1 m^2/s^2), és a függővonal-elhajlások vektorábrája

A Makád környéki teszterület ebből a szempontból kiválóan megfelelt, itt ugyanis 2006 és 2010 között a K60657 számú OTKA megbízás keretében az ELGI és a BME szakemberei alapvetően erre a célra 30 pontban Eötvös-ingás, 21 pontban graviméteres és 27 pontban vertikális gradiens méréseket végeztek (Csapó et al. 2009a, 2009b). A 27 vertikális gradiens mérés helyét (amelyek egyúttal Eötvös-inga mérési pontok is) a 11. ábra bal oldalán fekete pontok jelölik, ugyanitt izovonalakkal ábrázoltuk a VG értékek területi eloszlását. Az izovonalakon feltüntetett számértékek [mGal/m] (1 [mGal/m] = 10^{-5} [$1/s^2$] = 10000 [E] =10000 Eötvös egység)-ben értendők, a kereten feltüntetett számok EOV koordináták.

Az itt bemutatott példában 27 pontban megmért vertikális gradiens értékekből 21 pontot vettünk figyelembe az inverziós eljáráshoz kiinduló adatként, a fennmaradó 6 pontban az ismert VG értékeket pedig a számítások ellenőrzősére használtuk. A vizsgálataink azt mutatták, hogy az inverziós eljárás jól alkalmazható a vertikális gradiensek meghatározására, ugyanis a 6 ellenőrző pontban összehasonlítva a számított és a mért értékeket ±11.6 mGal/m középhiba adódott, ami hasonló a graviméteres mérésekkel meghatározott vertikális gradiensek pontosságához. A 11. ábra jobb oldalán keresztekkel jelöltük azt a 6 vertikális gradiens pontot, amelyeket a számított értékek ellenőrzésére használtunk. Ugyancsak a jobb oldali ábrán izovonalakkal ábrázoltuk a számított VG értékek területi eloszlását. A 11. ábra bal oldalán a mért és a jobb oldalán az inverziós eljárással számított W_{zz} vertikális gradiensek területi eloszlását összehasonlítva megfelelő egyezés látható, amely a számítási módszer alkalmazhatóságát igazolja.



11. ábra. A mért és az inverziós eljárással számított W_{zz} *vertikális gradiensek* területi eloszlása Makád környékén. Az izovonalakon feltüntetett számok mGal/m egységben értendők, a kereten feltüntetett számok EOV koordináták

9 A gradiensek linearitás-vizsgálata

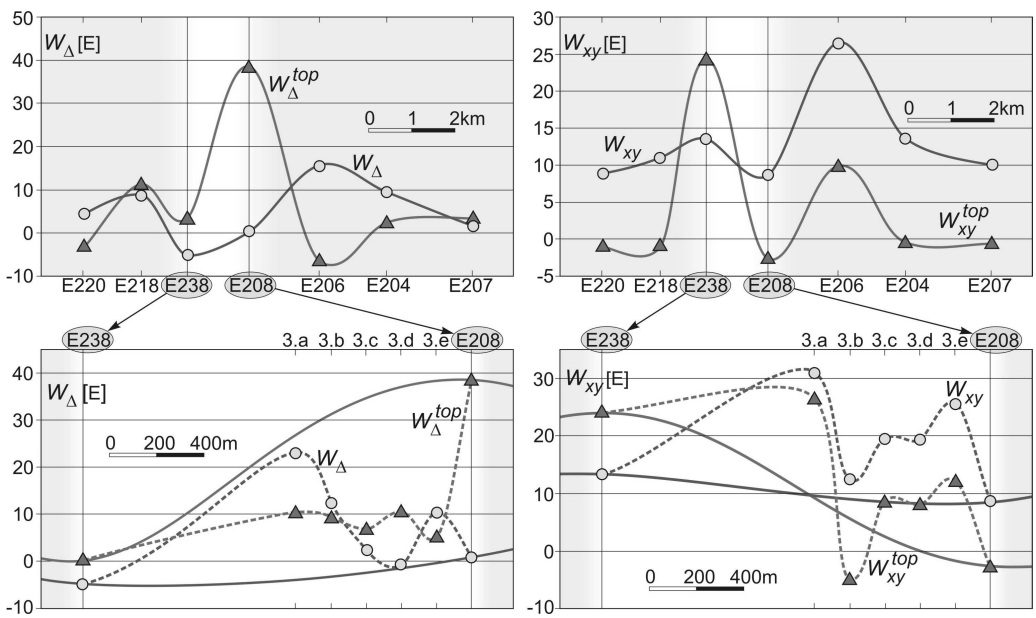
Az eddigi vizsgálataink során azt tapasztaltuk, hogy a vertikális gradiensek interpolációja rendkívüli módon érzékeny arra, hogy az Eötvös-ingával mérhető mennyiségek szomszédos pontok közötti megváltozása mennyire lineáris. A gradiensek két pont közötti lineáris változása más interpolációs számítások során, pl. a függővonal-elhajlás interpoláció esetében is fontos tényező.

A linearitás-vizsgálatokat részben a Csepel-sziget déli részén, a Makád környéki tesztterületen, részben a budapesti Mátyás-barlangban az ELGI gravitációs mikrobázisának pontjain végeztük.

A Csepel-sziget teljes részén 1950-ben végeztek torziós inga méréseket, amelyek közül Makád közelében 7 olyan pontot választottunk ki, melyek többé-kevésbé egyenes szelvény mentén helyezkednek el. Ezekben a pontokban rendelkezésre álltak mind az Eötvös-ingával mért W_{zx}, W_{zy} horizontális és W_{Δ}, W_{xy} görbületi gradiensek, mind ezek topografikus redukcióval ellátott értékei. A 12. ábra felső részén a szelvény menti pontokban körökkel jelölve láthatjuk a görbületi gradiensek Eötvös ingával 1950-ben mért változását, a háromszögekkel jelölt értékek pedig a mérések topografikus redukcióval javított értékei. A mérési pontok egymástól mért távolsága átlagosan mintegy 1,5 km. Annak tisztázására, hogy a gradiensek tartalmaznak-e magasabb frekvenciájú összetevőket is, az E238 és az E208 pont között 2007-2008 évben végzett új Eötvös-inga mérések eredményeit is megvizsgáltuk.

Az új, sűrített mérések alapján a gradiensek finomabb felbontású változása a 12. ábra alsó részén látható (folytonos vonallal az 1950-es méréseket, szaggatott vonallal pedig az újabb sűrített méréseket ábrázoltuk). Ez alapján megállapítható, hogy a gradiensek magasabb frekvenciájú összetevőket is tartalmaznak, így a korábbi pontsűrűség mellett nem várható a szomszédos mérési pontok között ezek lineáris megváltozása. Ráadásul a probléma azzal sem oldható meg, hogy a méréseket ellátjuk topografikus korrekcióval, mivel láthatóan a topografikus redukcióval ellátott gradiensek változása sem tekinthető lineárisnak a szomszédos pontok között. Ennek kézenfekvő magyarázata az, hogy a terület a Duna korábbi árterülete, ezért a felszín alatti sűrűségeloszlás rendkívül változatos.

A görbék viselkedése alapján elképzelhető, hogy még a 150 m pontsűrűségű ingamérések esetében sem biztos a szomszédos pontok között a gradiensek lineáris változása, bár a magasabb frekvenciájú tagok amplitúdója – különösen a topografikus javítással ellátott értékek esetében – már kisebb. A probléma tisztázása további méréseket és vizsgálatokat igényel.



12. ábra. A görbületi gradiensek változása a Makád környéki tesztterület pontjaiban

Vizsgálatokat végeztünk az ELGI Geodinamikai Laboratóriumában a Mátyás-barlangban is. Itt található az ország gravitációs főalappontaja és az itt létesített 14 pontból álló gravitációs mikrobázis hálózat pontjaiban 1991-ben már voltak Eötvös-inga mérések (Csapó 1991). Ezeket a méréseket 2008-ban megismételtük (Völgyesi és Ultmann 2012), a mérések alapján meghatározott horizontális és görbületi gradiensek változása a 13. ábrán látható.

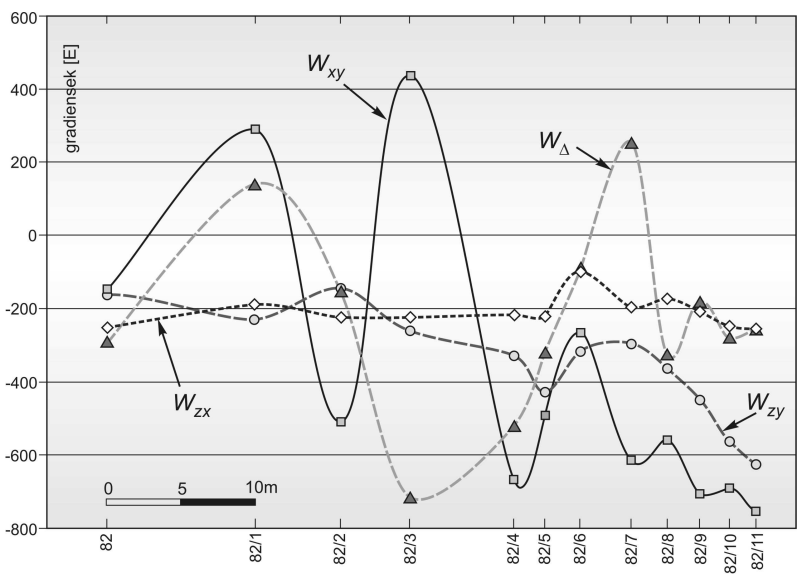
Feltűnő a gradiensek hatalmas változása, amely két szomszédos pont között néhány méteres távolságon belül akár 1000E értéket is elérhet. A 13. ábrán látható, hogy itt még néhány méteres távolságon belül sem lineáris a gradiensek változása, a gradiensek magasabb frekvenciájú összetevőket is tartalmaznak. Ennek ellenőrzésére a méréseinket a 82/1 jelű pont közvetlen környezetében tovább finomítottuk, a pont körül észak-déli illetve kelet-nyugati irányban a mérési pontokat 30 cm lépésközben sűrítettük (Völgyesi és Ultmann 2010). A mérések szerint a gradiensek megváltozása 30 cm távolságon belül már többé-kevésbé lineárisnak tekinthető (Völgyesi és Ultmann 2012).

Az Eötvös-ingával mért gradiensek és görbületi adatok linearitása és a különböző iterpolációs célokra történő felhasználása mindenképpen további vizsgálatokat igényel.

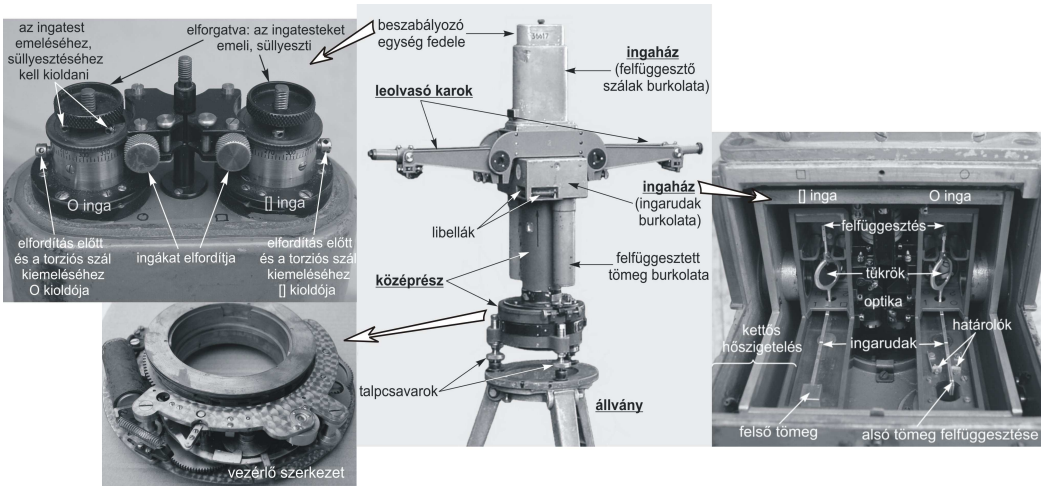
10 Műszerfejlesztés

A korábban gyártott Eötvös-ingák közül napjainkban két olyan típus áll rendelkezésre, amelyekkel jelenleg is megfelelő pontosságú terepi méréseket tudunk végezni. Az egyik az 1920-as évek végére kifejlesztett Eötvös-Rybár (Auterbal [Automatic Eötvös-Rybár Balance]) inga, a másik ennek az 50-es évekre továbbfejlesztett változata, az E54 típus. 1964-ben az ELGI egyik Auterbal-ingája nélkülözhetővé vált, ezért az ÉKME Felsőgeodézia Tanszékének ajándékozta oktatási célokra. Nem sokkal ezt követően az inga működésképtelen lett és a tanszék múzeumába került. Miután 2007-ben felmerült az igény újabb Eötvös-inga mérésekre és a működésképtelen inga javításával senkit nem tudtunk megbízni, magunk vállalkoztunk a feladat megoldására. Az ingát sikerült működőképessé tenni, sőt a mai korszerűbb technikai lehetőségeket kihasználva az egyes szerkezeti elemeinek továbbfejlesztésével kiválóan működő műszerhez jutottunk.

Az Auterbal-inga szerkezeti felépítése a 14. ábrán látható. Négy fő egysége: az ingaház, a középrész, az állványzat és a leolvasókar. A műszer felújításához semmiféle leírás, vagy kézikönyv nem állt a rendelkezésünkre, ezért az első szétszerelés és a javítás igen komoly feladat volt és hosszabb időt vett igénybe. Az inga középrészében található vezérlő szerkezetben egy törött alkatrész elkészítését és cseréjét követően elkezdődhetett a műszer alapos tesztelése.



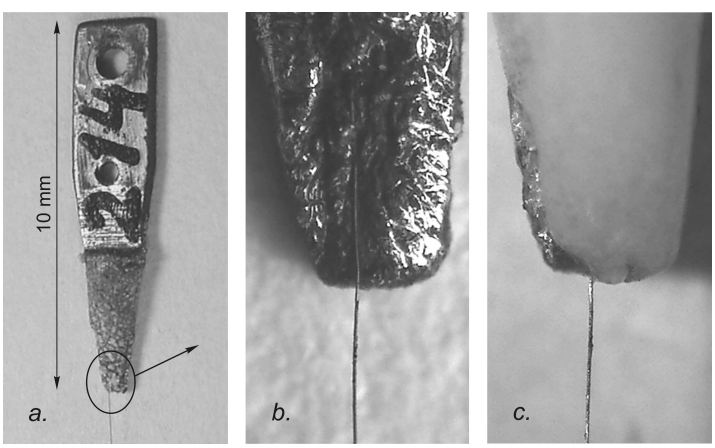
13. ábra. A gradiensek változása a Mátyás-barlang gravitációs mikrobázisának pontjaiban



14. ábra. Az Auterbal-inga felépítése

A kezdeti vizsgálatok során elsősorban a hőmérséklet-érzékenységére és a szálak driftjére voltunk kíváncsiak (Völgyesi et al. 2009a). A két ingarész közül a "[]" (négyszög-szál) szinte driftmentesen, tökéletesen viselkedett, ellenben a „O" (kör-inga) gyakorlatilag használhatatlannak tűnt, mivel teljesen rendszertelenül ugrásszerű változásokat (elfordulásokat) tapasztaltunk a leolvasások során. Hosszabb használat és különféle vizsgálatok után arra gyanakodtunk, hogy a szál felfüggesztésével (befogásával) lehet probléma. Ez azért okozott különös gondot, mert semmiféle tapasztalattal nem rendelkeztünk a torziós szálak kezelésével kapcsolatosan, márpedig a szálak kiemelése és visszaszerelése során a legkisebb rossz mozdulat is végzetes lehet a szálak szempontjából. A torziós szálak a hajszálnál vékonyabbak, szabad szemmel alig láthatóak, és mivel tartalék szálakkal nem rendelkezünk, pótolhatatlanok. A torziós szálak mindkét végét a 15. ábrán bal oldalán látható formában forrasztással rögzítették a befogó fülekhez.

Miután sikeresen kivettük a torziós szálat, és erős nagyítóval átvizsgáltuk a szál befogását, a felső befogó fül forrasztásán erős korróziót tapasztaltunk és a torziós szál körül egy mélynek tűnő üreg alakult ki a befogás csatlakozásánál. Még viszonylag erős nagyítás mellett sem lehetett az üregen belül látni a szál és a forrasztás fémes kapcsolatát. Mivel az erősen korrodált anyag újraforrasztásának túl nagy lett volna a kockázata, végül a ragasztás mellett döntöttünk.



15. ábra. A torziós szál befogásának javítása mikroszkópos felvételeken.
Az *a*. az eredeti befogás, *b*. a megtisztított, *c*. a megjavított állapot

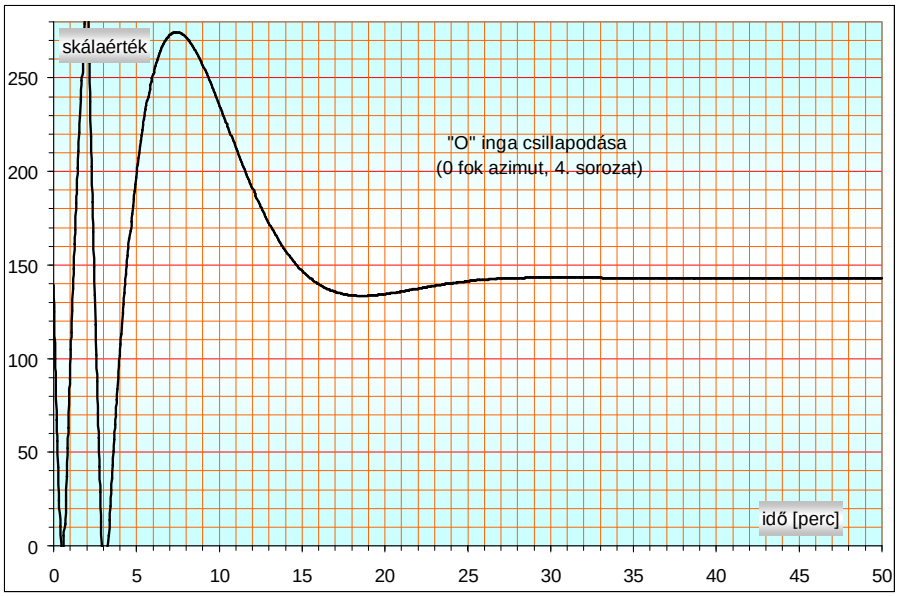
A fogászatban is használt, rendkívül erős, de ugyanakkor kellőképpen rugalmas ragasztót (Ketac glass-ionomer cementet) alkalmaztunk. A ragasztás rendkívül kényes műveletét mikroszkóp alatt hajszálak ragasztásával gyakoroltuk. A 15. ábra középső mikroszkópos képén jól látható, hogy a szálat hosszú részen nem rögzíti kellőképpen a forrasztás a befogó fülhöz. Az erősen korrodált rész megtisztítása után sikerült a szál megfelelő rögzítése, amelyet a 15. ábra jobb oldalán láthatunk.

Ezt követően további fontos fejlesztéseket hajtottunk végre. Az automatikus leolvasás megvalósítása céljából a 16. ábrán bemutatott formában CCD-érzékelős kamerákat szereltünk fel a leovasókarokra, a skálák megvilágítására pedig erős fényű LED-eket (fénykibocsátó diódákat) erősítettünk a leolvasó távcsövek alá. A kamerák vezérlését, a képek rögzítését *Laky S.* ötletei alapján számítógéppel oldottuk meg, a szükséges szoftvereket Linux operációs rendszer alá fejlesztettük (Völgyesi et al. 2009a). Mivel a kamerák alkalmazásával lehetőség nyílt hosszú időn keresztül akár másodpercenkénti 10-15 leolvasást végezni, ezzel új távlatok nyíltak eddig ismeretlen jelenségek megfigyelésére. Lehetővé vált például a lengések csillapodásának minden eddiginél pontosabb és részletesebb megfigyelése, és a hosszú idejű drift pontosabb tanulmányozása is elérhetővé vált.

Az Eötvös-inga mérések mindenkori legnagyobb problémája a hosszú csillapodási idő, azonban a mai modern technika alkalmazásával lehetőség kínálkozik az észlelési idő jelentős csökkentésére. Az inga csillapodásának tanulmányozása céljából valamennyi azimutban több 40-50 perces felvételt készítettünk másodpercenként négy leolvasással. A csillapodási görbe finomszerkezetének tanulmányozása céljából másodpercenként 12, azaz közel 0.08 másodpercenkénti leolvasással, az esetleges hosszabb periódusú mozgások regisztrálására pedig több 24 órás 10 másodpercenkénti leolvasással is rögzítettük az ingák mozgását. Az így előállított idősorokból rendelkezésünkre álltak az igen részletes csillapodási görbék, amelyek közül egy jellegzetes esetet mutatunk be a 17. ábrán.
A CCD-érzékelőkkel rögzített igen jó felbontású csillapodási görbék kezdeti szakaszából elvileg előre meghatározható az inga nyugalmi helyzete. A feladat megoldására több különböző lehetőséget vizsgáltunk – itt most a Navier-Stokes egyenletek végeselemes megoldásán alapuló áramlási modell alkalmazását vázoljuk fel.

Tóth Gy. vizsgálatai alapján áramlási modellek segítségével az ingakar mozgásának meglehetősen pontos modellezése lehetséges. Ezek a modellek a végeselemek módszerén alapulnak és képesek figyelembe venni a mozgó testek, az üreg és a csillapító közeg (levegő) geometriai és fizikai paramétereit. A numerikus áramlástani vizsgálatokhoz, a szilárd test (ingakar) és folyadék (levegő) mozgásának analitikus leírásához a *Tóth Gy.* által javasolt ún. büntetőfüggvény módszert alkalmaztuk (Völgyesi et al. 2010). A 18. ábrán látható felvett numerikus háló (végeselemek) háromszögeinek száma 15386, a csúcspontok száma 7829 volt.

16. ábra. CCD-érzékelős kamera a leolvasókaron



17. ábra. Jellegzetes csillapodási görbe

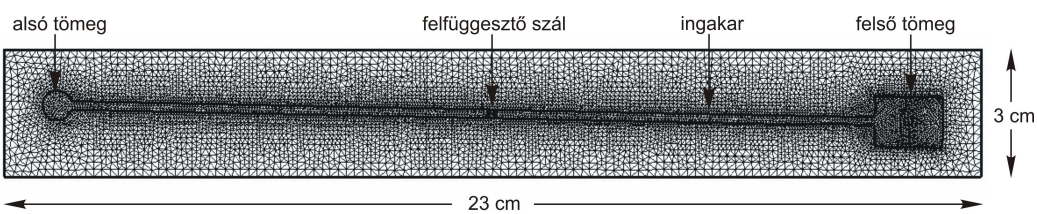
Amennyiben az ingaházban lengő ingakar mozgását viszkózusan csillapított torziós lengésként modellezzük, a csillapított rezgések elmélete szerint az inga esetében (alulcsillapított eset) a keletkező mozgás a következő 5 paraméteres függvénnyel írható le:

$$x = a_0 + a_1 e^{-a_2 t} \cos(a_3 t - a_4) \ , \tag{11}$$

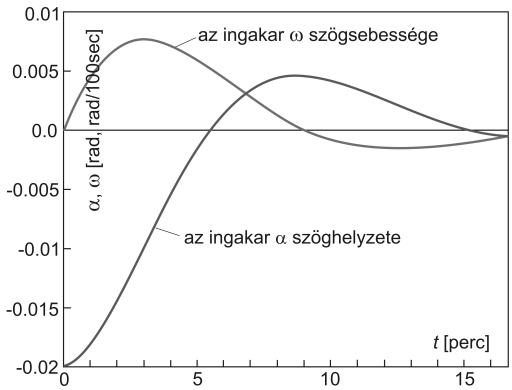
ahol x a leolvasás, t az idő, a_0, ..., a_4 pedig a mozgásra jellemző paraméterek (Völgyesi et al. 2010).

A 19. ábrán bemutatjuk egy olyan szimuláció eredményét, amelynek során sikeresen modelleztük az ingakar mozgását. A szimulált elfordulási idősorhoz elvégeztük a (11) modell illesztését (az a_0 paraméter most zérus értékű). A szimulációból meghatározható a tényleges lengésidő, a csillapításra korrigált lengésidő és az a_2 viszkózus csillapítási paraméter is. A modellezésből kapott korrigált lengésidő 1027 s volt (az elvi 1198 s helyett), az a_2 csillapítási paraméter értéke pedig 0.264 lett az elvi 0.4 helyett. A numerikus háló felbontásának, a viszkozitásnak és a büntető paraméter változtatásának függvényében a számítás bizonyos esetekben instabillá válik, ezért másfajta számítási eljárásokkal is tervezzük modellezni az ingakar mozgását.

A csillapodási görbe kezdeti szakaszából elvileg a differenciális evolúciós algoritmus alkalmazásával is előre meghatározható az inga nyugalmi helyzete. Erre vonatkozóan *Laky S.* végzett sikeres vizsgálatokat az ELGI E54 típusú ingájával.



18. ábra. Eötvös-inga kétdimenziós numerikus áramlástani vizsgálatokhoz kialakított geometriai modellje és az ingakamra főbb méretei (felülnézetben)



19. ábra. E-54-es inga numerikus áramlástani modellezéssel számított α elfordulási szöge és ω szögsebessége a t idő függvényében (t mértékegysége 1 hs = 100 s)

11 Összefoglalás

Az 1960-as évek végén és az 1970-es évek elején *Biró Péter* professzor úr kezdeményezésére az Eötvös-inga geodéziai alkalmazásával kapcsolatosan indított vizsgálatok mára meghatározó erejű, széles fronton folyó kutatásokká bővültek a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszékén. Kezdetben csak a görbületi adatok alapján végzett függővonal-elhajlás interpoláció volt a kutatások célja, de ez hamarosan kiterjedt a csillagászati szintezés bevonásával a geoid finomszerkezetének meghatározására. Közben egyre nagyobb igény mutatkozott minél több Eötvös-inga mérési adatra, ezért az ELGI-vel kötött együttműködési megállapodás keretében elkezdődött a múlt században végzett mintegy 60000 magyarországi Eötvös-inga mérési adat digitális adatbázisba rendezése. Ma már a korábbi mérések több mint kétharmada digitális formában közvetlenül rendelkezésre áll a további feldolgozások céljára.

Ezt követően indultak kutatások az ingával mérhető horizontális gradiensek alkalmazására vonatkozóan a nehézségi értékek és a gravitációs anomáliák meghatározására. A rendelkezésünkre álló egyre modernebb számítástechnikai eszközök és néhány nyertes pályázat egyre bővülő lehetőségeket teremtettek további kutatások indítására. Így többek között elkezdődtek a vertikális gradiensek meghatározására vonatkozó vizsgálatok, majd a nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós előállítása következett. Először a 2D potenciálfüggvényt állítottuk elő a görbületi adatok alapján, majd az eredményeken felbuzdulva a 3D potenciálfüggvény előállítása következett valamennyi fajta ingamérés, g mérés, és függővonal-elhajlás adatok együttes felhasználásával. Az utóbbi kutatások során egyre nagyobb igény mutatkozott további Eötvös-inga mérések végzésére is, ezért megjavítva és felújítva egy korábbi működésképtelen Auterbal-ingánkat a különböző laboratóriumi vizsgálatokat követően terepi méréseket is végeztünk.

A 70-es évek elején a korábbi Felsőgeodézia Tanszéken még csak e tanulmány szerzője foglalkozott az Eötvös-inga mérések geodéziai alkalmazásával. Ma már két-három vezető oktató összefogásával egész tanszéki csapat foglalkozik az egyre bővülő kutatásokkal, az ELGI és a Miskolci Egyetem kutatóinak bevonásával. Az indulás óta száznál jóval több tudományos publikáció született ezekben a témákban, több PhD és akadémiai fokozattal. Szerénytelenség nélkül kijelenthetjük, hogy Magyarországon, egyedüli helyen a világon, ismét kialakult egy olyan tudásbázis, amely kellő elhivatottsággal rendelkezik Eötvös Loránd munkásságának folytatásához, képes az egykori műszerek javítására, továbbfejlesztésére, és rutinszerű terepi ingamérések elvégzésére.

A jövőbeli tervek rendkívül gazdagok, az egyik legfontosabb cél a geoid magyarországi felületdarabjának minél pontosabb meghatározása az Eötvös-inga adatok bevonásával.

Köszönetnyilvánítás. Jelenlegi kutatásaink a 76231 sz. OTKA támogatásával folynak.

Hivatkozások

Csapó G (1991): Az ELGI Mátyás barlang mikrobázisán LCR graviméterrel végzett Δg, VG és E54 Eötvös-ingával végzett gradiensmérések eredményeinek anyaga. ELGI Adattár.

Csapó G, **Égető Cs**, **Kloska K**, **Laky S**, **Tóth Gy**, **Völgyesi L** (2009a): Kísérleti mérések Eötvös-ingával és graviméterekkel – az Eötvös-inga mérések eredményei geodéziai célú hasznosításának vizsgálata céljából. Geomatikai Közlemények, 12, 91-100.

Csapó G, **Laky S**, **Égető Cs**, **Ultmann Z**, **Tóth Gy**, **Völgyesi L** (2009b): Test measurements by Eötvös-torsion balance and gravimeters. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 53(2), 75-80.

Dobróka M, Völgyesi L (2008): Inversion reconstruction of gravity potential based on gravity gradients. Mathematical Geosciences, 40(3), 299-311. DOI:10.1007/s11004-007-9139-z.

Dobróka M, Völgyesi L (2009): A nehézségi erőtér 3D potenciálfüggvényének inverziós előállítása. Geomatikai Közlemények, 12, 101-107.

Dobróka M, Völgyesi L (2010): Sorfejtéses inverzió IV. A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós előállítása. Magyar Geofizika, 51(3) 143-149.

Haalck H (1950): Die vollständige Berechnung örtlicher gravimetrischer Störfelder aus Drehwaagemessungen. Veröffentlichungen des Geodätischen Institutes Potsdam, Nr. 4, Potsdam.

Renner J (1957): Újabb vizsgálatok a függővonalelhajlások körében. MTA Műszaki Tudományok Oszt. Közl., 21(1-4), 99-113.

Tóth Gy, Völgyesi L, Csapó G (2005): Determination of vertical gradients from torsion balance measurements. IAG Symposia Vol 129, Gravity, Geoid and Space Missions, C. Jekeli, L. Bastos, J. Fernandes (Eds.), Springer, 292-297.

Tóth Gy (2007): Vertikális gravitációs gradiens meghatározás Eötvös-inga mérések hálózatában. Geomatikai Közlemények, 10, 29-36.

Ultmann Z (2012): Determination of the vertical gradients based on Eötvös torsion balance measurements. Pollack Periodica, 7(2), Megjelenés alatt.

Völgyesi L (1993): Interpolation of Deflection of the Vertical Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 37(2), 137-166.

Völgyesi L (1995): Test Interpolation of Deflection of the Vertical in Hungary Based on Gravity Gradients. Periodica Polytechnica Civil Engineering, 39(1), 37-75.

Völgyesi L (1998): Geoid Computations Based on Torsion Balance Measurements. Reports of the Finnish Geodetic Institute, 98(4), 145-151.

Völgyesi L (2001): Geodetic applications of torsion balance measurements in Hungary. Reports on Geodesy, Warsaw University of Technology, 57(2), 203-212.

Völgyesi L. (2005) Deflections of the vertical and geoid heights from gravity gradients. Acta Geod. Geoph. Hung., 40(2), 147-159.

Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G (2005a): Determination of gravity anomalies from torsion balance measurements. In: Jekeli C, Bastos L, Fernandes J (szerk.) Geoid and Space Missions GGSM 2004. 368 p. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 2005. 292-297.

Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G, Szabó Z (2005b): Az Eötvös-ingamérések geodéziai célú hasznosításának helyzete Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 57(5), 3-12.

Völgyesi L, Ádám J, Csapó G, Nagy D, Szabó Z, Tóth Gy (2006): A Nemzetközi Földmérés 1906-os budapesti konferenciájának hatása a geodéziai és a geofizikai fejlődésére. Magyar Geofizika, 47(3), 101-112.

Völgyesi L, Tóth Gy, Csapó G (2007): Determination of gravity field from horizontal gradients of gravity. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica, 42(1). 107-117.

Völgyesi L, Égető Cs, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z (2009a): Eötvös-inga felújítása és tesztmérések a budapesti Mátyás-hegyi-barlangban. Geomatikai Közlemények, 12, 71-82.

Völgyesi L, Csapó G, Laky S, Tóth Gy, Ultmann Z (2009b): Közel fél évszázados szünet után ismét Eötvös-inga mérések Magyarországon. Geodézia és Kartográfia, 61(11), 71-82.

Völgyesi L, Laky S, Tóth Gy (2010): Az Eötvös-inga mérési idejének csökkentési lehetősége. Geomatikai Közlemények, 13(2), 129-140.

Völgyesi L, Ultmann Z (2010): Nehézségi gradiensek linearitás-vizsgálata a Mátyás-barlangban. Geomatikai Közlemények, 13(2), 23-128.

Völgyesi L, Ultmann Z. (2012): Reconstruction of a torsion balance, and the results of the test measurements. In: S. Kenyon, M.C.Pacino, U Marti (Eds.) Geodesy for Planet Earth, Buenos Aires, Argentína. 2009. International Association of Geodesy Symposia, Vol. 136, Springer-Verlag; Berlin, Heidelberg, ISBN 978-3-642-20337-4. 281-290.

Völgyesi L, Dobróka M, Ultmann Z (2012): Determination of vertical gradients of gravity by series expansion based on inversion. Acta Geodaetica et Geophysica Hungarica, 47(2), 233-244. DOI: 10.1556/AGeod.47.2012.2.11.

A SZÁMÍTÓGÉPES ALGEBRAI RENDSZEREK ALKALMAZÁSI LEHETŐSÉGEI A GEODÉZIÁBAN

Závoti József *

Application possibilities of computer algebraic systems in geodesy – *In the last decade the application of computer algebraic systems for special basic tasks has become one of the most rapidly developing fields of geodetic research. The conventional method for solving problems involves approximation and iteration; and because of the lack of proper innovation, this is the general approach even today. Computer algebraic systems have led to the construction of models which give exact, analytic solutions. In many cases these models cannot be applied, because increasing the number of the data leads to a combinatorial explosion and a general solution cannot be computed even with today's modern computers. This work describes some basic geodetic tasks for which new, usable solutions exist already.*

Keywords: 3D, 7-parameter datum transformation, exterior orientation in photogrammetry, total least squares method, nonlinear regression

Az elmúlt évtizedben a geodéziai kutatások egyik legdinamikusabban fejlődő területe a számítógépes algebrai rendszerek alkalmazása speciális alapfeladatok megoldására. A múltban, de kellő innováció hiányában a jelenben is, a feladatok megoldására közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek is. Ezeknek a modelleknek gyakorlati elterjedését az akadályozza, hogy a számításokhoz felhasznált adatok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladatok a számítástechnika mai állása mellett sem oldhatók meg általános esetben. Ezen tanulmányban bemutatunk néhány olyan geodéziai alapproblémát, amelyekre részben már sikerült új, használható megoldásokat megalkotni.

Kulcsszavak: 3D, 7 paraméteres dátum transzformáció, fotogrammetriai külső tájékozás, totális legkisebb négyzetek módszere, nemlineáris regresszió

1 Bevezetés

A számítástechnika fejlődése hozta magával, hogy a matematikai geodézia érdeklődésének középpontjába a számítógépes algebrai rendszerek (CAS) kutatása, alkalmazása került. A Gröbner bázis és a multipolinomiális rezultáns (Dixon, Sylvester) algebrai technika hatékony eszköznek bizonyult a nemlineáris geodéziai problémák explicit megoldására.

A témában Awange és Grafarend (2002, 2003a, 2003b, 2003c) tanulmányai tekinthetők kiindulási alapnak. Magyar nyelven Závoti (2005) tanulmánya módosításokat javasolt a matematikai modellhez. A Závoti és Jancsó (2006) tanulmány a módosításokat pontosította, a Battha és Závoti (2009a, 2009b) cikkek pedig kiterjesztették az alkalmazási területeket. A CAS alkalmazásának újabb területén, a fotogrammetriai külső tájékozás esetére a Závoti és Fritsch (2011) tanulmány tartalmaz új eredményeket. Az abszolút tájékozási probléma kvaterniókkal történő megoldását Horn (1987) tanulmánya tárgyalta.

A szakirodalomban eddig publikált eredmények sok esetben nem tekinthetők végleges megoldásnak, mert például a Gauss-Jacobi-féle kombinatorikus megoldás esetében is az alkalmazás során fellép az ú.n. kombinatorikus robbanás problémája.

A kutatás jelenlegi fázisában a kitűzött cél: olyan matematikai megoldásokat adni, amelyek kiküszöbölik a kombinatorikus robbanás problémáját, és a kidolgozandó eljárások a gyakorlatban elfogadhatóan rövid időben alkalmazhatók legyenek.

**MTA CSFK GGI*
9400 Sopron, Csatkai u. 6-8.
E-mail: zavoti@ggki.hu

2.1 A 3D, 7 paraméteres transzformáció megoldásának egy új levezetése

A probléma sokoldalú megvilágítását Grafarend és Krumm (1995), Grafarend és Kampman (1996) továbbá Grafarend és Shan (1997) tanulmányokban megtalálhatjuk. Závoti (1999) cikke L1 normában oldotta meg a feladatot. A koordináta-rendszerek közötti áttérés során kiemelkedő jelentőségű a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció alkalmazása, ez a legelterjedtebb módszer a GPS rendszerek közötti átszámítások elvégzésében. A múltban, de kellő innováció hiányában a jelenben is, közelítő, iterációs megoldásokat használnak. A számítógéppel támogatott algebrai rendszerek elterjedésével megjelentek egzakt, analitikus megoldást adó modellek. Ezeknek a modelleknek gyakorlati használatát az akadályozza, hogy az átszámításhoz használt közös pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, azaz a feladat a számítástechnika mai állása mellett sem oldható meg valós időben.

Közismert, hogy súlyponti koordináták bevezetésével mód nyílik az eltolási paraméterek eliminálására. Ezen a módon teljesen új levezetés adható a 3D, 7-paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldására. A méretarány tényező meghatározása után a feladat lineárisra redukálható, és megadható a lineáris probléma kiegyenlítő számítási modellje. Az eddig ismert 3 közös pontra megadott megoldással szemben tetszőlegesen sok egyenletből álló egyenletrendszer is megoldható, a normál mátrix speciális tulajdonságát kihasználva a forgatási paraméterek is meghatározhatók.

A térbeli túlhatározott 3D, 7-paraméteres (Helmert) hasonlósági transzformáció a következő modellel adható meg: a transzformáció a cél *(X, Y, Z)*- és a tárgy *(x, y, z)* koordináta-rendszer közötti Euklidészi térben adott pontok között:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,...,n \tag{1}$$

ahol:

$[X_i, Y_i, Z_i]^T$ célpontok koordináta értékei,

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$ az ismeretlen eltolási értékek,

λ az ismeretlen méretarány-tényező,

$\boldsymbol{R}(\omega, \varphi, \kappa)$ a forgási mátrix,

$[x_i, y_i, z_i]^T$ tárgypontok koordináta értékei.

Az $\boldsymbol{R}$ forgási mátrix a három tengely körüli elforgatással, három független paraméterrel ω, φ és κ írható le:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1(\omega)\boldsymbol{R}_2(\varphi)\boldsymbol{R}_3(\kappa). \tag{2}$$

Az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix levezetését Cardan-szögekkel a fizikai geodéziában Awange (2002) az alábbi módon adta meg. A fotogrammetriában Kraus (1996) által adott levezetés más eredményre vezetett, mivel eltérő sorrendben történt az egyes koordináta-tengelyek körüli forgatás:

$$\boldsymbol{R_1}(\omega)\boldsymbol{R_2}(\varphi)\boldsymbol{R_3}(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\kappa & \cos\varphi \cdot \sin\kappa & -\sin\varphi \\ \sin\omega \cdot \sin\varphi \cdot \cos\kappa - \cos\omega \cdot \sin\kappa & \sin\omega \cdot \sin\varphi \cdot \sin\kappa + \cos\omega \cdot \cos\kappa & \sin\omega \cdot \cos\varphi \\ \cos\omega \cdot \sin\varphi \cdot \cos\kappa + \sin\omega \cdot \sin\kappa & \cos\omega \cdot \sin\varphi \cdot \sin\kappa - \sin\omega \cdot \cos\kappa & \cos\omega \cdot \cos\varphi \end{bmatrix}. \tag{3}$$

A forgási szögek a forgási mátrix elemeiből a következő összefüggéssel határozhatóak meg:

$$\omega = -\arctan\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right),\ \varphi = \arcsin(r_{13}),\ \kappa = -\arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \tag{4}$$

ahol az r_{ij} érték az $\boldsymbol{R}$ forgatási mátrix *i*-edik sorának és *j*-edik oszlopának eleme.

Awange és Grafarend (2002) tanulmányában megmutatta, hogy 3 pontra az (1) összefüggés részletesen a következő alakban írható fel:

$$\begin{aligned}
f_1 &:= \lambda X_1 - \lambda c Y_1 + \lambda b Z_1 + X_0 + c Y_0 - b Z_0 - x_1 - c y_1 + b z_1 = 0 \\
f_2 &:= \lambda c X_1 + \lambda Y_1 - \lambda a Z_1 - c X_0 + Y_0 + a Z_0 + c x_1 - y_1 - a z_1 = 0 \\
f_3 &:= -\lambda b X_1 + \lambda a Y_1 + \lambda Z_1 + b X_0 - a Y_0 + Z_0 - b x_1 + a y_1 - z_1 = 0 \\
f_4 &:= -\lambda X_2 - \lambda c Y_2 + \lambda b Z_2 + X_0 + c Y_0 - b Z_0 - x_2 - c y_2 + b z_2 = 0 \\
f_5 &:= \lambda c X_2 + \lambda Y_2 - \lambda a Z_2 - c X_0 + Y_0 + a Z_0 + c x_2 - y_2 - a z_2 = 0 \\
f_6 &:= -\lambda b X_2 + \lambda a Y_2 + \lambda Z_2 + b X_0 - a Y_0 + Z_0 - b x_2 + a y_2 - z_2 = 0 \\
f_7 &:= \lambda X_3 - \lambda c Y_3 + \lambda b Z_3 + X_0 + c Y_0 - b Z_0 - x_3 - c y_3 + b z_3 = 0 \\
f_8 &:= \lambda c X_3 + \lambda Y_3 - \lambda a Z_3 - c X_0 + Y_0 + a Z_0 + c x_3 - y_3 - a z_3 = 0 \\
f_9 &:= -\lambda b X_3 + \lambda a Y_3 + \lambda Z_3 + b X_0 - a Y_0 + Z_0 - b x_3 + a y_3 - z_3 = 0
\end{aligned}, \tag{5}$$

ahol *a*, *b* és *c* független paraméterek, a forgatási szögek függvényei, amelyek a forgatási mátrix ferdén szimmetrikus mátrixos felbontásából származnak.

A fenti 9 egyenletből álló egyenletrendszer a 7 ismeretlen paraméterben nemlineáris és túlhatározott. Ha a megoldás előállítására az általuk ajánlott Gröbner-bázis módszerét használjuk, akkor a bázis minden egyes kombinációjával számolnunk kell. Ha csak 3 közös pont van, nincs komoly akadálya annak, hogy kiszámítsuk a 36 különböző Gröbner-bázist, de ha 4 vagy több pont van, a feladat megoldása majdnem lehetetlenné válik és így nem praktikus a Gröbner-bázis módszerének használata. Például, ha 4 közös pont van, akkor a kombinációk száma 792, és ez azt jelenti, hogy nekünk 792 Gröbner bázist kell meghatározni, és azokkal számolni. Ha 5 adott pont van, akkor a kombinációk száma 6435, a pontok számának növekedésével kombinatorikus robbanás lép fel, a feladat megoldhatatlanná válik.

Az egyenletrendszer megoldásához valamilyen külső programot kell használnunk, mint pédául a MATLAB vagy a Mathematica. Awange és Grafarend (2002) tanulmányukban azt is megmutatták, hogy a skálaparaméter meghatározása az alábbi negyedfokú egyenlet megoldására vezethető vissza:

$$p_4\lambda^4 + p_3\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0 = 0\ , \tag{6}$$

ahol a polinom együtthatói a két koordináta-rendszerben adott pontok koordinátái által meghatározott bonyolult függvényei a Gröbner bázisban. Megjegyzendő, hogy a negyedfokú egyenlet megoldása után még külön probléma a gyökök szétválasztása, a megfelelő skálaparaméter kiválasztása. A skálaparaméter ismeretében az egyenletrendszerek lineárisak lesznek, amelyeknek a megoldása már nem jelent problémát.

A feladat megoldása más úton is megadható.

Az (1) egyenleteket *n* pontra felírva és áttérve a súlyponti koordinátákra, az alábbi egyenletek adódnak:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\lambda x_{1s} & -\lambda c y_{1s} & +\lambda b z_{1s} & -X_{1s} & -cY_{1s} & +bZ_{1s} & =0 \\
\lambda c x_{1s} & +\lambda y_{1s} & -\lambda a z_{1s} & +cX_{1s} & -Y_{1s} & -aZ_{1s} & =0 \\
-\lambda b x_{1s} & +\lambda a y_{1s} & +\lambda z_{1s} & -bX_{1s} & +aY_{1s} & -Z_{1s} & =0 \\
\lambda x_{2s} & -\lambda c y_{2s} & +\lambda b z_{2s} & -X_{2s} & -cY_{2s} & +bZ_{2s} & =0 \\
\lambda c x_{2s} & +\lambda y_{2s} & -\lambda a z_{2s} & +cX_{2s} & -Y_{2s} & -aZ_{2s} & =0 \\
-\lambda b x_{2s} & +\lambda a y_{2s} & +\lambda z_{2s} & -bX_{2s} & +aY_{2s} & -Z_{2s} & =0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
\lambda x_{ns} & -\lambda c y_{ns} & +\lambda b z_{ns} & -X_{ns} & -cY_{ns} & +bZ_{ns} & =0 \\
\lambda c x_{ns} & +\lambda y_{ns} & -\lambda a z_{ns} & +cX_{ns} & -Y_{ns} & -aZ_{ns} & =0 \\
-\lambda b x_{ns} & +\lambda a y_{1s} & +\lambda z_{ns} & -bX_{ns} & +aY_{ns} & -Z_{ns} & =0
\end{array}
, \tag{7}
$$

ahol:

$$X_{is} = X_i - X_s\,,\ Y_{12} = Y_1 - Y_2\,,\ Z_{is} = Z_i - Z_s \qquad i = 1,2,3,...,n\ ,$$

$$x_{is} = x_i - x_s\,,\ y_{is} = y_i - y_s\,,\ z_{is} = z_i - z_s \qquad i = 1,2,3,...,n\ ,$$

és az s index a súlyponti koordinátákat jelöli.

A fenti egyenletrendszerből néhány elemi átalakítással és egyszerűsítéssel az eltolási paraméterek kiejthetők és az alábbi, egyismeretlenes, túlhatározott egyenletrendszer áll elő:

$$\lambda^2\left(x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2\right) = X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2\,, \qquad (i = 1,2,3,...,n)\ . \tag{8}$$

Az egyenletrendszer a következő alakban is felírható:

$$\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} - \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right)\left(\lambda\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2} + \sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}\right) = 0\,, \quad (i = 1,2,3,...,n). \tag{9}$$

Ezen túlhatározott egyenletrendszer megoldása a számunkra fizikai jelentéssel bíró pozitív gyökből az alábbi, az Albertz-Kreiling (1975) kézikönyvben megadott, a tapasztalatból is ismert összefüggéssel állítható elő:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{X_{is}^2 + Y_{is}^2 + Z_{is}^2}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_{is}^2 + y_{is}^2 + z_{is}^2}}\ . \tag{10}$$

Tehát esetünkben a skálaparaméter egyértelműen meghatározható – a negyedfokú polinom gyökeinek szétválasztási eljárásával ellentétben.

2.2 A lineáris paraméterek meghatározása

Miután ismerjük a λ paramétert, így a közvetítő-egyenletek felhasználásával következő normál mátrix vezethető le:

$$
\begin{bmatrix}
\sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda y_{is} + Y_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda y_{is} + Y_{is}) & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda x_{is} + X_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) \\
 & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda z_{is} + Z_{is})^2\right] & -\sum_{i=1}^{n}(\lambda y_{is} + Y_{is})(\lambda z_{is} + Z_{is}) \\
 & & \sum_{i=1}^{n}\left[(\lambda x_{is} + X_{is})^2 + (\lambda y_{is} + Y_{is})^2\right]
\end{bmatrix}, \tag{11}
$$

ahol a szimmetrikus mátrix azonos elemeit nem jelöltük.

Hasonlóan egyszerű meggondolással kapjuk a normálvektort:

$$2\lambda \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n}(y_{is}Z_{is} - z_{is}Y_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(z_{is}X_{is} - x_{is}Z_{is}) \\ \sum_{i=1}^{n}(x_{is}Y_{is} - y_{is}X_{is}) \end{bmatrix} \tag{12}$$

A normál-egyenletrendszerből az *a*, *b* és *c* paraméterek invertálással meghatározhatók. A még ismeretlen X_0, Y_0 és Z_0 eltolási paramétereket az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{bmatrix}, \tag{13}$$

ahol a súlypontok a két koordináta-rendszerben adottak.

3 Fotogrammetriai külső tájékozás

A fotogrammetria egyik alapfeladata a külső tájékozási paraméterek megoldása. A külső tájékozás paramétereit a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló matematikai összefüggésből lehet meghatározni. A feladat megoldása a régi módszerekkel nagyon bonyolult és nehézkes. Jancsó (1994) tanulmánya foglalkozott először a feladattal, a Jancsó (2004) a fotogrammetriai hátrametszésre is kiterjesztette az eljárást. A gyakorlati megvalósításra nagy fotogrammetriai cégek (Autodesk, 4e, Australian Center for Visual Technology – AVCT…) hatalmas programcsomagokat (ImageModeler, 4e Software, VideoTrace…) dolgoztak ki. Závoti és Fritsch (2011) tanulmánya egy speciális esetben (három adott pontra) megadta a feladat egy új, iteráció és közelítő értékek nélküli megoldását (a gyakorlatban az AVCT programja tesztelte), de a megoldás széleskörű elterjedéséhez még számos problémát kell kiküszöbölni.

A kidolgozott eljárás és a hagyományos megoldási módszer főként a matematikai összefüggések levezetésében különbözik egymástól. A speciális esetre kidolgozott eljárás matematikailag korrekt, mégis csak első lépésnek tekintendő a módszer gyakorlati elterjedése szempontjából.

Az újonnan kidolgozott modell és a hagyományos módszer közötti eltérés a méretarány-tényező kezelésében van: míg a régi módszer indirekt kezeli a méretarányokat, az új módszer minden pont esetén explicite meghatároz egyedi méretarány-tényezőket.

A külső tájékozási feladat megoldására kidolgozandó új, általános, direkt matematikai levezetés alapötlete összhangban hozható, és hasonlóságot mutat a 3D, 7 paraméteres Helmert-féle transzformáció megoldásával, de annál lényegesen bonyolultabb.

Nehézség abból származik, hogy a probléma nemlineáris, ebből fakadóan több megoldás is adódhat. Az összes megoldásból a paraméterek fizikai jelentése miatt a komplex gyököket és a negatív megoldásokat ki lehet zárni. A módszer alkalmazhatósági vizsgálatának jelen fázisában csak az mutatható meg, hogy a hagyományos eljárás megoldása reprodukálható az új eljárással. Minden gyakorlati esetben a helyes megoldás kiválasztása további meggondolásokat igényel.

3.1 A fotogrammetriai külső tájékozás alapösszefüggései

A fotogrammetriai külső tájékozás térbeli képkoordináta-rendszerének a tárgykoordináta-rendszerbe történő transzformációja hat paraméterrel (a projekciós központ 3 koordinátája és a 3 tengely körüli elforgatás szöge) adható meg.

Egy képpontnak a perspektív leképzése a tárgykoordináta-rendszerbe Luhmann (2000) alapján az alábbi egyenlettel írható le:

$$\begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_p \boldsymbol{R} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ -z \end{bmatrix}, \tag{14}$$

ahol

$[X_p, Y_p, Z_p]^T$ tárgypont koordinátái,

$[X_0, Y_0, Z_0]^T$ vetítési központ koordinátái,

λ_p minden pontra egyedi, ismeretlen méretarány,

$\boldsymbol{R}(\varphi, \omega, \kappa)$ forgatási mátrix viszi át a képkoordináta-rendszert a tárgykoordináta-rendszerbe,

$[x_p, y_p, -z]^T$ képkoordináták és kameraállandó (z),

$[x_p - x_0, y_p - y_0, -z]^T$ redukált képpont-koordináták, ahol x_0, y_0 a képfőpont koordinátái.

A földi fotogrammetriában Luhmann (2000) a forgatási mátixot explicite megadja, és a forgatási mátrix elemeiből az elforgatási szögek is meghatározhatók:

$$\boldsymbol{R_1}(\omega)\boldsymbol{R_2}(\varphi)\boldsymbol{R_3}(\kappa) = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cdot\cos\kappa - \sin\varphi\cdot\sin\omega\cdot\sin\kappa & -\sin\varphi\cdot\cos\omega & \cos\varphi\cdot\sin\kappa + \sin\varphi\cdot\sin\omega\cdot\cos\kappa \\ \sin\varphi\cdot\cos\kappa + \cos\varphi\cdot\sin\omega\cdot\sin\kappa & \cos\varphi\cdot\cos\omega & \sin\varphi\cdot\sin\kappa - \cos\varphi\cdot\sin\omega\cdot\cos\kappa \\ -\cos\omega\cdot\sin\kappa & \sin\omega & \cos\omega\cdot\cos\kappa \end{bmatrix}, \tag{15}$$

amiből

$$\omega = \arcsin(r_{32}), \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{r_{12}}{r_{22}}\right), \quad \kappa = -\arctan\left(\frac{r_{31}}{r_{33}}\right). \tag{16}$$

A transzformáció inverze a $(dx, dy)^T$ ú. n. elrajzolási paraméterek ugyancsak Luhmann (2000) segítségével így írható le:

$$\begin{bmatrix} x_p - x_0 - dx \\ y_p - y_0 - dy \\ -z \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_p} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_p - X_0 \\ Y_p - Y_0 \\ Z_p - Z_0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Az összehasonlíthatóság kedvéért megadjuk a hagyományos eljárás összefüggéseit. A kameraállandót tartalmazó egyenletéből az ismeretlen méretarány reciprok értéke kifejezhető és a másik két koordináta-egyenletbe helyettesítve adódnak az ú.n. kollinearitási egyenletek:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_p} &= \frac{-z}{r_{13}(X_p - X_0) + r_{23}(Y_p - Y_0) + r_{33}(Z_p - Z_0)} \\ x_p &= x_0 - z\frac{r_{11}(X_p - X_0) + r_{21}(Y_p - Y_0) + r_{31}(Z_p - Z_0)}{r_{13}(X_p - X_0) + r_{23}(Y_p - Y_0) + r_{33}(Z_p - Z_0)} + dx \\ y_p &= y_0 - z\frac{r_{12}(X_p - X_0) + r_{22}(Y_p - Y_0) + r_{32}(Z_p - Z_0)}{r_{13}(X_p - X_0) + r_{23}(Y_p - Y_0) + r_{33}(Z_p - Z_0)} + dy \end{aligned}. \tag{18}$$

3.2 A méretaránytényezők meghatározása

Závoti és Fritsch (2011) tanulmányukban megmutatták, hogy 3 pontra az (1) összefüggés részletesen a következő alakban megadható:

$$\begin{array}{lllllllllll}
f_1 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_1 x_1 & -c\lambda_1 y_1 & -b\lambda_1 z & -X_1 & -cY_1 & +bZ_1 & =0 \\
f_2 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_1 x_1 & +\lambda_1 y_1 & +a\lambda_1 z & +cX_1 & -Y_1 & -aZ_1 & =0 \\
f_3 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_1 x_1 & +a\lambda_1 y_1 & -\lambda_1 z & -bX_1 & +aY_1 & -Z_1 & =0 \\
f_4 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_2 x_2 & -c\lambda_2 y_2 & -b\lambda_2 z & -X_2 & -cY_2 & +bZ_2 & =0 \\
f_5 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_2 x_2 & +\lambda_2 y_2 & +a\lambda_2 z & +cX_2 & -Y_2 & -aZ_2 & =0 \\
f_6 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_2 x_2 & +a\lambda_2 y_2 & -\lambda_2 z & -bX_2 & +aY_2 & -Z_2 & =0 \\
f_7 := & +X_0 & +cY_0 & -bZ_0 & +\lambda_3 x_3 & -c\lambda_3 y_3 & -b\lambda_3 z & -X_3 & -cY_3 & +bZ_3 & =0 \\
f_8 := & -cX_0 & +Y_0 & +aZ_0 & +c\lambda_3 x_3 & +\lambda_3 y_3 & +a\lambda_3 z & +cX_3 & -Y_3 & -aZ_3 & =0 \\
f_9 := & +bX_0 & -aY_0 & +Z_0 & -b\lambda_3 x_3 & +a\lambda_3 y_3 & -\lambda_3 z & -bX_3 & +aY_3 & -Z_3 & =0
\end{array}, \qquad (19)$$

ahol *a*, *b* és *c* független paraméterek, a forgatási szögek függvényei, amelyek a forgatási mátrix ferdén szimmetrikus mátrixos felbontásából adódnak.

Összesen kilenc ismeretlen (X_0, Y_0, Z_0 , *a*, *b*, *c*, λ_1 , λ_2 , λ_3) és kilenc egyenlet fordul elő, így a feladat megoldhatónak tűnik. A nehézség abban rejlik, hogy a feladat az ismeretleneket tekintve nem lineáris. A megoldás folyamán sorozatosan eliminájuk az ismeretleneket. A vetítési központ koordinátáit a megfelelő egyenletek kivonásával kiküszöbölhetjük:

$$\begin{array}{lllllllllll}
f_{14} := & f_1 - f_4 = & +\lambda_1 x_1 & -\lambda_2 x_2 & -c\lambda_1 y_1 & +c\lambda_2 y_2 & -b(\lambda_1-\lambda_2)z & -X_{12} & -cY_{12} & +bZ_{12} & =0 \\
f_{25} := & f_2 - f_5 = & +c\lambda_1 x_1 & -c\lambda_2 x_2 & +\lambda_1 y_1 & -\lambda_2 y_2 & +a(\lambda_1-\lambda_2)z & +cX_{12} & -Y_{12} & -aZ_{12} & =0 \\
f_{36} := & f_3 - f_6 = & -b\lambda_1 x_1 & +b\lambda_2 x_2 & +a\lambda_1 y_1 & -a\lambda_2 y_2 & -(\lambda_1-\lambda_2)z & -bX_{12} & +aY_{12} & -Z_{12} & =0 \\
f_{47} := & f_4 - f_7 = & +\lambda_2 x_2 & -\lambda_3 x_3 & -c\lambda_2 y_2 & +c\lambda_3 y_3 & -b(\lambda_2-\lambda_3)z & -X_{23} & -cY_{23} & +bZ_{23} & =0 \\
f_{58} := & f_5 - f_8 = & +c\lambda_2 x_2 & -c\lambda_3 x_3 & +\lambda_2 y_2 & -\lambda_3 y_3 & +a(\lambda_2-\lambda_3)z & +cX_{23} & -Y_{23} & -aZ_{23} & =0 \\
f_{69} := & f_6 - f_9 = & -b\lambda_2 x_2 & +b\lambda_3 x_3 & +a\lambda_2 y_2 & -a\lambda_3 y_3 & -(\lambda_2-\lambda_3)z & -bX_{23} & +aY_{23} & -Z_{23} & =0 \\
f_{71} := & f_7 - f_1 = & +\lambda_3 x_3 & -\lambda_1 x_1 & -c\lambda_3 y_3 & +c\lambda_1 y_1 & -b(\lambda_3-\lambda_1)z & -X_{31} & -cY_{31} & +bZ_{31} & =0 \\
f_{82} := & f_8 - f_2 = & +c\lambda_3 x_3 & -c\lambda_1 x_1 & +\lambda_3 y_3 & -\lambda_1 y_1 & +a(\lambda_3-\lambda_1)z & +cX_{31} & -Y_{31} & -aZ_{31} & =0 \\
f_{93} := & f_9 - f_3 = & -b\lambda_3 x_3 & +b\lambda_1 x_1 & +a\lambda_3 y_3 & -a\lambda_1 y_1 & -(\lambda_3-\lambda_1)z & -bX_{31} & +aY_{31} & -Z_{31} & =0
\end{array}, \qquad (20)$$

ahol az alábbi jelöléseket vezettük be:

$$X_{ij} = X_i - X_j\,,\ Y_{ij} = Y_i - Y_j\,,\ Z_{ij} = Z_i - Z_j\,, \qquad (i = 1,2,3;\ \ j = \mathrm{mod}(i,3)+1)\,. \qquad (21)$$

Az f_{14}, f_{47}, f_{71} egyenletekből a *b* paramétert, illetve az f_{25}, f_{58}, f_{82} egyenletekből az *a* paramétert kifejezve, az f_{36}, f_{69}, f_{93} összefüggésekbe helyettesítve, további egyszerűsítések után az alábbi egyenletek adódnak:

$$(\lambda_i x_i - \lambda_j x_j)^2 + (\lambda_i y_i - \lambda_j y_j)^2 + (y_i - \lambda_j)^2 z^2 = X_{ij}^2 + Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2 \qquad (i = 1,2,3;\ j = \mathrm{mod}(i,3)+1)\,. \qquad (22)$$

A fenti összefüggéseket részletesen kiírva, az alábbi homogén, másodfokú egyenletrendszert kell megoldani a λ_1, λ_2 és λ_3 ismeretlenekre:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^2(x_1^2+y_1^2+z^2) - 2\lambda_1\lambda_2(x_1x_2+y_1y_2+z^2) + \lambda_2^2(x_2^2+y_2^2+z^2) = X_{12}^2+Y_{12}^2+Z_{12}^2 \\
&\lambda_2^2(x_2^2+y_2^2+z^2) - 2\lambda_2\lambda_3(x_2x_3+y_2y_3+z^2) + \lambda_3^2(x_3^2+y_3^2+z^2) = X_{23}^2+Y_{23}^2+Z_{23}^2\ . \\
&\lambda_3^2(x_3^2+y_3^2+z^2) - 2\lambda_3\lambda_1(x_3x_1+y_3y_1+z^2) + \lambda_1^2(x_1^2+y_1^2+z^2) = X_{31}^2+Y_{31}^2+Z_{31}^2
\end{aligned} \qquad (23)$$

Az egyenletrendszer megoldását Paláncz (2012) a Dixon-rezultáns alkalmazásával zárt alakban adta meg. Eddig zárt alakban a megoldás nem volt ismert, ezért a numerikus eljárás jöhetett szóba.

Numerikus algoritmussal, például a Mathematica programrendszer Gröbner bázis moduljával, a megoldások megkaphatók. További nehézség adódhat abból, hogy az egyenletrendszer nemlinearitásából fakadóan több megoldás is adódhat. Ezek közül a paraméterek jelentése miatt a komplex gyököket és a negatív megoldásokat ki lehet zárni. A módszer alkalmazhatósági vizsgálatának jelen fázisában azt mutatjuk meg, hogy a hagyományos eljárással ellentétben több megoldás létezik. Ezért a nemlineáris egyenletrendszer pozitív gyökei közül azokkal a megoldásokkal is foglalkozunk, amely megoldásként szóba jöhetnek. Független esetben a helyes megoldás kiválasztása további meggondolásokat igényel. Ugyancsak külön tanulmány fogja tárgyalni a módszer általánosítását tetszőleges számú pontra. A továbbiakban feltesszük, hogy a λ_i paraméterek ismertek.

3.3 A forgatási mátrix *a*, *b*, *c* paramétereinek meghatározása

Második lépésben a forgatási mátrix paramétereinek megoldását írjuk le. Ennek megfelelően ezen alfejezet a külső tájékozás normálegyenleteinek levezetését tárgyalja.

Miután a λ_i ismeretlenekre egy nemlineáris egyenletrendszert vezettünk le, és az egyenletrendszert numerikusan megoldottuk, a következőkben a méretaránytényezők ismertnek tekinthetők. Ezzel a külső tájékozási feladat lineáris egyenletekre vezethetők vissza.

Az alapegyenletek felhasználásával az *a*, *b*, *c* ismeretlen paraméterekre felírhatók az alábbi közvetítő egyenletek:

$$\begin{bmatrix} X_{12}-\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2 \\ Y_{12}-\lambda_1 y_1+\lambda_2 y_2 \\ Z_{12}-(\lambda_1-\lambda_2)z \\ X_{23}-\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3 \\ Y_{23}-\lambda_2 y_2+\lambda_3 y_3 \\ Z_{23}-(\lambda_2-\lambda_3)z \\ X_{31}-\lambda_3 x_3+\lambda_1 x_1 \\ Y_{31}-\lambda_3 y_3+\lambda_1 y_1 \\ Z_{31}-(\lambda_3-\lambda_1)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)z+Z_{12} & -(\lambda_1 y_1-\lambda_2 y_2+Y_{12}) \\ -[(\lambda_1-\lambda_2)z+Z_{12}] & 0 & \lambda_1 x_1-\lambda_2 x_2+X_{12} \\ \lambda_1 y_1-\lambda_2 y_2+Y_{12} & -(\lambda_1 x_1-\lambda_2 x_2+X_{12}) & 0 \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_3)z+Z_{23} & -(\lambda_2 y_2-\lambda_3 y_3+Y_{23}) \\ -[(\lambda_2-\lambda_3)z+Z_{23}] & 0 & \lambda_2 x_2-\lambda_3 x_3+X_{23} \\ \lambda_2 y_2-\lambda_3 y_3+Y_{23} & -(\lambda_2 x_2-\lambda_3 x_3+X_{23}) & 0 \\ 0 & (\lambda_3-\lambda_1)z+Z_{31} & -(\lambda_3 y_3-\lambda_1 y_1+Y_{31}) \\ -[(\lambda_3-\lambda_1)z+Z_{31}] & 0 & \lambda_3 x_3-\lambda_1 x_1+X_{31} \\ \lambda_3 y_3-\lambda_1 y_1+Y_{31} & -(\lambda_3 x_3-\lambda_1 x_1+X_{31}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}. \quad (24)$$

A fenti egyenletek alapján a külső tájékozás normálmátrixának elemeit az alábbi képletekkel adhatjuk meg:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i y_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2+\left((\lambda_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z+Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right] \\ a_{12} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i x_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left(\lambda_i y_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\ a_{13} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i x_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left((\lambda_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z+Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\ a_{22} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i x_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2+\left((\lambda_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z+Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right] \\ a_{23} &= -\sum_{i=1}^{3}\left(\lambda_i y_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)\left((\lambda_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1})z+Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right) \\ a_{33} &= \sum_{i=1}^{3}\left[\left(\lambda_i x_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2+\left(\lambda_i y_i-\lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}+Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right)^2\right] \end{aligned} . \quad (25)$$

Tudjuk, hogy a normálmátrix szimmetrikus, azaz $a_{21}=a_{12}$, $a_{31}=a_{13}$, $a_{32}=a_{23}$.

A külső tájékozás feladatához tartozó normálvektor mátrix elméleti megfontolásokkal hasonló módon állítható elő:

$$2\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) z Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right] \\ \sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) z X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) Z_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right] \\ \sum_{i=1}^{3}\left[(\lambda_i x_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} x_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) Y_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1} - (\lambda_i y_i - \lambda_{\mathrm{mod}(i,3)+1} y_{\mathrm{mod}(i,3)+1}) X_{i\,\mathrm{mod}(i,3)+1}\right] \end{bmatrix}. \tag{26}$$

A normálegyenlet-rendszer megadására számos módszer ismert a szakirodalomban. A szinguláris értékek dekompozicióján alapuló (singular value decomposition, SVD) módszer alkalmas a feladat megoldására.

3.4 A vetítési központ koordinátáinak meghatározása

A harmadik lépésben a vetítési központ koordinátáit határozzuk meg. A vetítési központ még ismeretlen $[X_0, Y_0, Z_0]^T$ paramétereit a λ_s méretarány-tényező és a forgatási mátrix a, b és c már meghatározott értékeivel a (14) összefüggés felhasználásával nyerhetjük.

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} - \frac{\lambda_i}{1+a^2+b^2+c^2} \begin{bmatrix} 1+a^2-b^2-c^2 & 2(ab-c) & 2(ac+b) \\ 2(ab+c) & 1-a^2+b^2-c^2 & 2(bc-a) \\ 2(ac-b) & 2(bc+a) & 1-a^2-b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ -z \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$(i = 1,2,3...,n)$$

A végső megoldás a kapott koordináta-értékek átlagolásával adódik:

$$\begin{aligned} X_0 &= (X_{01} + X_{02} + X_{03})/3 \\ Y_0 &= (Y_{01} + Y_{02} + Y_{03})/3 \\ Z_0 &= (Z_{01} + Z_{02} + Z_{03})/3 \end{aligned} . \tag{28}$$

A (27) összefüggésben az i index mind a képkoordinátákra, mind a tárgykoordinátákra vonatkozik, tehát három megoldást kapunk, azaz valójában mindhárom pontra kiértékelendők a (27) egyenletek, és az X_0, Y_0, Z_0 koordinátákra kapott értékek átlaga adja a megoldást.

Valamennyi paraméter megadásával a külső tájékozás alapfeladata megoldottnak tekinthető.

4 Totális legkisebb négyzetek módszere

A matematikai geodézia kutatási iránya az elmúlt évben kiegészült a totális legkisebb négyzetek elméletének és módszerének kutatásával.

Még a műszaki tudományokban is gyakran előfordul, hogy a lineáris regresszió alkalmazói nem kellő körültekintéssel járnak el. Tekintet nélkül a probléma természetére, sematikusan a szakirodalomban elterjedt programokat, eljárásokat használják. Pedig nagyon lényeges feltétel annak figyelembe vétele, hogy mely változókat tekintünk bizonytalannak, véletlen hibával terheltnek.

Sok esetben csak a feladat lehető legegyszerűbb megoldhatósága indokolja, hogy olyan fontos geodéziai feladat, mint például a 2D, 3D hasonlósági vagy a projektív transzformációk kiegyenlítési eljárása esetén is csak az egyik koordinátarendszerbeli pontok kapnak javításokat, a másik rendszerbeli koordinátákat hibátlannak tételezzük fel. A mérési folyamat természetéből adódóan mindkét koordinátarendszerben megadott pontokat javítással kellene ellátni. Ez a modell a totális legkisebb négyzetek módszerében kezelhető elméletileg helyesen.

A geodéziában a kiegyenlítő számítások elvégzése során gyakori probléma a keresett paraméterek jó kezdeti értékének becslése, a közvetítő egyenletek linearizálása, és a durva hibák előzetes kiszűrése a legkisebb négyzetes becslés eredményes alkalmazásához.

Megvizsgálandó a totális legkisebb négyzetek módszere elvének következetes alkalmazásával a lineáris regresszió teljes statisztikai elemzése. A felhasznált matematikai eszközöknek összhangban kell állni a hagyományos legkisebb négyzetek módszerével.

A lineáris regresszió esetén új levezetés adható a kiegyenlítő egyenes meghatározására a totális legkisebb négyzetek feltételrendszerében.

Feltevésünk szerint, speciális, igen fontos példán keresztül, a lineáris regresszió esetében megmutatható, hogy a Gauss-Helmert Modell (GHM) szigorú kiegyenlítési eljárás és a totális legkisebb négyzetek módszere azonos eredményre vezetnek. Ezzel az is igazolható, hogy a kiegyenlítő-egyenesnek a szakirodalomban korábban elterjedt levezetései a GHM esetén csak közelítő megoldásokat szolgáltattak.

Legyen adott (x_i, y_i) $(i = 1, 2..., n)$, $n \geq 2$ n pont egy ortogonális koordinátarendszerben. Az a célunk, hogy meghatározzunk egy $y = ax + b$ egyenletű kiegyenlítő egyenest, miközben geometriailag tekintve az *a* paraméter az egyenes meredeksége, a *b* paraméter az egyenes *y* tengellyel való metszéspontját jelöli.

4.1 Lineáris regresszió hagyományos legkisebb négyzetek módszerével (LNM)

Ezt az esetet úgy lehetne jellemezni, hogy az y_i megfigyelési értékek véletlen hibával terhelt mérések az x_i abszcissza értékek hibamentesek. Ha bevezetjük a v_{y_i} javításokat, kapjuk az alábbi túlhatározott egyenletrendszert az *a* és *b* ismeretlen paraméterekre:

$$y_i + v_{y_i} = ax_i + b, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \ . \tag{29}$$

Ennek az egyenletrendszernek a legkisebb négyzetek elve szerinti megoldása jól ismert, a keresett paraméterekre a következő megoldásokat kapjuk:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \ , \tag{30}$$

ahol $\bar{x}$ és $\bar{y}$ a súlyponti koordináták.

4.2 Lineáris regresszió inverz legkisebb négyzetek módszerével (ILNM)

Ha az *x* változó értékeit terheli véletlen hiba, miközben az *y* változó értékeit hibamentesnek tekintjük, ekkor a x_i megfigyelési értékeket láthatjuk el v_{x_i} javításokkal:

$$y_i = \quad a(x_i + v_{x_i}) + b \qquad \left(i = 1,2,...,n\right) \ . \tag{31}$$

A fenti egyenletek az alábbi alakra hozhatók:

$$x_i + v_{x_i} = \quad \frac{y_i}{a} - \frac{b}{a} \qquad \left(i = 1,2,...,n\right) \ . \tag{32}$$

Néhány elemi átalakítással a LNM-es megoldáshoz jutunk, amely egybe esik a lineáris Gauss-Helmert Modell paraméterbecslésével:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})} \quad , \qquad b = \bar{y} - a\bar{x} \ . \tag{33}$$

4.3 Lineáris regresszió totális legkisebb négyzetek módszerével (TLNM)

A probléma régóta ismert a kiegyenlítő-számítás témakörében. Kezdőértékekből kiindulva, iterációval többen adtak megoldást a feladatra, említésre érdemes York (1966) és Golub (1983) tanulmánya. A probléma iteráció nélküli megoldását először a fizikában adták meg. Reed (1989) tanulmánya adott általános modellt a kiegyenlítő egyenes ilyenfajta (mindkét változó kap javításokat) meghatározására. Rövid időn belül közel 1000 hivatkozást kapott cikkére, de többen hibát véltek felfedezni a levezetésben. Végül Reed (1992) tanulmánya végérvényesen korrigálta a hiányosságokat. Nievergelt (1994) cikke leegyszerűsítette, könnyen felhasználhatóvá tette az eljárást. Huffel és Vandewalle (1991) első, a tárgykörben megjelent tanulmányuk óta, az eltelt két évtized nagyban hozzájárultak a módszer gyakorlati elterjesztéséhez. A geodézia hazai viszonylatában Hazay (1980) tárgyalta az egyenesillesztést kimerítően, külföldről többek között a Schaffrin et al. (2006) tanulmány numerikus példán keresztül foglalkozott a témával. Reinking (2008) tanulmánya visszavezeti a legkisebb négyzetek módszerének megoldását a Gauss-Helmert modellre. Amennyiben mind az x_i , mind az y_i értékek véletlen hibával terhelt megfigyelések, bevezethetjük a v_{x_i} és v_{y_i} javításokat mindkét változóra:

$$y_i + v_{y_i} = a(x_i + v_{x_i}) + b, \qquad (i = 1,2,...,n) \ . \tag{34}$$

Ez azt jelenti, hogy minden adott pontból egy merőleges egyenest állítunk a keresett kiegyenlítő egyenesre. A két egyenes metszéspontját jelöljük (x_0, y_0)-lal. Ezen metszéspont koordinátáinak meghatározására a merőlegesség feltételéből az alábbi egyenletrendszert lehet felírni:

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0 + b \\ y_0 - y_i &= -\frac{x_0 - x_i}{a} \ . \end{aligned} \tag{35}$$

Az egyenletrendszer megoldása a következő:

$$x_0 = \frac{ay_i + x_i - ab}{a^2 + 1}, \qquad y_0 = \frac{a^2 y_i + ax_i + b}{a^2 + 1} \ . \tag{36}$$

Az adott pontokból a kiegyenlítő egyeneshez húzott merőleges távolságok négyzetek összegének a minimalizálása egyet jelent a $\sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2$ kifejezés minimalizálásával, ahol v_{x_i} és v_{y_i} az (x_i, y_i) pontból húzott merőleges szakasz komponenseit jelenti. Ezzel fel tudjuk írni a merőleges szakasz távolságának négyzetét:

$$d_i^2 = v_{x_i}^2 + v_{y_i}^2 = \left(x_i - \frac{ay_i + x_i - ab}{a^2 + 1} \right)^2 + \left(y_i - \frac{a^2 y_i + ax_i + b}{a^2 + 1} \right)^2, \qquad (i = 1,2,...,n) \ . \tag{37}$$

A fenti formula néhány átalakítás után az alábbi kifejezéssé egyszerűsödik:

$$d_i^2 = \frac{(y_i - ax_i - b)^2}{a^2 + 1}, \qquad (i = 1,2,...,n) \ . \tag{38}$$

A feladat megoldásához az alábbi $F(a,b)$ kétváltozós függvény szélsőértékeit kell meghatározni:

$$F(a,b) = \frac{1}{a^2 + 1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \ \rightarrow \ \min . \tag{39}$$

A szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a parciális deriváltak nullával legyenek egyenlők.

Tekintsük először a *b* változó szerinti parciális deriváltat:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = \frac{-2}{a^2+1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - ax_i - b\right) = 0 \ . \tag{40}$$

Ez a feltétel az alábbi összefüggést szolgáltatja:

$$b = \bar{y} - a\bar{x} \ . \tag{41}$$

Célszerű áttérni a súlyponti koordinátákra:

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - \bar{x} \\ Y_i &= y_i - \bar{y} \end{aligned} \qquad \left(i = 1,2,\ldots,n\right) \ . \tag{42}$$

A kapott részeredmény lehetővé teszi, hogy az eredetileg kétváltozós célfüggvényt egyváltozós függvényre vezessük vissza.

A súlyponti koordináták felhasználásával és $b = \bar{y} - a\bar{x}$ feltétel alapján az immáron egy változós $G(a)$ célfüggvényünk így írható fel:

$$G(a) = \frac{1}{a^2+1}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - aX_i\right)^2 \quad \rightarrow \quad \min . \tag{43}$$

Az *a* változó szerinti parciális derivált eltűnése alapján a következő formula adódik:

$$\frac{\partial G(a)}{\partial a} = \frac{-2a}{(a^2+1)^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - aX_i)^2 - \frac{2}{(a^2+1)}\sum_{i=1}^{n}X_i(Y_i - aX_i) = 0 \ . \tag{44}$$

A fenti kifejezés így is átalakítható:

$$(a^2+1)\sum_{i=1}^{n}(X_iY_i - aX_i^2) + a\sum_{i=1}^{n}(Y_i - aX_i)^2 = 0 \ . \tag{45}$$

További egyszerűsítések után megoldandó az alábbi másodfokú egyenlet:

$$a^2\sum_{i=1}^{n}X_iY_i + a\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - Y_i^2) - \sum_{i=1}^{n}X_iY_i = 0 \ . \tag{46}$$

A fenti másodfokú egyenlet megoldása a jól ismert megoldó képlet szerint az alábbi megoldást szolgáltatja:

$$a_{1,2} = \frac{-\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - Y_i^2) \pm \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - Y_i^2)\right)^2 + 4\left(\sum_{i=1}^{n}X_iY_i\right)^2}}{2\sum_{i=1}^{n}X_iY_i} \ . \tag{47}$$

Mivel a négyzetgyökös kifejezés alatt minden esetben pozitív szám szerepel, két valós megoldás adódik, könnyen belátható, hogy az eredeti $F(a,b)$ célfüggvény a négyzetgyökös kifejezés pozitív előjele esetén minimumot, negatív előjele esetén maximális értékét veszi fel. Hazay (1980) tanulmánya más kiindulás alapból hasonló következtetésre jutott.

5 Összefoglalás

A tudományos kutatásokat segítő technikai eszközök, eljárások fejlődésével a műszaki tudományok elméletének is fejlődni kell: új elméleteket kell alkotni, új modelleket kell felállítani, új kiértékelési módszereket kell kidolgozni, amelyek pontosabbak, eredményesebbek, hasznosabbak, mint a ko-

rábbi eljárások. Szándékunk szerint a geodézia egyik innovatív területén, a matematikai módszerek geodéziai alkalmazása révén olyan új eredményeket mutattunk be e tanulmányban, amelyek megfelelnek a kor követelményeinek.

Megadtunk egy új matematikai modellt a 3D, 7-paraméteres nemlineáris hasonlósági transzformáció megoldásához a forgási mátrix alkalmas paraméterezése által. Ez a módszer nem igényel iterációt és nem szükséges a megfigyelt egyenletek sorba fejtése, linearizálása. A modell levezetése során a 3D, 7-paraméteres dátum transzformáció problémáját visszavezettük egy másodfokú polinom egyenlet megoldására. A kidolgozott algoritmus nem a Gröbner-bázis alkalmazásán alapul, és könnyen programozható.

Ismertettünk egy új matematikai megoldást a külső tájékozás paramétereinek meghatározására. A megoldás a pontok képkoordinátái és a hozzájuk tartozó tárgy- vagy terepkoordináták között fennálló modellezés matematikai összefüggéseinek felhasználásán nyugszik. A tanulmányban tárgyalt eljárás a hagyományos megoldási módszer helyett új matematikai összefüggéseken alapuló levezetést ad meg, annak nehézségeit igyekszik kiküszöbölni. A fő eltérés az új és a hagyományos módszer között a méretarány-tényezők kezelésében van: míg a régi módszer indirekt kezeli a méretarányokat, az új módszer minden pont esetén explicite meghatározza azokat. A külső tájékozás feladatának megoldására az általunk kidolgozott eljárás nem igényel sem Taylor-sorfejtést, sem közelítő értékeket, sem iterációt. A tanulmányban tárgyalt eljárás matematikailag korrekt, mégis csak első lépésnek tekintendő a módszer gyakorlati elterjedése szempontjából. Továbblépés a külső tájékozásba bevonandó pontok számának növelése érdekében a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásának kezelésében várható.

Megmutattuk, hogy a külső tájékozásra újonnan kidolgozandó eljárás a hagyományos megoldási módszerrel szemben hatékonyabb algoritmusra épül, a régi módszer nehézségeit kiküszöböli.

Beláttuk, hogy külső tájékozási feladat megoldására az általunk kidolgozandó eljárás előnyösebb a régi módszernél: nem igényel sem Taylor-sorfejtést, sem közelítő értékeket, sem iterációt.

A tanulmány megadja a totális legkisebb négyzetek módszere eszközrendszerének felhasználásával a kiegyenlítő egyenes egzakt megoldását, miközben a levezetéshez a hagyományos legkisebb négyzetek módszereit használja fel. Ezen kívül, egy speciális példán keresztül azt is megmutatja, hogy a lineáris regresszió esetében a Gauss-Helmert modell szigorú kiegyenlítési eljárása és a totális legkisebb négyzetek módszere azonos eredményre vezetnek.

Hivatkozások

Albertz J, Kreiling W (1975): Photogrammetric Guide, Herbert Wichmann Verl., Karlsruhe, 58-60.

Awange J L (2002): Gröbner Bases, Multipolynomial Resultants and the Gauss-Jacobbi Combinatorical Algorithms-Adjustment of Nonlinear GPS/LPS Observations. Dissertation, Geodätisches Institut der Universität Stuttgart.

Awange J L, Grafarend E W (2002): Linearized Least Squares and nonlinear Gauss-Jacobbi combinatorical algorithm applied to the 7 parameter datum transformation c_7 (3) problem. Zeitschrift für Vermessungswesen, 127, 109-116.

Awange J L, Grafarend E W (2003a): Closed form solution of the overdetermined nonlinear 7 parameter datum transformatiotn. Allgemeine Vermessungsnachrichten, 4, 130-149.

Awange J L, Grafarend E W (2003b): Journal of Geodesy, 77, 66-76.

Awange J L, Grafarend E W (2003c): Zeitschrift für Vermessungswesen, 4, 266-270.

Awange J L, Grafarend E W, Fukuda Y (2004): Bul. di Geodesia e Scienze Affini, 2,117-127.

Battha L, Závoti J (2009a): Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation. Acta Geod. Geoph. Hung., 44(4), 429-438.

Battha L, Závoti J (2009b): Az előmetszési probléma és a 2D hasonlósági transzformáció. Publications in Geomatics, 12, 19-26.

Golub G H, van Loan C (1983): An Analysis of the Total Least Squares Problem. SIAM J. on Numerical Analysis, 17(6), 883-893.

Grafarend E W, Kampmann G (1996): Zeitschrift für Vermessungswesen, 121, 68-77.

Grafarend E W, Krumm F (1995): Zeitschrift für Vermessungswesen, 120, 334-350.

Grafarend E W, Shan J (1997): Zeitschrift für Vermessungswesen, 122, 323-333.

Hazay I (1980): Die Variante der ausgleichenden Gerade. Geodäsie und Kartografie, Budapest, 88-96.

Horn B K P (1987): Closed form solution of absolute orientation using unit quaternions. Journal of the Optical Society of America, 4, 629-642.

Huffel van S, Vandewalle J (1991): The Total Least Squares Problem. Computational Aspects and Analysis. SIAM, Philadelphia.

Jancsó T (1994): Külső tájékozási elemek meghatározása közvetlen analitikus módszerrel. Geodézia és Kartográfia, 46(1), 33-38.
Jancsó T (2004): Durvahiba-szűrés a fotogrammetriai hátrametszés kiegyenlítése előtt, kezdőértékek megadása nélkül. Geomatikai Közlemények, 7, 181-195.
Kraus K (1996): Photogrammetrie 2. Dümmler- Verlag, Bonn, 488.
Kupferer S (2005): Anwendung der Total Least Squares Technik bei geodätischen Problemstellungen. Universität Karlsruhe (TH), Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik, 1, Universitätsverlag Karlsruhe.
Lenzmann E, Lenzmann L (2001): Zur Bestimmung eindeutiger Transformationsparameter. 126, 138-142.
Luhmann T (2000): Nahbereichsphotogammetrie. Herbert-Wichmann Verlag, Heidelberg, 571.
Neitzel F, Petrovic S (2008): Total Least Squares (TLS) im Kontext der Ausgleichung nach kleinsten Quadraten am Beispiel der ausgleichenden Geraden. 133, 141-148.
Nievergelt Y (1994): Total Least Squares: state of the art regression in numerical analysis. SIAM, 36(2), 258-264.
Paláncz B (2012): Dixon-rezultáns alkalmazása a fotogrammetriai külső tájékozás megoldása során. Geomatikai Közlemények, 15, 85-94.
Reed B C (1989): Linear least-squares fits with errors in both coordinates. Am. J. Physics, 57, 642-646.
Reed B C (1992): Linear least-squares fits with errors in both coordinates. II: Comments on parameter variances. Am. J. Physics, 60(1), 59-62.
Reinking J (2008): Total Least Squares? 133, 384-389.
Schraffrin B, Lee I, Felus Y, Choi Y (2006): Total Least-Squares (TLS) for geodetic straight-line and plane adjusment. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 3, 141-165.
York D (1966): Least Squares fitting of a straight line. Can. J. Physics, 44, 1079-1086.
Závoti J (1999): A geodézia korszerű matematikai módszerei. Publications in Geomatics, 2, 149.
Závoti J (2005): A 7 paraméteres 3D transzformáció egzakt megoldása. Geomatikai Közlemények, 8, 53-60.
Závoti J, Fritsch D (2011): A first attempt at a new algebraic solution of the exterior orientation of photogrammetry. Acta Geod. Geoph. Hung., 46, 317-325.
Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung., 41(1), 87-100.

Mellékletek

1 Numerikus példa a 3D, 7-paraméteres transzformáció megoldására

A módszer gyakorlati alkalmazásának bemutatásához, három adott pont koordinátáit kell ismernünk két koordináta rendszerben az (X, Y, Z) és az (x, y, z) rendszerben, ahogy a 4.1 táblázatban is látható.

1. táblázat: A cél és tárgykoordináták (mm)

No.	X_i	Y_i	Z_i	x_i	y_i	z_i
1	4176,4	4908,1	3678,5	50,0	0,0	50,0
2	4182,3	4808,1	4253,0	80,0	0,0	100,0
3	3556,1	5462,9	4651,9	50,0	80,0	150,0

A tanulmányban ismertetett algoritmussal a nemlineáris feladat egzakt megoldására az alábbi eredményeket kapjuk:

2. táblázat: A numerikus számítások eredménye

Ismeretlen	Nemlineáris módszer
λ	10,003
a	0,1079
b	-0.2786
c	0,0521
X_0	3999,9
Y_0	5000,0
Z_0	3000,0

A nemlineáris módszer a következő értékeket adja a Cardan szögekre:

$$\omega = 0{,}2618[rad] \qquad \varphi = -0{,}5235[rad] \qquad \kappa = 0{,}1746[rad]\,.$$

2 Numerikus példa a fotogrammetriai külső tájékozás megoldására

A nemlineáris egyenletrendszer megoldásához a Mathematica programrendszer használatát mutatjuk be. Megadjuk a két koordinátarendszerben egymásnak megfelelő pontokat, valamint a kameraállandót:

- X1=-175.3790; Y1=-6.3732;Z1=-199.6597;
- X2= 175.4705; Y2=-6.5360;Z2= -74.9148;
- X3=-175.4021; Y3=-6.4276;Z3= 249.7017;
- x1= 1.138484; y1= -1.708937;
- x2= -1.246672; y2= 0.086166;
- x3= 2.059542; y3= 1.507422; z= 12.6033;
- X12:=X1-X2; X23:=X2-X3; X31:=X3-X1;
- Y12:=Y1-Y2; Y23:=Y2-Y3; Y31:=Y3-Y1;
- Z12:=Z1-Z2; Z23:=Z2-Z3; Z31:=Z3-Z1;

A pontok koordinátáiból a (15) összefüggés alapján számolt nemlineáris egyenletrendszer:

- b1:=lambda1^2*(x1^2+y1^2+z^2)-
  2*lambda1*lambda2*(x1*x2+y1*y2+z^2)+lambda2^2*(x2^2+y2^2+z^2);
- j1:=X12^2+Y12^2+Z12^2;

- b2:=lambda2^2*(x2^2+y2^2+z^2)-
  2*lambda2*lambda3*(x2*x3+y2*y3+z^2)+lambda3^2*(x3^2+y3^2+z^2);
- j2:=X23^2+Y23^2+Z23^2;

- b3:=lambda3^2*(x3^2+y3^2+z^2)-
  2*lambda3*lambda1*(x3*x1+y3*y1+z^2)+lambda1^2*(x1^2+y1^2+z^2);
- j3:=X31^2+Y31^2+Z31^2;

Numerikus adatokkal:

$$163{,}061\lambda_1^2 - 314{,}553\lambda_1\lambda_2 + 160{,}405\lambda_2^2 = 138\,657$$
$$160{,}405\lambda_2^2 - 312{,}811\lambda_2\lambda_3 + 165{,}357\lambda_3^2 = 228\,487$$
$$163{,}061\lambda_3^2 - 317{,}224\lambda_3\lambda_1 + 165{,}357\lambda_1^2 = 201\,926 \quad .$$

A megoldás:

- NSolve [{b1==j1,b2==j2,b3==j3},{lambda1,lambda2,lambda3}]

A megoldásra összesen nyolc számhármast kapunk, amelyekből négy számhármas komplex, két számhármas negatív előjelű. A hagyományos eljárással ellentétben két pozitív előjelű számhármast kapunk, amelyek valamennyien megoldását képezik a feladatnak. A 3. táblázatban összevethető a két különböző megoldás.

3. táblázat. Output paraméterek a külső tájékozásból

$\lambda_1 = 122{,}786$	$a = -1{,}1799$	$\varphi = -178{,}8808$	$X_0 = -7{,}3314$
$\lambda_2 = 126{,}099$	$b = -7{,}9232$	$\omega = 16{,}3048$	$Y_0 = 1526{,}3000$
$\lambda_3 = 132{,}800$	$c = -5{,}9192$	$\kappa = 18{,}0592$	$Z_0 = -484{,}2366$
$\lambda_1 = 124{,}113$	$a = 0{,}1055$	$\varphi = -163{,}2235$	$X_0 = -353{,}7093$
$\lambda_2 = 125{,}500$	$b = -2{,}2362$	$\omega = -32{,}8702$	$Y_0 = 1210{,}0000$
$\lambda_3 = 104{,}765$	$c = -3{,}9886$	$\kappa = 11{,}3730$	$Z_0 = 811{,}5506$

A ferdén szimmetrikus mátrix elemeit a 3. táblázat második oszlopa tartalmazza, az a, b és c paraméterekből a három tengely körüli elforgatás φ, ω és κ szögeire ugyanezen táblázat harmadik oszlopában szereplő értékeket kapjuk. A vetítési központ koordinátáit a 3. táblázat utolsó oszlopában tüntettük fel.

3 Numerikus példa a totális legkisebb négyzetek módszerének alkalmazására

Neitzel és Petrovic (2008) tanulmánya Kupferer (2005, 91.oldal) disszertációjából vesz egy numerikus példát. Ebben a példában Kupferer megkísérelte megmutatni, hogy egy kiegyenlítő egyenesnek eltérő a totális legkisebb négyzetek módszerével nyert megoldása és a Gauss-Helmert modell alapján nyert megoldása (4. táblázat 2. és 4. oszlopa). Netzel és Petrovic (2008) ezzel szemben igazolta, hogy ugyanannak a feladatnak a szigorú kiegyenlítése a nemlineáris Gauss-Helmert modell alapján helyes eredményt szolgáltat (4. táblázat 5. oszlopa). Ezen tanulmányban levezetett totális legkisebb négyzetek módszerével nyert eredményünk Neitzel és Petrovic feltételezését támasztja alá (4. táblázat 6. oszlopa).

4. táblázat. Output paraméterek a TLNM alkalmazására

Módszer	LNM	ILNM	Kupferer	GHM, szigorú	Cikk
Meredekség	3,000	3,2667	3,241	3,241804	3,241804
Tengelymetszet	-1,000	-1,4000	-1,362	-1,362705	-1,362705
Javítások négyzet-összege	4,000	0,4082	0,372	0,372946	0,372946

A Gauss-Helmert modell szigorú kiegyenlítése iterációval történt, az ezen cikkben tárgyalt eljárással pontosan ugyanezen megoldást állítottuk elő.

GEODÉZIAI HÁLÓZATOK MAGYARORSZÁGON – MÚLT, JELEN ÉS JÖVŐ

Busics György[*]

Geodetic Networks in Hungary – the past, present and future – *Professor Péter Biró taught us geodesy at the Technical University Budapest and he gave us precise definitions about reference systems in the Hungarian professional literature, as well. The geodetic networks realize the reference systems in practice. Their role was fundamental in the past and I think that this role can be maintained in the future as well, although it's possible that the establishment of the networks is going to change. The review of the role of the geodetic networks in Hungary is a current task today. This article is about this topic.*

Keywords: Hungarian National Horizontal, Vertical, GPS and Gravimetrical Networks, active network, integrated network

Biró Pétertől nemcsak egyetemista korunkban kaptunk felsőgeodéziai ismereteket, de a professzor úr volt az, aki az utóbbi években a földi vonatkoztatási rendszerekkel kapcsolatos pontos definíciókat is megadta a magyar nyelvű szakirodalomban. A geodéziai hálózatok a vonatkoztatási rendszer megvalósítói a gyakorlatban. Szerepük alapvető fontosságú volt a múltban, és úgy gondolom, ez a szerep a jövőben is megmarad, mégha lényegesen át is alakul a hálózatok létesítése. A magyarországi geodéziai hálózatok szerepének áttekintése ma is aktuális kérdés, erről szól e cikk, amely egyben tisztelgés Biró Péter munkássága előtt.

Kulcsszavak: Egységes Országos Vízszintes Alaphálózat, Egységes Országos Magassági Alaphálózat, Országos GPS Hálózat, Magyar Gravimetriai Hálózat (2000), aktív hálózat, integrált hálózat

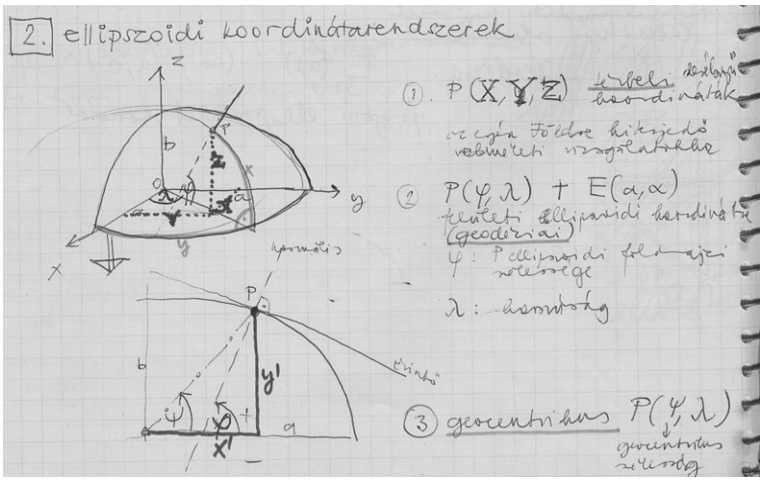
1 Bevezetés: mit tanultam Biró Pétertől?

Ez a cikk egy személyes hangvételű összefoglaló kíván lenni a geodéziai hálózatokról, s egyben tisztelgés *Biró Péter* munkássága előtt. Az 1970-es években (s utána még évtizedekig) *Biró Péter* tanította a Felsőgeodéziát a BME-n. Előadásai mintaszerűek, logikusak, mondatai szabatosak, ábrái világosak voltak. Az ábrák (amelyeket későbbi jegyzetébe nem vett be, azokat csak projektorral vetítve vagy táblára rajzolva kaptuk meg) sokat segítettek a tananyag megértésében.

Még mindig megvan az 1975 őszén spirálos füzetbe írt saját jegyzetem, ebből másolok be ide egy részletet az ellipszoidi koordináta-rendszerekről (1. ábra). Bevallom, akkoriban, meg a végzést követően is, úgy gondoltam, hogy ez a témakör csak keveseket érint, hiszen kevesen foglalkoznak felsőgeodéziával, a gyakorlati szakembertől távol állnak az ilyen fogalmak. Ma, a GPS-korszakban, az ellipszoidi földrajzi koordináták mindennapos társai a szakembereknek, de e koordináták mibenlétével a laikusok széles táborának is tisztában kell lennie, akik a Google Föld képernyőjét böngészik.

A geodézia, mint a helymeghatározás tudománya, a pontok helyzetét koordinátákkal adja meg valamilyen előre definiált vonatkoztatási rendszerben. De mi a vonatkoztatási rendszer? A Magyar Nagylexikon a vonatkoztatási rendszer kifejezést fizikai fogalomként értelmezi és így adja meg: *„…azon anyagi testek összessége, amelyhez a testek mozgását viszonyítjuk. Az anyagi rendszerek térben és időben léteznek, a fizikai térben a helyzet megadása, a mozgás leírása egy vonatkoztatási rendszerben történhet, amelyet ki kell egészíteni az időmérés lehetőségével… Bármely három független, helyzetet jellemző adat használható a helyzet rögzítésére. A vonatkoztatási rendszerhez rendszerint valamilyen koordináta-rendszert rögzítenek”*. A vonatkoztatási és a vonatkozási jelzők ugyanazt jelentik, bármelyik jelző használata helyes.

[*]*NymE Geoinformatikai Kar,*
8000 Székesfehérvár, Pirosalma u. 1-3.
E-mail: bgy@geo.info.hu



1. ábra. Részlet egy 1975-ös Felsőgeodézia órai saját jegyzetből

A geodéziai gyakorlatban is a vonatkoztatási rendszernek ezt a fizikai-geometriai értelmezését használjuk, ahol testek helyett inkább pontokról beszélünk. *Biró Péter* a 2003-ban, majd 2006-ban elektronikus formában közzétett Kozmikus geodézia jegyzetében így ír erről:

„Azon anyagi pontok összességét és a hozzájuk rögzített koordináta-rendszert, amelyhez további pontok helyzetét és ennek megváltozását (mozgását) viszonyítjuk, együttesen vonatkoztatási rendszernek nevezzük. Attól függően, hogy a viszonyítás alapjául szolgáló anyagi pontjainkat, ún. keretpontjainkat hol választjuk meg, beszélünk égi, vagy földi vonatkoztatási rendszerről/rendszerekről. … A viszonyítás alapjául szolgáló anyagi pontjainkhoz a koordináta-rendszerünket ezen keretpontjaink egyezményesen elfogadott koordinátáival rögzítjük. Más szóval vonatkoztatási rendszerünket (és koordináta-rendszerét) ezen keretpontjaink és egyezményesen elfogadott koordinátáik valósítják meg” (Biró 2006).

Ez a definíció a vonatkoztatási rendszernek két elemét tartalmazza, mindkettő elengedhetetlen részét képezi a fogalomnak: az egyik elem a „pontok összessége”, amit más néven geodéziai alaphálózatnak vagy alapponthálózatnak nevezünk; a másik elem a koordináta-rendszer. A koordináta-rendszer tehát önmagában nem szinonimája a vonatkoztatási rendszernek, bár létezik a fogalomnak ilyen leszűkített értelmezése és használata is.

Szakmai szempontból a helymeghatározásban szerepet játszó háromféle vonatkoztatási rendszert különböztethetünk meg: égi vonatkoztatási rendszert (égi pontok helyzetének megadására); földi vonatkoztatási rendszert (az egész földkerekségre kiterjedően földi pontok helyzetének megadására); helyi vonatkoztatási rendszert (kontinensnyi, országnyi vagy kisebb területre kiterjedő földi pontok helyzetének megadására). A helymeghatározó adatok száma (dimenziója) szerint a vonatkoztatási rendszer lehet egy-, két- vagy háromdimenziós (rövid jelölése: 1D, 2D, 3D).

A dimenziók többfélesége többnyire a helyi rendszerekre jellemző, a mai földi vonatkoztatási rendszerek – a műholdas, térbeli technikákból adódóan – háromdimenziósak.

Biró Pétertől tanultam meg azt is, hogy a geodéziában alkalmazott vonatkoztatási rendszer nem azonos a geodéziai vonatkoztatási rendszerrel. Utóbbi ugyanis a geodéziai földmodell maga, amely magába foglalja mind a Föld normálalakját, mind a Föld normál nehézségi erőterét. „A Föld geometriájának és nehézségi erőterének meghatározásakor a geometriai és a fizikai jellegű méréseink eredményeit *együttesen* akarjuk feldolgozni. Ehhez olyan *közös* viszonyítási alap kell, amelyben a Föld normálalakja és normál nehézségi erőtere *egyetlen közös* rendszernek, a geodéziai földmodellnek egy-egy eleme” (Biró 2003). Példamutatónak tartom *Biró* professzor úrnak a felsőgeodézia fogalmaink, definícióink tisztázása, pontosítása, újraértelmezése terén írt cikkeit is, amelyek segítik az elmélet és a gyakorlat közeledését, a közös szakmai nyelv kialakítását (Biró 2002, Biró 2005).

A vonatkoztatási rendszerhez nemcsak az alapponthálózat tartozik hozzá, hanem a helymeghatározó adatok mértékrendszere is. Továbbá a magassági rendszernél az alapfelület (alapszint, geoid)

azonosítása, a vízszintes rendszernél az alapfelületül választott ellipszoid, síkkordináták használatakor pedig a vetület megadása is hozzátartozik; a műholdas vonatkoztatási rendszereknél pedig a mérés-számítás időpontja is elengedhetetlen részét képezi a pontos leírásnak.

A következőkben a Magyarországon jelenleg használatos helyi vonatkoztatási rendszereket, azaz az alapul szolgáló vízszintes, magassági, térbeli és gravimetriai hálózatokat tekintem át.

2 A hazai vízszintes alapponthálózat

A klasszikus háromszögelés módszerének elterjedését az segítette elő, hogy rendelkezésre állt a mérés műszere, a teodolit. Háromszögeléssel már a XVIII. század elején a polihisztornak tisztelt *Mikoviny Sámuel* (1700-1750) is foglalkozott Pozsony környékén. A XIX. század elején a II. katonai felmérés, a század végén az ún. fokmérés tette szükségessé nagy területen a háromszögelési hálózat kiépítését; ezekről a szakirodalomban több helyütt olvashatunk (Ádám 2003, 2005, 2009; Joó és Raum 1996).

Az a vízszintes hálózat, amit ma is használunk és minden térképünk alapját képezi, szintén hagyományos háromszögelési hálózatként indult a II. világháború után, s csak az új geodéziai alapok kialakulásakor kapta az EOVA nevet (Egységes Országos Vízszintes Alapponthálózat). A DAT szabványban magyar vízszintes vonatkoztatási rendszerként (Hungarian Datum, HD72) szerepel.

Az EOVA kiépítése meglehetősen hosszú ideig tartott: 1948-ban kezdődött és 1972-ben fejeződött be a felsőrendű hálózat kiépítése, míg a negyedrendű hálózat csak az 1990-es évek közepére készült el. A szakirodalomból ismert, hogy időben három szakaszra tagolható a megvalósítás.

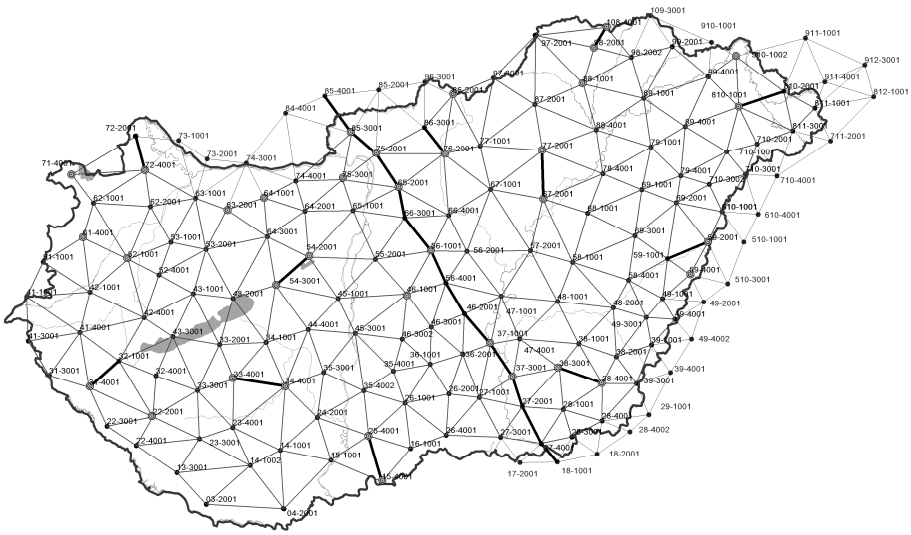
Az első szakaszban, elsőként, 1948 és 1952 között, az országhatár mentén körbefutó, elsőrendű (átlagosan 30 km-es oldalhosszúságú) háromszögekből álló láncolatot hoztak létre. A Duna-Tisza közén ezt egy merevítő láncolat kötötte össze, melynek szögméréseit a két világháború közötti országos hálózat jegyzőkönyveiből vették át. Az alapponthálózat méretarányának biztosítására 6 alapvonalat mértek invárdróttal. Az alaphálózat elhelyezése érdekében pedig földrajzi helymeghatározásokat is végeztek 17 ponton. A munkálatok gyorsítása érdekében a kitöltő hálózatot nem elsőrendű háromszögekből építették ki, hanem kb. 7 km-es harmadrendű háromszögekből, a hierarchiából így kimaradtak a másodrendű pontok. A rövidebb irányok észleléséhez hamarabb és gyakrabban adódtak jó időjárási körülmények, és a jelépítési költségek is csökkentek. A hálózat illetve hálózatrészek kiegyenlítésére az 1950-es és 1960-as években többször is kísérletet tettek, többek között a Szovjetunióban is.

A hálózat kiépítésének második szakasza a hálózat továbbfejlesztését és végleges számítását jelentette. Az 1960-as években megjelentek a fizikai távmérők, így lehetővé vált több elsőrendű oldal hosszának közvetlen megmérése. Felülvizsgálták és áttervezték az addigi I-III. rendű hálózatot, a magasabb követelményeknek meg nem felelő adatokat újra meghatározták. Megteremtették a kapcsolatot egyes szomszédos országok hasonló hálózataival. Ebben az ütemben kb. 70 elsőrendű ponton került sor újabb mérésekre.

Az elsőrendű hálózatnak összesen 167 pontja van, ezekből azonban csak 139 esik Magyarország területére; 11 pont a mai Szlovákiában, 4 Ukrajnában, 13 pedig Romániában található (2. ábra). A hálózat végleges kiegyenlítése a Kraszovszkij-ellipszoidon, korreláta-módszerrel történt. A mért és az ellipszoidra redukált irányokat egységsúlyúnak tekintették, a távméréseket kényszerfeltételként vitték be, azaz utóbbiak nem kaptak javítást.

A kiegyenlítés bemenő adatai: összesen 900 irány, 23 ellipszoidi távolság és 40 azimut. Ezekből a bemenő adatokból a 284 darab zárt háromszögre ugyanennyi szögfeltételi egyenlet, 119 oldalfeltételi egyenlet, 22 bázisfeltételi egyenlet és 39 Laplace-feltételi egyenlet volt felírható. Az elsőrendű háromszögek szögzáróhibájából számítható Ferrero-féle szög-középhiba m_F=0,406” volt.

A kiegyenlítés utáni iránymérési középhiba $m_{irány}$=0,434". A kiegyenlítés után az elsőrendű pontok földrajzi ellipszoidi koordinátáit előbb a Kraszovszkij-ellipszoidon számították. A számításkor a Szőlőhegy (56-1001) pontot az 1958. évi kiegyenlítésből adottnak vették fel, valamint a Szőlőhegy-Erdőhegy azimut is kötött volt, ezért ez a hálózat önkényes elhelyezésű.



2. ábra. Az EOVA elsőrendű pontjai (nagyobb körrel a Laplace-pontok), a mért irányok és távolságok

Abban az időben a katonai és polgári koordinátákat függetleníteni kellett egymástól. A FÖMI akkori igazgatóhelyettese, *Dr. Biró Péter* az 1970. január 31-én kelt 42/22/1970 számú átiratban javasolta a minisztériumnak, hogy „a földmérési alaptérkép-rendszer számára a Gauss-Krüger vetülettől eltérő más síkvetületi fajta bevezetése látszik célszerűnek”. A polgári célú vízszintes vonatkoztatási rendszer rövidítése utóbb a HD72 lett, amelynek alaphálózata ugyanaz, mint a katonai rendszeré, de alapfelülete az *IUGG67≡GRS67* ellipszoid, vetületi rendszere pedig az EOV. A háromszögelési hálózatot tehát alakja és mérete megtartásával a GRS67 ellipszoidra képezték le, relatív elhelyezéssel, amikor is a csillagászati pontokban az új ellipszoidra számított függővonal-elhajlások négyzetösszegét minimalizálták és meghatározták a hálózati kezdőpont eltolási paramétereit. A GRS67 ellipszoidon leképzett földrajzi ellipszoidi koordinátákat a Kraszovszkij-ellipszoidi koordinátákból kapták kétféle korrekció számítása után; a korrekciókra a hálózati kezdőpont megváltozása illetve az ellipszoid megváltozása miatt volt szükség. A GRS67 ellipszoidi koordinátákról kettős vetítéssel tértek át az EOV vetületi koordinátákra, amelyeket a gyakorlatban ma is használunk. A harmadrendű, majd az alsórendű pontok számítása már a vetületi síkon történt. Ezeket a munkálatokat nevezhetjük az alaphálózat létrehozása harmadik szakaszának.

Az EOVA részét képezik a negyedrendű vízszintes alappontok is. A negyedrendű alapponthálózat kiépítése az 1950-es évektől 1993-ig tartott. Célja az volt, hogy az országot egyenletesen lefedjék egy olyan sűrű hálózattal, amely képes a további mérési/kitűzési igényeket kielégíteni. Ehhez az akkori mérési technológia igényeit figyelembe véve 1-2 km sűrűségben volt szükség negyedrendű pontokra. Az egyenletes ponteloszlás mellett a másik cél az ún. "jó meghatározás" volt. Az országos negyedrendű alapponthálózat létrejötténél három szakaszt különböztetünk meg.

Az *első szakasz* első időszakát a sürgető felmérési igények jellemezték. Emiatt bizonyos térségekben előbbre kellett hozni a negyedrendű háromszögelési hálózat kiépítését, anélkül, hogy a felsőrendű hálózat elkészült volna. 1958-ban megkezdődtek a negyedrendű hálózat felújítási munkálatai a klasszikus iránymméréses háromszögelés módszerével. A legrégebben háromszögelt határmenti területeken – így Somogy és Baranya déli részén, valamint Borsod és Szabolcs északi és keleti részén – jelölték ki az első munkaterületeket. 1958 és 1963 között az ország területének mintegy 8 %-án végeztek a hálózat felújítása keretében negyedrendű háromszögelést.

A negyedrendű munkálatok *második szakasz*a 1963-tól indult. Ekkortól ún. szabatos munkaterületekről beszélünk. A távmérők megjelenése révén a klasszikusnak nevezett iránymméréses háromszögelés módszerét a vegyes hálózatok foglalták el. A vegyes hálózatok egyik sajátos elrendezése volt a hosszúoldalú sokszögvonal-hálózat (geodiméteres hálózat), ami gazdaságos megoldás volt a kevesebb összelátási kényszer és a kevesebb jelépítés miatt. Másik sajátosságként az 1970-es évek-

ben elterjedt távméréses hálózat-részeket említhetjük, amit az alumínium létraállvány kifejlesztése és a mérőlétrán vagy a mérőlétrára végzett távmérés tett gazdaságossá.

Végül (a harmadik szakaszban) a GPS-technika megjelenése gyorsította fel a negyedrendű pontmeghatározások ütemét, amire az 1990-es évek elején a megnövekedett külterületi területosztások miatt nagy szükség is volt. Összesen 4013 negyedrendű pont létesült GPS-technikával.

3 A hazai magassági alapponthálózat

Szintezési munkálatokat a XIX. század elejétől végeztek kiterjedten hazánkban, amire elsősorban a mocsarak lecsapolása, a termőterületek növelése, a folyóvizek szabályozása érdekében volt szükség. *Huszár Mátyás* nevéhez kötődik az első szintezési utasítás (1820) megírása, *Vásárhelyi Pál* pedig először vonatkoztatta a magasságot az Adriai-tenger vízszintjére (1840).

Az akkori Habsburg Birodalom egészére kiterjedő első szintezési hálózatot a Bécsi Katonai Földrajzi Intézet munkatársai mérték, innen ered a „katonai" jelző erre a hálózatra. Az alappontok magasságát az Adriai-tenger középvízszintjének 1875. évi megfigyeléseiből vezették le. Különleges állandósítással, alapkőzetre telepítve 7 főalappontot hoztak létre. Ezek egyike, a Nadap község határában lévő ún. nadapi szintezési őspont nemcsak szakmai emlék, hanem a hazai magassági alapfelületnek is vonatkozási pontja. A magyar magassági alapfelület az a szintfelület, amely a nadapi főalappont alatt 173,8385 méterre húzódik.

Az első világháborút követően, a monarchia felbomlásával a közös mérésügyi szervezet is megszűnt, az eredeti jegyzőkönyvek és adatok Bécsben maradtak. Az új határok közötti ország új szintezési hálózatának kiépítése 1921-ben kezdődött. Az elsőrendű hálózat korának kiváló teljesítménye volt; ezt a poligon-záróhibákból is láthatjuk, amelyek a mai szigorú hibahatároknak is megfelelnek. A hálózat sűrítése azonban a második világháború miatt nem készült el, így ez a hálózat nem került gyakorlati felhasználásra.

A háborús újjáépítést és a műszaki gyakorlatot szolgáló következő, sorrendben a harmadik hálózat 1948 és 1964 között épült ki. A hierarchikus felépítés szerint az országos felsőrendű hálózat első-, másod- és harmadrendű vonalakból illetve pontokból épült fel. Az elsőrendű hálózat 1948 és 1956 között készült el, és 33 poligonból állt. A másodrendű vonalakat 1950-1958 között, a harmadrendűeket 1950 és 1964 között mérték. A hálózat kiépítése, a munkálatok irányítása *Bendefy László* (1904-1977) nevéhez fűződik, nevezik ezért Bendefy-hálózatnak is. A mérési technológia a mai értelemben vett szabatos szintezés volt Wild N3 típusú szintezőműszert és invárbetétes lécpárt használva. Az ötvenes évek elején 8 darab ún. sziklás főalappontot létesítettek, hegységek sziklakibúvásaira telepítve, köztük a nadapi ősponttól 200 méterre a Nadap II. nevű főalappontot. A szakaszvégpontok állandósítása csap, gomb, illetve kőben gomb volt.

A hálózat kiépítése közben, 1960-ban rendelték el, hogy a kelet-európai szocialista országokban az adriai alapszintről a balti alapszintre kell áttérni. A nadapi (adriai) és a balti alapszint eltolódásának mértékét a magyar és a szovjet hálózatok összekapcsolásával állapították meg ($H_{balti} = H_{nadapi} - 0{,}6747$ méter).

Az 1960-as évek közepétől, a nemzetközi geodéziai szervezetek részéről különös figyelem irányult az ismételt szintezésekre, amelyektől a földkéregmozgás függőleges összetevőjének meghatározását várták. Magyarországon is sor került egy szintezési hálózat tervezésére és kiépítésére, ugyanis ilyen célra a meglévő hálózat pontjai – állandósításuk miatt – nem voltak megfelelőek. Olyan új típusú, földalatti állandósítási módokat dolgoztak ki, amelyek a felszín mozgásaitól (talajvízszintváltozás, fagyhatás, rezgés, ülepedés) mentesítik a pont mozgását, hogy az valóban a földkéreg mozgását reprezentálja. Ezeket a kéregmozgásvizsgáló pontokat nevezzük K-pontnak (másképpen KKP – Közbenső Kéregmozgási Pont).

A K-pontok szemlélésekor, állandósításakor tapasztalt nagymérvű pontpusztulás láttán az 1970-es évek elején úgy döntöttek, hogy nemcsak új vízszintes vonatkoztatási rendszert hoznak létre (HD72), hanem magasságit is. Így lett a kéregmozgásvizsgálati hálózat az Egységes Országos Magassági Alapponthálózat (röviden: EOMA) elsőrendű hálózata.

Az EOMA első-, másod- és harmadrendű hálózatra tagolódik, célja az 1 pont / 4 km^2 átlagos pontsűrűség biztosítása. Az elsőrendű hálózat mérése 1973 és 1978 között történt. Egy-egy elsőren-

dű poligonon belül a másod- és harmadrendű hálózat kiépítését egy munkafolyamatban végezték, ez a pontsűrítés azonban – a politikai változások, a finanszírozási nehézségek miatt – egészen 2006-ig elhúzódott. A másod- és harmadrendű szintezést (az elsőrendűhöz hasonlóan) 2000-ig MOM NiA31 típusú szintezőműszerrel végezték, PTA4000 terepi adatgyűjtőt használva. 2000-től a Dunántúl nagy részén az elsőrendű poligonokban csak a másodrendű vonalakat mérték szabatos szintezéssel, a harmadrendű pontok mérésénél GPS-technikát használtak. Az új technológia bevezetését a FÖMI KGO-ban kidolgozott magasságmérési módszer tette lehetővé (Kenyeres és Borza 2000). A harmadrendű pontok GPS-mérésből kapott ellipszoidi magasságának átszámítását balti magassággá geoid-modell és másodrendű EOMA-GPS illesztőpontok biztosították.

Az EOMA elsőrendű hálózatát 27 vonalból kialakított 11 poligon alkotja, ezek 22 szárnyvonallal csatlakoznak a szomszédos országokhoz, illetve az európai szintezési hálózathoz (3. ábra). A hálózat csomópontjainak száma 17. Az elsőrendű vonalak teljes hossza 3900 km, ezek 90 %-a az előző hálózat valamely első-, másod- vagy harmadrendű vonalával azonos, 10 %-ban új kiépítésű vonal. Az EOMA-nak összesen 40 db főalappontja van, ezek közül 15 db sziklára telepített pont (ide tartozik az előző, Bendefy-féle hálózat 8 db főalappontja is), és 25 db különleges, mélyalapozású pont. Az elsőrendű vonalak mentén átlagosan 5-6 kilométerenként vannak K-pontok, a másodrendű vonalak mentén 12 kilométerenként. Minden KKP közvetlen közelében található egy hagyományos állandósítású alappont is (csap, kő), ami a gyakorlati célokat szolgálja.

Az EOMA kiegyenlítésekor a Nadap II. főalappontot vették adottnak, amelynek magassága 176,23382 méter. A szakaszok magasságkülönbségét normál javítással és asztronómiai korrekcióval látták el, a kiegyenlített értékek normál magasságok.

Az EOMA újramérése a Kelet-Magyarország északi részét lefedő 8-as, 9-es és 10-es poligonban indult meg, az ún. KMO munkaterületen. A 9. és 10. poligon északi felének szintezését 2007-2008-ban végezték (KMO1), míg a 9. és 10. poligon déli felét és a teljes 8. poligont 2008-2009-ben (KMO2) mérték fel. A szabatos szintezéshez Leica DNA03 digitális szintezőt és kalibrált, vonalkódos lécpárt használtak, ami kényelmesebbé tette a mérést, de a szintezés kilométeres középhibája a korábbiakhoz hasonlóan alakult (0,3 mm/km).

3. ábra. Az EOMA elsőrendű vonalai (vastag vonallal), másodrendű és harmadrendű vonalai (vékonyabb vonallal), valamint a dunántúli területen GPS-szel mért harmadrendű pontok

4 GPS/GNSS hálózataink

A GPS-technika tényleges használata az 1980-as évek végén, a ’90-es évek elején vált lehetővé, amikor megjelentek az első geodéziai GPS-vevők és megfelelően kiépítetté vált az amerikai GPS navigációs rendszer. Magyarországon 1989-ben, Hollandiából érkezett kölcsönvevőkkel történtek az első hazai, kísérleti jellegű GPS-mérések. 1990-ben 5 darab geodéziai GPS-vevő volt hazánkban, amelyeket bevontak az akkor még folyó negyedrendű alappontlétesítési munkálatokba. 1991. november 2-4. között nemzetközi támogatással (EUREF East-kampány) Trimble SST típusú kétfrekvenciás műszerekkel öt magyarországi ponton (Penc, Sopron, Tarpa, Csarnóta, Csanádalberti) történtek azok a GPS-mérések, amelyek az 1989-es nyugat-európai GPS-hálózathoz való csatlakozást biztosították. Közvetlenül ezután (1991. november 5-8. között) egy 24 pontból álló ún. kerethálózat mérésére került sor. A GPS-mérésekből számított koordináták 1994-ben váltak hivatalossá, ezzel a hazai térbeli vonatkoztatási rendszer az ETRS89 lett.

A gyakorlati geodéziai igények kielégítésére egy sűrűbb GPS-hálózatot terveztek, pontjainak kiválasztását 1994-ben végezték. A tervezés során az akkoriban a GPS-es pontsűrítésben egyedüliként használatos technológiát, a gyors statikus mérést vették alapul a geodéziai alkalmazásokhoz. Így alakult ki az Országos GPS Hálózat (OGPSH), átlagosan 10 km-es pontsűrűséggel (Borza 1997). Az OGPSH pontjai nem újak (nem új állandósítású pontok), hanem azokat a meglévő felső- és negyedrendű vízszintes alappontokból és iránypontokból választották ki. Ezzel kapcsolat jött létre a hagyományos vízszintes hálózattal (EOVA), az OGPSH pontok egyúttal közös pontok is a GPS-EOV transzformációhoz, továbbá a referenciapont szerepét is betölthetik a gyors statikus mérésekhez, akár egyfrekvenciás vevőkkel is. Ennek alapján (bár hivatalosan nem volt rá költségvetés) szemlélték, bejárták az EOVA alappontokat az ország egész területén és kiválasztották a megfelelőket. A kiválasztás szempontjai között szerepelt, hogy minden körülmények között megközelíthető (út menti) pontok legyenek, 20 fok fölött szabad kilátás legyen az égboltra, szintezéssel könnyen meghatározható, fenntartható pontok legyenek.

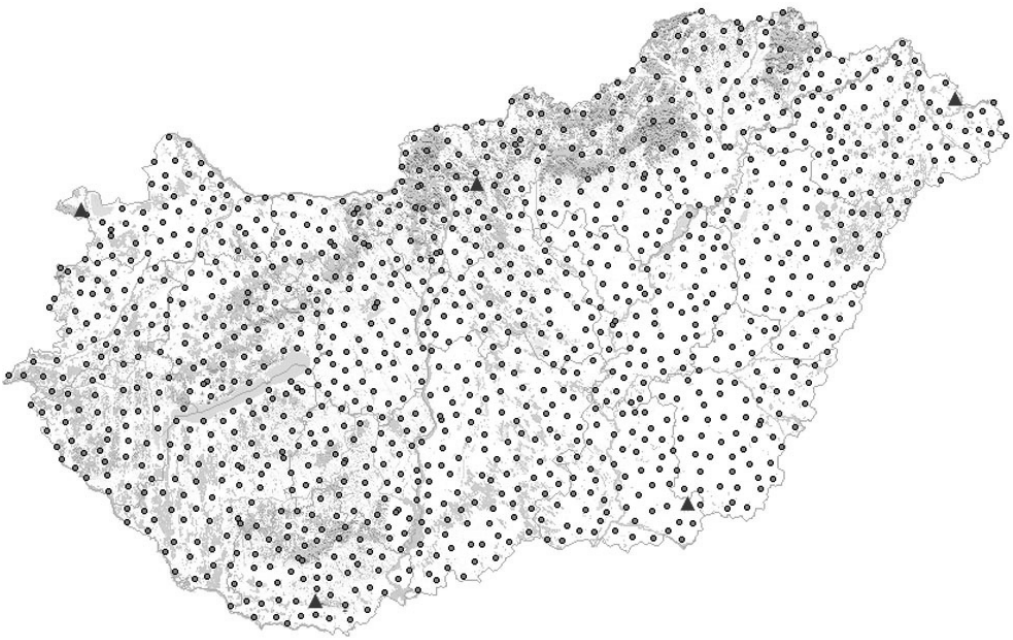
A pénzügyi források miatt csak három évre ütemezve lehetett kampányt szervezni, így az első kampányra 1995-ben a Tiszántúlon került sor, a másodikra 1996-ban a Duna-Tisza közén, majd 1997-ben a Dunántúlon. Minden kampány során 10 személy vett részt a terepi munkában. A mérőfelszerelést 9 Trimble SST illetve SSE típusú vevő alkotta. Fontos szerepe volt a mobiltelefonos kapcsolattartásnak és az irányító mérnöknek.

Összesen 1153 pont alkotja az OGPSH-t (4. ábra). Az ETRS89 koordináták véglegesítése után egy speciális transzformációval a pontok balti magasságát is meghatározták. Ehhez az OGG98B gravimetriai geoidmodellt használták fel, az illesztéshez 340 olyan OGPSH pont állt rendelkezésre, melyeknek szintezett balti magassága is volt (vegyesen a Bendefy-féle és EOMA hálózatból). Az OGPSH pontok pontleírásán ezért szerepel kiemelten az a megjegyzés, hogy az EOV koordináták sorában lévő balti magasság nem eredeti mérésből származik, hanem transzformált érték. Ennek következménye az is, hogy az OGPSH pontokat, mint transzformációs pontokat használva, magassági értelemben sokkal kisebb ellentmondásokat kapunk, mint vízszintes értelemben.

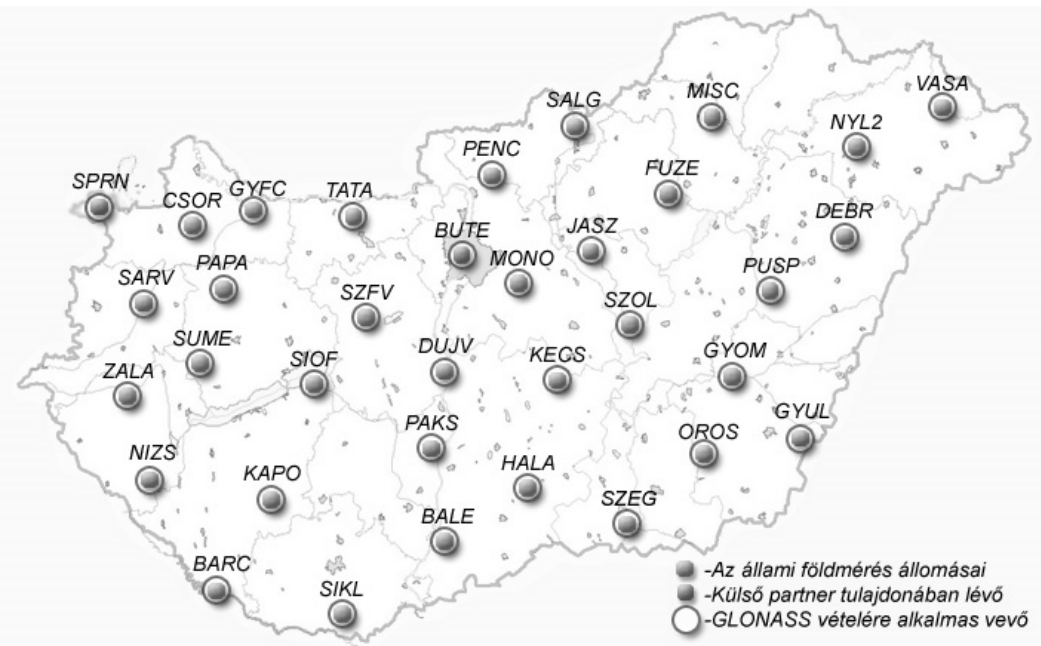
1996 márciusában telepítették a penci Kozmikus Geodéziai Obszervatóriumban az első hazai folyamatosan üzemelő vevőt, az ún. permanens állomást. Több mint tíz évnek kellett eltelnie, amíg további permanens állomások telepítésével, 2009 végére teljesen kiépült a hazai aktív GNSS hálózat (5. ábra). Kezdetben csak utólagos feldolgozáshoz lehetett a referenciaállomások adatait letölteni, 2007-től azonban a GNSS Szolgáltató Központban telepített korszerű szerverek és szoftverek révén egyre többféle szolgáltatást vehetnek igénybe a felhasználók.

2010-ben teljessé vált a környező hét országgal a kölcsönös adatcsere, ami összesen 54 referenciaállomás folyamatos feldolgozását jelenti. A hálózat neve a szolgáltatás honlap-címével azonos: *gnssnet.hu*. A honlapon elérhetők a központ termékei, szolgáltatásai, melyek közül kiemelt jelentősége van a hálózatos RTK (más szóhasználattal: hálózati RTK) szolgáltatásoknak. A hálózatos RTK lényegesen átalakította a mindennapi földmérési gyakorlatot, néhány év alatt mind az alappontsűrítésben, mind a részletes felmérésben és a kitűzésben döntő szerepre tett szert.

Ugyanakkor a vonatkoztatási rendszer fenntartása is áttevődött a passzív OGPSH-ról az aktív hálózatra.



4. ábra. Az OGPSH 1153 pontja, kiemelve az első ETRS89-csatlakozás 5 pontját



5. ábra. Az aktív GNSS hálózat mind a 35 referenciaállomásán GPS-Glonassz vevő működött 2012-ben. Ezeken kívül további 19, szomszédos országbeli állomás biztosítja a teljes hálózatos RTK lefedettséget

A vonatkoztatási rendszer pontosítása során 2007 nyarán az OGPSH kerethálózatát újramérték, majd újra kiegyenlítették a hazai referenciaállomások méréseivel együtt, az európai aktív hálózat új rendszerű koordinátáit alapul véve. Ezt követően térbeli hasonlósági transzformációval újraszámolták az összes OGPSH pont ETRS89 koordinátáit (a kerethálózati pontokat használva közös pontként). 2007. október 25-ig az OGPSH 1997. évi kiegyenlítéséből származó, az ETRS89/ETRF89 1991.8 epochára vonatkozó koordináták voltak hivatalosak, ezt követően pedig az ETRS89/ETRF2000 jelzésű koordináták.

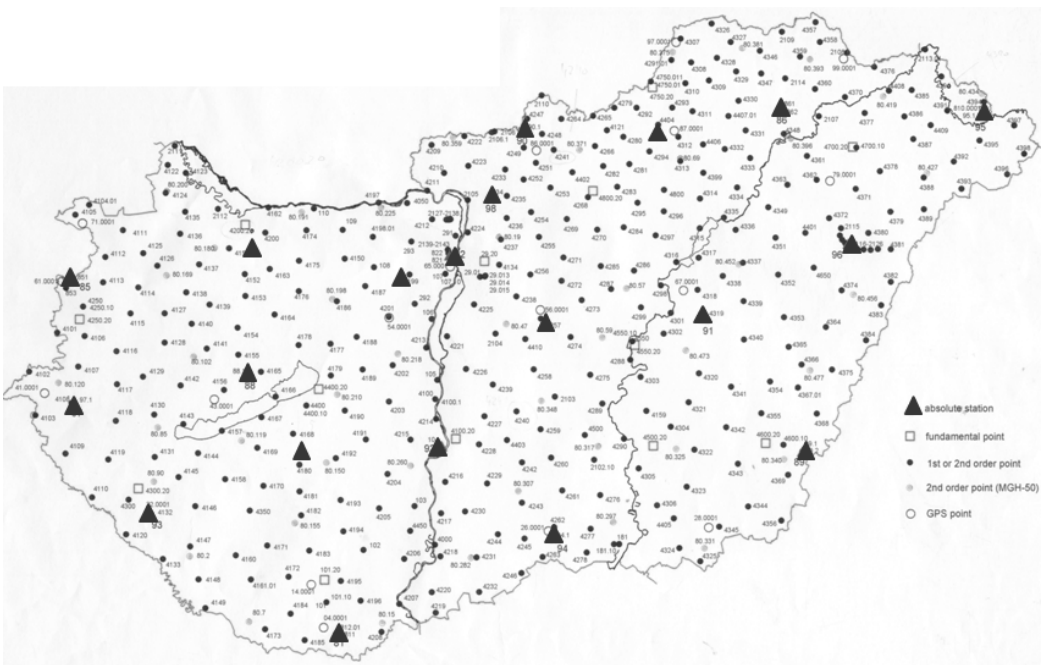
5 A gravimetriai hálózatokról

A geodézia és a geofizika Magyarországon a kezdetektől „külön utakon jár” (Csapó és Földváry 2006) – szervezetileg legalábbis – noha összetartoznak. A két szakterület kapcsolódására szükség van, mert például korszerű szintezési hálózatok sem hozhatók létre gravimetriai mérések nélkül. A gravimetriai méréseket az Eötvös Loránd Geofizikai Intézet (ELGI) munkatársai illetve az abból kivált cégek végzik.

Az első, országos lefedettségű gravimetriai hálózatot relatív (rugós) graviméterekkel az 1950-es évek elején hozták létre. 1951-ben készült el a 16 (ún. „akadémiai”) pontból álló elsőrendű hálózat, majd erre támaszkodva alakították ki a 493 pontból álló másodrendű hálózatot. Az MGH-50 (Magyar Gravimetriai Hálózat 1950) jelölésű hálózat alappontjainak többsége ma már nem található meg.

Az 1970-es években kezdődött és 1990-re fejeződött be egy újabb gravimetriai hálózat kiépítése (MGH-80). Itt a 19 elsőrendű pont közül ötön abszolút graviméterrel is mértek, a 360 pontból álló másodrendű hálózatot az előzőnél korszerűbb (CG2) műszerekkel mérték.

A rendszerváltozás után lehetővé vált a magyar hálózat összekapcsolása a közös európai hálózattal, továbbá újabb relatív és abszolút graviméter-típusok bevonása. A mára kialakult, MGH-2000 jelzésű gravimetriai alaphálózatnak (6. ábra) 25 abszolút pontja van (ezek közül 20 országhatáron belüli, 5 külföldi), továbbá 450 első- és másodrendű bázispontja. A terepi pontokat 80×80×100 cm, vagy 100×100×100 cm méretű betontömb jelöli a talajszinten. Az újabb mérések illetve abszolút gravimetriai állomások bevonása révén a hálózatot újra kiegyenlítik, korszerűsítik.



6. ábra. Az MGH-2000 alappontjai, kiemelve az abszolút állomások

6 Geodéziai hálózataink jövőjéről

A geodéziai hálózatok a vonatkoztatási rendszer megvalósítói a gyakorlatban. Mind Földünk globális megfigyelése (ideértve a Föld alakját, méretét, nehézségi erőterét és azok változását, a tektonikai folyamatokat), mind a gyakorlati geodézia (a felmérések, kitűzések, lokális mozgásvizsgálatok) igénylik a vonatkoztatási rendszer folyamatos fenntartását, a méréstechnikának megfelelő pontosítását. Ez a feladat a geodétákra hárul, de sohasem tekinthető befejezettnek, éppen Földünk globális és lokális időbeli változása, valamint a méréstechnika folyamatos korszerűsítése miatt. Az időtényező fontosságára egyébként *Biró Péter* professzor úr évtizedekkel ezelőtt is kiemelten rámutatott, noha az akkori technológiák ennek gyakorlati jelentőségét nem tették nyilvánvalóvá.

A magyarországi geodéziai hálózatok áttekintése után esetleg úgy tűnik, mintha ezen a területen a munka befejeződött volna, és minden rendben lenne, pedig ez koránt sincs így. A következőben röviden számba veszem azokat a feladatokat, amelyek a közeljövőben meglátásom szerint megoldásra várnak.

Vízszintes hálózatunk, az EOVA betöltötte szerepét; kétségtelen, hogy a háromszögelés technológiáját országos méretekben a jövőben nem fogjuk használni. A GNSS technológia lehetővé teszi, hogy sokkal kisebb sűrűségű országos alapponthálózattal is hatékonyan megoldjuk földmérési feladatainkat. Kérdés azonban, hány vízszintes alappont megőrzésére, további fenntartására van szükségünk? Erre vonatkozóan születtek tervek, de úgy vélem, mind szakmai, mind szélesebb társadalmi méretekben a kérdés megvitatására van szükség. EOTR rendszerű topográfiai és földmérési térképeink (bár digitális formában) még hosszú ideig használatban lesznek, s mindaddig a létrehozásuk alapját jelentő vízszintes hálózatra is szükség van. Az alappontvédelem és karbantartás kérdése különösen azon elsőrendű pontoknál merül fel sürgősséggel, amelyeken vasbeton mérőtorony áll.

Magassági hálózatunk, az EOMA újramérésre vár. Ez a munka elkezdődött, de pénzhiány miatt megakadt. Az eddigi adatokból úgy tűnik, hogy akár deciméteres függőleges felszínváltozások is történhettek az elmúlt három évtizedben (Busics 2010, Virág 2011), de ez a kérdés tudományos alapossággal csak akkor tisztázható, ha országos méretekben állnak rendelkezésre adatok (és természetesen az ismételt szintezés nem húzódik el hosszú évekig). Gyakorlati szempontból az előzőnél is erősebb érv az EOMA-újramérés folytatására az a gyakorlati igény, hogy GNSS technológiával a mostaninál pontosabb balti magassághoz lehessen jutni. Ennek a kérdésnek a megoldására is választ ad az *Integrált Geodéziai Alapponthálózat* (INGA), amelynek terve készen van (Kenyeres et al. 2011), megvalósítása elkezdődött, de folytatásra vár.

Az OGPSH, mint passzív hálózat, szintén betöltötte szerepét. Egyre kevesebbet használjuk az OGPSH pontokat referenciaként, de transzformációs szerepük sokáig megmarad még. Az OGPSH az adatbázisa például a széles körben használt EHT és a VITEL szoftvereknek. Az OGPSH tette lehetővé, hogy jobban megismerjük az EOVA „természetét”, vizsgáljuk például háromszögelési hálózatunk méretarányának, tájékozásának anomáliáit (Busics 2007). Úgy vélem e vizsgálatok folytatásának van tudományos jelentősége, de gyakorlati igénye is abból a szempontból, hogy minél jobb összhangot teremtsünk a kétféle vonatkoztatási rendszer között. Ismeretes, hogy vannak olyan anomáliák a vízszintes háromszögelési hálózatban, amelyek további vizsgálatra várnak. Megemlítendő, hogy az OGPSH kerethálózata jelenti lényegében a *Magyar GPS Geodinamikai Alapponthálózatot*, amelyet 1991 óta eddig minden második évben újramértünk. A viszonylag hosszú időbázis lehetővé tette a lassú mozgásfolyamatok megismerését (Grenerczy és Fejes 2007). *Grenerczy Gyula* vetette fel, hogy az OGPSH újramérése (vagy egyes pontcsoportjainak újramérése) egyedülálló lehetőséget jelentene hazánk vízszintes mozgásviszonyainak megismerésére. Ez a terv is megvalósításra vár.

A hazai aktív hálózat „újramérése” a mérési folyamat automatizmusából adódóan természetes: naponta születnek új koordináták a résztvevő állomásoknak, és elemzés után ún. heti megoldások is. A GNSS alaprendszerek és vevőkészülékek korszerűsítése, a központban működő szoftverek, és a tudományos hátteret jelentő matematikai modellek fejlődése azonban komoly kihatással van a GNSS infrastruktúra fenntartására és a személyzetre, mert folyamatos követést kíván meg. A jövőben az aktív hálózat veszi át a vonatkoztatási rendszer fenntartójának szerepét. Ilyenre került sor

első alkalommal 2007. október 25-én, amikor megváltozott az összes OGPSH pont ETRS89 rendszerbeli koordinátája (Borza et al. 2007). Hasonló „rendszerváltásra” a jövőben is számíthatunk.

A gravimetriai hálózat fenntartása és korszerűsítése az állami feladatokhoz sorolható, de ez a feladat nehézségekbe ütközik. A további feladatok összefüggnek az EOMA újramérésével és az INGA kialakításával. Az INGA *„azon fokozott fizikai és jogi védelemmel ellátott geodéziai alappontok összessége, amelyek helymeghatározó adatait és azok időbeli változását a vízszintes, a magassági, a térbeli és a gravitációs vonatkoztatási rendszerekben, szabatos mérési és feldolgozási módszerrel, többféle méréstechnika alkalmazásával határozták meg”* (Kenyeres et al. 2011). Ehhez többek között szükség lenne egy abszolút graviméter beszerzésére, de az ilyen célú pályázatok eddig nem hoztak eredményt.

7 Záró gondolatok

Ebben az írásban a hazai geodéziai hálózatok történetét, szerepét, helyzetét tekintettem át. Megállapításaimat, javaslataimat mai tudásom szerint, szakmai és műszaki szempontok alapján fogalmaztam meg. Tisztában vagyok azonban azzal, hogy minden elképzelés, javaslat pénzkérdés is. A mai, válságokkal terhelt gazdasági helyzetben igen nehéz egy költségvetési forrást igénylő tervet megvalósítani, bármennyire is indokolt az, bármennyire megalapozott törvényi háttérrel és uniós előírásokkal rendelkezik is a javaslat. Ez csak akkor sikerülhet, ha szűkebb szakmai körben egyetértésre jutunk, de talán ennél is fontosabb a döntéshozók és a szélesebb közvélemény korrekt tájékoztatása, meggyőzése.

Hivatkozások

Ádám J (2003): A felsőgeodézia helyzete és időszerű feladatai Magyarországon. Székfoglalók a Magyar Tudományos Akadémián, 1995-98, VI. kötet, Budapest.

Ádám J (2005): Egységes európai geodéziai és geodinamikai alapok létrehozása. Akadémiai székfoglaló. MTA különnyomat, Budapest.

Ádám J (2009): Geodéziai alapponthálózataink és vonatkoztatási rendszereik. Geodézia és Kartográfia jubileumi különszám, 2009. 6-20.

Biró P (2002): A vonatkoztatási rendszerek és a geodéziai dátum. Geomatikai Közlemények, 7, 7-24.

Biró P (2003): Felsőgeodézia. Egyetemi jegyzet, Budapest. (www.agt.bme.hu/tantargyak)

Biró P (2005): Kozmikus geodéziai alapfogalmaink újragondolása. Geomatikai Közlemények, 5, 5-12.

Biró P (2006): Kozmikus geodézia. Egyetemi jegyzet, Budapest. (www.agt.bme.hu/tantargyak)

Borza T (1998): Elkészült az országos GPS hálózat. Geodézia és Kartográfia, 50(1), 8-13.

Borza T, Kenyeres A, Virág G (2007): Műholdas geodéziai vonatkoztatási rendszerünk (ETRS89) felújítása. Geodézia és Kartográfia, 49(10-11), 40-48.

Busics Gy (2007): A műholdas helymeghatározás geodéziai alkalmazásának technológiai és minőségi kérdései. PhD értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem.

Busics Gy (2010): Az EOMA újramérésének előzetes eredményei az első három poligonban. Geomatikai Közlemények, 13(2), 41-148.

Csapó G, Földváry L (2006): A magyarországi gravimetria története napjainkig. Geodézia és Kartográfia, 58(7), 23-30.

Grenerczy Gy, Fejes I (2007): A magyarországi GPS mozgásvizsgálatok 17 éve. Geodézia és Kartográfia, 59(7), 3-9.

Joó I, Raum F (szerk.) (1996): A magyar földmérés és térképészet története. MTESZ-GKE, Budapest, 1993-1996. I., II., III. kötet.

Kenyeres A, Borza T (2000): Technológia-fejlesztés a III. rendű szintezés GPS technikával történő kiváltására. Geodézia és Kartográfia, 52(1), 8-14.

Kenyeres A, Herczeg F, Csizmadia M-né, Busics Gy, Virág G (2011): Az Integrált Geodéziai Alapponthálózat (INGA) koncepciója. Geodézia és Kartográfia, 63(3), 7-12.

Virág G (2011): Az újramért EOMA-poligonok kiegyenlítése. Geomatikai Közlemények, 13(2), 37-44.

4D-GEODÉZIA: AZ IDŐBELI VÁLTOZÁSOK KEZELÉSE A GEODÉZIAI HÁLÓZATOKBAN – JELEN ÉS JÖVŐ

Kenyeres Ambrus[*]

4Dgeodesy: the handling of time-dependent effects in geodetic networks – present and future – *This paper treats the long-term maintenance of the geodetic reference networks from the global to the national levels. The distinct scientific and practical requirements and applications are shown, the term of 4D-geodesy is defined, and also an outlook for the near future is given, where the real-time GNSS applications, together with the model, handling the time-dependence of the coordinates, make us to re-consider the practice of network maintenance.*

Keywords: geodetic networks, GNSS, time-dependent effects, velocity model

A cikk a geodéziai alapponthálózatokban, globálistól az országos hálózatok szintjéig tárgyalja a pontok koordinátái hosszútávú változásának kezelését. Bemutatja az eltérő tudományos és gyakorlati igényeket, alkalmazásokat, definiálja a 4D-geodézia fogalmát, kitekintést ad a közeljövőre, ahol a valósidejű GNSS alkalmazások, együtt a koordináták időfüggését kezelő modellel átgondolásra késztetik az alapponthálózatok fenntartásának módját.

Kulcsszavak: geodéziai hálózatok, GNSS, időfüggő hatások, sebesség modell

1 Bevezetés

A földtudományokban a mért mennyiségek illetve a vizsgált paraméterek időbeli változásainak elemzését mind a kutatás mind a gyakorlat prioritásnak tekinti, de sajátos céljaiknak megfelelően mindig is eltérően kezeli. Az elméleti megfontolásokkal kiegészített kutatások célja az időbeli változások feltárása, megértése, és elemzése. Ezeknek a vizsgálatoknak az eredményei épülnek be utána pl. a geodéziai gyakorlatba, ahol a hálózati pontok mérőszámainak elvárt stabilitása az időfüggő hatások leválasztásával, azaz korrekcióba vételével biztosítható.

Mindegyik kutatási és alkalmazási területnek megvan a saját történeti fejlődése, amely összefügg a matematikai eszköztár, a gyakorlat igényszintje illetve a méréstechnológia fejlődésével. Ennek egyik legszebb példája a gravimetria, ahol az időfüggés vizsgálatával Biró professzor úr is maradandót alkotott (Biró 1988). A gravimetriában az időbeli változások vizsgálata a jól modellezhető hatások (pl. különböző árapály összetevők) pontosítását illetve a mérésekből az azok leválasztása után megmaradó adatok jeltartalmának az értelmezését jelenti. A méréstechnológia fejlődésével egyre több, korábban a zajszinten belül levő környezeti hatás (pl. talajvízszint) is detektálhatóvá vált, kibővítve a vizsgálatba, esetleg korrekcióba veendő mennyiségek körét. Ez azzal a sajnálatos következménnyel is jár, hogy pl. a legtöbb historikus abszolút gravimetriai mérés értelmezése nehézkessé válik, mert a nem modellezhető és nem rekonstruálható külső hatások torzítják az eredményeket.

Több más tudományterületen, így a műholdas helymeghatározás terén is hasonló jelenséggel állunk szemben, a mérési pontosság növekedésével korábban elhanyagolt hatások (antenna fáziscentrum-modellek, többutas jelterjedés közeli tárgyakról) figyelembevétele is lehetővé és szükségessé vált, amely szerencsés esetben a mérések újrafeldolgozásával megtehető.

A geodéziai gyakorlat a vonatkoztatási rendszereket megtestesítő hálózati pontokat leíró paraméterek, pl. koordináták időbeli stabilitását kívánja meg. A klasszikus geodéziában a „stabilitás” a megfelelő pont-állandósításon túl a definiáló méréseket terhelő környezeti (pl. légköri jelterjedés) és rövid periódusú időfüggő hatások (pl. árapály) javítások formájában történő figyelembevételével volt elérhető. Az egységes módszereket a szabályzatokban meghatározott eljárások szerint kellett alkalmazni. A klasszikus technológiák pontossági illetve műszaki korlátai (ismételhetőség, ténykle-

[*]*FÖMI KGO, 2614 PENC.*
E-mail: kenyeres@sgo.fomi.hu

ges homogenitás) miatt a vízszintes alapponthálózatok nem voltak alkalmasak a hosszú periódusú (szezonális illetve évszázados) változások kimutatására és a kapcsolódó tudományos vizsgálatokra. A magassági alapponthálózatok esetében történtek ugyan kísérletek a nagyságrendileg 30 évente ismételt szintezések alapján felszínmozgások kimutatására (Joó et al. 1987, Joó 1992), de a kevés mérési epocha, a pontpusztulás miatti kevés közös pont megnehezítették az eredmények értelmezését.

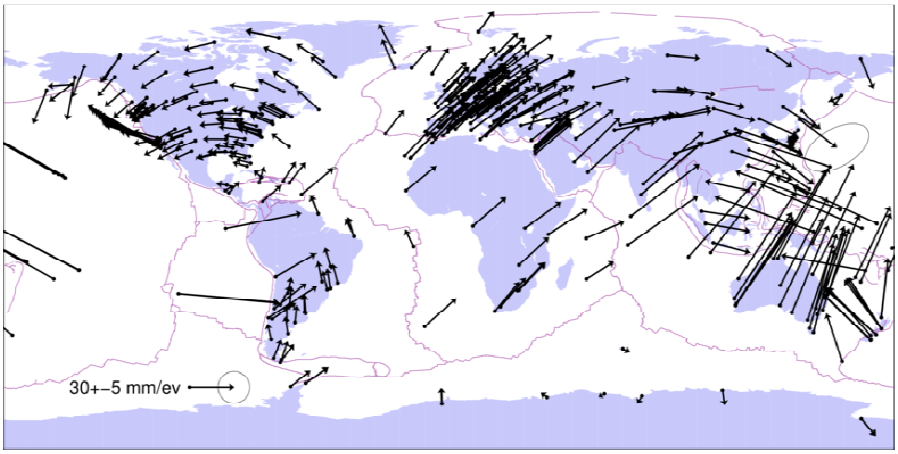
A modern műholdas technológiák megjelenésével a helyzet gyökeresen megváltozott. Egységes rendszerben, a globálistól a kontinentálison át a lokális mérésekig ugyanaz a technológia, ugyanaz a műszerezettség, ugyanazok az analízis eljárások állnak rendelkezésre, és ráadásul folyamatos üzemmódban, akár nagy időfelbontásban is (Bruyninx et al. 2009, Caporali et al. 2009, Grenerczy és Fejes 2007). Új lehetőségek nyíltak meg a tektonikai és felszínmozgások vizsgálatában, a koordináta idősorok vizsgálatával pedig soha nem látott részletességgel lehetett az időfüggő hatások elemzését is megkezdeni. Hasonlóan a néhány bekezdéssel korábban említett gravimetriához a helymeghatározásban is a megnövekedett pontosság és időbeli felbontás a tudományos értékeken túl felvetette az időbeli változások kezelésének módját a gyakorlatban. Kezeljük-e ezeket újabb korrekciókként, vagy ténylegesen tekintsük az alapponthálózatokat 4-dimenziósnak? A kérdésre az alkalmazástól, a hálózat méretétől és a földrajzi helyzettől függően eltérő válasz adható.

2 Globális hálózatok és vonatkoztatási rendszerek

A műholdas helymeghatározás természetes vonatkoztatási rendszere az ITRS (International Terrestrial Reference System). Az ITRS ún. megvalósulásait az ***ITRFyy*** (International Terrestrial Reference Frame, az yy a bennfoglalt mérési adatsor záró évszámát jelenti) megoldásokat az egyes űrgeodéziai technológiák (GNSS, SLR, VLBI, DORIS) követőhálózatai méréseinek együttes kiegyenlítése alapján határozzák meg és rendszeresen újítják fel. A legfrissebb megoldás a 2010-ben kibocsátott ITRF2008 (Altamimi et al. 2011). A tudományos és gyakorlati célokat is szolgáló, az ITRF2008-at definiáló hálózat, amely alapvetően az IGS (International GNSS Service) alappontjaiból áll, ténylegesen 4D hálózatnak tekinthető, mert ismertek egy adott epochára vonatkozó térbeli koordinátái, a pontok sebessége és emellett a pontok mozgásának egyelőre heti felbontású idősora. Tehát nem csak a lineáris trendek, de az évszakos változások, illetve egyéb nem-lineáris mozgások (földrengések) is nyomon követhetők, teret engedve a tudományos vizsgálatoknak, és egyúttal lehetővé téve a regionális illetve nemzeti szintű vonatkoztatási rendszerek definiálását. Ezek az idősorok teszik lehetővé az egyes állomások stabilitásának a vizsgálatát is, kiszűrhetővé téve a nem megfelelő állandósítású pontokat.

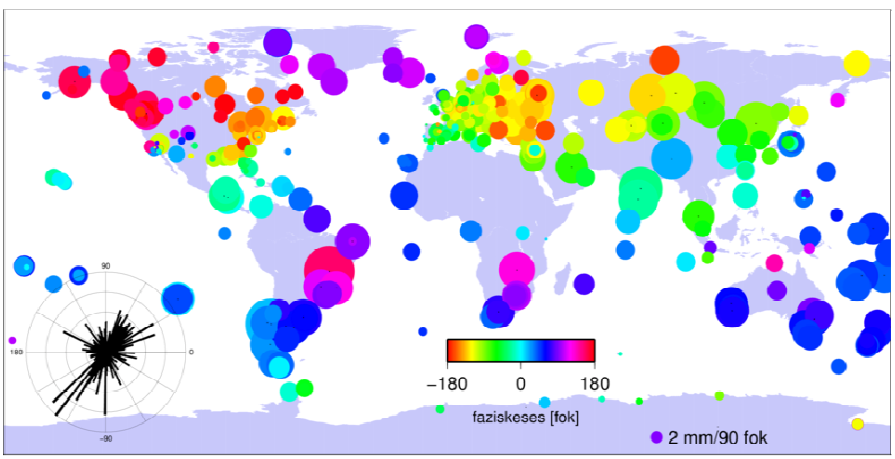
Az IGS alapponthálózat egységes szempontok alapján újrafeldolgozott és hetente ún. SINEX formátumban publikált eredményei alapján a FÖMI KGO-ban is készült egy 15 éves globális adatsort átfogó kiegyenlítés. A számítások az ITRF2008 előállításához használt CATREF szoftverrel (Altamimi et al. 2004) történtek és kiváló egyezéssel reprodukálták az ITRF2008 eredményeket (<1cm a koordinátákban és <1mm/év a sebességekben). A meghatározott sebességek (1. ábra) jól mutatják a kontinentális kőzetlemezek ismert, több cm/év sebességű mozgását. Az ITRFyy megoldások általában csak közvetve, pl. transzformációs megoldások beépítésével teszik lehetővé a gyakorlati alkalmazásukat. A tektonikusan aktív területeken (pl. Görög- és Törökország, Új-Zéland), ahol a klasszikus, lineáris redukciót jelentő hétparaméteres transzformáció nem elegendő, dinamikus nemzeti dátumot és nyilvántartást kell kidolgozni. A hosszútávú mérési sorozatok együttes kiegyenlítésével és a maradék ellentmondások elemzésével a nem-lineáris, pl. harmonikus évszakos hatások is vizsgálhatók.

Az analízis lehetőségeinek demonstrálására a 2. ábrán a már említett IGS alapú kiegyenlítésből származó idősorok évszakos adattartalmát mutatjuk be. Az ábrán jól láthatók az északi és déli félteke ellentétes évszakai miatti eltérő hidrológiai hatások, jól körülhatárolható, a klimatikus viszonyokkal összhangban lévő régiók jelölhetők ki. A legnagyobb amplitúdójú változások az esőerdőkben (Amazonas-medence, Délkelet-Ázsia) találhatók, míg pl. Európa a stabilabb éghajlatú nyugati résztől indulóan a kontinentális Kelet-Európa felé haladva egyre növekedő amplitúdójú és fokozatosan változó fáziskésésű szezonális változással jellemezhető.

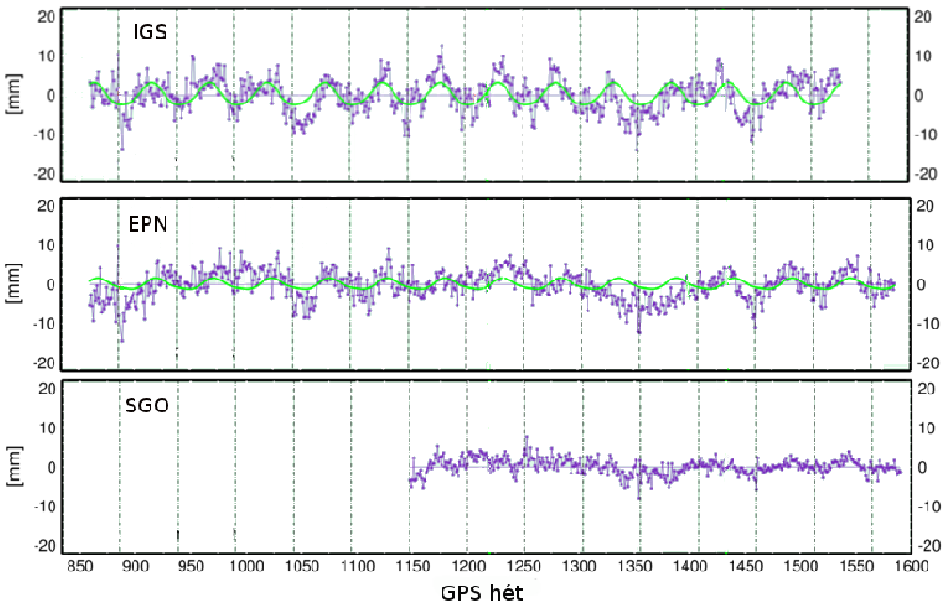


1.ábra. Az IGS követőhálózata 15 éves mérési sorozatából az ITRF2008 vonatkoztatási rendszerben meghatározott vízszintes sebességek. Az ábrán feltüntettük a kontinentális lemezhatárokat. A sebességek jól tükrözik a kontinentális kéreglemezek mozgását

Tudni kell azonban, hogy az évszakos hatások kvantitatív analízisére kizárólag globális feldolgozásból származó adatok alkalmasak. Minél kisebb területet fed le az analízisbe bevont GNSS alappontok hálózata annál inkább elveszik a koordináta-idősorok nem-lineáris jeltartalma. Ezt a hatást a dátumként használt alappontok idősorainak a nemzetközi szakirodalomban „common mode”-nak nevezett fokozódó korrelációja okozza. Szemléltetésére a 3. ábrán PENC állomás magassági koordináta-komponensének idősorát mutatjuk be a globális IGS, a regionális EPN (EUREF Permanens Állomáshálózat) és a hazai GNSSnet.hu adatanalízisekből levezetve. A néhány 100 km kiterjedésű hálózatban a tényleges fizikai tartalommal bíró szezonális hatás gyakorlatilag eltűnik, csak az állomás-specifikus, legnagyobb részt hibának tekintendő (pl. az állandósítás gyengeségéből következő) hatás marad meg. Ennek a megközelítésnek így van egy nagy előnye: egy lokális analízis alapján leválasztható a hibás, pontfüggő hatás.



2.ábra. Az IGS/ITRF2008 állomások koordináta idősoraiból a magassági összetevőre levezethető szezonális változások. A korongok átmérője a harmonikus változás amplitúdójával arányos, míg színe az ezen szinuszhullám fokokban kifejezett, az origóhoz (január 1-jéhez) képesti elcsúszását (fáziskésését) szemlélteti az ábrán megadott színskála szerint (1 hónap eltolódás 30 foknak felel meg). A változó mértékű eltolódás elsődleges oka a felszínnek a hidrológiai változásokra (pl. csapadék, hóolvadás) adott késleltetett reakciója. A GPS mérésekből kimutatott évszakos hatások egyre jobb összhangot mutatnak a hidrológiai modellekkel illetve a GRACE modell-sorozatból levezethető évszakos hatásokkal is (van Dam et al. 2007). Az ábra bal alsó sarkában az évszakos hatás fokokban kifejezett fáziseltérésének gyakorisági diagramja található



3. ábra. PENC állomás koordináta idősorának magassági összetevője az IGS, EPN és GNSSnet.hu hálózatok mérései alapján

3 Regionális hálózatok és vonatkoztatási rendszerek

Az 1. ábrán bemutatott globális sebességkép a kontinentális kéreglemezek GNSS mérésekből levezetett mozgását mutatja. Ezek a lemezmozgások – legalábbis a lemezek merevnek tekintett részére – egyszerű, adott forgáspont körüli gömbi rotációval írhatók le. 2000-től az ITRFyy megoldások szerves része egy-egy konzisztens lemezmozgás modell, amely általában jó összhangban van a független és évmilliós időskálán rendelkezésre álló geofizikai/geológia adatokból levezetett modellekkel, mint pl. a NUVEL-NNR1A-val (De Mets et al. 1990 és 1994). Kontinentális léptékben a rotációs modell leválasztásával a kontinens geofizikailag stabil részére a geodéziai gyakorlat számára jól használható, állandó koordinátákkal jellemezhető vonatkoztatási rendszerek definiálhatók.

Ilyen megfontolás alapján került sor az európai kontinensre vonatkozó ETRS89 vonatkoztatási rendszer létrehozására (Boucher és Altamimi 1992), amely mindmáig alapja Európában a kontinentális és országos szinteken a geodéziai vonatkoztatási rendszerek meghatározásának. A definíció, és egy bizonyos szintig a megvalósítás egyszerű: ismerjük az eurázsiai kőzetlemez (EURA) gömbi rotációs modelljét, amelyet alkalmazva tetszőleges tc időpontból az ITRFyy koordinátarendszerünket virtuálisan visszaforgatjuk az ún. kezdőepochába (1989):

$$\boldsymbol{X}^{E}(t_c) = \boldsymbol{X}^{I}_{YY}(t_c) + \boldsymbol{T}_{YY} + \begin{pmatrix} 0 & \dot{R}3_{YY} & \dot{R}2_{YY} \\ R3_{YY} & 0 & -\dot{R}1_{YY} \\ -\dot{R}2_{YY} & \dot{R}1_{YY} & 0 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{X}^{I}_{YY}(t_c)(t_c - 1989.0) \qquad (1)$$

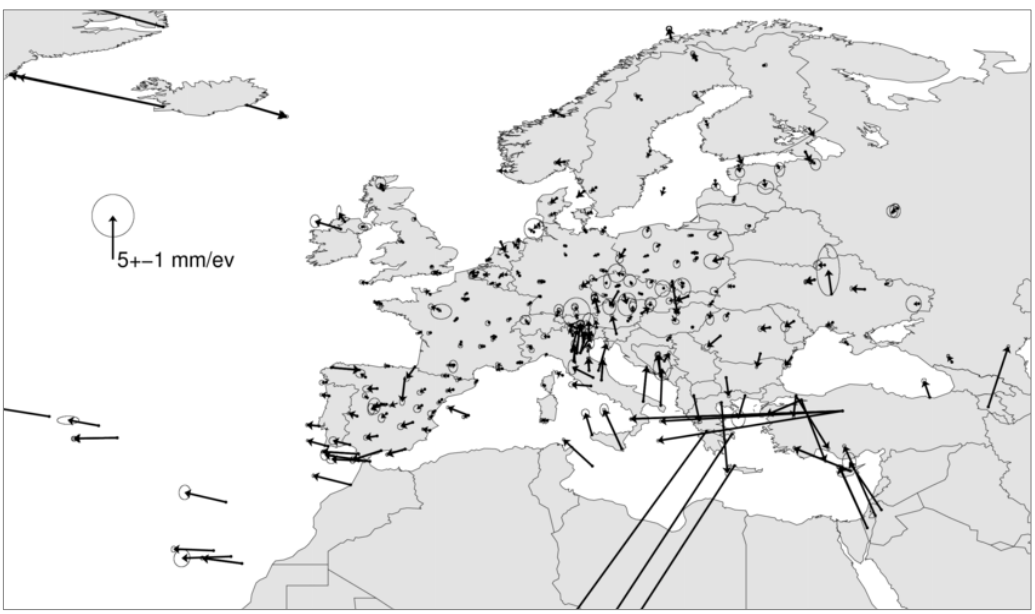
ahol,

$\boldsymbol{X}^{E}(t_c); \boldsymbol{X}^{I}_{YY}(t_c)$:	az ITRFyy és ETRS89 térbeli koordináták a t_c időpontban,
$\dot{R}1_{YY}; \dot{R}2_{YY}; \dot{R}3_{YY}$:	a gömbi forgatás összetevői,
$\boldsymbol{T}_{YY}$	az adott ITRFyy és az ETRS89 közötti eltolás paraméter.

A transzformációnak ilyen megközelítése elhanyagolja az egyes pontok (legtöbbször amúgy is ismeretlen) sajátmozgását, a kapott ETRS89 koordináták tehát nem 1989-re, hanem a meghatározás időpontjára vonatkoznak. A forgatást kezdetben az NNR-NUVEL1A modell alapján definiálták, majd az ITRF2000 megjelenésével áttértek az adott ITRFyy megoldás konzisztens forgatási modelljére. Ezek a transzformációk csak a vízszintes koordináta-összetevőket érintik és változatlanul hagyják a magassági komponenst!

A 4. ábra szemléletesen mutatja, hogy az EURA lemez sem tekinthető teljesen merevnek, és bár a kontinens jelentős részén elhanyagolható a pontok sajátmozgása, de különösen a Mediterrán térségben, ahol az eurázsiai és az afrikai lemezek ütközése zajlik 1 cm/év nagyságot is meghaladó relatív sebességeket tapasztalunk. Utóbbi feltételek mellett az ETRS89 gyakorlati jelentősége kisebb, pl. ezért nem vezette be Törökország, mint nemzeti rendszert. Hasonló okokból nehéz helyzetben van Görögország, ahol az északi országrészben fennáll az elvárható stabilitás, de a déli területeken nem. Bevezették ugyan az ETRS89-et, de azt viszonylag sűrűn felül kell vizsgálniuk. Olaszországban is hivatalos az ETRS89, de ott is 10 évente újra kell definiálni, mert a tektonikus elmozdulások miatt a koordináták változása meghaladja a 3-5 cm-es szintet.

Amint a 4. ábráról is látható a GNSS technológia ma már ott tart, hogy megbízható sebességeket tud rendelni az állomásokhoz, és amint a későbbiekben látni fogjuk az EPN-nél lényegesen nagyobb pontsűrűség mellett is. Rövidesen elérkezünk egy olyan ponthoz, amikor rendelkezésünkre áll egy megbízható sebességmodell, amelyet az aktuális koordináták mellé téve a referencia-rendszer definiálásának mikéntje átgondolandó lesz. Gyakorlati geodéziai szemmel a probléma különösen azokon a területeken éles, ahol a mozgások szintje évtizedes skálán több centimétert ér el. A fejlesztések célja az, hogy ne kelljen *„lépcsőzni”*, mint ahogyan a görögök és az olaszok most kénytelenek, hanem a folyamatos változások mellett is „állandó” megoldás szülessen. Az EUREF-ben, az ETRS89 fenntartásáért felelős szervezetben most kezdődnek azok a szakmai viták, egyeztetések, amelyeken az ebbe az irányba vezető megoldást keressük.



4.ábra. Az EPN állomások vízszintes sebességkomponensei az ETRS89 vonatkoztatási rendszerben kifejezve. Az ITRFyy átlagosan 2,5 cm/év sebességekhez képest általában néhány mm/éves értékeket tapasztalunk. Az ábrán feltüntettük a 15 éves mérési adatsor együttes kiegyenlítéséből levezetett formális hibák 95%-os konfidenciaszinten meghatározott hiba-ellipszisét is

4 Országos hálózatok és vonatkoztatási rendszerek

A regionális hálózatokhoz hasonlóan a GNSS alapú, országos szintű koordináta-rendszerek alapja is ugyanaz a vonatkoztatási rendszer, Európában ez az ETRS89, illetve annak adott megvalósulásai (pl. ETRF2000). Az ETRS89 egyben az Európai Unió országainak hivatalos referenciarendszere is, amint azt az INSPIRE, az európai térinformatikai alapokat deklaráló irányelv is kötelezővé teszi (INSPIRE Directive 2007/2/EC). Magyarországon sincs ez másképpen, az ETRS89-et ténylegesen 1998-ban az OGPSH forgalomba adásával tettük hivatalossá, majd a rendszert műszaki okokból 2007-ben frissítettük.

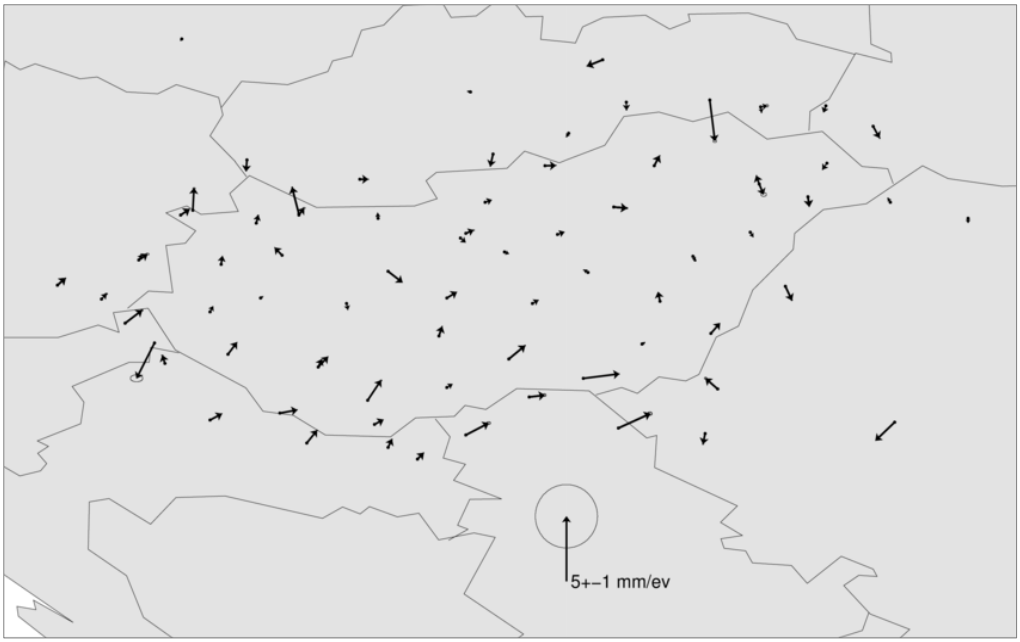
Ezen a statikus fázison túllépve a Magyar GPS Geodinamikai Alapponthálózat (MGGA) ismert eredményei mellett (Grenerczy és Fejes 2007) a lényegesen rövidebb, de folyamatos adatsort szolgáltató GNSSnet.hu 35 hazai és 19 határon túli permanens állomása adatainak hosszú távú analízise alapján is nagy megbízhatóságú sebességek határozhatók meg (5. és 7. ábrák). A nem mozgásvizsgálati célú pontállandósítás ellenére – az EPN-ben tapasztaltakkal összhangban – az elsődlegesen gyakorlati célokat szolgáló aktív hálózati pontok is alkalmasak lehetnek tudományos mozgásvizsgálatokhoz. Az 5. ábra alapján megállapítható, hogy vízszintes értelemben a GNSSnet.hu állomások kimutatott mozgásának nagyságrendje összhangban van az MGGA mérésekből levezetett 1-1,5 mm/év szinttel (Grenerczy és Fejes 2007), a nagyobb sebességet mutató pontok – főleg a határainkon túl – még túl rövid, 1-3 éves mérési adatsorral rendelkeznek. Az MGGA és GNSSnet.hu hálózatok eredményeinek együttes analízise és értelmezése a közeljövő feladata, amely segíteni fogja az 5. és 7. ábrán bemutatott eredmények validálását, illetve egy országos léptékű sebességmodell létrehozását. A jelen geodéziai gyakorlatát tekintve a tapasztalt vízszintes elmozdulások országos szinten csak évtizedes skálán teszik szükségessé az időbeli változások figyelembevételét, ugyanakkor mind szolgáltatói, mind felhasználói oldalról fel kell készülni a koordináták időbeli változásának adekvát kezelésére.

A GNSSnet.hu-hoz hasonló, a geodéziai gyakorlatot kiszolgáló sűrű permanens állomáshálózatokban hatalmas tudományos potenciál van, amelyet hasonló vizsgálatok elvégzésére, és akár egy európai szintű sebesség-modell, illetve sebességtérkép elkészítéséhez fel lehet használni. A cikk szerzője pontosan ilyen megfontolások alapján indította el 2010-ben az ún. EUPOS[1] Kombinációs Központot (ECC) a KGO-ban, amely jelenleg hat ország hosszútávú GNSS mérési eredményeinek egységes kiegyenlítését végzi. Az első, még csak tájékoztató jellegű eredmények a vízszintes sebességi összetevőre a 6. ábrán láthatóak. Az eseti kiugró sebességek alapvetően a rendelkezésre álló most még rövid, 1-3 éves adatsornak köszönhető. A megbízható állomás-sebesség becsléséhez legalább 3-4 év adatsora szükséges. Az EUREF is támogatja a nemzeti permanens állomáshálózatok eredményeinek kontinentális szintű egységes kezelését, így megvalósulhat az a régóta dédelgetett álom, hogy több sikertelen kísérlet után Európára is előállítható legyen egy teljes, egységes, homogén sebességtérkép.

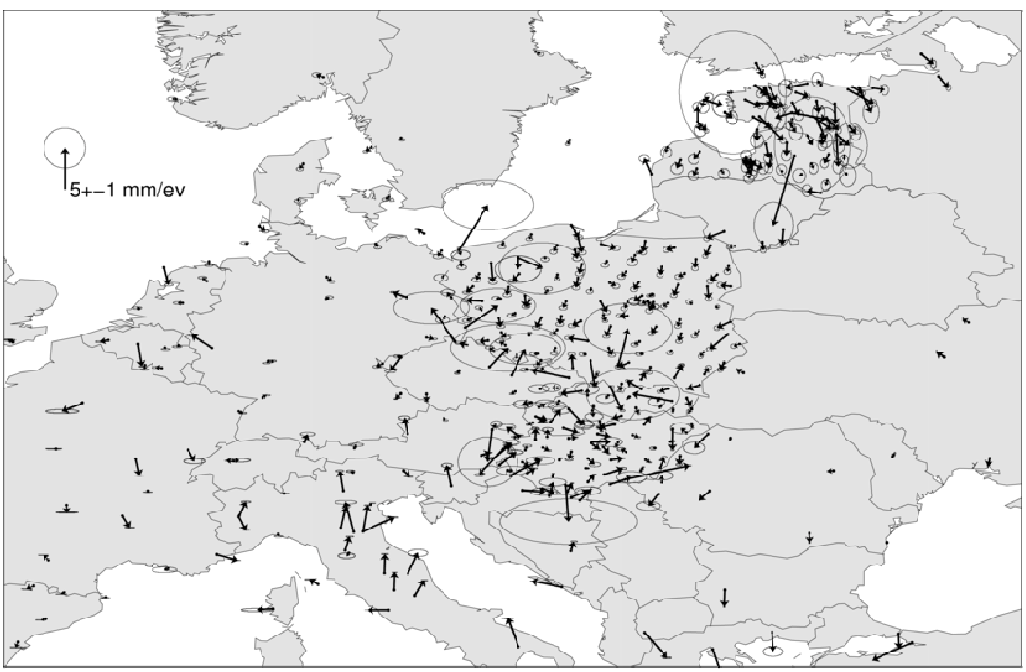
5 Magassági hálózatok: a múltból a jövőbe

A korábbi fejezetekben az időfüggésnek a vízszintes koordináta összetevőre gyakorolt, általában jól modellezhető hatásait tárgyaltuk. A magasságok esetében a problémakör összetettebb, hiszen egyrészt a műholdas technológiákban természetes jellemzőik miatt (pl. műhold geometria, légköri hatások) a magassági koordináta összetevő megbízhatósága kisebb, másrészt a magassági hálózatokban való alkalmazhatóságukhoz a fizikai, a tengerszint felett definiált magassági rendszerekbe kell transzformálni a geometriai magasságokat, ami további pontosságvesztéssel járhat. Figyelembe kell azt is venni, hogy a magasságok időbeli változása területfüggő, ráadásul tetszőleges idő- és térbeli skálán történhet, ezért általában nem modellezhető valamely lineáris transzformációval, mint a vízszintes lemezmozgások esetén történt. A magasságok változásának tektogén, technogén és akár klimatikus okai is lehetnek.

[1] Európai Helymeghatározó Szolgálatok Szervezete, amely egyelőre a közép- és kelet-európai országok (pl. Balti-államok, Lengyelország, Csehország, Szlovákia, Magyarország, Szerbia) hálózatait fogja össze.



5.ábra. A GNSSnet.hu állomások többéves (állomásonként változó hosszúságú) mérési adatsorából a CATREF szoftverrel meghatározott vízszintes sebességek az ETRS89 rendszerében kifejezve. Az ábrán feltüntettük a kiegyenlítésből származó formális hibaellipsziseket is, de azok egyetlen pont kivételével oly kicsik, hogy nem is láthatók



6.ábra. Az ECC adatok alapján a résztvevő országok területére meghatározott vízszintes, kéreglemezen belüli, ún. intraplate sebességek. Közép-Európában a nagyobb hibaellipszisű és kiugró értékű sebességek elsősorban a rendelkezésre álló adatsorok rövidségéből (< 2 év) adódik. Hosszabb, legalább 3-4 évnyi adatsorból lehet majd nagyobb megbízhatóságú sebességeket meghatározni, illetve az esetleges állandósítási hibákat kiszűrni

A tengerszint feletti magasságok meghatározásának természetes és egyeduralkodó eszköze volt mindeddig a szintezés. Valamennyi európai országban, így Magyarországon is a jelenleg alkalmazott rendszerben az infrastruktúrát hordozó szintezési alapponthálózat, az EOMA, nagyságrendileg 50000 db I-III. rendű pontját a kor technológiájának megfelelő lehető legnagyobb pontossággal és gondossággal hozták létre és mérték meg. Azt követően azonban az eseti pótlásokon, karbantartáson túl az évtizedek múlva bekövetkező újramérésig „magára hagyták". Nem gondatlanságból tették ezt, hanem mert ezt adták meg a műszaki szabályozók, és persze ezt engedte meg egy-egy ország költségvetése. A pontjeleket használóknak évtizedek múlva is kényszerűen fel kell tételezniük a pontok mozdulatlanságát, az általuk hordozott magassági információ változatlanságát, mintha az ténylegesen is kőbe lett volna vésve. A pontok sajátmozgása illetve a tényleges tektonikai vagy technogén hatások miatt Magyarországon is több cm-es nagyságrendű „hibákkal" találkozhatunk, és vannak területek is (pl. Visonta, Bükkábrány), ahol dm-t meghaladó elmozdulások észlelhetők a legutóbbi hivatalos mérések óta (Geoservice Kft. 2011).

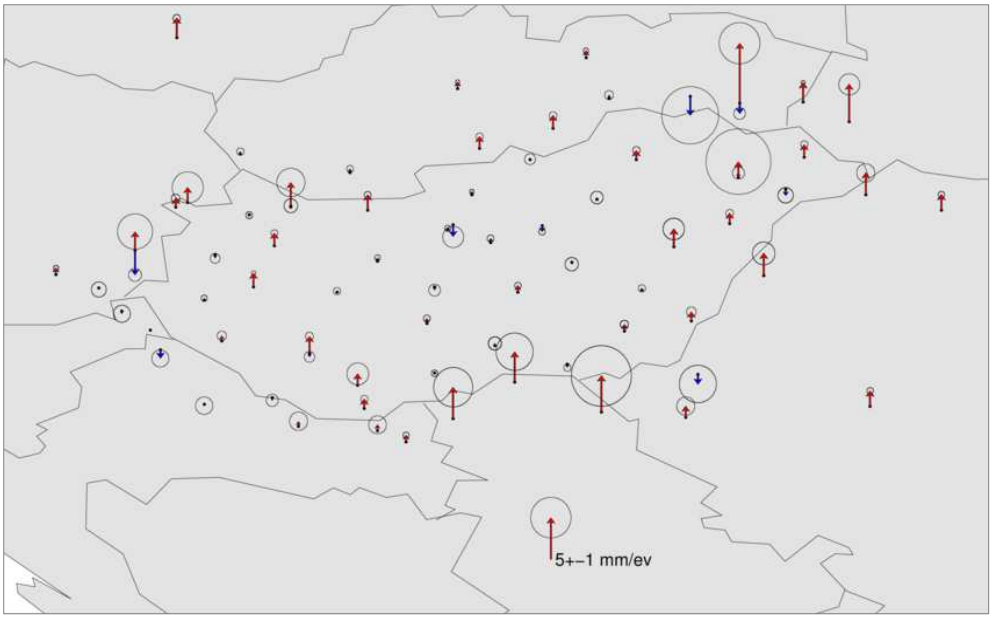
A technológia egyedülálló lokális pontossága ellenére azonban a magasságok időbeli változásainak országos vagy regionális szintű monitorozására csak korlátozottan alkalmas, amit alapvetően a ritka, nagyságrendileg 30 éves ismétlési periódus okoz. Kevés ismétlő adat áll így rendelkezésre, amit erősen csökkent a közös pontok időközbeni megsemmisülése. A pontok egyenetlen térbeli eloszlása (sűrű vonalmenti pontsorok, ugyanakkor a poligonok által bezárt területeken semmilyen adat) sem tette lehetővé a magasságváltozások felületszerű modellezését. Az eredmények értelmezését nehezítheti az egyes fizikai pontok individuális mozgása, és a mérések műszerezettségének, az alkalmazott kiegyenlítési eljárásoknak az esetleges eltérései. Az ilyen ritka időbeli mintavételezés mellett korlátozó tényező még, hogy szükségszerűen feltételezik az integrált magasságváltozásban a lineáris időfüggést, ami csak a tektonikai eredetű változások esetében lehet érvényes feltételezés. Ilyen, nem mindig egyértelműen feltárt feltételrendszerek mellett kellett még a közelmúltban is dolgozniuk a kutatóknak (Joó 1998).

A műholdas technológiák megadják a lehetőségét annak, hogy a magasságok időbeli változását, nagyobb idő- és térbeli felbontásban vizsgálhassuk. Ehhez két, egymást kiegészítő technológiát hívhatunk segítségül, a már tárgyalt GNSS-t és a műholdradar interferometriát.

A GNSS technikával viszonylag ritkán elhelyezkedő (átlagosan 60 km-es állomás-távolság), folyamatosan üzemelő aktív állomáshálózatok (pl. GNSSnet.hu, 7.ábra) és/vagy rendszeresen ismételt, kampány jellegű sűrűbb ponteloszlású hálózatok (pl. MGGA) több éves, akár évtizedes mérési sorozataival lehet a hálózati pontok magasságait és azok időbeli változását meghatározni. A hosszabb mérési sorozatra éppen a GNSS magassági összetevő kisebb, a várt mozgásokkal sok esetben összevethető nagyságrendű megbízhatósága miatt van szükség.

Az állandó szórópontú műholdradar-interferometria (PS-InSAR) földfelszínen lévő, hosszú időtávon koherens jelvisszaverődést okozó tereptárgyak (tehát nem klasszikus geodéziai alappontok, hanem mesterséges tereptárgyak, pl. épületelemek) műholdirányú elmozdulásaiból nagy pontossággal meghatározható sebességeket tud szolgáltatni (Burgman et al. 2000, Ferretti et al. 2001). A technológia hátránya, hogy hosszútávon koherens reflexió elsősorban mesterséges tereptárgyakról jöhet, tehát amíg lakott területeken nagyszámú pont található, addig a természetes környezetben kevés, a várható ponteloszlás tehát egyenetlen.

Ismételt GNSS mérések és szintezések, valamint PS-InSAR eredmények együttes vizsgálata és validálása már sikeresen megtörtént Magyarországon is, pl. Budapest térségében, ahol a GMES Terrafirma projekt keretében (www.terrafirma.eu.com) a több mint 370000 radarszóró pontban ismert évtizedes vertikális felszínmozgás-történetet vetették össze GNSS és szintezési eredményekkel (Grenerczy et al. 2008) és sikeresen bizonyították a radar valamint GPS és szintezési mérésekből levezethető magasságkülönbségek összhangját. Hasonló méréseket végeztek Debrecen térségében, ahol a korábbi ismételt EOMA mérések alapján predikált felszínsüllyedést vizsgálták (Grenerczy et al. 2010). A friss eredmények nem erősítették meg a várt nagymértékű süllyedést, kiváló példát szolgáltatva arra, hogy a nagy időismétlésekkel végrehajtott mérési sorozatokban a ritka mintavételezés miatt kényszerűen feltételezett lineáris változás nem feltétlenül helytálló, különösen nem az antropogén hatások (vízkivétel) esetében.



7.ábra. A GNSSnet.hu állomások többéves (állomásonként változó hosszúságú) mérési adatsorából a CATREF szoftverrel meghatározott magassági sebesség összetevő. Az ábrán feltüntettük a kiegyenlítésből származó hibaellipsziseket is. A határon túli állomások nagyobb sebessége és a hozzátartozó nagyobb bizonytalanság a rövidebb észlelési sorozat következménye

A szintezés, a folyamatos GNSS hálózati mérések illetve a műholdradar interferometria együttes alkalmazása előtt beláthatatlan perspektívák nyílhatnak meg. Olyan egymást kiegészítő technológiák ezek, amelyekkel a jelenlegi erősen korlátozott tér- és időbeli felbontással rendelkező, valamint költségigényes hálózati infrastruktúrát középtávon kiegészíteni, illetve hosszútávon kiváltani képes gazdaságos eszközrendszerhez jutunk, amellyel a modern igények hosszútávon kielégíthetők lesznek.

A magasságmeghatározás lehet az a gyakorlati geodéziai terület, ahol a 4. dimenzió, a koordináta-időfüggés meghatározása és modellezése szerephez juthat és fejlettebb technológiai szintre emelve lesz képes kiszolgálni a modern felhasználói igényeket.

A magasságváltozások vizsgálatánál megkerülhetetlen a magasságmérések vonatkoztatási felülete, a geoid, illetve a gravitációs mérések időbeli változásainak az elemzése és meghatározása is. A gravimetriai alapponthálózat fejlesztése, lokális ismétlő felmérése, ismételt abszolút gravimetriai mérések és a legújabb műholdas gradiometriai eredmények elemzése (Völgyesi 2005) mind-mind szükséges ahhoz, hogy a magasságváltozások optimálisan meghatározhatók és kinematikus modellekkel leírhatók legyenek.

A megvalósítás azonban, mint minden infrastruktúra kiépítése komoly anyagi és fejlesztési igényekkel jár, amelyhez szükséges:

- egy friss szintezési adatokon nyugvó, kiinduló dátumként szolgáló magassági alapponthálózat, mint a 2007-ben megkezdett EOMA elsőrendű újramérés, ***amelynek befejezése nélkül teljesen ellehetetlenül nem csak a hagyományos, de a műholdas alapokon nyugvó magasság-meghatározás is,***
- egy országos műholdradar interferometriai felmérés, amely alapján a magasságok változása meghatározható, majd a későbbiekben nyomon követhető,
- a legfrissebb adatbázisokon (terepmodell, gravimetriai felmérés, geopotenciális modellek) nyugvó magassági alapfelület, a gravimetriai geoid,
- a szintezési mérésekkel lehetőleg egyidőben (egy éven belül) EOMA alappontokon végzett szélső pontosságú GNSS mérések (INGA alapponthálózat – Kenyeres et al. 2011).

Mindezen adatok birtokában létrehozható egy, a GNSS mérések és szintezési adatok vonatkoztatási rendszereivel összhangban lévő, adott vonatkoztatási időpontra redukált magassági alapfelület, geoid – jelen statikus világban ez lehet a GPS-gravimetriai geoid (Kenyeres 1992). A magasság műholdas technológiákkal hosszabb távon történő monitorozásával levezethető egy felületi sebességmodell, amellyel a tetszőleges időpontban mért magasság visszavezethető a vonatkoztatási időpontra. Ezzel a megoldással a hosszabb távon statikus vonatkoztatási rendszert igénylő, de akár dinamikusan változó környezetben végzendő mérési feladatok is kivitelezhetők lesznek. A megoldás óriási előnye, hogy kezelhetővé teszi a korábban az újramérési kampányok közötti, a menet közbeni ismeretlen magasságváltozásokból eredő mérési ellentmondásokat. A magassági alappontok korábban soha nem tapasztalható homogenitást és időfüggetlenséget érhetnek el.

Az időbeli magassági változások gyakorlati célú modellezésére már vannak példák: ebben a skandináv országok élenjáróak, nekik megoldást kellett találni a jégkorszakok utáni, akár 1 cm/év nagyságrendet elérő felszín-emelkedés modellezésére és megfelelő redukciójára. Ezt a feladatot szintezési, GNSS és gravimetriai mérések együttes felhasználásával sikeresen oldották meg létrehozva az NKG2005LU felszínemelkedési modellt (Ågren and Svensson 2006 és 2007).

Hazai viszonylatban az MGGA hálózatban végzett két évtizedes vizsgálat szerint a vízszintes mozgások évtizedes és országos léptékben várhatóan nem haladják meg az 1-2 cm-es nagyságrendet (Grenerczy és Fejes 2007). Az MGGA és GNSSnet.hu együttes analízisével egy általános sebességmodell állítható elő és bocsátható rendelkezésre, amely kutatási, veszélyeztetettség-becslési feladatokra lehet felhasználni. A jelen terepi geodéziai gyakorlat számára az 1 cm még elhanyagolhatónak tekinthető, de a fenntartóknak fel kell készülni, a felhasználókat fel kell készíteni az évtizedes/szekuláris időbeli változásokat hordozó vonatkoztatási rendszerek alkalmazására.

A helyzet gyökeresen más a magassági vonatkoztatási rendszer esetében. A magassági értelmű felszínmozgásokról mindeddig ritka (országos illetve lokális GPS mozgásvizsgálatok) vagy országos szinten bizonytalan (ismételt szintezések) információkkal rendelkezünk. Kizárólag lokális, adott kisebb területre koncentráló vizsgálatokat végeztek mindeddig, ahol bányászati tevékenység (főleg vízkivétel) miatt akár dm-es nagyságrendű magasságváltozásokat – leginkább süllyedést, de a vízkivétel csökkenésével emelkedést is – lehetett kimutatni (Geoservice Kft. 2011). A műholdas technológiákkal azonban a 4D-geodézia mozgásmodelljei lokális, országos vagy akár kontinentális léptékben is meghatározhatóak lesznek. A KGO-ban új, a jövőben kiemeltnek tekintendő témaként megkezdtük az eddig több, párhuzamos szálon futó kutatás és fejlesztések integrálását, a 4D-geodézia bevezetésével kapcsolatos kutatásokat és infrastruktúrális elemek kiépítését (INGA). Korábbi K+F eredményeink alapján rendelkezésre állnak a GNSSnet.hu és MGGA alapponthálózatok, és azok hosszú távú mérései feldolgozásának eredményei, valamint megkezdtük a műholdradar-interferometria hazai meghonosítását. Néhány éves K+F munka eredményeképpen, a megfelelő források birtokában a jövő geodéziáját jelentő felszínmozgás-modell előállítható lehet.

6 Összefoglalás és kitekintés

A cikk célja egyrészt, hogy általános, a globálistól az országos léptékig terjedő áttekintést nyújtson a műholdas geodéziai alapponthálózatokban az időbeli változások, azaz az állomás-sebességek kezelésének bemutatására; másrészt, hogy felhívja a figyelmet, hogy a méréstechnológiák mellett az alapponthálózatok is gyökeres átalakulás előtt állnak, amire mind fenntartói, mind felhasználói oldalról fel kell készülni. Míg a globális és regionális hálózatokban a sebességek ismerete, használata elsősorban tudományos célokat szolgál, addig országos illetve régiós szinten a mozgásvizsgálatok mellett a koordináták időbeli változása kezelésének azonban már gyakorlati vonzata is lehet. A gyakorlat által megkívánt „stabilitás” – különösen olyan területeken, ahol szignifikáns, trend jellegű mozgásokat észlelünk – kizárólag a mozgások meghatározásával és modellezésével érhető el.

A hagyományos geodéziai technológiák mellett, még ha lett is volna igény, a pontossági és technológiai korlátok miatt még nem volt lehetőség ilyen modellezésre, amely csak a műholdas technológiák megjelenésével és a hosszú távú észlelési sorozatok kiértékelésével teremtődött meg. A hálózat léptékétől függetlenül a GNSS technológia lett a geofizikai célú mozgásvizsgálatok, illetve a gyakorlati geodézia elsőszámú eszköze. A műholdas technológiák az alapponthálózatok fenntartá-

sában és a mindennapos gyakorlati igények vonatkozásában is gyökeres átalakulást hoznak. A valósidejű GNSS mérési technológia rohamos terjedésével változik az alapponthálózatok szerepe, kővel állandósított hálózataink „virtualizálódnak”, hiszen a mérésekhez már sok esetben csak ellenőrzési céllal kell felkeresni állandósított alappontokat. A referencia adatok kommunikációs csatornákon jutnak el a mérést végzőhöz, a műszerek pedig a bennük lévő adatbázisok, eljárások segítségével azonnal megadják az álláspont koordinátáját. Belépünk egy új korszakba, az e-geodézia korszakába. Ebben a dinamikus környezetben az időfüggő hatások modellezése, kezelése, alkalmazása is leegyszerűsödik, új távlatokat nyitva a hosszútávú alapponthálózati karbantartásban és szolgáltatásokban.

A geodéziai gyakorlatban bármely „koordináta” – legyen az vízszintes, magassági, térbeli vagy akár nehézségi gyorsulás – meghatározásához az időfüggő hatások megismerése, és korrekciókként való kezelése a vonatkoztatási rendszer, valamint az *aktuális/pillanatnyi* mérések összhangja és stabilitása érdekében a kutatások homlokterében levő feladat. A 4. dimenzió, az adatok időfüggésének kezelése, legalábbis a rövid időtávú folyamatok tekintetében tehát már a gyakorlat részévé vált. A 4D-geodézia fogalma azonban ennél többet jelent: a *hosszútávú, szekuláris* koordinátaváltozások megismerését, és azok modellezését (lineáris és harmonikus modellek), ezzel biztosítva a vonatkoztatási rendszereket a gyakorlatban reprezentáló alapponthálózatok referencia-koordinátáinak és bármely időpontban meghatározott, azok alapján levezetett pontok hosszú távú *homogenitását*. A 4D-geodéziai alapponthálózatban – ilyenek az ITRS különböző megvalósulásai, az ITRFyy hálózatok – a pontok koordinátái egy adott epochára vonatkoznak, a pontok sebessége ismert, így a koordináták bármely epochára átszámíthatók. Amennyiben ezek a paraméterek ismertek a gyakorlatban is alkalmazott alapponthálózatokra, a hálózat tetszőleges időpontban is megbízható referenciát tud adni, és adatainak érvényességi tartama is nagymértékben kiterjeszthető.

A 4D-geodézia felé tett előkészítő lépésekkel kell majd átgondolni az alapponthálózatok fenntartásának eddigi gyakorlatát is. Az alapponthálózatokban periodikusan végzett, *mega-kampány* jellegű újramérések a referenciarendszer változását csak „lépcsőfüggvény” jelleggel voltak képesek követni. A 4D-modell folytonos időfüggvényének ismeretében kisebb volumenű, de rendszeres karbantartással lehet a vonatkoztatási rendszert, nem lépcső-, hanem folytonos függvény formájában fenntartani. Ennek előnyeit tisztán láthatjuk, gondoljunk csak a magassági alapponthálózatokra, ahol a ritka, 30-40 éves ismétlési periódussal végzett újramérések szinte lehetetlen helyzet elé állítják a vonatkoztatási rendszert fenntartani köteles intézményeket. Ráadásul a gyakorlati szakemberek sokszor nincsenek is tisztában azokkal a problémákkal, amelyeket az újramérések közötti időszak pontmozgásai okoznak.

A felszínváltozások kinematikáját leíró sebességmodell előállítása után természetesen át kell majd gondolni a magassági alapponthálózatok későbbi szerepét, a szintezési mérések rendszerét, a hálózatok hierarchiáját, a hálózatok fenntartásának szükségességét. Erre vonatkozóan vannak már elképzeléseink, de ez már egy másik cikk témája lesz.

Hivatkozások

Altamimi Z, Sillard P, Boucher C (2004): CATREF Software: Combination and Analysis of Terrestrial Reference Frames. Publication LAREG SP08, Institut Géographique National.

Altamimi Z (2008): ETRS89 Realizations: Current status, ETRF2005 and future developments. EUREF Symposium, 17-20 June, 2008, Brussels, Belgium.

Altamimi Z, Collilieux X, Métivier L (2011): ITRF2008: an improved solution of the International Terrestrial Reference Frame, Journal of Geodesy, 85(8), 457-473, doi:10.1007/s00190-011-0444-4.

Argus D F, Gordon R G (1988): No-net rotation model of current plate velocities incorporating plate motion model NUVEL-1. Geophys. Res. Lett.18, 2038-2042, 1991.

Ågren J, Svensson R (2007): Postglacial Land Uplift Model and System Definition for the new Swedish Height System RH 2000. LMVreport 2007:4 in the series “Geodesy and Geographic Information Systems”, Gävle, Sweden.

Ågren J, Svensson R (2006): Land uplift model and system definition used for the RH 2000 adjustment of the Baltic Levelling Ring. NKG, 15th General Meeting, May 29-June 2 2006, Copenhagen, Denmark.

Biró P (1988): A nehézségi erőtér időbeli változásának geodéziai hatása. Budapest, Akadémiai Kiadó. 83.

Bruyninx C, Altamimi Z, Becker M, Craymer M, Combrinck L, Combrinck A, Dawson J, Dietrich R, Fernandes R, Govind R, Herring T, Kenyeres A, King B, Kreemer C, Lavallée D, Legrand J, Sánchez L, Sella G, Shen Z, Santamaria-Gomez A, Wöppelmann G (2009): A Dense Global Velocity Field based on GNSS Observations. Preliminary Results. Proceedings of the IAG Symposium "Geodesy for Planet Earth". IAG Symposia Series 136, 19-26. IAG Scientific Assembly, Session G1, 31 August-04 September 2009, Buenos Aires, Argentina.

Burgmann R, Rosen P A, Fielding E J (2000): Synthetic aperture radar interferometry to measure Earth's surface topography and its deformation. Annual Review of Earth and Planetary Sciences 28: 169–209, doi:10.1146/annurev.earth.28.1.169.

Boucher C, Altamimi Z (1992): The EUREF Terrestrial Reference System and its first realizations. EUREF Meeting, Bern, Switzerland March 4-6.

Boucher C, Altamimi Z (2011): Specifications for reference frame fixing in the analysis of a EUREF GPS campaign. http://etrs89.ensg.ign.fr/memo-V8.pdf.

Caporali, A, Aichhorn C, Becker M, Fejes I, Ghitau D, Grenerczy G, Hefty J, Medac D, Milev G, Mojzes M, Mulic M, Nardo A, Pesec P, Rus T, Simek J, Sledzinski J, Solaric M, Stangl G, Vespe F, Virag G, Vodopivec F, Zablotskyi F (2009): Surface kinematics in the Alpine-Carpathian-Dinaric and Balkan region inferred from a new multi-network GPS combination solution. Tectonophysics, 474, 295-321, (1.729).

DeMets C, Gordon R G, Argus D F, Stein S (1990): Current plate motions. J. Geophys. Res.101, 425-478.

DeMets C, Gordon R G, Argus D F, Stein S (1994): Effect of recent revisions of the geomagnetic reversal timescale on estimates of current plate motions. Geophys. Res. Lett. 21 (20), 2191-2194.

Ferretti A, Prati C, Rocca F (2001): Permanent Scatterers in SAR Interferometry. IEEE Trans. on Geoscience and Remote Sensing, 39(1), 8-20.

Geoservice Kft (2011): Mozgásvizsgálati hálózat GPS technikával való meghatározása Visonta és Bükkábrány térségében. A Mátrai Erőmű Zrt. számára készített mérési és kutatási jelentés.

Grenerczy Gy, Virág G, Frey S, Oberle Z (1998): Budapest műholdas mozgás-térképe: a PSInSAR/ASMI technika hazai bevezetése és ellenőrzése. Geodézia és Kartográfia, 60(11), 3-9.

Grenerczy Gy, Fejes I (2007): A magyarországi GPS mozgásvizsgálatok 16 éve. Geodézia és Kartográfia, 59(7), 3-9.

Grenerczy Gy, Frey S, Virág G, Oberle Z (2010): Experiences from studies of anthropogenic land motions in urban environments with the combination of space geodetic and land based techniques. Earth Observation Challenges for a Changing Earth, 38th COSPAR Scientific Assembly, Bremen, Germany, 18 - 23 Jul 2010 (poster).

Joó I, Arabadzisjski D, Füry M, Mescerszkij I G, Mihaila M, Mladenovski M, Németh Zs, Steinberg J, Thury J, Wyrzykovski T (1987): New investigations of recent crustal movements in the Carpatho-Balkan Region. Journal of Geodynamics, 8(2-4), 99-113.

Joó I (1992): Recent vertical surface movements in the Carpathian Basin. Tectonophysics, 202, 129–134.

Joó I (1998): Magyarország függőleges irányú mozgásai. Geodézia és Kartográfia, 50(9), 3–8.

Kenyeres A (1992): GPS-gravimetric Geoid Determination Based on Combination of GPS/Levelling and Gravity Data. Proceedings of the 1st Continental Workshop on the Geoid in Europe "Towards a Precise Pan-European Reference Geoid for the Nineties", Prague, 11-14 May, 1992, 482-490.

Kenyeres A, Herczeg F, Csizmadia Mné, Virág G (2011): Integrált Geodéziai Alapponthálózat (INGA) koncepciója. Geodézia és Kartográfia, 63(3), 7-12.

van Dam T, Wahr J, Lavallee D (2007): A comparison of annual vertical crustal displacements from GPS and Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) over Europe. J. Geophys. Res.-Solid Earth, 112 (B3), Art. No.B03404, ISSN: 0148-0227, doi: 10.1029/2006JB004335.

Völgyesi L (2005): A nehézségi erőtér időbeli változása. Geomatikai Közlemények 8, 181-192.

ALKALMAZOTT GEODÉZIA – KATONAI FELMÉRÉSEK

Tóth László[*]

Applied geodesy - military surveys *– In this paper a review on the military surveys in Hungary, data capture procedures, means of transport and measuring equipment applied during the surveys and the support to the civilian cartography by the military mapping are given, as well as the outstanding military cartographers of the past are appreciated.*

Keywords: military surveys, data capture procedures, Sámuel Mikoviny, Ágoston Tóth, János Czetz, István Rédey, Hungarian Heritage Prize

A cikkben néhány utalást teszek a katonai felmérésekről; adatgyűjtési eljárásokról; magáról a Térképészeti Intézetről; a katonai térképészet „civil" hozzájárulásáról, valamint neves katonatérképészekről.

Kulcsszavak: katonai felmérések, adatgyűjtési eljárások, Mikoviny Sámuel, Tóth Ágoston, Czetz János, Rédey István, Magyar Örökség díj

1 Katonai térképészet

A földfelszín ábrázolásának (földabrosz készítésének, térképezésnek) van egy fontos szelete: a topográfiai térkép készítése. Mivel ennek a múltban leginkább a katonai felhasználása dominált, nevezték katonai térképezésnek is.

A térkép fontos és nélkülözhetetlen segédeszköze a katonai tevékenység valamennyi területének. Térképek nélkül elképzelhetetlen a terep, a hadszíntér tanulmányozása és hatásának értékelése a harc, a hadművelet szempontjából. A térkép a terepen való mozgás, a navigáció, a helymeghatározás legfontosabb eszköze.

"Szükséges egy hadviselő embernek ismerni a föld csinyját,
melyre kell titkon járni, minden árkot, erdőt, passust szükség
tudni: in parvis rebus maximum momentum latet
(kicsiny dolgokban néha igen fontos dolgok rejlenek)."

Zrínyi Miklós: Vitéz Hadnagy

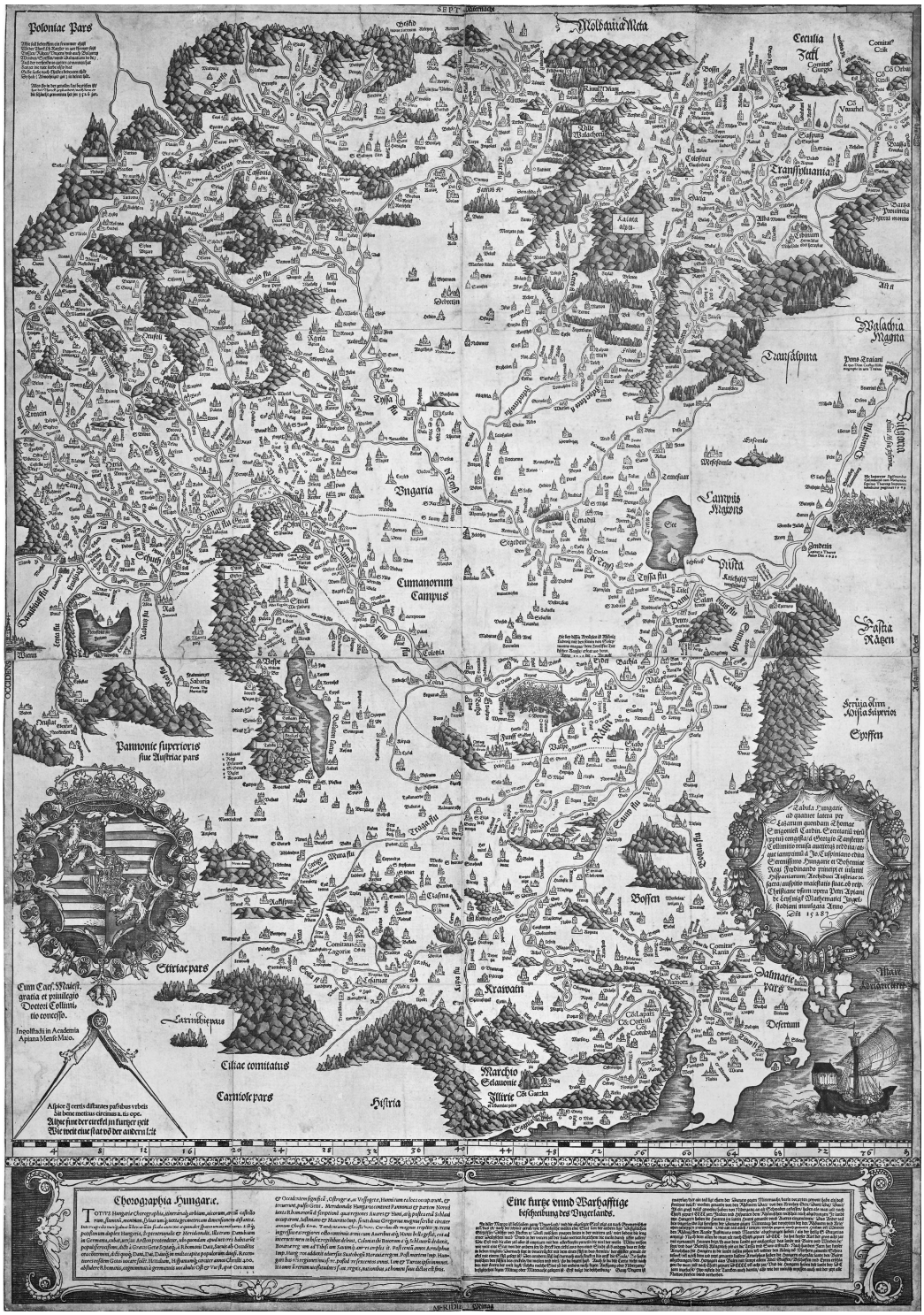
A magyar térképészet kezdetei a XV-XVI. századig nyúlnak vissza. Az első hitelesen magyar kézből származó, **Lázár**-térképként (vagy Lazarus térképként) ismert mű (1. ábra) 1528-ban jelent meg (Plihál 2009).

A négy részből álló fametszetes (megközelítőleg 1:1 200 000 méretarányú) térkép a kornak megfelelő színvonalon ábrázolja Magyarország és környékének területét. A rendkívül gazdag hegy- és vízrajz és mintegy 1300 településnév, valamint 400 egyéb földrajzi név mutatja részletességét. Azt hiszem, a katonai térképezés történetét ugyancsak a Lazarus-szal (Tabula-Hungariae) kell kezdenem. Ez a térkép – az elvitathatatlan szakmai, ábrázolási, tartalmi és történetiségi érdemei mellett – egyben a török terjeszkedésre figyelmeztető kiáltvány is.

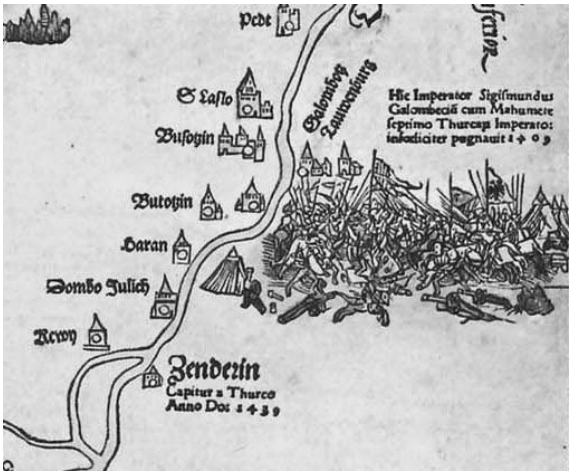
A térképen két részletesen ábrázolt csatajelenet is megjelenítésre került, az 1428-as galambóci ütközet (2. ábra) és az 1526-os mohácsi csata (3. ábra).

A következőkben több ismert térképész munkásságát kell megemlítenem. Az erdélyi szász Johannes ***Honterus*** (1498-1549) világleírásához csatolt, 16 térképből álló atlasza 1542-ben Brassóban jelent meg. Figyelmet érdemel az udvari orvosként és történészként Bécsben dolgozó, nagyszombati születésű ***Zsámboky*** *János* (1531-1584) 1566. évi Erdély, valamint 1571. évi Magyarország térképe.

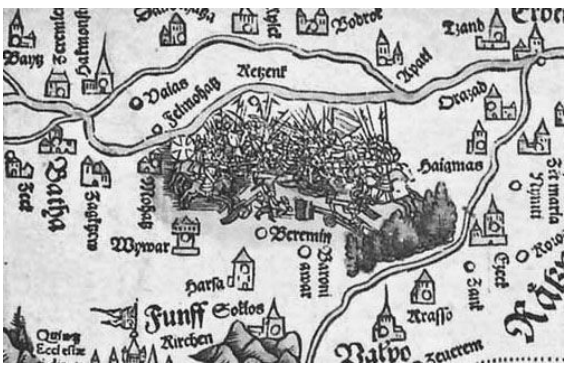
**Mérnök ezredes, Magyar Honvédség geoinformációs szolgálatfőnök*
1024 Budapest, Szilágyi Erzsébet fasor 7-9.
E-mail: toth.laszlo@mhtehi.gov.hu



1. ábra. Lazarus térkép



2. ábra. Lazarus kivágat: Galambóci csata



3. ábra. Lazarus kivágat: Mohácsi csata

Mikoviny *Sámuel* (1700-1750) 1732-ben megjelent, latinul írt "Epistolája" volt az első magyarországi publikáció, amely a topográfiai térképészet modern módszereit – köztük a háromszögelést – leírta. A felderítés során végzett vázlatszerű térképezésről ***Jeney*** *Lajos Mihály* (1723/24-1797) "A portyázó, avagy a kis háború sikerrel való megvívásának mestersége korunk géniusza szerint" c. francia nyelvű könyvecskéjében értekezik, amely 1759-ben jelent meg Hágában (Klinghammer 1997).

1.1 Katonai felmérések

A katonai felmérések történetének összeállításánál Joó és Raum (1992), illetve Tóth (2000) munkáit használtam fel.

1.1.1 Az I. katonai felmérés

Ausztria, Csehország és Magyarország első katonai felmérését közvetlenül a hétéves háború után *Mária Terézia* rendelte el. A felmérés Magyarországon 1764-ben kezdődött. Huszonegy évi munkával készült el az ország 1: 28 800 méretarányú felmérése. Magyarország korabeli területét 1451 szelvény ábrázolta (4. ábra).

1.1.2 A II. katonai felmérés

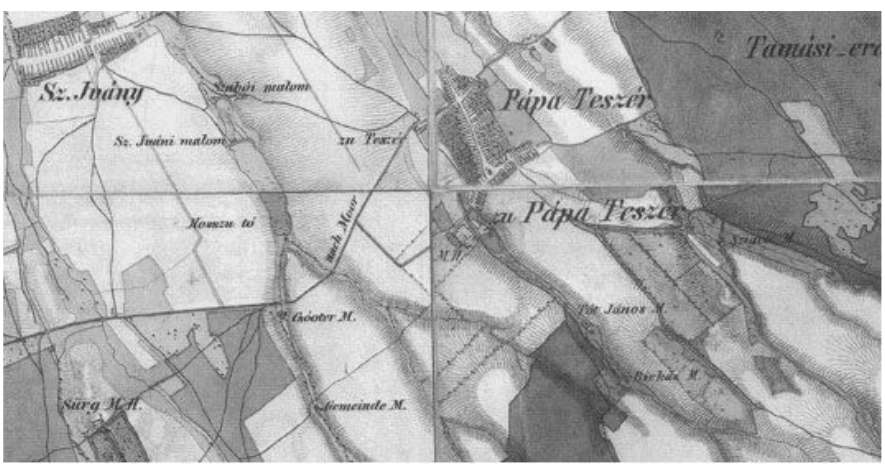
Az I. katonai felmérést néhány évtizeddel később követte a II. katonai felmérés. A felmérés szintén 1: 28 800 méretarányban, de az elsőnél lényegesen magasabb műszaki színvonalon történt 1806-1869 között (5. ábra). A második felmérés során a térképészeti, a háromszögelési és térkép sokszorosítási szervezetek, valamint a Napóleon által alapított milánói katonai térképező intézet összevonásával 1839-ben létrehozták a bécsi Katonai Földrajzi Intézetet. A második felmérést még be sem fejezték teljesen, amikor korszerűbb felmérési eszközökkel és eljárásokkal 1: 25 000 méretarányú új felmérésbe kezdtek.

1.1.3 A III. katonai felmérés

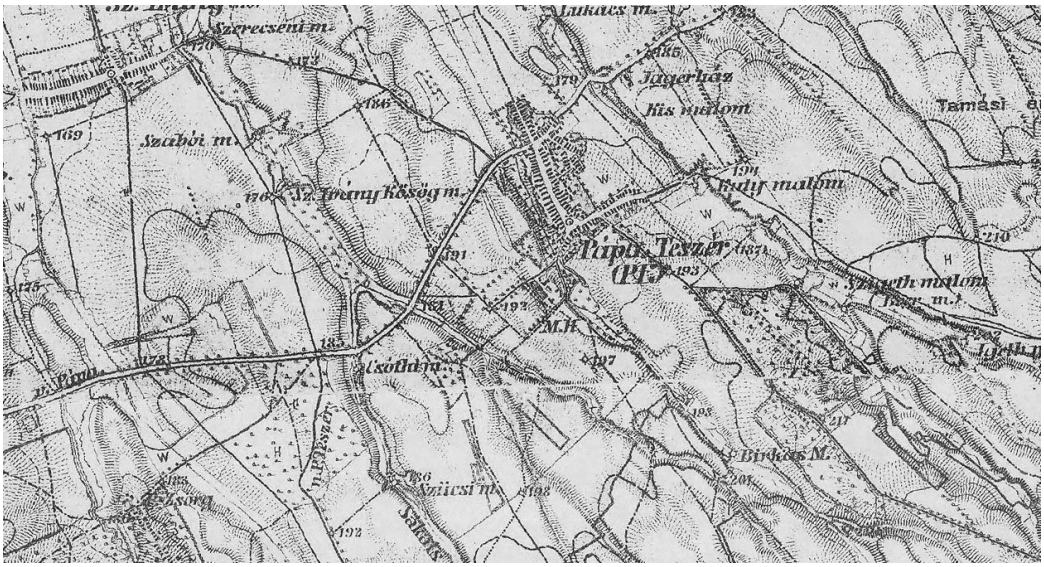
1869-1887 között folyt a III. katonai felmérés. A felmérési lapokat 1: 75 000 méretarányúra kisebbítve ki is nyomtatták (6. ábra). Ez új dolog, mert a korábbi felmérések csak kéziratos anyagok voltak a felső hadvezetés részére. A térképsorozatot elkészülte után tizenkét, illetve tizennyolc év alatt kétszer felújították, és javítva is megjelentették titkos térképként, kizárólag a hadsereg részére.

Engedjék meg, hogy a katonai felmérések további részletezésétől eltekintsek, ezzel nem csökkentve a térképművek vitathatatlan jelentőségét.

4. ábra. Az I. katonai felmérés kivágata



5. ábra. A II. katonai felmérés kivágata



6. ábra. A III. katonai felmérés kivágata

1.2 Az önálló magyar katonai térképészet létrehozása

A bécsi katonai térképész iskolán képzett magyar származású tisztek a térképező munka szinte minden területén szerephez jutottak. Többen közülük az I. világháború idején szervezett hadifelmérő- és haditérképező osztagokban teljesítettek szolgálatot, mások a német mintára alakított térképész ütegekben tüzérbemérést végeztek. A Monarchia felbomlását követően ezek a szakemberek hazatérve az önálló magyar katonai térképészet alapítói lettek (Tremmel 2009).

A hadügyminiszter rendeletére *1919. február 4-én alakult meg a Magyar Katonai Térképező Csoport*, amelynek legsürgősebb feladata a 30-40 éves térképek megújítása, új kiadása lett.
A csoport 1920 elején költözött a jelenlegi (Szilágyi Erzsébet fasori) helyére, majd 1921-ben intézetté alakult. Egy évtized múltán az intézet modern fotogrammetriai és nyomdaipari eszközökkel rendelkező, a legfejlettebb eljárásokat alkalmazó intézménnyé vált.

Az 1930-as évek végének politikai-katonai eseményei közvetlenül érintették a katonai térképészeti tevékenységet. Előbb a visszacsatolt területek térképezésére, majd a hadba lépést követően a hadműveleti területek térképellátására kellett összpontosítani. Az erőfeszítések eredményeként a hadsereg ellátására évenként több mint kétmillió térképnyomat készült.

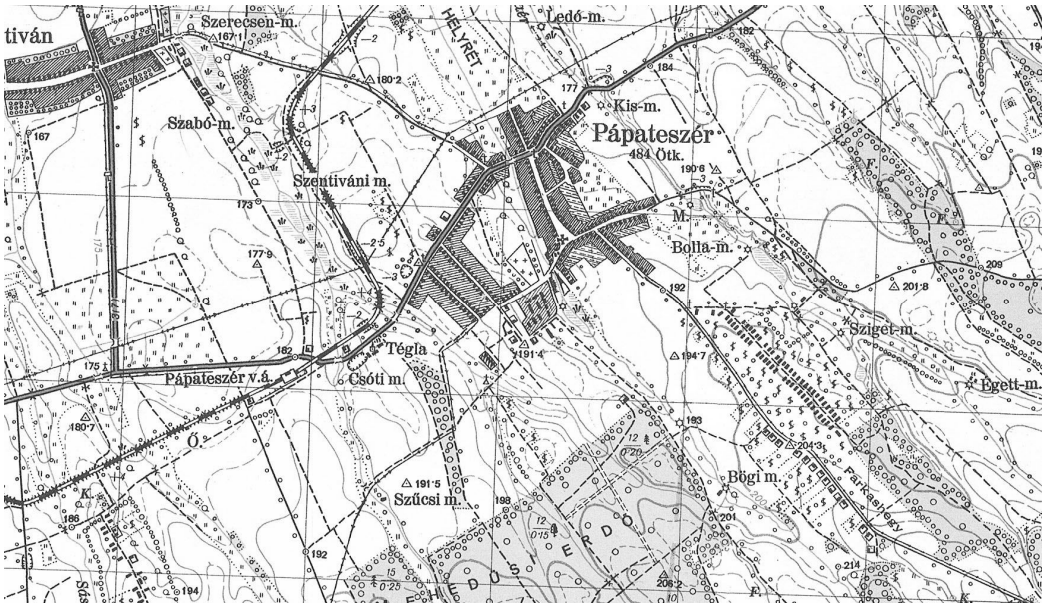
1.3 Az újrakezdés 1945 után

A II. világháború után 1947-ben kezdték meg ismét a térképek nyomását. A szakemberek bekapcsolódtak a határkijelölési munkákba is, majd 1950-ben napirendre került az 1: 25 000 méretarányú térképek helyesbítése, a hiányzó szelvények pótlása is.

A cél az ország egész területére új, fototopográfiai módszerrel előállított térképmű létrehozása volt. A magyarországi *negyedik katonai felmérésre* 1953 és 1959 között került sor. Ez a térképmű mind tartalmát, mind pontosságát illetően egyenértékű volt a hasonló európai térképekkel (7. ábra).

A felmérés 1: 25 000 méretarányban készült, összesen 1167 szelvény fedte le az ország teljes területét. A térképezés *Gauss-Krüger* vetületi-, valamint nemzetközi szelvényezési rendszerben készült, *Kraszovszkij* ellipszoid és *Balti* alapszint alkalmazásával.

A hadsereg igényeire, a szakcsapatok részére katonai *tematikus* térképek is készültek. A magyar térképészek úttörő szerepet vállaltak a katonai várostérképek kidolgozásában. Emellett létrehozták a geodéziai adatok térképeit, gravimetriai térképeket, légi navigációs és terepjárhatósági térképeket.



7. ábra. A IV. katonai felmérés kivágata

A nyolcvanas években megkezdődött a térképészet korszakváltása. Ennek lényege a korábbi térképezési gyakorlatból átmenet egy új, a számítástechnikai alkalmazásra épülő, sokoldalú szolgáltatásra képes térinformatikai rendszer megvalósításába. Mindennek alapja a műholdfelvételek felhasználása, GPS-mérések végzése és feldolgozása, a számítástechnika, a digitális képfeldolgozás és a térinformatikai (topográfiai, kartográfiai, katonaföldrajzi) adatbázisok alkalmazása az adatok rögzítésében, feldolgozásában és szolgáltatásában.

A földmérési és térképészeti tevékenységről szóló 1996. évi LXXVI. törvény szétválasztotta a polgári és katonai térképészet állami alaptérképekkel kapcsolatos felelősségi köreit.

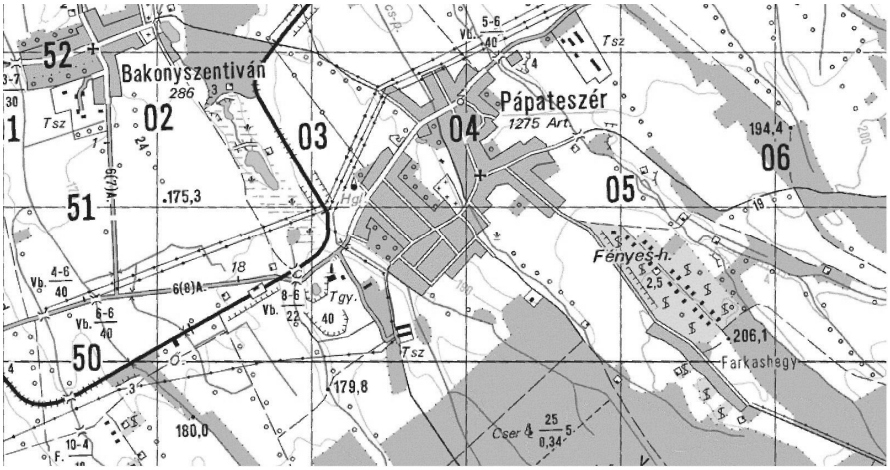
Magyarország 1999. évi NATO csatlakozása következtében pedig felmerült a térkép-átalakítás igénye, melyet erősített a hagyományos topográfiai térképészeti alapok fokozatos elavulása is. A topográfiai térképek átalakítása (állami topográfiai térképészeti adatbázisok létrehozása) megkezdődött, amit szeretnénk *ötödik katonai felmérésnek* nevezni, de tekintetbe véve a korábbi felméréseket, ezt csak a teljes átalakítás befejezése után tehetjük meg (8. ábra).

2 Adatgyűjtési eljárások

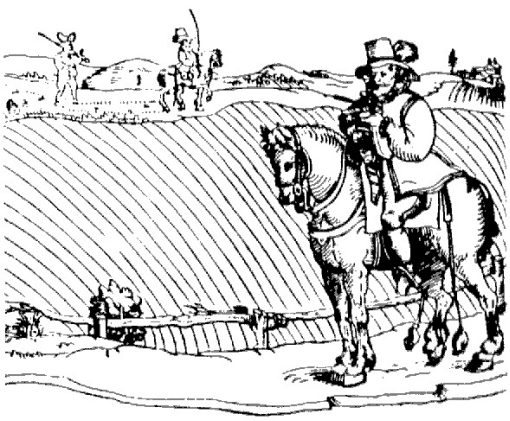
A magyarországi topográfiai térképezés adatgyűjtési, illetve feldolgozási eljárásának fejlődését – a cikk terjedelmi korlátai miatt – nem a teljességre törekedve tárgyalom.

Az adatgyűjtés a középkorban a térképezendő terület (ország, vidék, folyószakasz stb.) ismerői (utazók, kereskedők, katonák, kalandorok, ott élők stb.) által készített leírások összegyűjtésével kezdődött, majd később a terület személyes bejárásával folytatódott. A XVIII. századtól a terület felmérését már (a mérési eszközök, illetve technológiák fejlődése következtében) terepi felméréssel, napjainkban, pedig az egyre korszerűsödő mérőeszközök alkalmazásával; a távérzékelési és műholdnavigációs eszközök felhasználásával (9 - 19. ábra) végezzük.

A feldolgozási és megjelenítési eljárások a kézzel rajzolt vázlatoktól, a fa-, rézmetszeteken és kőnyomatokon, illetve karceljáráson át, a jelenlegi teljesen számítógépes (digitális) eljárásig hosszú utat jártak be.



8. ábra. Az V. katonai felmérés kivágata

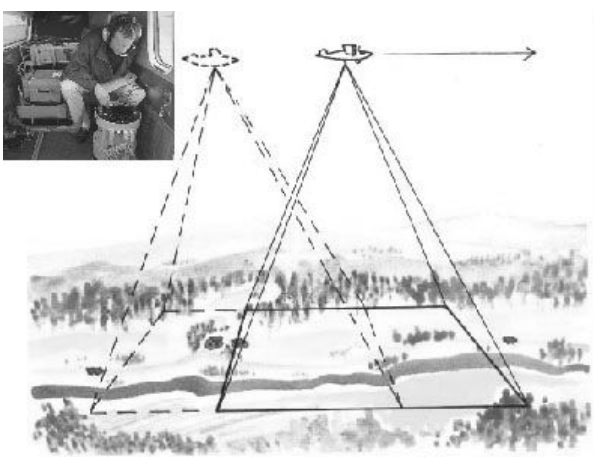


9. ábra. Szemrevételezés, terület lejárása (forrás: ELTE Lazarus)

10. ábra. Terepfelvétel

11. ábra. Indulás a terepre

12. ábra. Mérőasztalos felvétel



13. ábra. Távérzékelés alkalmazása

14. ábra. Giroszkópos iránymérés

15. ábra. Földrajzi helymeghatározás WILD T4 jelű műszerrel

16. ábra. GPS mérés

17. ábra. Topomat-ortofoto berendezés

18. ábra. A térképek rajza karcolással készült

19. ábra. Digitális képfeldolgozás

3 Térképészeti Intézet

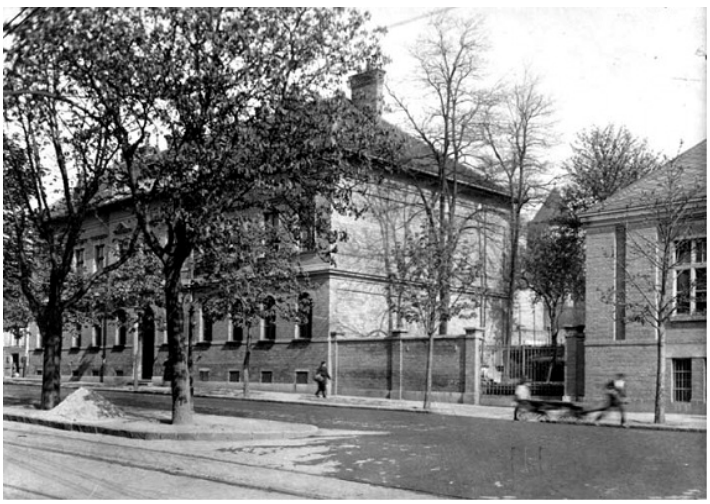
Ejtsünk néhány szót a magyar katonai térképészet intézményének elhelyezéséről is (Tremmel 2009).

A hadügyminiszter 1919. február 4-én 2377/10-1919 HüM rendeletével megalakult a „Magyar Katonai Térképező Csoport" (MKTCS). A miniszteri rendelet már utal egy felállítandó új magyar földrajzi intézetre is. A csoport, amelynek vezetésével *Kirchlechner* (*Demjén*) *Károly* alezredest bízták meg, ideiglenesen a budavári Országos Levéltár új épületében (Bécsi kapu tér 4, II. emelet) rendezkedett be.

Az MKTCS mai helyére a Szapáry laktanyába – Retek u. 43., később Olasz fasor 7., ma Szilágyi Erzsébet fasor 7-9. – 1920. január-február hónapban települt (20. ábra).

Napjainkban itt működik a Magyar Honvédség Geoinformációs Szolgálat, illetve a Honvédelmi Minisztérium Térképészeti Közhasznú Nonprofit Kft. (21. ábra)

A katonai térképészek tevékenységét mutatja be a szakmatörténeti múzeum, amelyet előzetes egyeztetés után bárki megtekinthet.



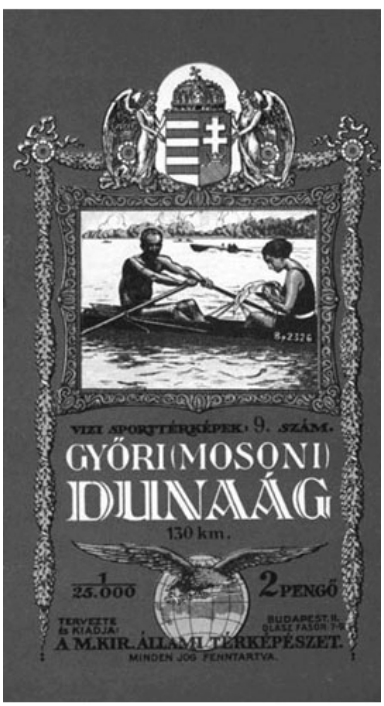
20. ábra. Az Állami Térképészeti Intézet épületei az 1920-as évek végén

21. ábra. 1952–1954 között végrehajtott bővítéssel alakult ki az intézet mai arculata

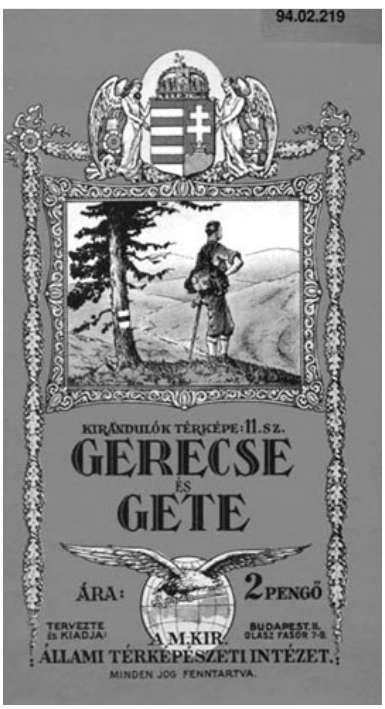
4 A katonai térképészet civil hozzájárulása

A katonai térképészet a védelmi térképezési feladatain túl, a térképészeti kultúra mind szélesebb elterjesztése érdekében, polgári felhasználásra is készített több népszerű kiadványt (22-24. ábra).

22. ábra. Már 1923-ban megjelentették az első iskolai atlaszt



23. ábra. A vízisport támogatására készült térkép



24. ábra. Az "angyalos" turistatérképek nagy népszerűségnek örvendtek

A katonai térképészet célja a civil, illetve oktató térképek készítésével és mindenki számára való hozzáférés lehetővé tételével a térkép megszerettetése, a térképhasználati ismeretek megszerzésének lehetővé tétele, és ezekkel együtt legfőként a haza szeretetének elmélyítése (Napjainkban a katonai térképészet is csatlakozott a Katonasuli programhoz).

A polgári és katonai térképészek több országos jelentőségű feladatot hajtottak végre közösen. Csak a jelentősebbeket emelem ki:

- az ország területének légifényképezése,
- az 1: 10 000 méretarányú topográfiai felmérés,
- csillagászati helymeghatározás,
- fotografikus- és doppler műhold megfigyelés,
- GPS hálózat mérése.

A polgári és katonai térképészet együttműködésének előmozdítását, a katonai térképészeti termékek, mindenekelőtt a topográfiai térképek széleskörű alkalmazásának elősegítését szolgálta a titokvédelmi előírások lényeges enyhítése 1992-ben.

A DTA-50 egy olyan közepes adatsűrűségű (méretarányú) digitális térképészeti adatbázis és az adatbázisra támaszkodó digitális- és papírtérkép, amely tartalmánál fogva számos országos térinformatikai nyilvántartás alapjául szolgál.

Jelenlegi polgári alkalmazásai:

- TeIR (Területi Információs Rendszer),
- az országos útnyilvántartó térképek,
- az adatbázis geometriáját használja a CORINE európai felszínborítási adatbázis részletes magyar változata,
- az ebből készült 1: 50 000 méretarányú térkép az alapja a vadászati térképeknek,
- számos jogszabály határoz meg olyan térinformatikai nyilvántartási feladatot (szakági térkép előállítását), amelyre a DTA-50 adatbázis vagy az abból készült RTA-50 adatbázis (1: 50 000 méretarányú, georeferált digitális raszteres adatbázis), illetve ezen adatbázisok papírváltozatát kell alkalmazni.

Célunk a DTA-50 adatbázis közigazgatási szintű hatékony és közérdekű alkalmazása, illetve naprakész közepes- és kisméretaránynak megfelelő állami topográfiai adatbázis elkészítése és szolgáltatása.

5 Jeles katonatérképészek

Mikoviny (Mikovini) Sámuel (Ábelfalva, 1700 - Trencsén, 1750) magyar matematikus, mérnök, földmérő, tanár, a magyar térképészet megalapítója (25. ábra).

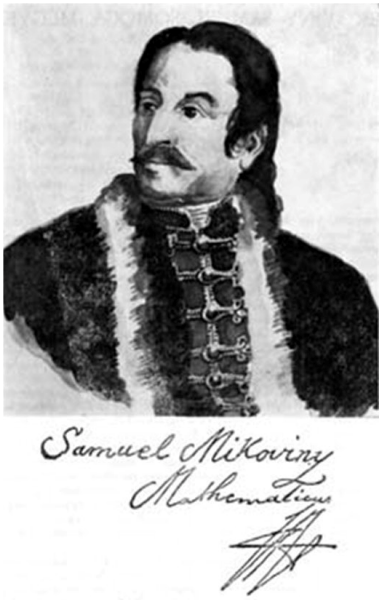
A sokoldalú földmérőként, kartográfusként és nem utolsósorban hadimérnökként ismert Mikoviny Sámuel működésétől számíthatjuk a fordulópontot a magyar földmérés történetében. Ő az első magyar földmérő, aki pontos méréseken alapuló topográfiai térképeket készített. Büszkén vallva magyarságát írta: „Ne legyen Magyarországhoz méltatlan az, amit csinálok”. Másutt pedig így ír: „Sokan hitték azt, hogy a rám rótt feladat, különösen magyar embernek keresztülvihetetlen.”

1735-ben Mikoviny az akkor alapított selmecbányai bányatisztképző iskola élére került, ahol másfél évtizeden át tanította a geodéziát.

Tóth Ágoston Rafael (Marcali, 1812 - Graz, 1889) honvédezredes, hadmérnök, térképész, a Magyar Tudományos Akadémia levelező tagja (26. ábra).

A második katonai felmérés munkálataiban több magyar katona mellett tevékenykedett Felsőszopori *Tóth Ágoston Rafael*, akkor főhadnagyi rangban.

Az 1848-49-es szabadságharc idején szükségmegoldásként a hozzáférhető Lipszky-térképet, illetve ennek *Scheda Lajos* által tartalmilag bővített és javított kiadását használták. A honvédsereg tisztjei közül néhányan, *Czetz János*, *Hollán Ernő* és *Tóth Ágoston* főhadnagyok rendelkeztek hadmérnöki, terepfelmérési ismeretekkel, gyakorlattal.



25. ábra. Mikoviny Sámuel a modern térképezés előfutára hadimérnökként is tevékenykedett

26. ábra. Tóth Ágoston az önálló magyar térképező intézmény ügyének szószólója volt

Közülük *Tóth Ágostonról* tudjuk, hogy erdélyi ténykedése során intézkedett az elavult Lipszky-térkép helyesbítésére, illetve nagyobb méretarányban való kiadására.

A szabadságharc leverése után *Tóth Ágoston* hétévi várfogságból szabadulva, 1869-ben megszervezte és vezette a Közmunka és Közlekedési Minisztérium helyszínrajzi osztályát. Rendíthetetlen elhivatottsággal szállt síkra az önálló magyar térképezés ügyéért. Egy, a bécsivel azonos állású, a tudomány legújabb eredményei alapján működő magyar helyszínrajzi intézet létrehozását szorgalmazta. Elgondolását „A helyszínrajz és földképkészítés történelme, elmélete és jelen állása” című 1869-ben megjelent művében fejtette ki. Erőfeszítései a kor értetlenségén, a bécsi intézet vezetőinek ellenállásán meghiúsultak. Törekvései, amelyek túllépve a szűkebb szakterületén hazánk nemzetközi tudományos szerepének növelését, a magyar ifjúság magas színvonalú katonai-műszaki képzését célozták, valóban méltók az utókor tiszteletére.

Czetz János vagy **Juan Fernando Czetz** (Gidófalva, 1822 - Buenos Aires, 1904) az 1848-49-es forradalom és szabadságharc honvédtábornoka, az argentin hadsereg kiemelkedő szervezője (27. ábra). Ő alapította az argentin katonai földrajzi intézetet, amely az irányítása alatt egész Argentínát feltérképezte. Argentína első nemzeti katonai akadémiájának *(Collegio Militar de la Nación)* 25 éven keresztül volt az igazgatója. Katonai tevékenysége mellett jelentős a földrajztudományi munkássága. Földmérőként dolgozott Argentínában, ahol feltérképezte az ország Paraguay-jal és Brazíliával határos vidékét.

Rédey István (Újpest, 1898 - Budapest, 1968) hadmérnök, geodéta, egyetemi tanár. A Monarchia felbomlását követően életre hívott Honvéd Térképészeti Intézetbe 1923-ban került. 1927-ig a sztereofotogrammetriai osztály vezetője, és a Magyar Fotogrammetriai Társaság főtitkára volt. A Műegyetemen 1942-ben magántanári habilitációt szerzett. Mérnök ezredesként az 1951-ben megszervezett hadmérnöki kar térképészeti tagozatának vezetője volt 1957-ig. A Budapesti Műszaki Egyetem Építőmérnöki Kara (akkor Építőipari és Közlekedési Műszaki Egyetem Mérnöki Kara) Geodézia Tanszékének (akkor Általános Geodézia Tanszékének) vezetését 1958-ban vette át, és haláláig, 1968-ig irányította az ottani munkát. Széles körű kapcsolatot tartott fenn a hazai és a nemzetközi geodéziai szervezetekkel (28. ábra).

6 Zárás és köszöntés

A geoinformációs támogatás termékeit és szolgáltatásait alapvetően a biztonsági szektor szereplői, tágabb értelemben a nemzetgazdaság szervei és szervezetei, illetve bizonyos korlátozások mellett sok ember használhatja és élvezheti.

Ennek szerves része volt a múltban – és remélem a jövőben is – az ifjúság nevelése.

A katonai felmérések szelvényei megőrzik az ország állapotát, a felmérési időpontra vonatkozva, így tulajdonképpen nemzeti kincsünk, kulturális örökségünk része. Így ítélte meg a Magyarországért Alapítvány is, hiszen 2011. december 17-én a Magyar Tudományos Akadémián átvehettük a **Magyar Örökség díj**at (29. ábra), melyet a magyar katonai térképészet érdemelt ki történelmi jelentőségű teljesítménye alapján.

A korábbiakban elmondottak alapján elmondható az is, hogy a katonai térképészet a magyar mérnöki kultúra szerves része.

A katonai képzés keretében folytatott térképészeti oktatás közel 200 éves hagyományra tekint vissza: az 1812-es évtől a váci Ludoviceumban, majd 1836-tól a pesti Magyar Hadi Főtanodában folyt ilyen, napjainkban pedig a katonai térképészetben szolgáló térképészek szakmai képzésének, illetve továbbképzésének gerincét a polgári felsőoktatási intézmények adják (30. ábra). Nagyon sok katona térképészt oktatott *Biró* professzor úr is.

27. ábra. Czetz János honvéd tábornok

28. ábra. A légi fényképek kidolgozására végzett kísérlet résztvevői a drezdai Heyde-gyárban (balról *Rédey István, Kurtz Sándor,* jobb szélén *Huggershoff* professzor)

29. ábra. Magyar Örökség Díj

30. ábra. Rédey István születésének 100. évfordulóján tartott emlékülés elnöksége

Felsőgeodézia, kozmikus geodézia óráin, előadásain nem csak a tantárgyat ismertük meg, hanem a szakma (geodézia, oktatás) szeretetét, a társtudományok (matematika, fizika stb.) ismeretének szükségességét és a holtig tartó tanulás fontosságát is.

Professzor Úr, engedje meg nekem, mint volt tanítványának, hogy magam és valamennyi katona térképész nevében erőt és egészséget kívánjak!

Az Isten éltesse sokáig!

Hivatkozások

Jankó A, Tremmel Á (1977): A katonai térképészet krónikája. MH TÉHI, Budapest. 1-13.
Joó I, Raum F (1992): Magyar földmérés és térképészet története. Budapest. 2, 217-246, és 3, 64-72.
Klinghammer I (1997): A magyar térképészet Lázár deáktól napjainkig. Magyar Tudomány 42(9), 1037-1056.
Plihál K (2009): Magyarország legszebb térképei. Kossuth Könyvkiadó, Budapest. 16-19.
Tóth L (2000): Térképészeti termékek minőségellenőrzése és állami átvétele. Diplomaterv, BME, Budapest. 11-15.
Tremmel Á (2009): Kilencven éves a magyar katonai térképészet, 1919-2009; jubileumi kiadvány. MH GEOSZ, Budapest. 9-23, 51-58.

DIXON-REZULTÁNS ALKALMAZÁSA A FOTOGRAMMETRIAI KÜLSŐ TÁJÉKOZÁS MEGOLDÁSA SORÁN

Paláncz Béla[*]

Solution of the exterior orientation in photogrammetry applying Dixon resultant *– The algebraic solution of the geometric model of photogrammetric exterior orientation represented by a system of multivariate polynomial equations is presented. Employing Dixon resultant, the determination of the roots of this system can be reduced to computing the roots of a single variable polynomial of fourth order. In this case, the Dixon matrix does not have full rank, therefore the standard Nakos-Williams algorithm cannot compute the resultant of the polynomial system. The symbolic computation has been carried out by the Mathematica system.*

Keywords: exterior orientation, linear transformation, parameter estimation, Dixon resultant

A dolgozat a fotogrammetriai külső tájékozás geometriai modelljének olyan megoldását mutataja be, amely többváltozós polinomiális egyenletrendszer algebrai megoldásán alapul. A Dixon-rezultáns felhasználásával az egyenletrendszer gyökeinek meghatározása egy negyedfokú egyváltozós polinom gyökeinek meghatározására vezethető vissza. Mivel ebben az esetben a Dixon-mátrix nem teljesrangú, így a szokásos Nakos-Williams algoritmus közvetlenül nem alkalmazható a rezultáns előállítására. A szimbolikus számítás a Mathematica felhasználásával történt.

Kulcsszavak: külső tájékozás, lineáris transzformáció, paraméterbecslés, Dixon-rezultáns

1 Bevezetés

A geodéziai és fotogrammetriai nemlineáris modellek gyakorta többváltozós polinomiális egyenletrendszerrel írhatók le. Ezek algebrai megoldásának lehetőségére elsők között Awange (2002), továbbá Awange és Grafarend (2005) mutattak rá. Hazai viszonylatban, többek között Závoti és Jancsó (2006), Paláncz (2006), valamint Battha és Závoti (2009) foglalkoztak közleményeikben a geodéziai problémák számítógéppel támogatott algebrai rendszerekkel történő megoldásával. A Dixon-rezultáns geodéziai felhasználását Paláncz és társai (2008) javasolták.

A jelen dolgozat Závoti (2011) által, a fotogrammetriai külső tájékozódás egy új, alternatív megoldására javasolt eljárásának *kiegészítéseként*, a modell algebrai megoldását mutatja be a Dixon-rezultáns felhasználásával. Ennek megfelelően a modell geodéziai és matematikai jellegű részleteit illetően fenti dolgozatra utalunk és azokat csak a szükségesnek tartott mértékben ismertetjük.

2 A matematikai modell

Egy tárgypont és egy neki megfelelő képpont koordinátái közötti kapcsolat az alábbi lineáris transzformációval írható le:

$$\begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \lambda_P \boldsymbol{R} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ -z \end{pmatrix}_+ \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

ahol a P index egy egyedi pontra utal. A fenti kifejezést 3 különböző pontra felírva és néhány egyszerű átalakítással a forgatási mátrix paramétereit és vetítési központ koordinátáit kiküszöbölve, a 3 ismeretlen méretarányra (λ_1, λ_2, λ_3) a következő homogén, másodfokú egyenletrendszert kapjuk:

[*]*BME Fotogrammetria és Térinformatika Tanszék*
1111Budapest, Műegyetem rkp.3.
E-mail: palancz@epito.bme.hu

$$\lambda_1^2\alpha_1 - 2\lambda_1\lambda_2\beta_1 + \lambda_2^2\gamma_1 - 1 = 0\,, \tag{2}$$

$$\lambda_2^2\alpha_2 - 2\lambda_3\lambda_3\beta_2 + \lambda_2^3\gamma_2 - 1 = 0\,, \tag{3}$$

$$\lambda_3^2\alpha_3 - 2\lambda_1\lambda_3\beta_3 + \lambda_1^2\gamma_3 - 1 = 0\,, \tag{4}$$

ahol például

$$\alpha_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \tag{5}$$

$$\beta_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \tag{6}$$

$$\gamma_1 = \frac{x_2^2 + y_2^2 + z^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2} \tag{7}$$

A fenti polinomiális egyenletrendszer algebrai megoldását rezultáns módszerrel kísérelhetjük meg. Itt a Dixon-rezultánst alkalmaztuk.

3 A Dixon rezultáns

Az alábbiakban röviden összefoglaljuk a Dixon-rezultáns módszerét, bár ez a magyar nyelvű irodalomban is hozzáférhető (Zaletnyik 2007). A szükséges fogalmakat és a rezultáns elvét egy példán keresztül ismertetjük. Legyen adott az alábbi polinomiális egyenletrendszer:

$$f(x, y) = xy - 1 \tag{8}$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1\,. \tag{9}$$

Vezessünk be egy *b* segédváltozót, amellyel definiáljuk a következő polinomot:

$$\delta(x, y, b) = \frac{f(x, y)g(x, b) - f(x, b)g(x, y)}{y - b}\,, \tag{10}$$

amely általánosítása a *Cayley* (1865) javasolt egyváltozós esetnek (pl.Paláncz et al. 2008). Ezt a polinomot *Dixon-polinomnak* nevezzük és esetünkben

$$\delta(x, y, b) = b - x + x^3 + y - bxy\,. \tag{11}$$

Az eredeti $f(x,y)$ és $g(x,y)$ polinomok minden közös gyöke gyöke a Dixon-polinomnak is tetszőleges *b* esetén. Következésképpen, mivel

$$\delta(x, y, b) = b^0\left(-x + x^3 + y\right) + b^1(1 - xy), \tag{12}$$

ezért az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer megoldásának léteznie kell:

$$-x + x^3 + y = 0\,, \tag{13}$$

$$1 - xy = 0\,, \tag{14}$$

azaz

$$\begin{pmatrix} -x + x^3 & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Ennek az egyenletrendszernek az együtthatómátrixát *Dixon-mátrixnak* nevezzük, és a szükséges feltétel miatt determinánsának értéke zérus kell, hogy legyen:

$$r(x) = -1 + x^2 - x^4 \,. \tag{16}$$

Az így kapott egyváltozós polinomot az x változóra vonatkozó *Dixon-rezultánsnak* nevezzük, és ennek gyökei megegyeznek az eredeti polinomiális egyenletrendszer x változóra vonatkozó megoldásával. Az y változóra vonatkozó Dixon-rezultáns hasonló gondolatmenettel állítható elő.

4 A méretarányok algebrai meghatározása

Esetünkben, például a λ_1 méretaránya, mint ismeretlenre, a Dixon-mátrix egy 6×6-os méretű mátrix, amelynek első oszlopa

$$\boldsymbol{M}^{\langle 1 \rangle} = \begin{pmatrix} 4\beta_1\beta_3\lambda_1^2 \\ -2\alpha_3\beta_1\lambda_1 + 2\beta_1\gamma_2\lambda_1 - 2\beta_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^3 \\ -4\beta_1\beta_2\lambda_1 + 2\alpha_2\beta_3\lambda_1 - 2\beta_3\gamma_1\lambda_1 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_3\lambda_1^3 + 4\beta_1\beta_2\gamma_3\lambda_1^3 \\ -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda_1^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^2 \\ 2\beta_2\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_1\gamma_3\lambda_1^2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

A mátrix rangja 5, azaz az $\boldsymbol{M}$ mátrix rangja nem teljes. Ezért a megfelelő Dixon-rezultáns most a legnagyobb rangú minor determinánsa lesz (Awange et al. 2010). Ez egy nyolcadfokú polinom, amely azonban negyedfokúra visszavezethető:

$$r_1(\lambda_1) = a_0 + a_1\lambda_1^2 + a_2\lambda_1^4 + a_3\lambda_1^6 + a_4\lambda_1^8 \;, \tag{18}$$

ahol például

$$a_0 = -2\,\alpha_3\beta_2\gamma_1\left[\alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3\gamma_1(-\alpha_3 + \gamma_2) + \gamma_1\left[\alpha_3^2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2^2 - 2\alpha_3(2\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)\right]\right]^2 \tag{19}$$

A további együtthatókat, valamint a számítás menetét a *Függelék*ben közöljük. Ellenőrzésként az eredeti, lásd Závoti (2011) (9) számú egyenletrendszert, numerikus Gröbner bázissal is megoldottuk. Ez a megoldás szintén a *Függelék*ben található.

5 Numerikus példa

Závoti (2011) cikkében közölt koordináta értékeket az 1. táblázat tartalmazza. A kameraállandó értéke z = 12,6033. Ezeket felhasználva a Dixon rezultáns a λ_1 méretaránya:

$$r_1(\lambda_1) = 1{,}9321926979 \cdot 10^{17} - 3{,}91826746 \cdot 10^{13}\lambda_1^2 + 2{,}86387722 \cdot 10^9\lambda_1^4 - 89043{,}3 \cdot \lambda_1^6 + \lambda_1^8 \,. \tag{20}$$

Ennek a polinomnak két valós, pozitív gyöke van, azaz két megoldást kapunk:

$$\lambda_1 = 119{,}1572895661 \;\text{ és }\; \lambda_1 = 123{,}4862433931 \,. \tag{21}$$

1. táblázat. A koordináták értékei

p	*X*	*Y*	*Z*	*x*	*y*
1	-175,3790	-6,3732	-199,6597	-1,494713	-0,732541
2	175,4705	-6,5360	-74,9148	-1,585483	1,468918
3	175,4021	-6,4276	249,7017	1,776687	0,853971

6 Összefoglalás

A jelen – Závoti (2011) közleményét kiegészítő – dolgozatban az ott közölt probléma algebrai megoldását mutattuk be. Ennek előnye a lokális numerikus megoldásokkal szemben, hogy globális, azaz megadja az összes megoldást, és nem igényli a nemlineáris egyenletrendszer iteratív megoldását. A bemutatott algebrai megoldás, a módszer általános, *n* pontra való kiterjesztése esetén bizonnyal eredményesen felhasználható.

Hivatkozások

Awange J L (2002): Groebner basis solution of planar resection. Survey Review 36, 528-543.

Awange J L, Grafarend E W (2005): Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics. Springer, Berlin. 261-265.

Awange J L, **Grafarend E W, Paláncz B, Zaletnyik P** (2010): Algebraic Geodesy and Geoinformatics. Springer, Berlin, in Mathematica supplement (19).

Battha I, Závoti J (2009): Solution of the intersection problem by the Sylvester-resultant and a comparison of two solutions of the 2D similarity transformation. Acta Geod Geoph. Hung. 44(4), 429-438.

Paláncz B (2006): GPS N-points problem. Mathematica in Education and Research, 11(2), 153-157.

Paláncz B, Zaletnyik P, Awange J L, Grafarend E W (2008): Dixon resultant's solution of systems of geodetic polynomial systems. Journal of Geodesy 82(8), 505-511.

Zaletnyik P (2007): Koordináta transzformációk megoldása számítógépes algebra és neurális hálózatok felhasználásával. PhD értekezés, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, 21-25.

Závoti J, Jancsó T (2006): The solution of the 7-parameter datum transformation problem with- and without the Gröbner basis. Acta Geod. Geoph. Hung. 41(1), 87-100.

Závoti J (2011): A fotogrammetriai külső tájékozás egy új, alternatív megoldása. Geomatikai Közlemények, 14(1), 55-62.

Függelék

A méretarányokra a következő egyenletrendszer adható, lásd (16) -os számú egyenletrendszer Závoti (2011) publikációjában:

$$\mathbf{eq1} = \lambda_1^2\alpha_1 - 2\lambda_1\lambda_2\beta_1 + \lambda_2^2\gamma_1 - 1$$

$$\mathbf{eq2} = \lambda_2^2\alpha_2 - 2\lambda_3\lambda_2\beta_2 + \lambda_3^2\gamma_2 - 1$$

$$\mathbf{eq3} = \lambda_3^2\alpha_3 - 2\lambda_1\lambda_3\beta_3 + \lambda_1^2\gamma_3 - 1 \ .$$

Alkalmazzuk a Dixon rezultánst:

```
<< Resultant'Dixon' .
```

Határozzuk meg a Dixon mátrixot az első méretarányra:

```
M = DixonMatrix[{eq1. eq2, eq3}, {λ2, λ3}, {b, c}];
```

A mátrix oszlopai:

```
Table[Transpose[M][[i]]] // MatrixForm, {i, 1, 6}]
```

$$\begin{pmatrix} 4\beta_1\beta_3\lambda_1^2 \\ -2\alpha_3\beta_1\lambda_1 + 2\beta_1\gamma_2\lambda_1 - 2\beta_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^3 \\ -4\beta_1\beta_2\lambda_1 + 2\alpha_2\beta_3\lambda_1 - 2\beta_3\gamma_1\lambda_1 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_3\lambda_1^3 + 4\beta_1\beta_2\gamma_3\lambda_1^3 \\ -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 + 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda_1^2 + 4\gamma_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^2 \\ 2\beta_2\gamma_1 - 2\beta_2\gamma_1\gamma_3\lambda_1^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha_3\beta_1\lambda_1 - 4\beta_2\beta_3\lambda_1 + 2\beta_1\gamma_2\lambda_1 + 4\alpha_1\beta_2\beta_3\lambda_1^3 - 2\beta_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^3 \\ 2\alpha_3\beta_2 - 2\alpha_1\alpha_3\beta_2\lambda_1^2 + 4\beta_1\beta_3\gamma_2\lambda_1^2 \\ -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda_1^2 - 8\beta_1\beta_2\beta_3\lambda_1^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^2 \\ -2\beta_3\gamma_1\gamma_2\lambda_1 \\ 4\beta_2\beta_3\gamma_1\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_3\beta_2 - 2\alpha_1\alpha_3\beta_2\lambda_1^2 \\ 0 \\ 4\alpha_3\beta_1\beta_2\lambda_1 \\ 0 \\ -2\alpha_3\beta_2\gamma_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha_2\beta_3\lambda_1 - 2\beta_3\gamma_1\lambda_1 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_3\lambda_1^3 \\ -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda_1^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^2 \\ 2\beta_2\gamma_1 + 4\alpha_2\beta_1\beta_3\lambda_1^2 - 2\beta_2\gamma_1\gamma_3\lambda_1^2 \\ -2\alpha_2\alpha_3\beta_1\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3\lambda_1^2 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3\lambda_1^2 \\ -2\beta_3\gamma_1\gamma_2\lambda_1 \\ -2\alpha_2\alpha_3\beta_1\lambda_1 \\ 2\alpha_3\beta_2\gamma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Az utolsó oszlop csupa zérus.
A Dixon rezultáns pedig:

```
drλ₁ =Apply[Plus, Flatten[Mirors[M, MatrixRank[M]]]]; .
```

A polinom együtthatói:

```
a0 = Coefficient[drλ₁, λ₁, 0] // Simplify
```

$$-2\alpha_3\beta_2\lambda_1(\alpha_2^2\alpha_3^2 + 2\alpha_2\alpha_3\gamma_1(-\alpha_3 + \gamma_2) + \gamma_1(\alpha_3^2\gamma_1 + \gamma_1\gamma_2^2 - 2\alpha_3(\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)))^2$$

```
a2 = Coefficient[drλ₁, λ₁, 2] // Simplify
```

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_3\beta_2\gamma_1(\alpha_1\alpha_3(\alpha_2^4\alpha_3^3+3\alpha_2^3\alpha_3^2\gamma_1(-\alpha_3+\gamma_2)+3\alpha_2^2\alpha_3\gamma_1(\alpha_2^3\gamma_1+\gamma_1\gamma_2^2-2\alpha_3(\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2))\\
&\quad+2\beta_2^2\gamma_1^2(-\alpha_3^2\gamma_1-\gamma_1\gamma_2^2+2\alpha_3(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2))\\
&\quad-\alpha_2\gamma_1^2(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3^2\gamma_1+\gamma_1\gamma_2^2-2\alpha_3(4\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)))\\
&\quad+\alpha_2^3\alpha_3^2(2\alpha_3^2\beta_1^2-2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_3(-2\beta_1\beta_2\beta_3-2\beta_1^2\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\gamma_3))\\
&\quad+\alpha_2\gamma_1(2\alpha_3^4\beta_1^2\gamma_1-2\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_2^3+\alpha_3^3\gamma_1(2\beta_1\beta_2\beta_3-6\beta_1^2\gamma_2+(4\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)\\
&\quad+2\alpha_2^3(3\beta_1^2\gamma_1\gamma_2^2-2\beta_1\beta_2\beta_3(2\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)-\gamma_1(4\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)(\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3))\\
&\quad+\alpha_3\gamma_1\gamma_2^2(10\beta_1\beta_2\beta_3-2\beta_1^2\gamma_2+\gamma_1(8\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3)))\\
&\quad+\gamma_1^2(\alpha_3^3(4\beta_1^2\beta_2^2-2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1-\gamma_1(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)\\
&\quad+\gamma_1\gamma_2^2(4\beta_2^2\beta_3^2-2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_2+\gamma_1\gamma_2(2\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3))\\
&\quad+\alpha_3^2(-8\beta_1^2\beta_2^2\gamma_2+2\beta_1\beta_2\beta_3(-4\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)+8\beta_2^4\gamma_3+4\beta_2^2\gamma_1(\beta_3^2+2\gamma_2\gamma_3)\\
&\quad+\gamma_1^2\gamma_2(2\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3))-\alpha_3\gamma_2(-4\beta_1^2\beta_2^2\gamma_2+2\beta_1\beta_2\beta_3(4\beta_2^2-\gamma_1\gamma_2)\\
&\quad+\gamma_1\gamma_2(4\beta_3^2\gamma_1+3(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)))+\alpha_2^2\alpha_3(-4\alpha_3^3\beta_1^2\gamma_1-4\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_2^2\\
&\quad+\alpha_3^2(2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1+4\beta_1^2(\beta_2^2+2\gamma_1\gamma_2)-\gamma_1(2\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)\\
&\quad+\alpha_3\gamma_1(4\beta_2^2\beta_3^2+10\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_2+\gamma_2(6\beta_3^2\gamma_1+\gamma_2(-4\beta_1^2+3\gamma_1\gamma_3)))))
\end{aligned}
$$

```
a4 = Coefficient[drλ₁, λ₁, 4] // Simplify
```

$$
\begin{aligned}
&-4\alpha_3\beta_2\gamma_1(\alpha_1^2\alpha_3^2(3\alpha_2^4\alpha_3^2+8\beta_2^4\gamma_1^2+8\alpha_2\beta_2^2\gamma_1^2(\alpha_3-\gamma_2)+6\alpha_2^3\alpha_3\gamma_1(-\alpha_3+\gamma_2)+3\alpha_2^2\gamma_1(\alpha_3^2\gamma_1\\
&\quad+\gamma_1\gamma_2^2-2\alpha_3(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)))-4\alpha_2^3\alpha_3^2\beta_1^2\gamma_2(-2\beta_3^2+\alpha_3\gamma_3)+\alpha_2^2(8\alpha_3^4\beta_1^2+8\beta_3^4\gamma_1^2\gamma_2^2\\
&\quad-8\alpha_3\beta_3^2\gamma_1\gamma_2(2\beta_1\beta_2\beta_3+\gamma_1\gamma_2\gamma_3)-8\alpha_3^3\beta_1^2(2\gamma_1\gamma_2\gamma_3+2\beta_1^2\gamma_2-(\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)\\
&\quad+\alpha_3^2\gamma_2(-16\beta_1\beta_2\beta_3+8\beta_1^4\gamma_2+20\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_3+3\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3^2-16\beta_1^2\gamma_1(2\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3)))\\
&\quad+\gamma_1^2(8\alpha_3^3\beta_1^2\beta_2^2\gamma_3+\alpha_3^2\gamma_3(-32\beta_1^2\beta_2^2\gamma_2+4\beta_1\beta_2\beta_3(-4\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)+(8\beta_2^4+8\beta_2^2\gamma_1\gamma_2\\
&\quad+3\gamma_1^2\gamma_2^2)\gamma_3)+\gamma_1\gamma_2^2(8\beta_3^4\gamma_1+8\beta_3^2(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3+3\gamma_1\gamma_2^2\gamma_3^2-4\beta_1\beta_2\beta_3(4\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3))\\
&\quad-2\alpha_3\gamma_2(-4\beta_1^2\beta_2^2(4\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3)+4\beta_1\beta_2\beta_3(2\beta_3^2\gamma_1+(4\beta_2^2-\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)+\gamma_1\gamma_2\gamma_3(4\beta_3^2\gamma_1\\
&\quad+3(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)))-2\alpha_2\gamma_1(2\alpha_3^3\beta_1^2(4\beta_1\beta_2\beta_3+3\gamma_1\gamma_2\gamma_3)+4\beta_3^2\gamma_1\gamma_2^2(2\beta_1\beta_2\beta_3-\beta_1^2\gamma_2\\
&\quad+\gamma_1(2\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3))+\alpha_3^2(-16\beta_1^3\beta_2\beta_3\gamma_2+4\beta_1\beta_2\beta_3(2\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3+\gamma_1\gamma_2(4\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3^2\\
&\quad-4\beta_1^2(4\beta_2^2\beta_3^2+3\gamma_1\gamma_2(\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3)))+\alpha_3\gamma_2(8\beta_1^3\beta_2\beta_3\gamma_2-\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3(8\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3)\\
&\quad-4\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1(4\beta_3^2+5\gamma_2\gamma_3)+\beta_1^2(-16\beta_2^2\beta_3^2+2\gamma_1\gamma_2(8\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3))))+2\alpha_1(\alpha_2^3\alpha_3^2(4\alpha_3^2\beta_1^2\\
&\quad-6\beta_3^2\gamma_1\gamma_2+\alpha_3(-6\beta_1\beta_2\beta_3-4\beta_1^2\gamma_2+3\gamma_1\gamma_2\gamma_3))+2\beta_2^2\gamma_1^2(2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2^2-\alpha_3^3\gamma_1\gamma_3\\
&\quad-\alpha_3\gamma_2(4\beta_1\beta_2\beta_3+3\gamma_1\gamma_2\gamma_3)+\alpha_3^2(-4\beta_1\beta_2\beta_3+2\beta_3^2\gamma_1+4(2\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3))\\
&\quad+\alpha_2\gamma_1(-2\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_2^3+\alpha_3^3\gamma_1(2\beta_1\beta_2\beta_3+(8\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)-2\alpha_3^2(2\beta_1\beta_2\beta_3(4\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)\\
&\quad+\gamma_1(8\beta_2^2+3\gamma_1\gamma_2)(\beta_3^2+\gamma_2\gamma_3))+\alpha_3\gamma_1\gamma_2^2(10\beta_1\beta_2\beta_3+\gamma_1(8\beta_3^2+3\gamma_2\gamma_3)))\\
&\quad+2\alpha_2^3\alpha_3(-2\alpha_3^3\beta_1^2\gamma_1-4\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_2^2+\alpha_3^2(2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1+4\beta_1^2(\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)-3\gamma_1(\beta_2^2+\gamma_1\gamma_2)\gamma_3)\\
&\quad+\alpha_3\gamma_1(6\beta_2^2\beta_3^2+10\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_2+\gamma_2(6\beta_3^2\gamma_1+\gamma_2(-2\beta_1^2+3\gamma_1\gamma_3))))))
\end{aligned}
$$

```
a6 = Coefficient[drλ₁, λ₁, 6] // Simplify
```

$$
\begin{aligned}
&8\alpha_3\beta_2\gamma_1(\alpha_1^3\alpha_2^3\alpha_3^3(\alpha_2^2\alpha_3 - 2\beta_2^3\gamma_1 + \alpha_2\gamma_1(-\alpha_3+\gamma_2)) + \alpha_1^2\alpha_3(8\alpha_3\beta_2^4\gamma_1^2\gamma_3 \\
&\quad + 4\alpha_2\alpha_3\beta_2^2\gamma_1(-\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1(-2\beta_3^2 + (\alpha_3 - 2\gamma_2)\gamma_3)) + \alpha_2^3\alpha_3(2\alpha_3^2\beta_1^2 - 6\beta_3^2\gamma_1\gamma_2 \\
&\quad + \alpha_3(-6\beta_1\beta_2\beta_3 - 2\beta_1^2\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3)) + \alpha_2^2(-4\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_2^2 + \alpha_3^2(4\beta_1^2\beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1 \\
&\quad - 3\gamma_1(2\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)\gamma_3) + \alpha_3\gamma_1(12\beta_2^2\beta_3^2 + 10\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_2 + 3\gamma_1\gamma_2(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3)))) \\
&\quad - \alpha_1(4\alpha_2^3\alpha_3^2\beta_1^2\gamma_2(-2\beta_3^2 + \alpha_3\gamma_3) + 2\beta_3^2\gamma_1^2\gamma_3(-4\beta_3^2\gamma_1\gamma_2^2 + \alpha_3\gamma_2(8\beta_1\beta_2\beta_3 + 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\
&\quad + \alpha_3^2(4\beta_1\beta_2\beta_3 - 2(2\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)\gamma_3)) + \alpha_2^2(-8\beta_3^4\gamma_1^2\gamma_2^2 + 8\alpha_3\beta_3^2\gamma_1\gamma_2(2\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) \\
&\quad + 8\alpha_3^3\beta_1^2(\beta_1\beta_2\beta_3 - (\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)\gamma_3) + \alpha_3^2\gamma_2(8\beta_1^3\beta_2\beta_3 - 20\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_1^2\gamma_2\gamma_3^2 \\
&\quad + 8\beta_1^2\gamma_1(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3))) + \alpha_2\gamma_1(\alpha_2^3(-16\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 + 4\beta_1\beta_2\beta_3(4\beta_2^2 + 3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2(8\beta_2^2 \\
&\quad + 3\gamma_1\gamma_2)\gamma_3^2) + 4\beta_3^2\gamma_1\gamma_2^2(2\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3)) - \alpha_3\gamma_2(16\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 + \gamma_1^2\gamma_2\gamma_3(8\beta_3^2 \\
&\quad + 3\gamma_2\gamma_3) + 4\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1(4\beta_3^2 + 5\gamma_2\gamma_3)))) + \gamma_2(-4\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2(2\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 - 2\beta_1^2(2\beta_3^2 \\
&\quad + (-\alpha_3 + \gamma_2)\gamma_3)) + \gamma_1^2\gamma_3(-8\alpha_3^2\beta_1^2\beta_2^2\gamma_3 + \alpha_3(2\beta_1\beta_2\beta_3(-4\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2)\gamma_3 - \gamma_1\gamma_2(2\beta_2^2 \\
&\quad + \gamma_1\gamma_2)\gamma_3^2 + 4\beta_1^2\beta_2^2(4\beta_3^2 + 3\gamma_2\gamma_3)) + \gamma_1\gamma_2(-2\beta_1\beta_2\beta_3(4\beta_3^2 + 3\gamma_2\gamma_3) + \gamma_3(4\beta_2^2\beta_3^2 \\
&\quad + \gamma_1\gamma_2(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3)))) + \alpha_2\gamma_1(2\alpha_3^2\beta_2^1\gamma_3(8\beta_1\beta_2\beta_3 + 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3) + 2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2(-4\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_3 \\
&\quad - \gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 + 4\beta_1^2(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3) - \alpha_3(10\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3^2 + \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2 - 16\beta_1^3\beta_2\beta_3(2\beta_3^2 + \gamma_2\gamma_3) \\
&\quad - 2\beta_1^2\gamma_3(-8\beta_2^2\beta_3^2 + \gamma_1\gamma_2(8\beta_3^2 + 3\gamma_2\gamma_3))))))
\end{aligned}
$$

```
a8 = Coefficient[drλ1, λ1, 8] // Simplify
```

$$
\begin{aligned}
&2\alpha_3\beta_2\gamma_1(\alpha_1^4\alpha_2^4\alpha_3^4 - 4\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3^2(2\beta_2^2\gamma_1(-2\beta_3^2 + \alpha_3\gamma_3) + \alpha_2(2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_3(2\beta_1\beta_2\beta_3 \\
&\quad - \gamma_1\gamma_2\gamma_3))) + \gamma_2^2\gamma_3^2(16\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^4 + \gamma_1^2\gamma_3(16\alpha_3\beta_1^2\beta_2^2 + \gamma_1\gamma_2(-8\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3)) \\
&\quad - 8\alpha_2\beta_1^2\gamma_1(-2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_3(4\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3))) - 2\alpha_1^2(-8\alpha_3^2\beta_2^4\gamma_1^2\gamma_3^2 \\
&\quad + 4\alpha_2^3\alpha_3^2\beta_1^2\gamma_2(-2\beta_3^2 + \alpha_3\gamma_3) + 8\alpha_2\alpha_3^2\beta_2^2\gamma_1\gamma_3(2\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) - \alpha_2^2(8\beta_3^4\gamma_1^2\gamma_2^2 \\
&\quad + 8\alpha_3^3\beta_1^2\beta_2^2\gamma_3 - 8\alpha_3\beta_3^2\gamma_1\gamma_2(2\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) + \alpha_3^2\gamma_1\gamma_2\gamma_3(20\beta_1\beta_2\beta_3 + 3\gamma_1\gamma_2\gamma_3))) \\
&\quad - 4\alpha_1\gamma_2\gamma_3(4\alpha_2^2\alpha_3^2\beta_1^2(2\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) + 2\beta_2^2\gamma_1^2\gamma_3(-2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2 + \alpha_3(4\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3)) \\
&\quad - \alpha_2\gamma_1(-2\beta_3^2\gamma_1\gamma_2(4\beta_1\beta_2\beta_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3) + \alpha_3(16\beta_1^2\beta_2^2\beta_3^2 + 10\beta_1\beta_2\beta_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2)))) \ .
\end{aligned}
$$

Ellenőrzés:

$$\mathbf{dr}\,\lambda_1 - (\mathbf{a0} + \mathbf{a2}\,\lambda_1^2 + \mathbf{a4}\,\lambda_1^4 + \mathbf{a6}\,\lambda_1^6 + \mathbf{a8}\,\lambda_1^8)\mathbf{//Simplif\ y}$$

```
0 .
```

A numerikus adatok felhasználásával (Závoti 2011, (23) számú egyenletrendszer), az együtthatók előállíthatók. Ellenőrzésként azonban határozzuk meg α_1 értékét közvetlenül:

$$\alpha_1 = \frac{x_1^2 + y_1^2 + z^2}{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2 + (Z_1 - Z_2)^2}\mathbf{/.numericalData}$$

```
0.00116557 .
```

A (23) számú egyenletrendszer (Závoti 2011) együtthatói alapján:

$$\alpha_1 = \frac{161.614}{138657}$$

```
0.00116557 .
```

Tehát a további együtthatók:

$$\beta_1 = \frac{1}{2}\,\frac{320.274}{138657}, \qquad \gamma_1 = \frac{163.515}{138657},$$

$$\alpha_2 = \frac{163.515}{228487}, \qquad \beta_2 = \frac{1}{2}\,\frac{314.561}{228487}, \qquad \gamma_2 = \frac{162.729}{228487},$$

$$\alpha_3 = \frac{162.729}{201926}, \qquad \beta_3 = \frac{1}{2}\,\frac{311.124}{201926}, \qquad \gamma_3 = \frac{161.614}{201926}.$$

Ezzel a normalizált Dixon rezultáns:

$$\mathbf{pn\lambda_1 = (a0 + a2\lambda_1^2 + a4\lambda_1^4 + a6\lambda_1^6 + a8\lambda_1^8)/a8\,//Simplify}$$

$$1.93219\times10^{17} - 3.91827\times10^{13}\lambda_1^2 + 2.86388\times10^{9}\lambda_1^4 - 89043.3\lambda_1^6 + 1.0\lambda_1^8 .$$

Redukáljuk a polinomot negyedrendűre:

$$\mathbf{pr\lambda_1 = pn\lambda_1/.\lambda_1 \to \sqrt{\xi_1}}$$

$$1.93219\times10^{17} - 3.91827\times10^{13}\xi_1 + 2.86388\times10^{9}\xi_1^2 - 89043.3\xi_1^3 + 1.0\xi_1^4 .$$

A megoldások:

$$\mathbf{sol\xi_1 = NRoots[pr\lambda_1 == 0, \xi_1]}$$

$$\xi_1 == 14198.5 \,\big|\, \big|\, \xi_1 == 15248.9 \,\big|\, \big|$$
$$\xi_1 == 29798. \;\; -2122.62i \,\big|\, \big|\, \xi_1 == 29798. \;\; +2122.62i .$$

Azaz a fizikailag elfogadható megoldások:

$$\mathbf{Table[\lambda_1 \to \sqrt{sol\xi_1[[i,2]]}, \{i,1,2\}]}$$

$$\{\lambda_1 \to 119.157,\ \ \lambda_1 \to 123.486\} .$$

A megoldás a másik két méretaránya teljesen hasonló. A kapott rezultánsok és pozitív gyökeik:

$$1.75474\times10^{17} - 3.81421\times10^{13}\lambda_2^2 + 2.86074\times10^{9}\lambda_2^4 - 89476.2\lambda_2^6 + 1.0\lambda_2^8$$
$$\{\lambda_2 \to 137.491,\ \ \lambda_2 \to 100.893\},$$

valamint

$$1.98015\times10^{17} - 3.86809\times10^{13}\lambda_3^2 + 2.75622\times10^{9}\lambda_3^4 - 85493.\lambda_3^6 + 1.\lambda_3^8$$
$$\{\lambda_3 \to 124.634,\ \ \lambda_3 \to 123.681\} .$$

Ellenőrzésként megoldjuk a feladatot numerikus Gröbner bázis segítségével is. Állítsuk elő a Závoti (2011) publikációjában található (9)-es számú egyenletrendszert:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{I3 = IdentityMatrix[3];}$$

$$\mathbf{IS} = \begin{pmatrix} 1 & c & -b \\ -c & 1 & a \\ b & -a & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{ImS = I3 - S;\ \ MatrixForm[ImS];}$$

```
IpS = I3 + S;  MatrixForm[IpS];
```

$$\mathbf{Table}\left[\left(\begin{pmatrix} f_{1+3(i-1)} \\ f_{2+3(i-1)} \\ f_{3+3(i-1)} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{ImS}.\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix} - \mathbf{ImS}.\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} - \lambda_i\, \mathbf{IpS}.\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ -z \end{pmatrix}\right)\right), \{i,0,3\}\right];$$

```
eq = Table[{"f"_i,"=",f_i},{i,1,9}];

TableForm[eq // Expand]
```

$f_1 = X_1 - X_0 + cY_1 - cY_0 - bZ_1 + bZ_0 + bz\lambda_1 - x_1\lambda_1 + cy_1\lambda_1$

$f_2 = -cX_1 + cX_0 + Y_1 - Y_0 + aZ_1 - aZ_0 - az\lambda_1 - cx_1\lambda_1 - y_1\lambda_1$

$f_3 = bX_1 - bX_0 - aY_1 + aY_0 + Z_1 - Z_0 + z\lambda_1 + bx_1\lambda_1 - ay_1\lambda_1$

$f_4 = X_2 - X_0 + cY_2 - cY_0 - bZ_2 + bZ_0 + bz\lambda_2 - x_2\lambda_2 + cy_2\lambda_2$

$f_5 = -cX_2 + cX_0 + Y_2 - Y_0 + aZ_2 - aZ_0 - az\lambda_2 - cx_2\lambda_2 - y_2\lambda_2$

$f_6 = bX_2 - bX_0 - aY_2 + aY_0 + Z_2 - Z_0 + z\lambda_2 + bx_2\lambda_2 - ay_2\lambda_2$

$f_7 = X_3 - X_0 + cY_3 - cY_0 - bZ_3 + bZ_0 + bz\lambda_3 - x_3\lambda_3 + cy_3\lambda_3$

$f_8 = -cX_3 + cX_0 + Y_3 - Y_0 + aZ_3 - aZ_0 - az\lambda_3 - cx_3\lambda_3 - y_3\lambda_3$

$f_9 = bX_3 - bX_0 - aY_3 + aY_0 + Z_3 - Z_0 + z\lambda_3 + bx_3\lambda_3 - ay_3\lambda_3$

```
vars = {a,b,c,λ1,λ2,λ3,X0,Y0,Z0};
```

A numerikus adatok (Závoti 2011, 1. számú táblázat) racionalizálása,

```
numericalDataR = Map[#[[1]]
    -> Rationalize[#[[2]],0]&,numericalData].
```

A megoldandó egyenletrendszer:

```
NeqsR = {f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9}/.numericalDataR//Expand.
```

A rendszer Gröbner bázisa:

```
(gb = GroebnerBasis[NeqsR,vars]);//AbsoluteTiming
{0.6718750, Null}.
```

A bázis egyes polinomjaiban található változók kitevői:

```
Exponet[#,vars]&/@gb
```

{{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 8},{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 7},{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 7},
{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 7},{0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 7},{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 7},
{0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 7},{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7},{1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 7}}.

Tehát az első bázisból Z_0 számítható. Normalizálva a polinomot és visszatérve a véges precízióra:

```
pZ0 = gb[[1]]/Coefficient[gb[[1]],Z0,8]//Expand//N
```

$$7.174\times10^{18} + 5.65275\times10^{18}Z_0 + 1.1343\times10^{18}Z_0^2 + 8.95027\times10^{15}Z_0^3 + 1.67024\times10^{13}Z_0^4 - 3.26368\times10^{9}Z_0^5 + 8.89272\times10^{6}Z_0^6 - 1265.17Z_0^7 + Z_0^8$$

```
solZ0 = NRoots[pZ0 == 0,Z0]
```

$$Z_0 == -234.523 \,||\, Z_0 == -234.232 \,||\, Z_0 == -2.67897 \,||\, Z_0 == -2.45985 \,||$$
$$Z_0 == 434.406 - 2064.68i \,||\, Z_0 == 434.406 + 2064.68i \,||$$
$$Z_0 == 435.126 - 2064.58i \,||\, Z_0 == 435.126 + 2064.58i\,.$$

A további változókra a megoldások már egyszerűen adódnak. Például a Z_0

```
solZ0[[2,2]]
-234.232
```

értékéhez tartozó megoldások:

```
Table[NSolve[gb[[i]]/.Z0->solZ0[[2,2]],vars[[10-i]]],{i,2,9}]
  //Flatten
```

$$\{Y_0 \to 1193.08050387,\quad X_0 \to -1099.935144993393,$$
$$\lambda_3 \to 124.633988177,\quad \lambda_2 \to 137.492717876,\quad \lambda_1 \to 119.157790807,$$
$$c \to -0.81292606279,\quad b \to -1.46447362244,\quad a \to -0.34443461860\}\,,$$

illetve

```
solZ0[[4,2]]
-2.45985
```

```
Table[NSolve[gb[[i]]/.Z0->solZ0[[4,2]],vars[[10-i]]],{i,2,9}]
  //Flatten
```

$$\{Y_0 \to 897.91370708623,\quad X_0 \to 1092.604716776561680,$$
$$\lambda_3 \to 123.680882249833,\quad \lambda_2 \to 100.890986954918,\quad \lambda_1 \to 123.485691703152,$$
$$c \to -11.8349563533119,\quad b \to -6.09591869315119,\quad a \to -10.2677659323320\}\,.$$

A Z_0 többi értékére fizikailag nem értelmezhető megoldás adódik, nevezetesen a méretarányokra negatív vagy komplex értéket kapunk.
Az előbbi számítást egy lépésben elvégezhetjük a *Mathematica* beépített **NSolve** függvényével:

```
Neqs={f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f9}/.numericalDataR//Expand
sol=Nsolve[Neqs,{a,b,c,λ1,λ2,λ3,X0,Y0,Z0}]//Timing .
```

A megoldások közül csak azokat tekintjük, amelyekben a méretarányok pozitív valós értékek:

```
solPR=Select[sol[[2]],(Im[#[[4,2]]]==0^#[[4,2]]>0)&]
```

$$\{\{a \to 10.2678,\quad b \to 6.09592,\quad c \to 11.835,\quad \lambda_1 \to 123.486,$$
$$\lambda_2 \to 100.891,\quad \lambda_3 \to 123.681,\quad X_0 \to 1092.6,\quad Y_0 \to 897.914,\quad Z_0 \to -2.45985\},$$
$$\{a \to -0.3444435,\quad b \to -1.46447,\quad c \to -0.812926,\quad \lambda_1 \to 119.158,$$
$$\lambda_2 \to 137.493,\quad \lambda_3 \to 124.634,\quad X_0 \to 1099.94,\quad Y_0 \to 1193.08,\quad Z_0 \to -234.232\}\}\,.$$

A GNSS/RNSS RENDSZEREK ÁTFOGÓ HÁLÓZATÁNAK LÉTREHOZÁSA

Ádám József *

On the Development of GNSS/RNSS System-of-Systems *– Currently four individual global navigation satellite systems (GNSSes) have been or are being developed to provide continuous worldwide PNT (Positioning, Navigation, Timing) services. Namely, these are: GPS in the USA, GLONASS in Russia, Galileo in Europe (EU) and BeiDou-2/Compass in China. Others may follow (e.g., GINSS in India). Regional systems that transmit GNSS-like signals are also being developed to provide space-based PNT services over discrete areas of the world. These regional systems can either be a space-based augmentation system (SBAS) for one or more GNSSes (e.g., WAAS, EGNOS, SDCM) or separate, independently operated space-based PNT systems (e.g., QZSS in Japan, IRNSS in India). The result of putting together many different satellite-based navigation systems from different countries, the GNSS System-of Systems of the future is being developed. The paper outlines the latest development of GNSS/RNSS/SBAS systems and the activities of the International Committee on GNSS. The main characteristic parameters of different systems are collected in three tables.*

Keywords: GNSS, GPS, GLONASS, Galileo, BeiDou-2/Compass, RNSS, SBAS, QZSS, GNSS System-of-Systems

A vonatkozó nemzetközi szakirodalom alapján táblázatos formában összefoglaltam a globális navigációs műholdrendszerek (Global Navigation Satellite System, GNSS), a regionális navigációs műholdrendszerek (Regional Navigation Satellite System, RNSS) és a műholdas kiegészítő rendszerek (Satellite Based Augmentation System, SBAS) főbb jellemzőit. Az említett műholdrendszerek közül már évtizedek óta üzemel az amerikai GPS és az orosz GLONASSZ, néhány rendszer pedig jelenleg kifejlesztés alatt áll (az európai Galileo, a kínai BeiDou-2/Compass, a japán QZSS, stb.) és több rendszer még csak a tervek szintjén szerepel (pl. az indiai GINSS és IRNSS, a kínai CAPS, stb.). Az üzemelő globális helymeghatározó rendszerek szolgáltatásait kiegészítő rendszerek közül is több már üzemel (EGNOS, MSAS, WAAS), és néhány pedig jelenleg szintén kifejlesztés alatt áll (GAGAN, SDCM, SNAS). Tanulmányoztam az ENSZ keretei között működő GNSS Nemzetközi Bizottság (International Committee on GNSS, ICG) tevékenységét és szerepét a GNSS infrastruktúra globális méretű használatának (a GNSS rendszerek átfogó hálózata kiépítésének) elősegítése céljából.

Kulcsszavak: GNSS, GPS, GLONASSZ, Galileo, BeiDou-2/Compass, RNSS, SBAS, QZSS, GNSS rendszerek átfogó hálózata

1 Bevezetés

Napjainkban egyre inkább felértékelődik a helyhez kapcsolt információk szerepe. Ilyen információk a leggyorsabban és a legszélesebb körben a műholdas helymeghatározás és navigáció mérési eljárásaival nyerhetők. A műholdas helymeghatározásra és navigációra (azaz helyzet-, sebesség- és időinformációk szolgáltatására) napjainkban világszerte az amerikai globális helymeghatározó rendszert (Global Positioning System, GPS) alkalmazzák legelterjedtebben. A rendszer első kísérleti műholdját 1978-ban, az első operatív (működő) műholdat pedig 1989-ben lőtték fel. A rendszer a kezdeti működési képességét 1993-ban érte el, a teljeset 1995-ben.

A GPS rendszer elődje az amerikai tengerészeti navigációs műholdrendszer (US Navy Navigation Satellite System, NNSS) volt, amely az 1960-as évek közepétől több évtizeden át (az

**Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Általános- és Felsőgeodézia Tanszék*
MTA-BME Fizikai Geodézia és Geodinamika Kutatócsoport
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: jadam@epito.bme.hu

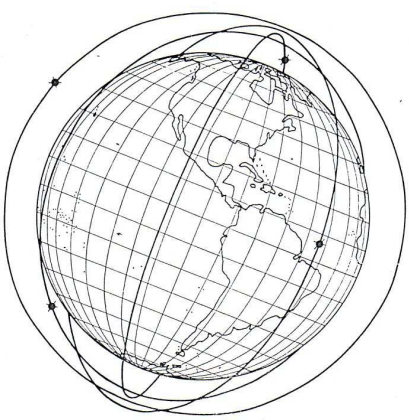
1990-es évek elejéig) működött. Az ún. Doppler-adóval ellátott mesterséges holdakat eredetileg katonai navigációs célra lőtték fel, de 1967 óta polgári navigációs célokra is rendelkezésre bocsátották. Az NNSS holdakat másképpen ún. *Transit* vagy Doppler-holdak (illetve doppleres műholdak) néven is használták. A navigációs rendszernek hat üzemelő műholdja volt, amelyek egy-egy kör alakú poláris pályán, a földfelszín felett kb. 1000 km magasságban keringtek (1. ábra). Az 1970-es évek második felében az akkori pontossági szintnek megfelelő, geodéziai célú, terepi mérésekre alkalmas, hordozható Doppler-vevőberendezéseket fejlesztettek ki, melyekből hazánk is beszerzett négy vevőberendezést (1 db CMA és 3 db JMR). Ezeket geodéziai alaphálózatunk továbbfejlesztése (és a GPS-technika hazai bevezetése) céljából felhasználtuk (Ádám 1987 és 2009, Ádám és Fejes 1975).

Megjegyezzük, hogy az amerikai Transit műholdrendszer (NNSS) első működő holdját, a Transit-1B műholdat 1960. április 13-án lőtték fel. Ezt az időpontot tekintjük a *műholdas helymeghatározás* megszületésének, amely óta már több mint 50 év telt el. Az NNSS navigációs műholdrendszer a helymeghatározás céljára egészen 1991-ig üzemelt, akkorra vette át teljesen a helyét a ma széles körben elterjedt GPS.

2 A GNSS/RNSS rendszerek kifejlesztése

Az elmúlt másfél évtizedben tanúi voltunk a GPS-technika egyre szélesebb körű alkalmazásának (Magyarországon is), nemcsak a geodézia, a térképészet, a navigáció és a térinformatika, hanem a föld- és műszaki tudományok más területein is (pl. Borza 2004, Borza és Frey 2003, Borza és Fejes 2006, Borza et al. 2007a és 2007b, Busics és Horváth 2006, Fejes 2003, FVM 2010, Rózsa et al. 2009 és 2010). Az előrejelzések szerint a felhasználók köre a jövőben is egyre bővülni fog. Ezt az is lehetővé teszi, hogy a jelenlegi GPS-rendszer nagy arányú továbbfejlesztésével foglalkoznak, amelynek célja az, hogy a rendszert a tengerhajózás, a repülés (különösen a polgári repülés) és az űrkutatás igen sok területén megbízhatóan és hatékonyan lehessen alkalmazni. Így a műholdas navigációs rendszerek új, a jelenleginél is összetettebb változatait hozzák létre. E rendszerek összefoglaló megnevezésére alkalmazták korábban a *globális navigációs műholdrendszer* (Global Navigation Satellite System, GNSS) elnevezést.

A GNSS betűszót 1991-ben alkották meg és alkalmazták először a 10. légi navigációs konferencián (Seeber 2003), amikor a Nemzetközi Polgári Repülésügyi Szervezet (International Civil Aviation Organization, ICAO) felismerte, hogy az elsődleges navigációs rendszert a 21. században a globális navigációs műholdrendszer (GNSS) fogja biztosítani. Ez alatt azt is értjük, hogy a GNSS kifejezésének többet kell magában foglalnia mint pusztán műholdas helymeghatározás. A pontosság mellett további olyan fontos jellemzők is kell hogy meghatározzák a rendszert, mint az integritás, a hozzáférhetőség és a folyamatos szolgáltatás. Az amerikai GPS és az orosz GLONASSZ, amelyek elsősorban katonai rendszerek, valójában nem biztosítják még ezeket a képességeket.



1. ábra. Az NNSS holdjai

Megjegyezzük, hogy a GNSS betűszó használata nem egységes a nemzetközi szakirodalomban. A szakemberek többsége a globális navigációs műholdrendszerek (global navigation satellite systems) kifejezés rövidítésére alkalmazza, melyben a hangsúly a többes számként szereplő rendszerek (systems) szón van. A szakemberek egy másik (kisebbik része, pl. Hein et al. 2007a, 2007b, 2007c) és az *Inside GNSS* folyóirat, a szóban forgó rendszerek miatt a betűszóban is többes számot használ a következő módon: GNSSes (vagy pl. GNSSs). A rendszer (system) szó többes számú alakja, a rendszerek (systems) kifejezés jól megindokolható azzal, hogy ma már ténylegesen is több rendszer működik (pl. GPS és a GLONASSZ) és továbbiak kifejlesztése is napjainkban folyik (az európai Galileo, a kínai COMPASS és az indiai GINSS), amelyek mindegyike valójában egy-egy globális navigációs műholdrendszer (global navigation satellite system, GNSS).

Ezt a kérdéskört érintik Hofmann-Wellenhof et al. (2008) a legújabb szakkönyvük előszavában, amelyben idézik az ENSZ CoUPOS (Committee on the Peaceful Uses of Outer Space) szervezete egyik konferenciája 1998-ban megjelent kiadványában közzétett fogalmi meghatározást. E szerint a globális navigációs műholdrendszer (Global Navigation Satellite System, GNSS) űralapú (space-based) rádiós helymeghatározó rendszer, amely magában foglal egy vagy több műholdrendszert, és ha szükséges, kiegészítő rendszereket annak érdekében, hogy a megkívánt működést szolgálják, azaz biztosítsák a folyamatos (24-hour) háromdimenziójú helyzet-, sebesség- és időinformációt a megfelelő vevőberendezéssel rendelkező felhasználó számára, legyen az a földfelszín bármely pontján, vagy a földfelszín közelében (gyakran a Föld körüli térségben). Ilyen értelmezésben alkalmazza a GNSS kifejezést Hofmann-Wellenhof et al. (2008), Hofmann-Wellenhof (2009), továbbá a hazai szakirodalomban Fejes (2003), Borza (2004) és Ádám (2006), valamint Ádám et al. (2004).

A GPS rendszer bővítését és hatékonyságának növelését szolgálják az ún. *regionális navigációs műholdrendszerek* (Regional Navigation Satellite Systems, RNSS) kifejlesztése.

A már működő (de még fejlesztés alatt álló) és tervezett GNSS és RNSS rendszerek elnevezéseit az 1. táblázat tartalmazza. A GNSS és RNSS fejlesztési programok valójában nemzeti infrastruktúra projektekként valósulnak meg. Nagyobb gazdasági és űrkutatási potenciállal rendelkező nemzetek részéről jól látható tendencia mutatkozik arra, hogy saját műholdas navigációs (globális és/vagy regionális) rendszert hozzanak létre. (E nemzetek többnyire saját űriparral és nukleáris technikával is rendelkeznek).

A GPS/GNSS/RNSS témakörnek óriási szakirodalma van. Számos szakkönyv jelent meg (pl. Hofmann-Wellenhof et al. 2008 és Seeber 2003). Önálló szakmai folyóiratokat indítottak el: így 1990-től a „GPS World" (www.gpsworld.com) és 2006-tól az „Inside GNSS" (www.insidegnss.com) elnevezésű lapot. Az időszerű műholdas navigációs hírekről (pl. műhold felbocsátásáról) ad rendszeres tájékoztatást magyar nyelven az *Űrvilág Magazin* c. asztronautikai hírportál (http://www.urvilag.hu) elsősorban Frey Sándor írásai alapján (pl. Frey 2011 és 2012).

2.1 A GNSS rendszerek főbb jellemzői

Az elmúlt évtized elején az USA globális helymeghatározó rendszere (GPS) volt az egyetlen működő globális navigációs műholdrendszer (GNSS). Ma azonban a GPS már nem az egyetlen műholdas navigációs rendszer, mert Oroszország jelentős fejlesztéseknek köszönhetően működteti saját rendszerét GLONASSZ (angol nyelvű szövegben GLONASS) néven. Oroszország hosszú utat járt be a GLONASSZ újraépítésében és modernizálásában. Az utóbbi években a rendszer műholdjainak száma megkétszereződött. Végre jóváhagyták Európa Galileo elnevezésű műholdas navigációs rendszerét, amelynek kifejlesztésén az Európai Unió (EU) az Európai Űrügynökséggel (ESA) együtt dolgozik. Az elmúlt években kísérleti céllal fellőtték a Galileo első holdjait. Továbbá a GPS-hez különböző kiegészítő rendszereket hoznak létre. Az említett műholdas navigációs rendszereken felül újabb rendszereket is terveznek. Kína bejelentette terveit a saját fejlesztésű és tulajdonú COMPASS elnevezésű GNSS létrehozására. Néhány holdat már fel is lőttek. India is létre kívánja hozni saját globális (GINSS) és regionális navigációs műholdrendszerét (IRNSS). Ez az oka annak, hogy a szakirodalomban a korábban általánosan ismert GPS elnevezés mellett napjainkban a GNSS kifejezés alkalmazása terjed el (Magyarországon is: FVM 2010) (pl. Becker 2009, Chassagne 2012, McNeff 2010).

1. táblázat. Navigációs műholdrendszerek

Betűszó	A navigációs műholdrendszer elnevezése és honlapja
GPS	NAVSTAR Global Positioning System, Globális helymeghatározó rendszer (amerikai) http://tycho.usno.navy.mil/gps.html
GLONASS	GLObal NAvigation Satellite System (Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema) Globális navigációs műholdrendszer (szovjet-orosz) http://www.glonass-ianc.rsa.ru/pls/htmldb
Galileo	European Satellite Positioning and Navigation System, európai műholdas helymeghatározó és navigációs rendszer http://www.esa.int/esaNa/galileo.html
BeiDou-2/ COMPASS	Kína globális navigációs műholdrendszere
GINSS	Global Indian Navigation Satellite System India globális navigációs műholdrendszere
BeiDou-1/ CAPS	Chinese Area Positioning System Kína regionális helymeghatározó rendszere
QZSS	Quasi-Zenith Satellite System Japán kvázi-zenitális műholdrendszere
IRNSS	Indian Regional Navigation Satellite System India rádiónavigációs műholdrendszere
EGNOS	European Geostationary Navigation Overly Service, európai műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatás http://www.egnos-pro.esa.int/index.html
WAAS	Wide Area Augmentation System of the USA amerikai műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatás http://www.faa.gov
MSAS	Multifunctional Transport Satellite (MTSAT) Satellite-based Augmentation System of Japan, japán műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatás.
GAGAN	GPS and Geo Augmented Navigation System of India, Indiai műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatás
SDCM	System for Differential Correction and Monitoring Oroszország műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatása (http://sdcm.rniikp.ru)
SNAS	Satellite Navigation Augmentation System Kína műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatása
NIGCOMSAT	Nigerian Communications Satellite Nigériai kommunikációs műhold
CWAAS	Canadian WAAS Kanadai műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatás
CSTB	Dél-Amerika műholdas navigációs kiegészítő szolgáltatása

A GPS rendszer mérési technikájából és a vele történő helymeghatározás sajátos módszeréből adódóan nagy számú műhold üzemel a földfelszín felett ún. közepes magasságú pályákon (Mean Earth Orbit, MEO). Ez a többi GNSS rendszerre (GLONASSZ, Galileo és COMPASS) is jellemző. A GNSS rendszerek műholdjai héjszerűen helyezkednek el a térben, a Föld felszíne felett 19000 km és 23000 km magasságban (2. táblázat) (Almanac 2011). A GPS rendszer műholdjai mintegy 20000 km földfelszín feletti magasságban (2. ábra), 6 közel körpályán helyezkednek el (3. ábra). A GPS rendszer modernizálása folyamatban van, tervbe vett továbbfejlesztése 2015-ig tart.

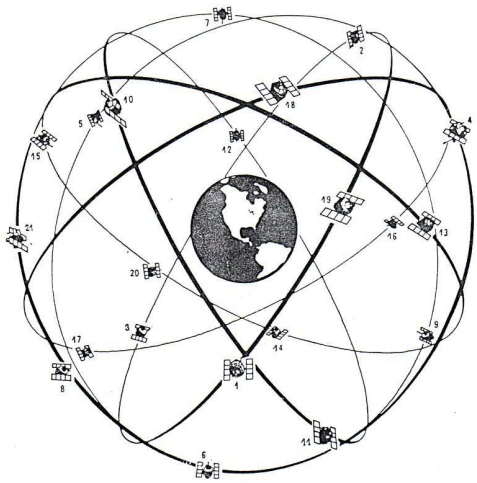
A GPS navigációs műholdrendszer jelenlegi konstellációjában 10 db IIA-, 12 db IIR-, 7 db IIR-M- és két IIF-típusú, összesen 31 működőképes (FOC, Full Operational Capability) műholddal rendelkezik. A navigációs rendszernek négy tartalék holdja kering az adott pályákon. A GPS műholdak többségének fedélzetén rubídium illetve néhányon pedig cézium atomóra üzemel és biztosítja az időszolgáltatást. Két GPS-holdat lézeres távolságmérésekre alkalmas, lézerfényt visszaverő prizmákkal is elláttak. Legutóbb 2011. július 16-án bocsátották fel egy IIF sorozatú mesterséges holdat.

A GLONASSZ rendszert is egyaránt katonai és polgári alkalmazások céljából fejlesztik. A rendszer teljes kiépítettségben 24 műholdból áll, amelyek a földfelszín felett 19100 km magasságban, az Egyenlítőhöz 64,8º-os szögben hajló, három körpályán (egy-egy pályasíkon 8-8 műhold) egyenletesen elosztva keringenek. A három MEO-műholdpálya síkja egymással 120º-os szöget zárnak be.

Az első GLONASSZ műholdat 1982. október 12-én lőtték fel. A műholdas rendszer jelenleg 27 működőképes mesterséges holdból áll, amelyek közül 26 GLONASSZ-M típusú és a legutóbb (2011. február 26-án) fellőtt műhold már az újabb sorozatú GLONASSZ-K1 jelű műhold. Ez a műholdkonfiguráció teljes lefedettséget biztosít. Az orosz műholdrendszer valamennyi holdjának fedélzetén cézium atomóra üzemel és biztosítja az időszolgáltatást.

2. táblázat. A GNSS/RNSS rendszerek főbb jellemzői

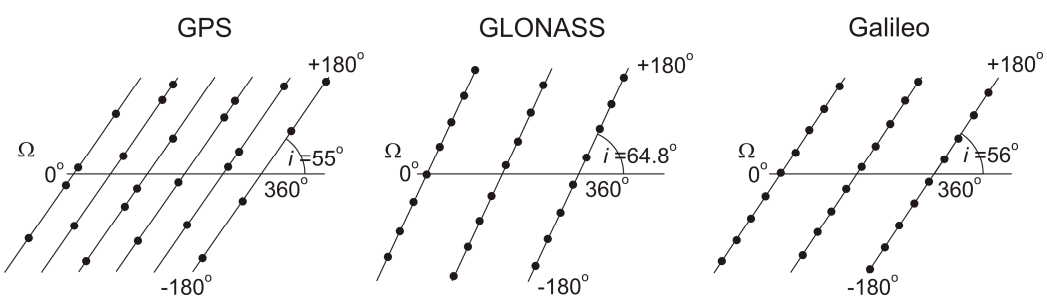
Jellemző adatok	GPS	GLONASS	Galileo	COMPASS	QZSS	IRNSS	CAPS
Első műhold	1978.02.22.	1982.10.12.	2005.12.28.	2007.04.14.	2010		
Teljes működés	1995.07.17.	1996.01.18.	2012/13 (?)	2020 (?)	2012	2013	
Műholdak száma	24 MEO +3 tartalék	24 MEO	27 MEO +3 tartalék	27 MEO, 5 GEO és 3 IGSO	3 GSO	3 GEO 4 GSO	2 GEO 4 SIGSO
Pályasíkok száma	6	3	3	3	1	3	?
Fél nagytengely hossza [km]	26559,7	25440	29601,297	27840	42164	42164	42164
Exentricitás, *e*	0	0	0	0	0,099	0	0
MEO-műholdak pályahajlása, *i*	55˚	64,8˚	56˚	55˚	-	-	-
GEO-műholdak földrajzi hosszúsága	-	-	-	118˚	135˚	55˚(2db), 112˚(2db)	87,5˚, 110,5˚, 125˚, 142˚
GSO-műholdak egyenlítői átmeneti hosszúsága	-	-	-	55˚	45˚	29˚	7˚
GSO-műholdak pályahajlása	-	PE90	GTRF	?	JGS/ ITRF	?	?
Geodéziai vonatkoztatási rendszer	WGS84 ITRF	GLONASS-idő	Galileo-idő	?	?	?	?
Időrendszer	GPS-idő						



2. ábra. A GPS holdjai

A GLONASSZ fejlesztése a vonatkozó cikkek értelmében napjainkban új történelmi fázisba érkezett (Urlichich et al. 2011). Az új ún. CDMA (Code-Division-Multiple-Access) navigációs jelek és az Oroszország egészére kiterjedő műholdas kiegészítő rendszer nemcsak új és magasabb minőségű navigációs szolgáltatást biztosít, hanem alapot nyújt Oroszország és szomszédjai térségében teljes körű RNSS biztosítására, mely néhány dm-es pontossággal nyújt navigációs adatokat a rendszer felhasználóinak. A rendszer továbbfejlesztése részeként újabb GLONASSZ-M sorozatú navigációs műholdat bocsátottak fel 2011. októberében az észak-oroszországi Pleszeck (Plesetsk) űrközpontból Szojuz-2.1b jelzésű hordozórakétával. A műhold tömege 1415 kg, tervezett élettartama 7 év. 2011-ben még két további GLONASSZ-M típusú műholdat (ezek egyébként a GLONASSZ kifutó, M-jelű sorozatából valók) juttattak pályára: november 4-én Bajkonur és november 22-én pedig Pleszeck űrközpont indítóállásairól.

Oroszország Szövetségi Űrügynöksége (Russia's Federal Space Agency) szerint az amerikai GPS és az orosz GLONASSZ közti alapvető különbség a műholdak által sugárzott jelekben és azok szerkezetében van. A GPS az ún. *code-division channeling* elvet, a GLONASSZ pedig az ún. *frequency-division channeling* eljárást alkalmazza. Eltérés található a műholdak pályamozgásának matematikai leírásában és modellezésében is. Több ország a GLONASSZ műholdrendszert a GPS alternatívájaként tekinti. Így Fehér-Oroszország, India, Kazahsztán és Kanada egyezményt írt alá a GLONASSZ használatára. Latin-Amerika országai és az arab országok is érdeklődést mutatnak. Számos szakember azt hangsúlyozza, hogy a GPS és a GLONASSZ rendszerek nem versenytársai egymásnak, hanem egymást jól kiegészítő GNSS rendszerek.



3. ábra. A GNSS rendszerek pályasíkjai

A GLONASSZ globális navigációs műholdrendszert az orosz hadsereg üzemelteti. A következő új generációs GLONASSZ műholdak már kisebb tömegű, hosszabb (tízéves) élettartamú és pontosabb (ún. K-sorozatú) űreszközök lesznek, amelyek közül egyet már fellőttek, a második indítása 2012-ben várható. Négy polgári és katonai jelet fognak sugározni.

A Galileo rendszert az Európai Unió (EU) és az Európai Űrügynökség (ESA) közös fejlesztésében hozza létre kizárólag polgári (civil) felhasználásra. Teljes kiépítettségében 30 (27+3 tartalék) műholdból fog állni, melyeket három kör alakú pályán helyeznek el egyenletesen elosztva, a földfelszín felett mintegy 23000 km magasságban. Az európai műholdas navigációs rendszer (Galileo) nem készül olyan gyorsan, mint kellene az előzetes tervek szerint. A Galileo műholdrendszer az amerikai GPS és az orosz GLONASSZ megfelelője. Pontos helymeghatározó, navigációs és időszolgáltatást nyújt majd felhasználóinak. A műholdrendszert idővel 30 tagúra kívánják kiépíteni. A Galileoból egyelőre a rendszer tesztelése céljából a GIOVE-A (Galileo In-Orbit Validation Element-A) és a GIOVE-B jelű mesterséges holdat 2005-ben és 2007-ben bocsátották fel, amelyek jól működtek. Az első fedélzetén rubidium, a másodikon pedig hidrogénmézer atomóra biztosítja az időszolgáltatást.

A Galileo rendszer ún. kipróbálási szakaszában (In-Orbit Validation, IOV) a tervek szerint négy műholdat kívánnak felbocsátani, kettesével 23222 km magas pályákra. A holdakat a francia Guyanából (Kourouból) indítják majd Szojuz hordozórakétákkal, amelyek számára külön indítóállást építettek. Az első műholdpárt 2011. október 21-én indították. A pályára állított két Galileo-IOV műhold tömege egyenként 700 kg. Méretük a napelemszárnyak kibontása után 2,74 m x 14,5 m x 1,59 m. A pontos navigációt és időszinkronizációt lehetővé tevő jelek sugárzásának alapfeltételét, a nagypontosságú időmérést két-két fedélzeti hidrogén mézer, ill. rubídium atomóra biztosítja. Egy-egy Galileo-IOV mesterséges hold várható élettartama 12 év. Ezek már részei lesznek a végleges Galileo műholdelrendezésnek. A másik két tervezett IOV műholdat várhatóan 2012. szeptemberében fogják felbocsátani. A navigációs műholdrendszer előreláthatólag 2015-re épül ki. A tervek szerint a további Galileo műholdakat Szojuz rakétákkal (mindegyik két-két műholdat visz magával), valamint Ariane-5 rakétákkal (amelyek egyenként négy-négy műholdat visznek magukkal) fogják felbocsátani. 2013-ban három Szojuz-felbocsátás, 2014-ben két Szojuz- és egy Ariane-5-felbocsátás és 2015-ben pedig két Ariane-5-fellövés várható.

A 2011-ben felbocsátott mindkét Galileo-IOV műhold fedélzetén a lézerfény visszaverésére alkalmas prizmákat (lézertükröket) helyeztek el a műholdak pályájának nagypontosságú meghatározására. A műholdakra sikeres lézertávmérést végeztek több földi (az angol Herstmonceux, a chilei Concepción és az olasz Matera) állomásról is.

Kína navigációs műholdrendszerének kifejlesztésével 1980 óta foglalkozik. A Göncölszekér kínai nevéről elnevezett Beidou (illetve BeiDou) rendszer első három geostacionárius (GEO) műholdját 2000 és 2003 között bocsátották fel, a negyediket 2007-ben. Az alapkiépítésben létrehozott első generációs Beidou rendszer (Beidou-1) regionális lefedettséget biztosít Kína térségében és a továbbfejlesztés alapját képezi, melynek révén GNSS rendszerüket hozzák létre szakaszonként Beidou-2 illetve COMPASS (Beidou-2/COMPASS) néven. A kínai navigációs műholdrendszer keretében jelenleg a négy Beidou-1 (GEO-pályán keringő) műhold és a Beidou-2/COMPASS keretében pedig további 8 műhold (1MEO, 3 IGSO és 4 GEO) üzemel. A 2010/2011 folyamán felbocsátott három IGSO mesterséges hold pályáját úgy alakították ki, hogy mindig legyen észlelhető közülük egy műhold Kínában nagy magassági szög alatt. A tervek szerint 2012 végéig további 6 műholdat juttatnak pályára, mellyel a Beidou-2/COMPASS 14 műholdból álló (4 MEO, 5 GEO és 5 IGSO) navigációs rendszerré válik és teljes körű regionális szolgáltatást fog nyújtani Ázsia keleti részére (a $-55^{o} \leq \varphi \leq 55^{o}$; $80^{o} \leq \lambda \leq 160^{o}$ földfelületre vonatkozóan). Ezzel a jelenlegi 10-20 méteres helymeghatározási pontosság 5-10 méteresre növekszik. Teljes kiépítettségében a rendszer 27 MEO, 5 GEO és 3 IGSO pályájú műholdból fog állni. A kínai navigációs műholdrendszer az említett konstellációban várhatóan 2020-ra épül ki és fog globális szolgáltatást nyújtani. A műholdak a következő vivőfrekvenciákon sugároznak jeleket:1195,14 – 1219,14 MHz; 1256,52 – 1280,52 MHz; 1559,05 – 1563,15 MHz; 1587,69 – 1591,79 MHz. A műholdak tervezett működési élettartama 8 év.

A kínai illetékes szakemberek 2011. év végén jelentették be, hogy a navigációs műholdrendszerük már hivatalos próbaüzemben működik. Közzétették, a navigációs jelek pontos szerkezetét leíró műszaki dokumentumot is, amelynek alapján a navigációs műholdvevők gyártói alkalmassá tehetik vevőkészülékeiket a Beidou-2/Compass GNSS rendszer használatára is.

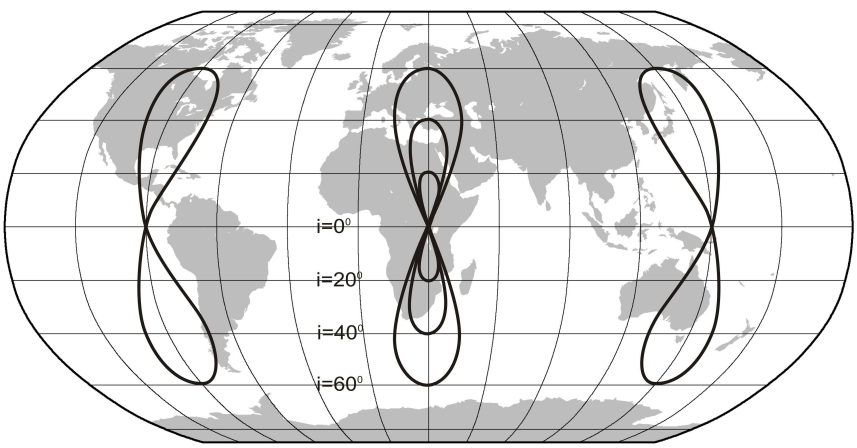
A többi GNSS rendszerrel ellentétben a Beidou-2/Compass nemcsak közepes magasságú pályákon (MEO) keringő mesterséges holdakkal rendelkezik, hanem távolabbi, geostacionárius körpályán (GEO) és az Egyenlítővel 55º-os szöget bezáró, elnyúlt ellipszis alakú geoszinkron (IGSO) pályán keringő műholdakkal is. A kínai Beidou-2/Compass GNSS rendszer holdjainak jelzését annak megfelelően adják meg, hogy az adott műholdat mely típusú pályára bocsátották fel (Compass-M, Compass-G és Compass-IGSO). Mivel az IGSO-műhold felbocsátása nem olcsó, ezért Kína azzal próbálkozik, hogy használaton kívüli geostacionárius műholdjait használja fel úgy, hogy azokat pályamódosítással az Egyenlítővel kis szöget bezáró geoszinkron pályára (slightly inclined geostationary satellite orbits, SIGSO) állítsák.

2.2 Az RNSS rendszerek főbb jellemzői

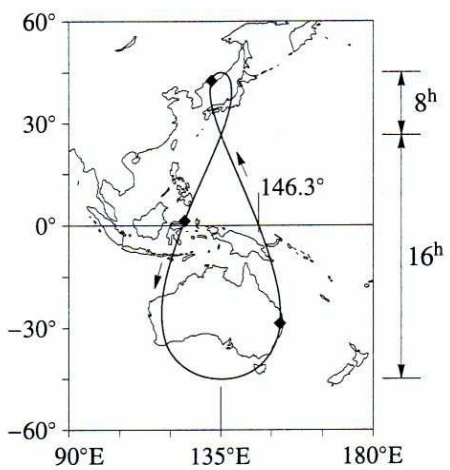
Az RNSS rendszerek lényegében a GPS bővítését szolgálják egy-egy régió térségében. Jelenlegi ismereteink szerint három RNSS rendszer létrehozásáról van szó: India, Japán és Kína határozta el, hogy térségükben a GPS rendszer hatékonyságának növelésére és bővítésére hozza létre saját RNSS rendszerét. Ebből a célból navigációs műholdakat bocsátanak fel ún. *geoszinkron* (GSO) pályákra. Ezek a pályák kitüntetett szerepet játszanak a műholdpályák között, mert ezeken a keringés ideje és iránya pontosan megegyezik a Föld sziderikus (állócsillagokhoz képest mért) tengelyforgási idejével és irányával. (A geoszinkron pályán keringő mesterséges égitestet geoszinkron műholdnak nevezzük.) A geoszinkron műhold keringésének jellegzetessége, hogy adott helyi időben egy ideig minden nap pontosan ugyanazon földrajzi hely fölött tartózkodik. A geoszinkron pálya speciális esete a geoszinkron körpálya, ennek földfelszín feletti magassága 35790 km (a = 42164 km). A pálya bármely pontjából a Föld felszínének 42 %-a figyelhető meg róla egyszerre. A Földről nézve a geoszinkron műholdak É-D-i irányú, a pályahajlás (i) szögétől függő, nyolcas alakú útvonalat írnak le (Almár et al. 1996) (4. ábra).

További speciális eset, ha a pályahajlás szöge 0º, azaz a műhold az Egyenlítő síkjában kering. Ebben az esetben a műhold keringése során mindvégig a Föld felszínének ugyanazon pontja fölött tartózkodik. Az ilyen pályán keringő, a Föld felszínéhez képest álló műholdat geostacionárius műholdnak, a műholdpályát pedig *geostacionárius* (GEO) pályának nevezzük.

A tervezett RNSS rendszerek közül a japán QZSS már a megvalósítás fázisában van. A három geoszinkron műhold közül már egyet 2010. év nyarán felbocsátottak. Mivel pályája eltér a körpályától, ezért a pálya ún. szubszatellita vonala az 5. ábrán látható sajátos nyolcas alakot alakítja ki.



4. ábra. Különböző hajlásszögű (i) kör alakú geoszinkron pályák földfelszíni vetülete



5. ábra. A QZSS-műhold nagy hajlásszögű, ellipszis alakú geoszinkron pályájának földfelszíni vetülete

3 Kiegészítő rendszerek

A GPS azonban még mindig nem alkalmazható kellő biztonsággal bizonyos navigációs feladatokhoz, amelynek egyik legfontosabb oka az, hogy a rendszer önellenőrző képessége (ún. integritása) egyelőre elmarad a szigorú közlekedésbiztonsági előírásokhoz képest. A nagyobb helymeghatározási pontosság elérése céljából hozták létre az ún. kiegészítő rendszereket (Augmentation System). A kiegészítő rendszerek két típusát különböztetjük meg aszerint, hogy a szolgáltatások elérése műholdakon keresztül (Satellite Based Augmentation System, SBAS) vagy valamely földi kommunikációs csatornán (Ground Based Augmentation System, GBAS) valósul meg. A kiegészítő rendszerek lényegében két szolgáltatást nyújtanak: egyrészt fokozzák a GPS-szel elérhető abszolút helymeghatározás pontosságát, másrészt információt szolgáltatnak a rendszer megbízhatóságáról és biztonságáról. Több ilyen rendszer kezdte meg működését az elmúlt években (Wanninger 2010) (3. táblázat). A WAAS Észak-Amerika, az MSAS Japán, a GAGAN India, az EGNOS rendszer (Boulette et al. 2011) pedig Európa területére biztosítja az említett szolgáltatásokat. Lényegében a polgári légi irányítást és navigációt kell segíteniük. A kiegészítő rendszerek valamennyi műholdja ún. geostacionárius (GEO) pályán kering.

Az SDCM (System for Differential Correction and Monitoring) orosz műholdas kiegészítő rendszer, amely a GPS és a GLONASSZ műholdak követési integritását biztosítja, továbbá differenciális korrekciókat és kiértékelést nyújt a GLONASSZ működéséhez: valósidejű differenciális korrekciókat szolgáltat, amelyek pontossága vízszintes értelemben 1-1,5 m, magassági értelemben pedig 2-3 m.

Az SDCM (www.sdcm.ru) három Luch elnevezésű geostacionárius műholdból fog állni: Luch-5A (16ºW), Luch-5B (95ºE) és Luch-4 (167ºE). A Luch-5A műholdat 2011-ben lőtték fel, a Luch-5B holdat 2012-ben és a Luch-4 jelzésű műholdat pedig 2014-ben fogják felbocsátani. Az első SDCM műhold természetszerűleg szolgáltatásait Oroszország nagy részére tudja nyújtani (az északi régiókat kivéve). Az északi régiók lefedettségét is biztosítandó a következő műholdpályákra lenne szükségük: *a)* GSO (inclined geosynchronous orbit) köralakú, *b)* IGSO (inclined, elliptical geosynchronous orbit) elliptikus és *c)* HEO (Highly Elliptical Orbit) Molnyija-típusú magas elliptikus pályára. Összehasonlító modellszámítások azt mutatják, hogy a felsorolt különböző pályájú négy GSO/IGSO/HEO műhold két pályasíkon elhelyezve tudja biztosítani Oroszország bármely részén működő felhasználó számára a navigációs jel folyamatos vételét legalább 5º magassági szög felett elhelyezkedő két műholdról egyidejűleg.

3. táblázat. GNSS kiegészítő rendszerek pályajellemzői

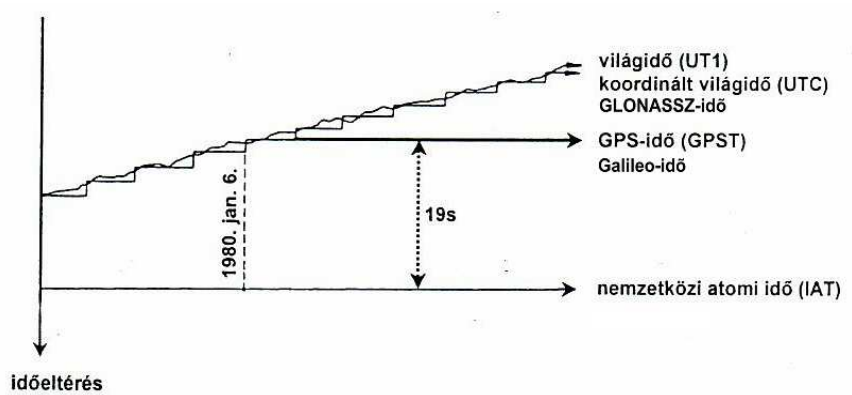
Paraméter	EGNOS	WAAS	MSAS	GAGAN	SDCM	SNAS
Műholdak típusa és száma	GEO (3)	GEO (4)	GEO (2)	GEO (3)	GEO (3)	GEO (2)
GEO műholdak földrajzi hosszúságai	15,5˚W 64,0˚E 21,5˚E	53˚W 98˚W 120˚W 178˚W	140˚E 145˚E	55˚E 82˚E 132˚E	16˚W 95˚E 167˚E	
Félnagytengely hossza, *a* [km]	42164 km	42164 km	42164 km	42164 km	42164 km	42164 km

2011. május 21-én India űrkutatási szervezete (Indian Space Research Organisation, ISRO) keretében sikeresen fellőtték a GAGAN elnevezésű műholdas kiegészítő rendszer első műholdját (GSAT-8) geostacionárius (GEO) pályára. Az Egyenlítő síkjában elfoglalt helye az 55º-os keleti hosszúságú pontban van. A GAGAN-GPS kiegészítő navigációs rendszert India valamennyi repülőterén használni fogják 2013. év júniusától. A második GAGAN műholdat 2012-ben, a harmadikat pedig 2013/2014-ben fogják felbocsátani.

4 Alkalmazott vonatkoztatási idő- és koordináta-rendszerek

Az egyes GNSS rendszerek önálló vonatkoztatási idő- és koordináta-rendszert használnak.

A GPS számára 1980. január 6-án 0,0 órakor önálló időrendszert (GPS Time, GPST: GPS-idő) vezettek be. Ekkor a GPST megegyezett az UTC világidővel, a nemzetközi atomidő (TAI) és a GPST különbsége pedig 19 s volt. Ez a különbség változatlan maradt, hogy a GPS-műholdak óráit ne kelljen rendszeresen korrigálni a szökőmásodperccel. A GPS-idő tehát az atomidőhöz (TAI) hasonlóan folytonos idő, emiatt a GPST és az UTC időrendszerek eltérése időnként egy-egy másodperccel növekszik. 2000. január 1-jén ez a különbség +13 s volt. A GLONASSZ navigációs műholdrendszer a GLONASSZ-időt használja, melynek során a GLONASSZ-műholdak óráit rendszeresen korrigálják a szökőmásodperccel és az oroszországi világidő-rendszerben fejezik ki: UTC (SU) (6. ábra). A Galileo idő (GST – Galileo System Time) alapegysége az atomi másodperc, 1999. augusztus 22. 0h (UT) indult, ekkor az UTC és a GST között 13 szökőmásodperc volt a különbség, ezáltal gyakorlatilag megegyezik a GPS időrendszerrel. A két rendszer között az eltérő órák miatt mintegy 10 ns nagyságrendű eltérés lehet. A Galileo rendszer navigációs üzenetei tartalmazzák ezt az eltérést az együttes működés biztosítása céljából. (Moudrak és társai, 2005).



6. ábra. A különböző GNSS-időrendszerek kapcsolata

A GPS-műholdak által sugárzott fedélzeti pályaelemek vonatkoztatási rendszere a WGS84 geodéziai világrendszer (Ádám 2008). A GPS-holdakra ún. precíz pályaelemeket is számítanak, amelyeket a Nemzetközi GNSS Szolgálat (International GNSS Service, IGS) honlapjáról lehet letölteni. A szóban forgó pályaelemek vonatkoztatási rendszere az ITRS rendszer aktuális realizációja (jelenleg az ITRF2008 vonatkoztatási koordináta-rendszer).

A GLONASSZ-műholdak által sugárzott fedélzeti pályaelemek PZ-90 jelű vonatkoztatási rendszerét (a vonatkoztatási ellipszoid geometriai adatai: a = 6378136 m és f = 1/298,257 839 303) is a WGS84 rendszerhez hasonló módon alkották meg (Boucher-Altamimi 2001). 2007-ben a PZ-90 rendszert módosították (PZ-90,02) úgy, hogy vonatkoztatási koordináta-rendszerét az ITRS legutóbbi realizációjával hozták összhangba. Várható, hogy a tervezett többi GNSS/RNSS rendszer (az európai Galileo, a kínai BeiDou-2/Compass, a japán QZSS, stb.) vonatkoztatási rendszerét is az ITRS alapulvételével hozzák majd létre.

5 A GNSS Nemzetközi Bizottságának szerepe és tevékenysége

A 2000-es évek elején az ENSZ keretei között létrehozták a GNSS Nemzetközi Bizottságot (International Committee on Global Navigation Satellite Systems, ICG, http://www.oosa.unvienna.org/oosa/SAP/gnss/icg.html) a GNSS infrastruktúra globális méretű használatának és a kapcsolódó ismeretek cseréjének elősegítése céljából (Gadimova 2009 és Hein 2009).

Az ICG keretei között a jelenlegi és a tervezett GNSS rendszer szolgáltatók megegyeztek három fontos alapelvben, amelyek segítenek azt biztosítani, hogy tisztességes verseny alakuljon ki. Ez a három rendező elv a következő:

- összeegyeztetés (compatibility),
- együttes működőképesség (interoperability),
- átláthatóság (transparency).

Az ICG ezeket a következőképpen értelmezi:

A GNSS rendszerek összeegyeztethetősége azt kívánja meg, hogy az egyes GNSS rendszerek jelei között ne lépjen fel interferencia, továbbá az egyes rendszerek által nyújtott, biztonsági célokat szolgáló, korlátozott hozzáférésű jelek átfedését elkerüljék (a rendszerszolgáltatók az ilyen jelek átfedésének elkerülésére törekszenek).

Az együttes működőképesség azt jelenti, hogy az egyes GNSS rendszerek jelei használhatók együttesen olyan módon, hogy az általános szolgáltatás javuljon. Minél könnyebb lesz több GNSS rendszer adásait venni képes vevőberendezést kifejleszteni és legyártani (ún. *multi-GNSS vevőberendezések*), akkor annál inkább fenn fog állni két és több GNSS rendszer között a kölcsönös működőképesség. Másképpen fogalmazva a kölcsönös működőképesség (interoperability) alatt azt értjük, hogy az L1 és L5 frekvenciákat és ezeken a frekvenciákon modulált CDMA típusú jeleket valamennyi GNSS és RNSS biztosítani fogja. Végeredményben a mutatkozó verseny haszna alacsony költségű, kétfrekvenciás ún. multi-GNSS vevőberendezések kifejlesztésében nyilvánul meg, amelyek kivitelezésében is lényegesen magasabb minőségűek lesznek a jelenlegi GPS-vevőberendezéseknél. Ez a felhasználók javát szolgálja.

Végül az átláthatóság a GNSS rendszerek jeleinek szolgáltatásában azt kívánja meg, hogy a szolgáltatók tegyék közzé mindazon dokumentumokat, amelyek leírják a jel- és rendszerinformációt, a szolgáltatás elveit és minimális kritériumait. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy mindazt az információt tegyék nyilvánossá (elérhetővé), melyekre a műszergyártóknak szükségük van ilyen vevőberendezések készítéséhez, továbbá a szolgáltatók elegendő ismereteket nyújtsanak a felhasználóknak arról, hogy milyen minőségű szolgáltatást várhatnak el.

Az ICG évente ülésezik abból a célból, hogy támogassa az űralapú navigációs és helymeghatározó rendszerekhez történő általános hozzáférést és közöttük az összeegyeztethetőséget, kölcsönös működőképességet. Az ICG első konferenciáját 2006. november 1-2. között szervezték meg Bécsben, az ötödiket pedig 2010. évben (Turin, Olaszország, 2010. október 17-22.;

http//www.icg2010.org), a hatodikat pedig 2011. évben (Tokio, Japán, 2011. szeptember 5-9.) rendezték meg.

Az ICG végső célja a GNSS rendszerek átfogó hálózatának (GNSS system of systems, *a GNSS rendszerek rendszerének*) kiépítése, melyet az ICG a különböző GNSS rendszereket működtetők közötti együttműködés révén a navigációs rendszerek harmonizálása alapján és a felhasználói közösség igényeinek figyelembe vételével érhet el.

6 Összefoglalás

A GNSS/RNSS rendszerek fejlesztésében napjainkban kétségtelenül verseny folyik, (Eissfeller et al. 2010) amely jótékony hatással van az innovációra. Ez a verseny minden bizonnyal nemzetközi szabályozást igényel. A műholdas navigációs rendszereket kifejlesztő országokban kiemelt figyelmet kap és nagy fontosságú a földrajzi helyhez kötött információk (geospatial information) szolgáltatása, mely nemzetközi szinten is stratégiai fontosságú. Ebben a kiemelt fejlesztési irányzatban az űralapú PNT (Positioning, Navigation and Time) - adatok megbízható és folyamatos szolgáltatása (Space-Based PNT service) a GNSS/RNSS rendszereket a szóban forgó szolgáltatás szükséges elemeivé teszik. Ezért az elkövetkezendő évtizedben fontos K+F+I-tevékenység területe lesz a GNSS/RNSS rendszerek átfogó hálózatának létrehozása és annak vizsgálata, hogy mit jelent majd ez a felhasználók, a vevőberendezéseket előállítók és a navigációs adatokat szolgáltatók számára.

A GNSS/RNSS rendszerek átfogó hálózata, mely fokozatosan megvalósul, kétségtelenül a Nemzetközi Geodéziai Szövetség (IAG) globális geodéziai megfigyelőrendszerének (GGOS) egy rendkívül fontos elemét fogja képezni. (Ádám 2006). De fontos eleme lesz a globális PNT-rendszerek átfogó hálózatának is, amelyet az USA-ban katonai célra valósítanak meg (McNeff 2010).

A GNSS/RNSS rendszerek gyors fejlesztése és innovatív alkalmazása egyre nagyobb mértékben fejleszti a geodézia ismeretkörét. Növeli a geodézia fontosságát, és egyre nélkülözhetetlenebbé teszi szaktárgyunkat. Ezért fontos a geodézia napjainkban jobban, mint valaha (Haarsma 2011; Rizos 2011a és 2011b).

Köszönetnyilvánítás. Az összeállítás korábbi változatát a szerző Dr. Detrekői Ákos akadémikus 70. születésnapja alkalmából szervezett előadóülésen (2009. december 16.) mutatta be „A GNSS rendszerek átfogó hálózata” címen. A munka szakmai tartalma kapcsolódik a „Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen” c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatta.

A tanulmány részben kapcsolódik a K-83909 sz. OTKA kutatáshoz is.

Hivatkozások

Almanac (2011): The ALMANAC – Orbit Data and Resources on Active GNSS Satellites. GPS World, 22(8), 47-50.

Ádám J (1987): A műholdas Doppler-technika szerepe a geodéziai alaphálózatunk továbbfejlesztésében. Geodézia és Kartográfia, 39(3), 174-183.

Ádám J (2006): Az IAG globális geodéziai megfigyelőrendszere. Geodézia és Kartográfia, 58(7), 6-17.

Ádám J (2008): A WGS84 geodéziai világrendszer és továbbfejlesztései. Geodézia és Kartográfia, 60(9), 3-12.

Ádám J (2009): Geodéziai alapponthálózataink és vonatkoztatási rendszereik. Geodézia és Kartográfia, 61(Jubileumi különszám), 6-20.

Ádám J, Fejes I. (1975): Új Doppler-vevők és geodéziai alkalmazásuk. Geodézia és Kartográfia, 27(5), 327-334.

Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (szerkesztők) (2004): Műholdas helymeghatározás. Műegyetemi Kiadó, Budapest.

Almár I, Both E, Horváth A és munkatársaik (1996): Űrtan. Springer Hungarica Kiadó Kft., Budapest, 1996 (SH atlasz). GPS World, 22(5), 47-56.

Becker M (2009): Status der Modernisierung von GPS und GLONASS und Perspektiven weiterer GNSS. ZfV, 134(5), 297-305.

Borza T (2004): A műholdas helymeghatározás kiegészítő rendszereinek nemzetközi és hazai fejlesztései. Geodézia és Kartográfia, 56(8), 37-41.

Borza T, Frey S (2003): Az európai műholdas helymeghatározás és várható hatása a geodéziára. Geodézia és Kartográfia, 55(12), 16-20.

Borza T, Fejes I (2006): GPS-nagypontosságú alkalmazások: mire jó a földi GNSS infrastruktúra? Geodézia és Kartográfia, 58(1), 23-27.

Borza T, Kenyeres A, Virág G (2007a): Műholdas geodéziai vonatkoztatási rendszerünk (ETRS89) felújítása. Geodézia és Kartográfia, 59(10-11), 40-48.

Borza T, Galambos I, Horváth T, Kenyeres A (2007b): Célegyenesben a hazai GNSS kiegészítő rendszer építése. Geodézia és Kartográfia, 59(6), 13-22.

Boucher C, Altamimi Z (2001): ITRS, PZ-90 and WGS84: current realizations and the releated transformation parameters. Journal of Geodesy, 75(11), 613-619.

Boullete F, Kennes B, Mastier M, Banfield L (2011): EGNOS Gets to Work – Using the Augmentation System with GPS-Equipped Mobile Phones. GPS World, 22(2), 34-39.

Busics Gy, Horváth T (2006): Az aktív hálózatok adottságainak kihasználása a műholdas helymeghatározásban. Geodézia és Kartográfia, 58(4), 9-16.

Chassagne O (2012): The Future of Satellite Navigation. One-Centimeter Accuracy with PPP. Inside GNSS, 7(2), 49-54.

Eissfeller B, Rizos Ch, Turner D A, Tateshita H, Revnivych S G, Gadinova S (2010): The GNSS race. http://mycoordinates.org/the-gnss-race/all/1, March 2010.

Fejes I (2003): GNSS földi infrastruktúra – az EUPOS kezdeményezés. Geodézia és Kartográfia, 55(2), 22-27.

Frey S (2011): Galileo műholdak – indul az üzem. Űrvilág Magazin (http://www.urvilag.hu), 2011.12.17.

Frey S (2012): Bővülő Beidou. Űrvilág Magazin (http://www.urvilag.hu), 2012.02.26.

FVM (2010): A földművelésügyi és vidékfejlesztési miniszter 47/2010. (IV.27.) FVM rendelete a globális műholdas helymeghatározó rendszerek alkalmazásával végzett pontmeghatározások végrehajtásáról, dokumentálásáról, ellenőrzéséről, vizsgálatáról és átvételéről. Magyar Közlöny, 2010/62, 13578-13589. oldal.

Gadimova S (2009): International Committee on Global Navigation Satellite Systems (ICG): A System of Systems. Öst. Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, 97(3), 300.

Haarsma D (2011): Modern Geodesy: Formula 1 Geospatial (GIM International Interviews Chris Rizos). GIM International, 25(8), 1-3.

Hein G W, Rodriguez J A A, Wallner S, Eissfeller B, Panny Th, Hartl Ph (2007a): Envisioning a Future GNSS System of Systems (Part 1). Inside GNSS, 2(1), 58-67.

Hein G W, Rodriguez J A A, Wallner S, Eissfeller B, Panny Th, Hartl Ph (2007b): Envisioning a Future GNSS System of Systems (Part 2.). Inside *GNSS*, 2(2), 64-72.

Hein G W, Rodriguez J A A, Wallner S, Eissfeller B, Panny Th, Hartl Ph (2007c): Envisioning a Future GNSS System of Systems (Part 3). Inside GNSS, 2(3), 64-73.

Hein G W (2009): Die aktuellen weltweiten Entwicklungen in der Satellitennavigation. Öst. Zeitschrift für Vermessung und Geoinformation, 97(3), 291.

Hofmann-Wellenhof B. (2009): Galileo and more. Előadás a BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék „Rédey István Geodéziai Szemináriumán". BME, Budapest, 2009. október 12.

Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H, Wasle E (2008): GNSS-Global Navigation Satellite Systems – GPS, GLONASS, Galileo, and more. Springer Verlag, Wien, 2008.

McNeff J (2010): Changing the Game Changer – The Way Ahead for Military PNT. Inside GNSS, 5(8), 44-51.

Moudrak A, Konovaltsev A, Furthner J, Hammesfahr J, Dfraigne P, Bauch A, Bedrich S, Schroth A (2005) Interoperability on Time. GPS World, 16(3).

Rizos Ch (2011a): Why Geodesy Matters, Now More than Ever. GPS World, 22(1), 8-10.

Rizos Ch (2011b): Geodesy-Out with the Old, In with the New. Coordinates, November 2011, 8-10.

Rózsa Sz, Dombai F, Németh P, Ablonczy D (2009): Integrált vízgőztartalom becslése GPS adatok alapján. Geomatikai Közlemények, 12, 187-196.

Rózsa Sz, Kenyeres A, Weidinger T, Gyöngyösi A Z (2010): GNSS mérések közel valósidejű feldolgozása meteorológiai alkalmazásokhoz. Geomatikai Közlemények, 13(2), 55-63.

Seeber G (2003): Satellite Geodesy (2nd completely revised and extended edition). Walter de Gruyter, Berlin-New York.

Urlichich Y, Subbotin V, Stupak G, Dvorkin V, Povalyaev A, Karutin S (2011): GLONASS – Developing Strategies for the Future. GPS World, 22(4), 42-49.

Wanninger L (2010): Code- und Phasenmessungen zu SBAS-Satelliten für die Positionsbestimmung. AVN, 2010(4), 148-154.

MAGYARORSZÁG JELENKORI FELSZÍNMOZGÁSAI OPTIMÁLIS FELTÉRKÉPEZÉSÉNEK KONCEPCIÓJA

Grenerczy Gyula[*]

A concept for the optimal mapping of present-day surface motions of Hungary – *In the last decades we have revealed the present-day crustal motions and tectonic processes in the framework of national and European GPS geodynamic programs, however, several applications in industry and geosciences require significant spatial densification of networks. The first half of the article presents the proposed concept of the densest possible national geodynamic network with the unprecedented possibility of providing immediate results without years and decades of monitoring. The anthropogenic motions require even far better spatial and temporal resolution primarily in the vertical component. For this purpose a new satellite geodetic technique is the most suitable that complements GPS surveys from many perspectives. Thus we had introduced and have been applying the synthetic aperture radar interferometry (InSAR) technique since the beginning of the 2000s. The second half of the paper deals with the proposed InSAR-based national vertical surface motion map and the combination of GPS and InSAR.*

Keywords: geodynamics, GPS, synthetic aperture radar interferometry (InSaR), Hungarian GPS Geodynamical Network, Hungarian National GPS Network

Az elmúlt évtizedekben a hazai és európai GPS geodinamikai programokban feltártuk a nagyarányú kéregmozgásokat és tektonikai folyamatokat, ám számos mérnöki és földtudományi alkalmazás a hálózatok jelentős térbeli sűrítését igényli. A lehető legsűrűbb, országos, azonnali, s nem évtizedek múltán eredményt hozó mozgásvizsgálati mérések javasolt koncepcióját mutatja be a cikk első része. Az antropogén felszínmozgások még nagyobb térbeli és időbeli felbontást kívánnak elsősorban magassági értelemben. Erre egy új űrtechnika bizonyult a legalkalmasabbnak, amely a GPS vizsgálatokat több szempontból nagymértékben kiegészíti. A 2000-es évek elejétől bevezettük és alkalmazzuk az apertúraszintézises műholdradar (InSAR) technikát. A cikk második fele az InSAR alapú országos, magassági mozgástérkép javasolt koncepcióját valamint a GPS és InSAR kombinációját tárgyalja.

Kulcsszavak: geodinamika, GPS, apertúraszintézises műholdradar (InSaR), Magyar GPS Geodinamikai Alaphálózat, Országos GPS Hálózat

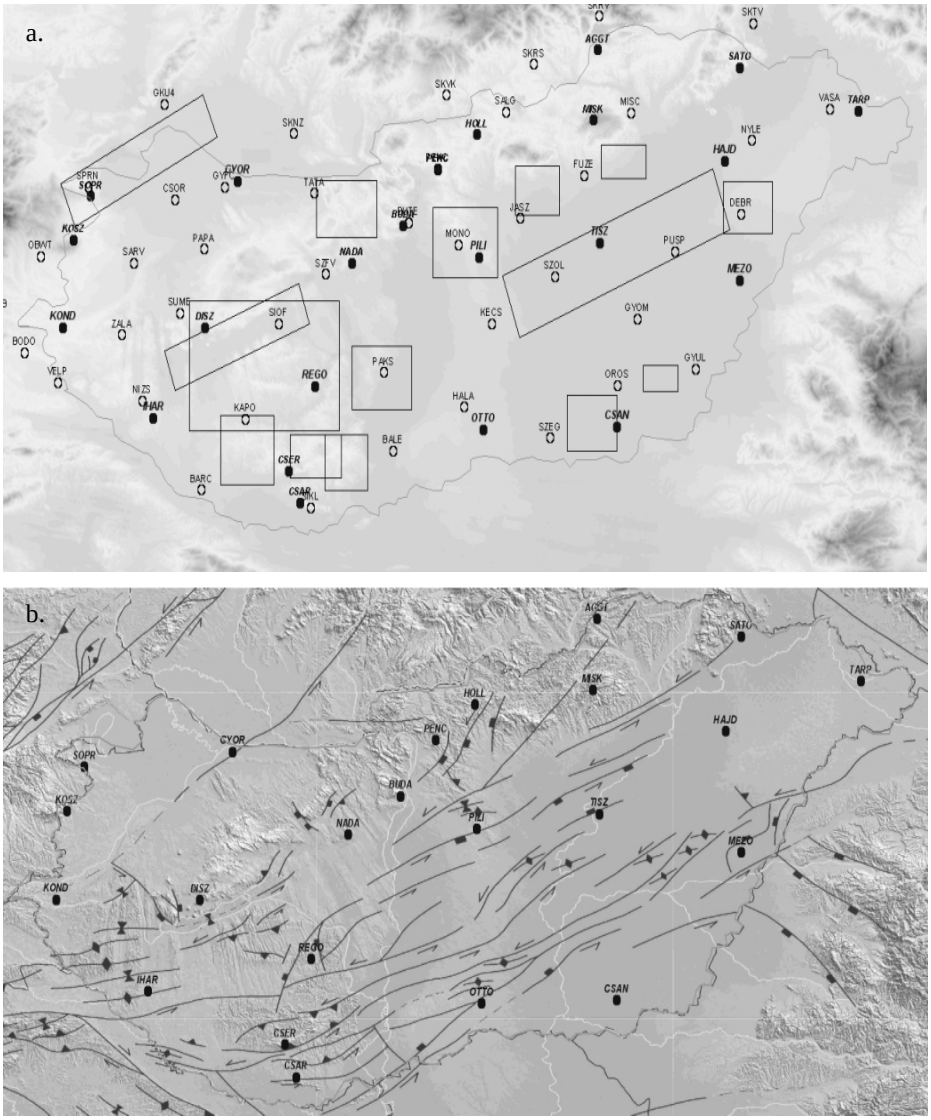
1 Tektonikus mozgások

1.1 Bevezető áttekintés

Habár a nagyarányú kéregmozgásokat és tektonikai folyamatokat hazai és regionális szinten is feltártuk (Grenerczy et al. 2000, 2005, Grenerczy és Fejes 2007), több helyen, tudományos és mérnöki alkalmazások során felmerült a kéregfelszín mozgássebességének minél nagyobb felbontásban való ismerete. Az 1. ábra a) panelja mutatja az egyes nagy felbontásban igényelt mozgásvizsgálati területeket, a b) panel pedig a jelenkori aktív kéregszerkezetet a Pannon-medencében. Ezeket az igényeket a jelenlegi geodinamikai hálózat (1. ábra) pontsűrűségével nem lehet kielégíteni. Ez könnyen látható, hisz a pontok nem adnak kellő lefedettséget a szükséges vizsgálatokhoz.

Az állami geodéziai hálózatok pontjainak koordinátái – a kéregmozgások és az antropogén mozgások miatt ezen hálózatok statikus jellegéből adódóan – igen nagy mértékben is eltérnek már a korábban meghatározott hivatalos értéküktől.

[*]*FÖMI Kozmikus Geodéziai Obszervatórium*
MTA-BME Fizikai Geodézia és Geodinamikai Kutatócsoport
1592 Budapest, Pf. 585
E-mail: grenerczy@sgo.fomi.hu



1. ábra. (a) A Magyar GPS Geodinamikai Alaphálózat (MGGA) pontjai (sötét körök), a permanens állomások (üres körök) és a lokális mozgásvizsgálati programok és célterületek **(b)** A jelenkori aktív kéregszerkezet (Bada et al. 2007) által igényelt felbontás

Az OGPSH (Országos GPS Hálózat, Borza et al. 1998) 1995-97-es meghatározása óta a megismert vízszintes értelmű tektonikus mozgás (Grenerczy et al. 2005) átlagosan 2 cm, nagy antropogén mozgások környezetében pedig akár 35 cm koordinátaváltozás is történt.

Az EOMA első rendű hálózata újramérése esetében ugyanezen mozgások átlagosan 4,5 cm, szélsőséges esetben pedig 87,5 cm elmozdulást jelentenek az 1975-1978-as meghatározás óta. Az EOMA sűrítése esetében – ami 2000-től zajlik – már 1,3 cm és 25 cm elmozdulások is történtek. Így az állami alaphálózatokat statikusnak feltételezve, pontjaikat ismételten összemérve a fenti ellentmondásokat találjuk.

Mind a lokális mozgásvizsgálati igények, mind a jelenkori aktív szerkezetek vizsgálata, és az állami geodéziai statikus hálózatok ellentmondásainak feloldása miatt szükséges egy sűrű országos mozgásvizsgálati hálózat. Erre teszek egy optimális javaslatot ebben a cikkben.

1.2 A javasolt optimális GNSS geodinamikai koncepció

Az azonnali legsűrűbb kéregmozgás vizsgálat lehetőségét az OGPSH közel teljes, vagy mintavételezett részleges újramérése jelentené (2. ábra). Ez az egyetlen térben nagy felbontású országos kiterjedésű GPS mérés, eleve másfél évtized időbázisa van, s ez az egyetlen térben megfelelő sűrűségű hazai GPS hálózat, ehhez mért infrastruktúra nem lesz. Ha ma mégis megteremtődne, az OGPSH jelenlegi időbázisának eléréséhez másfél évtizedet egyébként is várni kellene. Az OGPSH esetében potenciálisan 1100-nál több, országosan jól elosztott pont állandósítva van, koordinátáik másfél évtizede már meghatározottak.

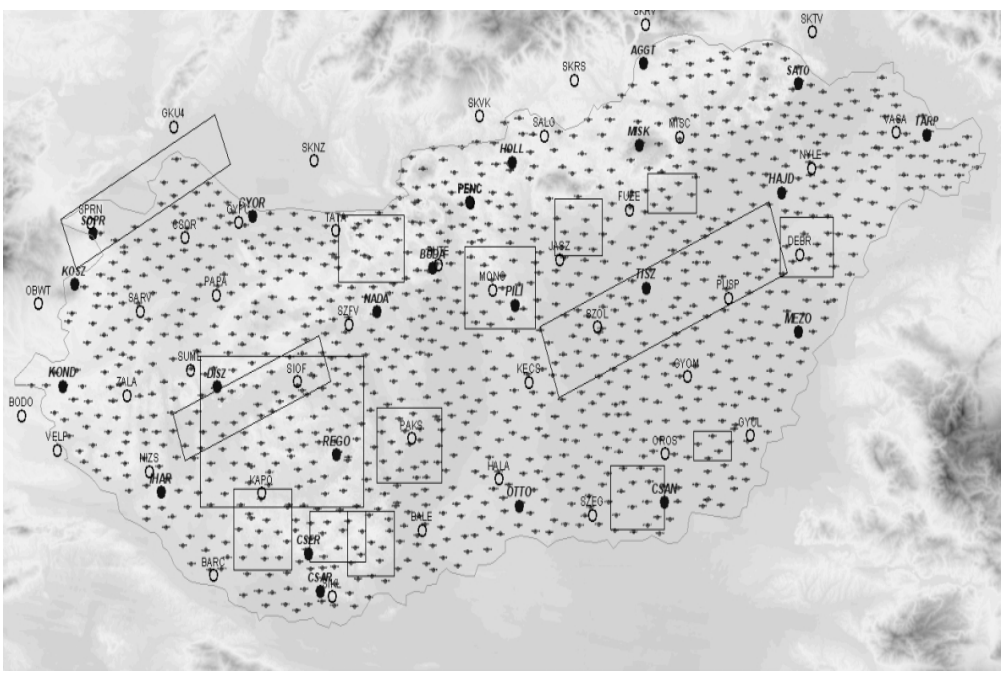
A fenti koncepció során több probléma is felmerülhet. Ezeket az alábbiakban részletezem.
Problémák (többnyire nehezen számszerűsíthetők):

- a korábbi mérés viszonylagos rövidsége (40+20 perc),
- nem kényszerközpontos antenna felállítás,
- nem sziklára telepített, nem robusztus pontállandósítás,
- nem szimultán észlelt pontok, viszonylag jelentős – akár 3 éves – időkülönbség,
- nem közös feldolgozás, csak kiegyenlítés,
- nem optimális mérési körülmények (kitakarás, zavaró objektumok stb.),
- az újramérésnél szintén nem kényszerközpontos, műszerállványos felállás,
- újramérésnél sem ideális mérési körülmények.

Azaz

- a korábbi mérés hibái,
- a pont és környezete lokális sajátmozgása,
- a mérési körülmények megváltozása,
- az újramérés hibái.

Ezekkel kell megküzdenünk, ha azonnal eredményt hozó, kellő pontsűrűségű és a megkívánt pontosságú mozgásvizsgálatot akarunk országos méretekben.



2. ábra. Az OGPSH pontsűrűsége. Az OGPSH hálózat kéregmozgásra való alkalmazása, és az eredményezett potenciális pontsűrűség elegendő a felmerült igények kielégítésére

1.3 Az OGPSH geodinamikai tesztje

A fenti problémák miatt geodinamikai alkalmazhatósági vizsgálatot terveztem és hajtottunk végre. Az eredmények bemutatása előtt tisztázni kell, vajon miért kell ez a teszt, mit várhatunk, hogyan értékeljük:

- az OGPSH nem geodinamikai hálózat,
- nem zárható ki sajátmozgás,
- nem zárható ki korábbi mérésből adódó hiba,
- nem azonosak a mérési körülmények,
- nem ugyanazok a pontok, mint a referenciáknál (MGGA, CEGRN, EPN),
- nem pontosan ugyanarról a helyről jön az információ (tektonika),
- statisztikailag értelmezendőek az eredmények a helyi hatások miatt,
- nincs idősor, csak két adat,
- az első epocha nem pontosan meghatározott,
- a sebességre vonatkozó becslés körülményes.

Viszont biztos, ellenőrzött, jól meghatározott, pontos kéregmozgás adatokkal rendelkezünk az:

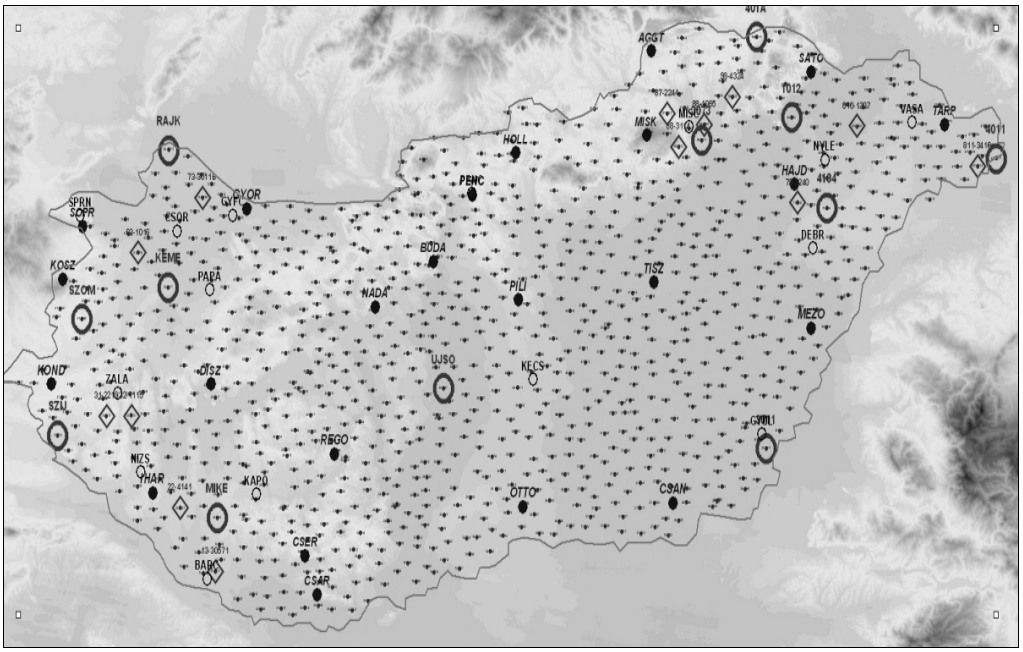
- MGGA (Magyar GPS Geodinamikai Alaphálózat),
- CEGRN (Közép-európai GPS Geodinamikai Referencia Hálózat, Grenerczy et al. 2005, Grenerczy és Fejes 2007),
- CEGRN kombinált (Caporali et al. 2009),
- EPN (Európai Permanens Állomáshálózat, www.epncboma.be)

hálózati megoldásokból. Ehhez hasonlítva az OGPSH eredményeket, annak geodinamikai alkalmazhatósága megállapítható.

Megterveztük a méréseket (3. ábra). A mozgás gradiensének irányában az országhatár mentén a legnagyobb távolságot átfogva, szimultán 12 órás méréseket végeztünk OGPSH pontokon kétfrekvenciás geodéziai GPS műszerekkel. Ilyen ún. „hosszú” méréseket 12 ponton hajtottunk végre, és ún. „rövid” méréseket is végeztünk 13 ponton permanens állomások környezetében. Az adatokat tudományos igénnyel dolgoztam fel a Bernese V 5.0 programcsomaggal, a rövid mérésekhez pedig a GPSurvey programot használtuk. Az ország két oldalán szimultán végzett méréseinkből GPS vektorokat számítottam, amelyek végpontjai közötti jelenkori távolságokat meghatároztam. Egy másik módszerrel pedig a mért pontokat és azokkal szimultán észlelő permanens állomásokat egy hálózatként kezelve számítottam az OGPSH pontok jelenkori koordinátáit. A harmadik esetben pedig a permanens állomások környezetében rövid vektorokkal visszaállítottuk a permanens állomások koordinátáját az OGPSH meghatározásának idejére. Ezt úgy lehet megtenni, hogy az OGPSH pontok koordinátája a meghatározásuk idejére nyilván ismert és feltételezzük, hogy a permanens állomás együtt mozgott az évek során a közvetlen környezetében lévő OGPSH pontokkal, így azok relatív pozíciója az évek során lényegesen nem változik, az OGPSH meghatározás idejére is ugyanaz. Ez a feltétel megismert tektonikai mozgások nagyságát és azok térbeli változatosságát figyelembe véve (Grenerczy et al. 2005) esetleges helyi sajátmozgásoktól eltekintve teljesül. Mindhárom módszerrel meghatározva a jelenkori illetve az OGPSH idejében lévő adatokat, azok összehasonlíthatók és a mozgások számíthatók. Így mindhárom módszerrel a Pannon-medence jelenkori kontrakciójának látszania kellene, ha a fentebb vázolt problémák ellenére az OGPSH alkalmas a geodinamikára.

Az 1. táblázat mutatja a mért pontok közötti mozgássebességet az adott referenciaként szolgáló hálózatok meghatározásai alapján valamint az OGPSH geodinamikai tesztje során az egyes módszerek által kapott eredményeket.

Az ebből becsült sebességek -1,1 mm/év; -1,2 mm/év; valamint -1,7 mm/év. Ezek az értékek a fenti MGGA, CEGRN, EPN referencia értékekkel jó egyezést mutatnak.



3. ábra. Az OGPSH hálózat (kisméretű fekete pontok) geodinamikai tesztjében megmért pontjai (fekete nagy körök és kis négyzetek). Az előbbieket 12 órás szimultán méréssel határoztuk meg, az utóbbiakat permanens állomások környezetében végzett rövid mérésekkel. A kiválasztás a pontok közt lévő mozgás (Grenerczy és Fejes 2007) alapján történt. A sötét pöttyök az MGGA pontjai, melyek közül néhány CEGRN pont

1. táblázat. Hálózatok és a kapott mozgássebességek, valamint az OGPSH teszt módszereivel kapott eredmények

Referencia hálózatok	*Mozgássebesség (mm/év)*
MGGA	Átlag: -1,1 mm/év
	±0,2 mm/év 95% konfidencia intervallum
CEGRN	Átlag: -1,1 mm/év
	±0.3 mm/év 95% konfidencia intervallum
CEGRN Kombinált megoldás	Átlag: -1,3 mm/év
EPN eredmények	Átlag: -1 mm/év
Módszerek	*Eredmények (mm)*
Vektorok	Átlag elmozdulás:-13,8 mm
Hálózati megoldás	Átlag elmozdulás:-15,5 mm
Permanens állomások	Átlag elmozdulás:-22,6 mm

1.4 Következtetések

Az OGPSH kiválasztott pontjain elvégzett tesztmérés alapján kijelenthető, hogy nincsenek durva hibák a kétszeri nem kényszerközpontos antenna felállítás miatt. Az állandósítás megfelelő, nincsenek nagy kiterjedt véletlenszerű mozgások a pontlétesítmények esetleges instabilitásai miatt. A korábbi rövid GPS mérés nem hordoz durva hibát, a jelet nem fedi el. Az időben elhúzódó lokális típusú szimultán észlelt országos referencia nélküli mérés –ami a korábbi OGPSH meghatározást jellemezte- sem okoz az ország távoli pontjain problémát. A mérési körülmények változása lényeges, helyszínelés szükséges, viszont a mérésre alkalmas pontok kellően nagy pontosságot biztosítanak ma is. Mindhárom módszer kimutatta a Pannon-medence geodinamikai hálózatok által már megismert kontrakcióját. Az OGPSH a korábbi fenntartások ellenére is a jelenlegi időbázissal 1 mm/év sebesség szinten biztosan alkalmas mozgásvizsgálatra. Lokális nagy pontosságú mozgásvizsgálatot tesz lehetővé az adott területre vonatkozó korábbi mérések újrafeldolgozásával és újra-

méréssel. Ezzel megnyílik a nagyfelbontású GPS mozgásvizsgálat lehetősége nem csupán lokálisan, hanem országos szinten is.

A javasolt országos méretű OGPSH geodinamikai program konkrét megvalósítása méréseket adatfeldolgozást, kiértékelést, interpretációt foglal magába. Az előkészítés és a terepi munka kb. 200-300 reprezentatív pont szemlélését és kiválasztását, valamint 6 órás méréseket jelentene 2 frekvencián pontonként. Személyenként napi két pont per fő meghatározási sebességgel, kötőpontok nélkül, (mert ezeket a GNSSnet szolgáltatja) összességében egy tíz fős mérőcsapattal, kétheti munkával megoldható. A kiértékelés és interpretáció módszertanát a geodinamikai programok során már kidolgoztuk és alkalmaztuk, így az egész kutatómunka gyakorlati és elméleti feltételei adottak, s az akár egy nagyobb OTKA projektből megoldható.

Eredményül a lehető legjobb térbeli felbontású felszínmozgás-térképet kapnánk. A módszer szinte azonnali eredményt hoz, megfelelő lenne minden eddig ismert célhoz, a lehető legsűrűbb információt szolgáltatná, szinte megismételhetetlen infrastruktúrát jelent, relatíve szerény anyagi vonzata van, s az adott pontossági szinten feltárt tektonikai mozgások örök ismeretet jelentenek, hiszen a feltárt ismeret nem változik emberi léptékben. Nincs előrelátható technológia, infrastruktúra, a jobbat adhat még a távolabbi jövőben sem! Az OGPSH pusztulásával ez a megismételhetetlen lehetőség elvész.

2 Antropogén mozgások

Az antropogén mozgások felderítéséhez igen nagy pontsűrűség és elsősorban nagy vertikális pontosság kell. Ezek a mozgások többnyire nagyok, gyorsan változnak, sokrétűek, gyakoriak és relatíve kisebb területen jelentkeznek, hiszen emberi tevékenységhez köthetők.

Az antropogén mozgások országos méretű optimális feltérképezéséhez a műholdradar interferometria a legalkalmasabb. Hatékony, nincs szükség terepi munkára, ponttelepítésre, hálózatépítésre, karbantartásra, engedély kérésére, műszerre, helyi mérésekre, mint más módszerek esetében. A vertikális sebesség-meghatározás pontossága, felbontása, a vizsgálható pontok száma felülmúl bármely más technikát. A hosszú időtartamot átfogó adatsorban (jelenleg akár 19 év) a fázisinformáció elemzésével kivételesen nagy sebesség-meghatározási pontosságot lehet elérni. Jelenleg nincs más technológia, amivel a múltbeli mozgás és stabilitás-történet vizsgálható lenne. A műholdradaros vizsgálat az 1992-ig visszamenőleges észlelésekkel egyedülállóan a „múltba lát”, hiszen minden más esetben a hálózattelepítés és a kezdő alapmérés után meg kell várni ameddig az elmozdulás mértéke kimutathatóvá válik. Így szinte azonnal megismerhető a mozgástörténet az országban akár több millió pontban. Ez nagy számításigényt kíván, de mérni, infrastruktúrát építeni és várni nem kell. A feladat megoldása nagyságrendekkel kisebb költséggel jár, mint más technikák bevetésével, sőt ilyen színvonalon (pontsűrűség, pontosság, időbeli és térbeli felbontás) más technikával képtelenség ezt megvalósítani.

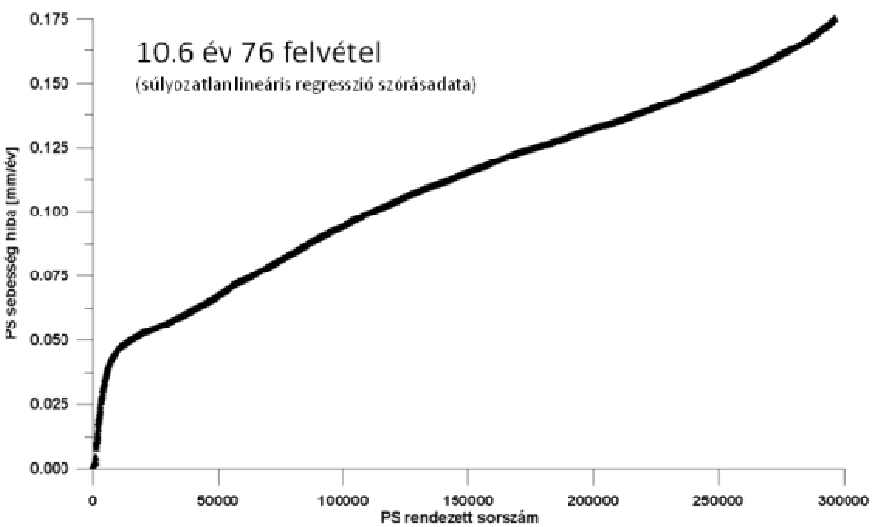
Az elvben alkalmazható műholdak a következők: ERS-1, ERS-1, ENVISAT, Radarsat-1,2; JERS, ALOS, Cosmo-SkyMed, TerraSAR-X. A jövő szenzorai pedig a Sentinel műholdsorozat.

A műholdradar interferometria főbb módszerei: DInSAR (differenciális), SBAS (rövid bázisvonalú), PSI (állandó szórópontú), SqueeSAR™ (alacsony reflektivitású homogén területeken alapuló) (Massonnet et al. 1993; Lanari et al. 2004; Ferretti et al. 2001, Wegmüller et al. 2003).

A műholdradaros módszer pontsűrűsége felülmúl minden más technikáét. Beépített területekre mutat példát a 4. ábra. Budapest esetében a PSI technikával 330 000-nél is több pontban ismert a mozgástörténet (Grenerczy et al. 2008). Az alföldi gyéren lakott területeken és az erdőkben is lehet számos vizsgálatra alkalmas pont egy négyzetkilométeren.

A sebességmeghatározás pontosságáról az 5. ábra ad felvilágosítást. A sebességmeghatározás pontossága függ a koherenciától, az időintervallumtól, az abban feldolgozott műholdfelvételek számától és azok időbeli eloszlásától.

4. ábra. Budapest PSI mozgástérképének ponteloszlása



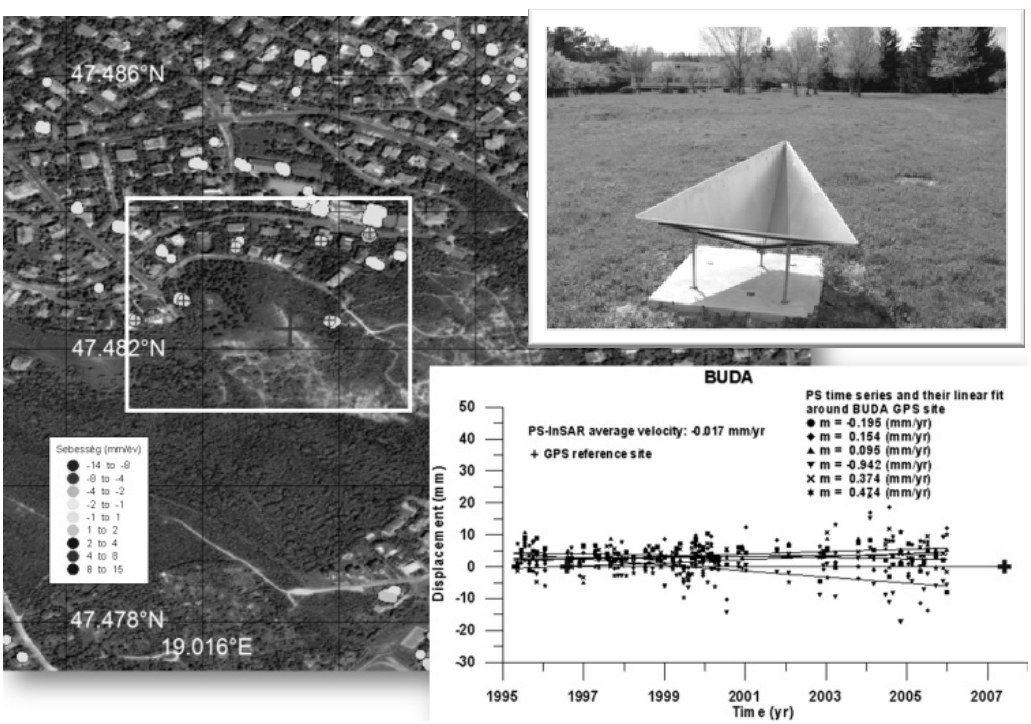
5. ábra. A sebesség meghatározásának pontossága 10 éves időintervallumra 76 felvétel alapján

A jelenleg javasolható legoptimálisabb országos InSAR mozgástérkép a leendő Sentinel műhold adataival az SBAS technikával két repülési irány feldolgozásával előreláthatólag 6-7 éven belül érhető el. Az ERS holdak és az ENVISAT PSI feldolgozása az óriási adatmennyiség és a feldolgozás hatalmas munkaigénye miatt ma még költséges. Viszont ezen holdak esetében az elmúlt 19 évre visszamenő mozgástérkép létrehozására is van lehetőség. Vannak európai országok, ahol ezt már elkészítették. Teljes országos PSI mozgástérképek léteznek Olaszországra (közbeszerzés nyomán elkészített munka) valamint Angliára, Hollandiára (privát óriáscég által létrehozott kommerciális produktumként véghezvitt munka eredményeként).

3. A GPS és InSAR mozgástérképek kombinációja

Az elsősorban tektonikai jellegű mozgásokat kimutató GPS-technika és a technogén jellegű mozgásokat vizsgáló InSAR technika által létrehozott mozgástérképek kombinációjára két lehetőség is adott. Az egyik lehetőség az úgynevezett környezeti kollokáció, a másik lehetőség a közvetlen kollokáció. Az első esetben a GPS vizsgálati ponthoz közel a környezetet jól reprezentáló műholdradaros pontok idősorainak felhasználásával egyeztetjük a területen két technikával kapott mozgásokat (6. ábra). A másik esetében többtechnikás pontjel kialakításával a GPS és az InSAR fáziscentrum közvetlen összekapcsolása lehetséges. Erre korábban kidolgoztunk egy pontjelet, amit a 6. ábra jobb felső képe szemléltet.

A fenti koncepciók jövőbeli megvalósulása esetén a GPS és InSAR fent felvázolt optimális mozgástérképeinek kombinációjával elérhető a *lehető legoptimálisabb, elegendően sűrű, teljes országos lefedettségű, pontos, monitorozható, 3D tektonikai és technogén sebességtérkép Magyarországon.*



6. ábra. GPS és PSI mozgásadatok egyeztetése. 'Környezeti kollokáció' (balra és alul) valamint a közvetlen kollokáció (jobb felső beillesztett ábra), azaz többtechnikás pont, amely egy építményen lévő GPS és SAR, szabatos szintezés stb. pontjelek közvetlen kapcsolatát jelenti

Hivatkozások

Bada G, Grenerczy Gy, Tóth L, Horváth F, Stein S, Cloetingh S, Windhoffer G, Fodor L, Pintér N, Fejes I (2007): Motion of Adria and Ongoing Inversion of the Pannonian Basin: Seismicity, GPS Velocities and Stress Transfer, In Continental Intraplate Earthquakes: Science, Hazards, and Policy Issues, Spec Volume of the Geological Society of America, 243-263.

Borza T (1998): Elkészült az országos GPS-hálózat. Geodézia és Kartográfia 1998/1, 8-12.

Caporali A, Aichhorn C, Becker M, Fejes I, Ghitau D, Grenerczy Gy, Hefty J, Medac D, Milev G, Mojzes M, Mulic M, Nardo A, Pesec P, Rus T, Simek J, Sledzinski J, Solaric M, Stangl G, Vespe F, Virag G, Vodopivec F, Zablotskyi F (2009): Surface kinematics in the Alpine-Carpathian-Dinaric and Balkan region inferred from a new multi-network GPS combination solution. Tectonophysics, 474, 295-321.

Ferretti A, Prati C, Rocca F (2001): Permanent Scatterers in SAR Interferometry. IEEE Transactions On Geoscience And Remote Sensing, 39(1), 8–20.

Grenerczy Gy, Kenyeres A, Fejes I (2000): Present crustal movement and strain distribution in Central Europe inferred from GPS measurements. Journal of Geophysical Research, 105(B9), 21,835-21,846.

Grenerczy Gy, Sella G, Stein S, Kenyeres A (2005): Tectonic implications of the GPS velocity field in the northern Adriatic region. Geophysical Research Letters, 32, L16311, doi:10.1029/2005GL022947.

Grenerczy Gy, Fejes I (2007): A magyarországi GPS mozgásvizsgálatok 16 éve. Geodézia és Kartográfia, 59(7), 3-9.

Grenerczy Gy, Virág, G, Frey S, Oberle Z (2008): Budapest műholdas mozgástérképe: a PSInSAR/ASMI technika hazai bevezetése és ellenőrzése. Geodézia és Kartográfia 60(11), 3-9.

Lanari R, Mora O, Manunta M, Mallorqui J J, Berardino P, Sansosti E (2004): A Small-Baseline Approach for Investigating Deformations on Full-Resolution Differential SAR Interferograms. IEEE TRANSACTIONS ON Geoscience Aand Remote Sensing, 42(7), 1377-1386.

Massonnet D, Rossi M, Carmona C, Adragna F, Peltzer G, Feigl K, Rabaute T (1993): The displacement field of the Landers earthquake mapped by radar interferometry. Nature, 364, 138–142**.**

Wegmüller U, Werner C, Strozzi T, Wiesmann A (2003): Multi-temporal interferometric point target analysis, in Analysis of Multi-temporal remote sensing images. Smits and Bruzzone (ed.), Series in Remote Sensing, Vol. 3, World Scientific (ISBN 981-238-915-61), 136-144**.**

A HULLÁMFORMA KORRELÁCIÓ HASZNÁLATA MIKRORENGÉSEK ELEMZÉSÉRE – 2012. ÁPRILIS 6., VÉRTES

Kiszely Márta[*]

Application of the waveform correlation method in the analysis of micro-earthquake sequences – April 6. 2012, Vértes – *The present study gives a brief overview of the application of crosscorrelation technique to study the similarity of aftershocks. An earthquake with a magnitude of 2.8 on the Richter-scale occurred in the middle of the Vértes Hills on April 6, 2012. The epicentre of this mainshock was only about 2 km from the PKSG (Gánt) seismological station. This station successfully registered about 140 aftershocks till the end of April. Most of these events were detected by this closest station only. The temporal and spatial evolution of the foci was estimated with the application of the waveform correlation method.*

Keywords: aftershocks, microearthquake, correlation, waveform

Jelen cikk rövid áttekintést ad a hullámforma keresztkorrelációs módszer használatára a mikrorengések hullámformájának elemzésében. 2012. április 6-án a Richter-skála szerinti M2.8 erősségű rengés pattant ki a Vértes-hegység közepén. Az epicentrum kb. 2 km-re volt a PKSG (Gánt) szeizmológiai állomástól. Ez az állomás mintegy 140 utórengést regisztrált a hónap végéig, és ezek többségét csak ez a legközelebbi állomás rögzítette. Az utórengések térbeli és időbeli eloszlását a hullámforma korrelációs módszer alkalmazásával elemeztem.

Kulcsszavak: utórengések, mikro-rengés, korreláció, hullámforma

1 Bevezetés

Magyarország szeizmicitása mérsékeltnek mondható, az ország területén évente négy–öt M2.5–3.5 magnitúdójú, az epicentrum környékén már érezhető rengés pattan ki (Tóth és társai 2008). A Vértes-hegység szűkebb környezetében 2009 óta három szeizmológiai állomás kezdett működni, aminek köszönhetően megugrott a kisméretű, esetenként negatív magnitúdójú (lokális magnitúdó – M_L) rengés-megfigyelések száma. Ezek elemzése új távlatokat nyithat meg a *nemorogén* területek tektonikai folyamatainak értelmezéséhez.

A Vértes-hegység közepén, Gánton a Richter-skála szerinti M2.8 erősségű rengés pattant ki 2012. április 6-án, amit sokan éreztek az epicentrum közelében. Ez a rengés szeizmológiai szempontból azért érdekes, mert rendkívül közel pattant ki a PKSG (Gánt) állomáshoz, a hipocentrum gyakorlatilag a gánti állomás alatt volt. Április végéig 140 utórengést regisztrált ez a készülék, amelyek azonban olyan kicsik voltak, hogy többségüket csak az itt elhelyezett műszer rögzítette. Egy földrengés epicentrumának meghatározásához legalább három időadatra van szükség. Mivel itt csak egy állomás mérései álltak rendelkezésre az utórengések helyét a hullámformák keresztkorrelációja segítségével határoztam meg.

A rengések értelmezését nehezíti, hogy Gánton aktív bányaművelés folyik a Dolomit Kőbányászati Kft részéről robbantásos technikával. Április folyamán összesen 12 ilyen robbantást rögzített az állomás. Az utórengések közé ezek a robbantások is belekerültek. A robbantások elkülöníthetőségét a hullámforma korreláció alkalmazásával ellenőriztem. A főrengést követő sok, nagyon hasonló hullámformájú utórengés azt jelzi, hogy a feszültségviszonyok stabilizálódása hasonló elmozdulások sorozatából tevődik össze.

Hat nagyobb utórengés epicentrumát sikerült meghatározni (amiket legalább 3 állomás regisztrált). Ezek a PKSG állomástól keletre estek 0,9-5 km-re, és fészekmélységük 0 km és 7 km körüli volt. A főrengés napján 63, a másodikon 20, és a harmadikon 10 utórengés történt. A főrengés nap-

[*]*MTA CSFK GGI, 1112 Budapest, Meredek u. 18.*
E-mail: marta@seismology.hu

jától (április 6-ától) a hónap végéig tartó időszakot tekintve elmondható, hogy az utórengések 2/3-a a főrengés napját követő első három nap folyamán pattant ki.

Vizsgálataimban a következő kérdésekre szeretnék válasz kapni:

1. Mivel magyarázható a sok egymáshoz nagyon hasonló utórengés?
2. Milyen távol lehetnek ezek a főrengéstől és egymástól?
3. Miért nem bizonyult a robbantások hullámformája egymáshoz nagyon hasonlónak, hiszen a robbantások helye és az állomás ugyanaz?

2 Irodalmi áttekintés

A hullámforma hasonlóságának analízise a szeizmikus aktivitás térbeli és időbeli fejlődésének tanulmányozására kifejlesztett egyszerű módszer. Általános megfigyelés utórengések esetében a rengésrajok, „klaszterek” előfordulása (Massa és társai 2006, Baisch és társai 2008, Hage és Joswig 2009). Ezek a rajok egyedi hullámformákkal rendelkeznek, de azon belül egyes rengések nagyon hasonlítanak egymáshoz (Aster és Scott 1993). Megfigyelhetők még páros események „dublettek”, amik szinte teljesen egyformák. Ezek az események gyakran másodperces vagy órás késéssel követik egymást. Baisch és társai (2008) szintetikus szeizmogramok elemzésével bebizonyították, hogy a közel egyforma hullámformájú rengések hipocentrumai nagyon közel, gyakorlatilag 100-200 m-re helyezkednek el egymástól. Ezt a távolságot a beérkező hullámok jellemző hullámhosszának a negyedére becsülik, ez az ún. „$\lambda/4$” kritérium. A hullámforma nagyfokú hasonlóságát a nagyon hasonló fészekmechanizmus és a közel azonos terjedési út okozza (Deichmann és Garcia-Fernandez 1992). Ha ugyanis a hipocentrumok térbeli kiterjedése, és egymástól mérhető távolságuk is kicsi, akkor a rengés során kipattant hullámok ugyanahhoz a szeizmológiai állomáshoz nagyon hasonló kőzeteken hatolnak át, tehát nagyon hasonlónak kell lenniük a regisztrált hullámformáknak.

Jelölje két rengés hullámformájának adatait, az egymást követő mintavételi időpontokban: $x_1, x_2, \ldots x_n$, és $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Ekkor a korrelációs együttható értéke r, ami -1 és 1 közé esik, és az (1) képlet segítségével számítható ki:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}}, \qquad (1)$$

ahol $\bar{x}$ és $\bar{y}$ az x és y adatsorok mintaközepei.

A kritikus korrelációs érték, ami fölött hasonlónak vehetünk két hullámformát a szakirodalomban 0,6 (Pachmann és társai 1990) és 0,9 (Cattaneo és társai 1999) között változik, az általam használt 0,75 kritikus érték átlagosnak mondható. Legtöbbször a vertikális csatornára beérkező P-hullám adatait használják, de kisebb méretű eseményeknél a horizontális csatornák S-hullám regisztrátumát elemzik, mivel ezek nagyobb amplitúdóval jelentkeznek, mint a P-hullámok.

Massa és társai (2006) a hullámformák korrelációs analízisét két rengéssorozaton végezték el, amely rengéssorozatok 2000 augusztusa és 2001 júliusa között keletkeztek Olaszországban Monferrato területén. Az S-hullámra alapozott hasonlósági analízis több párt mutatott, mint a P-hullámra számított. Ennek oka, hogy minden fázis első impulzusát leginkább a kisugárzási minta határozza meg, és az energiaelnyelő hatások a magasabb frekvenciatartalmú P-hullámokat jobban érintik.

Cattaneo és társai (1999) az Nyugati-Alpok területének rengéseit elemezték és 1990 és 1996 között 2652 kipattant földrengésből 1171-et tudtak *klaszterbe* csoportosítani egy állomás adatainak a felhasználásával. A korrelációt a P-hullám beérkezésétől 7 másodperces ablakban végezték el. Ez már tartalmazta az S-hullámcsomagját is. Az ún. *híd* jelenséget is sikerült megfigyelniük, amiről az események térbeli elhelyezkedésére lehet következtetni, azaz ha (A, B) párt alkot és (B, C) is, de

(A, C) nem éri el a kritikus korrelációs küszöböt, akkor B a *híd* a térben a két esemény fészke között.

A hasonló eseményeket csoportokba rendezhetjük. A csoportokba rendezett események száma és a csoportok összetétele változik a korrelációs együttható kritikus értékének változtatásával. Pechmann és Kanamori (1982) kimutatták, hogy vannak „erős párok”, amik forrásai szinte egybeesnek és „gyenge párok”, ahol bár a fészekmechanizmus nagyon hasonló, de a fészkek távolabb esnek egymástól, és ekkor a szeizmogramok főleg a nagyfrekvenciás tartományban különböznek.

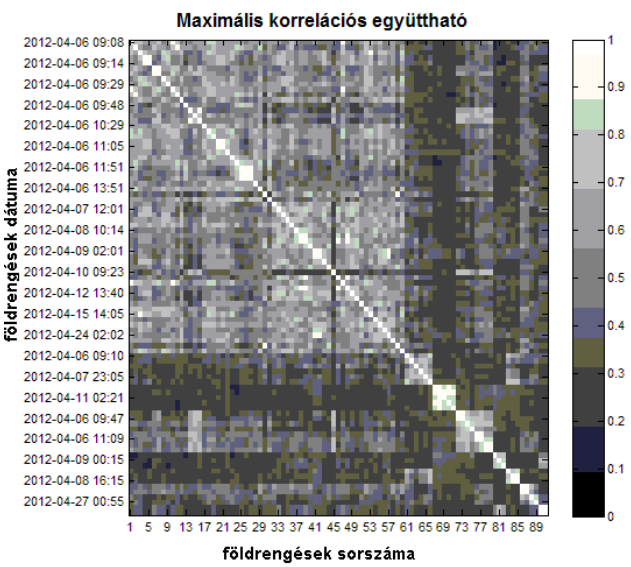
Ha két esemény hullámformája eltér, az nemcsak azzal magyarázható, hogy az epicentrumok távol vannak egymástól, hanem azok eltérő fészekmechanizmusával is.

Vizsgálataimban a hullámformák keresztkorrelációját a MATLAB GISMO elnevezésű, erre a célra kifejlesztett programcsomagja segítségével határoztam meg (Reyes és társai 2009, 2011).

3 A hullámforma korreláció eredménye a 2012. április 6-ai M2.8 főrengés utórengéseire

Visszafelé értelmezve a fenti gondolatmenetet, amennyiben nagyon hasonló hullámformákat kaptunk egy állomáson, az azt jelenti, hogy ezeknek a rengéseknek a hipocentrumai nagyon közel voltak egymáshoz, és fészekmechanizmusuk is hasonló lehetett. A vizsgálathoz felhasznált gánti (PKSG) állomáson egy 3 komponenses rövidperiódusú műszer (LE-3D/1s) található, ahol egy vertikális és két horizontális: É-D-i és K-Ny-i irányban elhelyezett inga rögzíti a rengés során fellépő talajsebességeket. A P-hullámok a vertikális, az S-hullámok a horizontális csatornákon jelennek meg nagy amplitúdóval. A keresztkorrelációt mindhárom csatorna hullámformáira elvégeztem, és a legjobb eredményt a K-Ny-i irányú horizontális csatorna szeizmogramjaira kaptam. Az állomás olyan közel volt az események epicentrumához, hogy a rengéshez tartozó szeizmogram hossza csak kb. 4 másodperc volt, és a P- és S-hullámok még nem váltak szét.

A keresztkorrelációra a PKSG állomás K-Ny-i irányú horizontális csatornája hullámformáinak 6 másodperces ablakait használtam fel, kis időablakot hagyva a P-hullám beérkezése előtt, és az esemény vége után. A mintavételi frekvencia 62,5 Hz volt, így a keresztkorreláció számításához felhasznált minta száma 375 volt (az (1) képletben az *n* értéke). A kritikus keresztkorreláció értékét 0,75-nek választottam. Ezen érték felett hasonlónak, alatta eltérőnek vettem a hullámformákat. Az eredmény egy keresztkorrelációs mátrix, ahol a 0,75-nél nagyobb együttható esetén klaszterekbe rendezte a program az eseményeket (1. ábra).

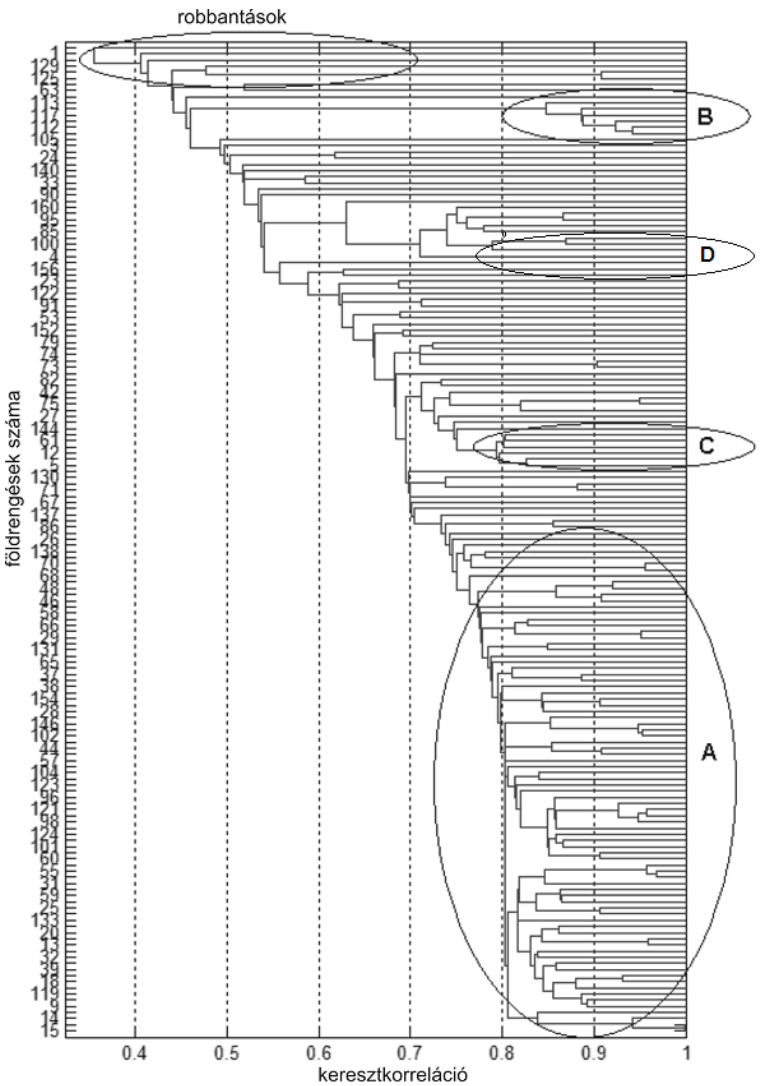


1. ábra. A keresztkorrelációs mátrix képe, a 0,75-nél nagyobb együttható esetén klaszterekbe rendezve. Látható hogy az események több mint fele egy nagy klasztert alkotott. Az utórengések 1 nagyobb és 9 kisebb csoportba rendeződtek

Az átló világos vonala a keresztkorreláció azon esete, mikor pont önmagával hasonlítottuk össze az eseményt, így értéke 1. Az ábrán az események dátuma nem időrendben következik, hanem hasonlóság szerint, *klaszterekbe* rendezetten.

A 2. ábra pedig egy úgynevezett *dendrogramot* mutat. Itt az események hasonlóságuk, mint „távolság” alapján rokonsági ágakba, csoportokba rendezve láthatók. A PKSG állomáson regisztrált 160 hullámforma közül 12 volt robbantás és 110 esemény mutatott 0,75-nél nagyobb keresztkorrelációs értéket valami másik eseménnyel.

A robbantások keresztkorrelációi nem mutattak egymással nagy hasonlóságot, a program mégis a földrengésektől eltérő közös ágakba rendezte őket, ez a 2. ábra felső részén látható csoport. A földrengések között több rokonsági csoport figyelhető meg. A 4-5. ábrák a korrelációs diagram és a dendrogram segítségével kiválasztott két legnagyobb csoport szeizmogramjait mutatják. Az 5. ábra eseményei nem a gánti utórengéshez tartoznak, hanem azok a Vértes-hegység Ny-i oldalán keletkeztek. A kipattanási helyüket nem sikerült meghatározni, mert csak két állomás regisztrálta őket.



2. ábra. Dendrogram: a keresztkorrelációs mátrix adatait csoportokba rendezetten ábrázolja a köztük levő „távolság” alapján. Az A, B, C és D jelek a négy legnagyobb csoportot mutatják. 160 esemény közül 12 volt robbantás és 110 esemény mutatott 0,75-nél nagyobb keresztkorrelációs értéket valamelyik másik eseménnyel

Ezek a rengések a dendrogramon (2. ábra) is külön ágon találhatók (B-klaszter). Az ebbe a csoportba tartozó események időtartama 2 napot ölelt át. Négy dublett is előfordult, ami két-két nagyon hasonló eseményt jelent. A klaszterekbe rendezett események eltérő méretűek voltak. A főrengés olyan nagy amplitúdóval érkezett a PKSG állomásra, hogy telítődésbe ment a műszer, a hullámforma nem mutatott jó korrelációt egyetlen másik eseménnyel sem.

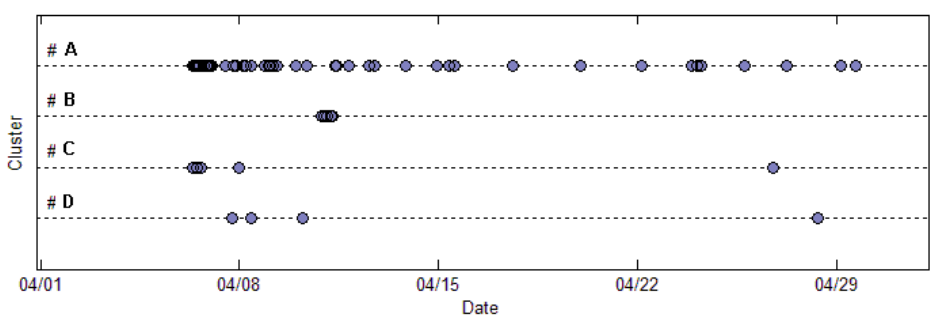
A 3. ábra a legnagyobb csoportok időbeli eloszlását mutatja. A legnagyobb 'A' csoport 80 utórengést tartalmazott, és a főrengés napján kipattant 65 utórengésből 45 esett ebbe a csoportba, továbbá a hónap végéig majdnem mindennap előfordult e csoportba tartozó utórengés. A 'B' klaszter csak két napig tartott. A 'C' és 'D' csoportok 6 és 4 rengést tartalmaztak, amik inkább a főrengés utáni időszakban pattantak ki.

A Dolomit Kőbányászati Kft robbantásai közül a kritikus korrelációs együtthatós értéket csak két robbantás érte el annak ellenére, hogy helyük és az állomás helye, illetve a fészekmechanizmus ugyanaz (esetleg a töltet mérete más). Ennek oka, hogy spektrumuk nagyon szegény, nem tartalmaz rövidebb hullámhosszakat, míg az utórengések spektruma sokkal szélesebb tartományba terjed ki. A robbantások a laza felszíni rétegen haladva át a rengésektől eltérő hullámformát mutatnak, és nem érik el a kritikus korrelációs értéket egy rengéssel összehasonlítva sem.

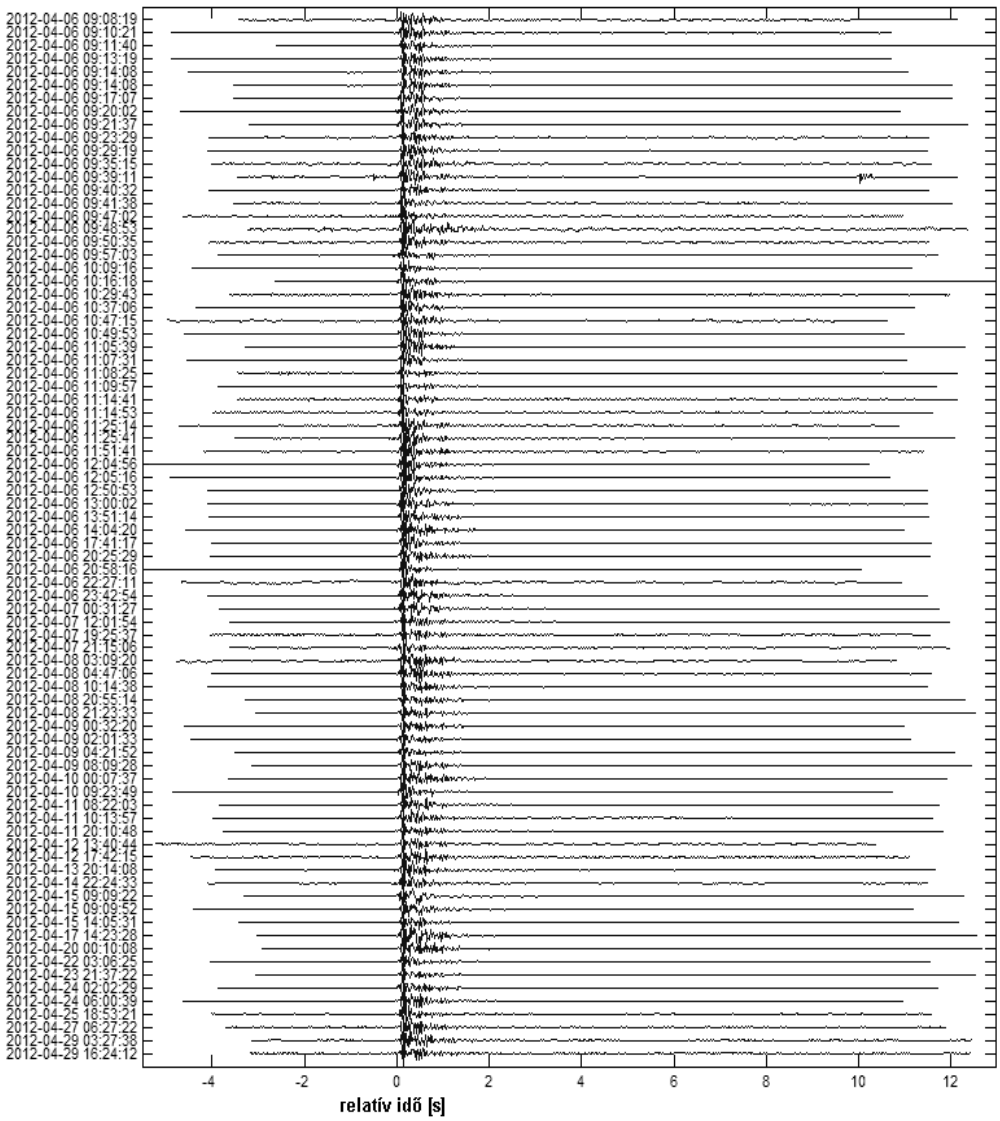
4 A legnagyobb klaszter elemeinek vizsgálata

A legnagyobb klaszter 80 elemből állt (4. ábra). A hat utórengés közül, aminek az epicentrumát sikerült meghatározni 4 esett ebbe a csoportba. Az elemek közül 30 mutatott 0,9-nél nagyobb keresztkorrelációt egy vagy több másik eseménnyel. A vertikális és É-D-i irányú horizontális csatorna keresztkorrelációs együtthatói alapján is - néhány szeizmogram kivételével - ugyanezek az események kapcsolhatók össze, érdemes tehát ezt a csoportot tovább vizsgálni. A nagyon hasonló események egymáshoz képesti térbeli helyzetét Geller és Mueller (1980) módszerét felhasználva becsültem meg. Cikkük alapján azt mondhatjuk, hogy a nagyon hasonló események távolsága a szeizmogram jellemző hullámhosszának a negyede, ez az ún. „λ/4" kritérium. Ezt úgy becsülhetjük meg, hogy a szeizmogramokat különböző tartományok (2-4 Hz, 4-8 Hz és 8-16 Hz) között sáváteresztő Butterworth szűrővel megszűrjük. Annak a legnagyobb hullámhossznak a negyede lesz az epicentrumok közötti távolság, aminél még megmarad a 0,9 együtthatónál nagyobb hasonlóság két hullámforma között. A P-hullám sebességét 5,6 km/s-nak véve 16 Hz esetén, a hullámhossz negyede kb. 90 m, S-hullám esetén 3,14 km/s sebességgel számolva 50 m-t kapunk.

A legnagyobb utórengések a PKSG állomáshoz nagyon közel 1-5 km-re pattantak ki, ekkor még a P- és S-hullámok szétválása nem történik meg, egy pár másodperces hullámcsomagot regisztrált az állomás. A klaszter azon 30 eleme közül, amelyek 0,9-nél nagyobb keresztkorrelációt mutattak egy vagy több másik eseménnyel, 21 mutatott a 8-16 Hz közötti sávszűrés után is 0,9-nél nagyobb keresztkorrelációt valamelyik másik eseménnyel (6. ábra), ezek egymástól az előző bekezdésben leírtak alapján 50-90 m távol lehettek. Látható egy 4 elemű csoport, a 20-21-24-25 sorszámú események, amik szoros négyes csoportot alkotnak, ezektől távolabb lehetnek a 18-19 és 6-7 sorszámú események.

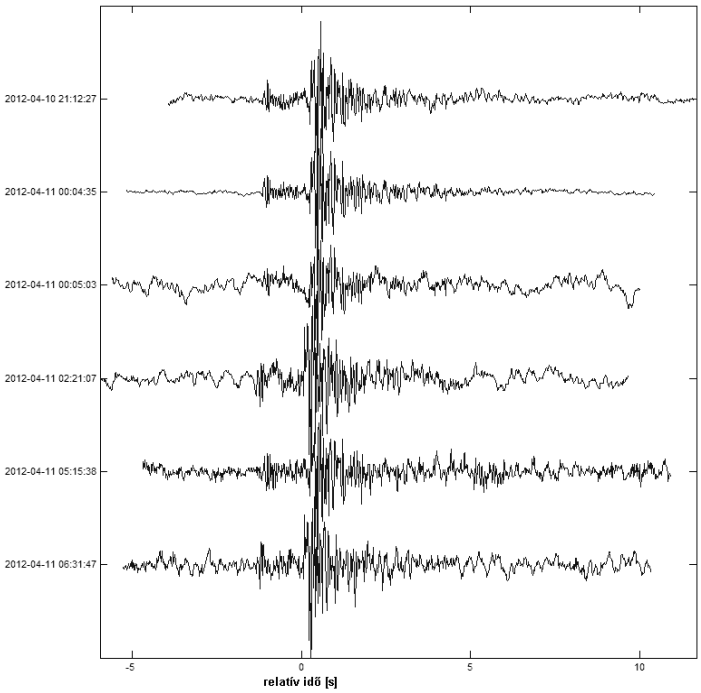


3. ábra. A legnagyobb csoportok időbeli eloszlása

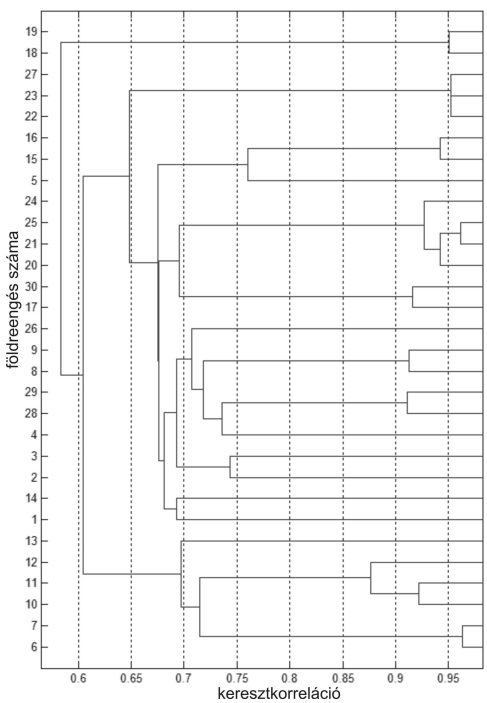


4. ábra. A legnagyobb 0,75-nél nagyobb korrelációt mutató csoport szeizmogramjai (80 rengés). Az ebbe a klaszterbe tartozó rengések az április 6-ától 29-éig tartó időszakban keletkeztek valamikor. A rengések szeizmogramjainak kezdeti idői UTC világidőben láthatók, a Magyarországon használt közép-európai idő nyáron +2 óra

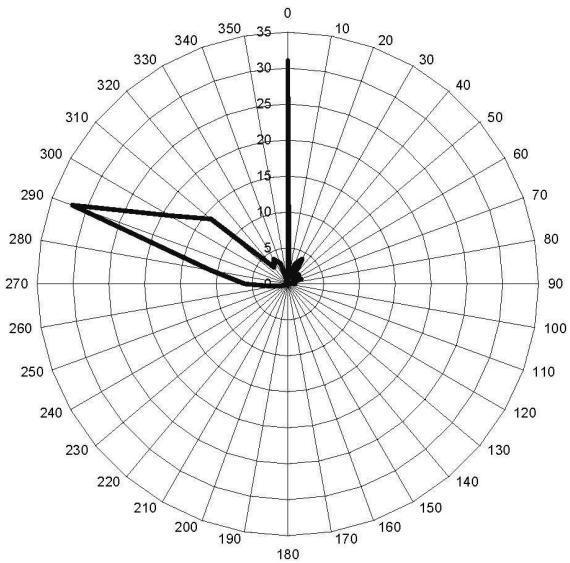
A fészekmechanizmus meghatározása nem lehetséges 1 állomás adataiból. Lehetőség van azonban a 3 csatorna (vertikális, É-D-i és K-Ny-i) tetszőleges irányba történő elforgatására. Így meghatározható azon irány, ahonnan maximális amplitúdóval beérkező jelet regisztrált volna valamelyik csatorna. A 7. ábra ennek az elforgatási számításnak az eredménye. A legtöbb utórengés K-Ny-i komponensét 290º-310º-kal kellett elforgatni (az óramutató járásának megfelelően), hogy maximális amplitúdóval érkező jeleket regisztráljon, 30 esetben nem volt ez az irány egyértelműen meghatározható. A 7. ábra azt mutatja, hogy az utórengések nagy része nemcsak hasonló hullámformát mutatott, de a rengések fészekmechanizmusa is hasonló lehetett.



5. ábra. A második 0,75-nél nagyobb korrelációt mutató csoport szeizmogramjai (6 rengés). Az események időtartama 2 napra terjed ki, és az események különböző méretűek. Ez a csoport nem a gánti utórengésekhez tartozik, hanem a csoport rengései a Vértes nyugati oldalán történt áprilisi események



6. ábra. A legnagyobb klaszter 0,9-nél nagyobb korrelációt mutató 30 szeizmogramjának, melyek utórengésekhez tartoznak, 8-16 Hz közötti sávszűrés után kapott keresztkorrelációs dendrogramja



7. ábra. Gyakorisági diagram, amely az utórengések számát mutatja elforgatási szögek szerint. A diagrammon jelzett elforgatási szög azt jelenti, hogy annyi fokkal kellett az utórengések K-Ny-i csatornán rögzített hullámfomáit elforgatni ahhoz, hogy a jelek maximális amplitúdóval érkezzenek be

4 Összefoglalás

A Vértes-hegység közepén, Gánton 2012. április 6-án a Richter-skála szerinti M2.8 erősségű rengést követően a hónap végéig 140 mikrorengést regisztrált a PKSG (gánti) állomás, amelyek rendkívül közel, mintegy 2,5 km-re voltak a főrengéstől. A regisztrált hullámformákat a MATLAB GISMO programcsomagja segítségével hullámforma analízisnek vetettem alá.

Az utórengések közül 80 esemény 0,75-nél nagyobb keresztkorrelációt mutatott, és közöttük több kisebb klaszter és dublett is volt. Az események közötti hasonlóság, mint „távolság” alapján a rokonsági ágakba, csoportokba rendezett eseményeken, más néven *dendrogramon*, a robbantások az utórengésektől eltérő ágat alkottak, de nem mutattak az egyedi robbantások egymással hasonló hullámformát. Ennek oka, hogy spektrumuk nagyon szegény, nem tartalmaz rövidebb hullámhosszakat, míg az utórengések spektruma sokkal szélesebb tartományba terjed ki. Huszonegy esemény mutatott a 8-16 Hz közötti sávszűrés után is 0,9-nél nagyobb keresztkorrelációt valamelyik másik eseménnyel. Ez azt jelenti, hogy a hasonlóság stabil, 50-90 m-re lehetnek egymástól a hipocentrumok.

A PKSG állomás K-Ny-i komponensét a legtöbb esetben 290º-310º-kal kellett elforgatni, hogy maximális amplitúdóval érkező jeleket regisztráljanak, ami nemcsak a hullámforma, hanem a fészekmechanizmusok hasonlóságát is mutatja. A főrengést követő nagyon sok hasonló hullámformájú utórengés azt jelzi, hogy a feszültségviszonyok stabilizálódása hasonló elmozdulások sorozatából tevődik össze. Az utórengések 2/3-a a főrengés napján és az azt követő két napon belül keletkezett.

Köszönetnyilvánítás. Szeretném megköszönni a GeoRisk Földrengés Mérnöki Irodának, hogy a PKSG (Gánt) szeizmológiai állomás adatait felhasználhattam a hullámforma korreláció analízisére.

Hivatkozások

Aster R C, Scott J (1993): Comprehensive characterization of waveform similarity in microearthquake data sets. Bull. Seism. Soc. Am., 83, 1307–1314.

Baisch S, Ceranna L, Harjes H-P (2008): Earthquake Cluster: What can we learn from waveform similarity? Bull. Seism. Soc. Am., 98, 6, 2806-2814.

Cattaneo M, Augliera P, Spallarossa D (1999): A waveform similarity approach to investigate seismicity pattern. Natural Hazard, 19, 123-138.

Deichmann N, Garcia-Fernandez M (1992): Rupture geometry from high-precision relative hypocenter locations of micro-earthquake clusters. Geophy. J. Inst., 110, 501-517.

Geller R J, Mueller C S (1980): Four similar earthquakes in central California. Geophy. Res. Lett., 7, no. 10, 821-824.

Hage M, Joswig M (2009): Mapping local microseismicity using short-term tripatle small array installations – Case study: Coy region (SE Spain). Tectonophysics, 471, 225-231.

Massa M, Eva E, Spallarossa D, Eva C (2006): Detection of earthquake clusters on the basis of waveform similarity: An application in the Monferrato region (Piedmont, Italy). Journal of Seismology, 10, 1-22.

Pechmann J C, Kanamori H (1982): Waveform and spectra of preshock and aftershock sequences in Utah. J. Geophy. Res., 87, 10579-10589.

Pechmann J C, Thorbjarnardottir B S (1990): Waveform analysis of two preshock-main shock-aftershock sequences in Utah., J. Geophy. Res., 87, 10579-10589.

Reyes C G, West M E, McNutt S R (2009): The Waveform Suite: A robust platform for accessing and manipulating seismic waveforms in MATLAB. Eos Trans. AGU, 90 (52), Fall Meet. Suppl, Abstract S11B-1704

Reyes C G, West M E (2011): The Waveform Suite: A robust platform for manipulating waveforms in MATLAB. Seismo. Res. Lett., 82, 104-110.

Tóth L, Mónus P, Bus Z, Győri E (2008): Earthquake Monitoring and Seismic Hazard Mitigation in Balkan Countries NATO Science Series: IV: Earth and Environmental Sciences. 2008, 81, II, 99-110, DOI: 10.1007/978-1-4020-6815-7-6.

SARKKÖRI FOLYÓK JÉGOLVADÁSI VÁLTOZÁSAINAK VIZSGÁLATA PASSZÍV MIKROHULLÁMÚ ŰRFELVÉTELEK FELHASZNÁLÁSÁVAL

Kugler Zsófia[*]

Analysis of ice break-up changes on arctic river ice from passive microwave images – *A remarkable effect of the global climate change is the shrinking of permanent ice cover on the Earth's surface. The monitoring of sea ice cover and ice shield extent serves as well-known impact indicator for long time. On the contrary, no regular observations are carried out on continental arctic and subarctic rivers even though their annual spring ice break-up and freezing would also present a notable sign for climate change processes. The analysis of arctic regions can contribute to the quantitative and qualitative estimation of the global impact. The lack of traditional hydrological measurements in those remote, inaccessible regions makes the use of satellite data a key technique in obtaining information on the hydrological cycle of the rivers. For this reason research was conducted on passive microwave satellite data to monitor arctic river ice conditions in Siberia and North-America. The time of seasonal ice breaking and freezing is well recognisable on the time series of satellite observations. Temporal changes in these periods could be indicators of the global climate change impact.*

Keywords: global climate change, remote sensing, GFDS, AMSR-E, SSM/I, ice break-up, arctic rivers

Az éghajlatváltozás egyik látványos következménye a földfelszíni jégborítás megváltozása. A tengeri jég kiterjedésének és a jégtakaró jelenlétének folyamatos nyomon követése, tudományos elemzése széles körű gyakorlattal bír. Ezzel szemben a sarkköri, állandón fagyott talajú, szárazföldi területek folyóinak (Észak-Amerika, Szibéria) szezonális jégolvadás változására nincs ismert tanulmány. Pedig ezen jelenség tanulmányozása mind kvantitatív, mind pedig kvalitatív eredményekkel szolgálhat a globális folyamat mértékének meghatározására. A sarkköri folyók téli jégborításának és tavaszi olvadásának periodikus változása – felszíni mérések hiányában – földmegfigyelő műholdak segítségével nyomon követhető. Ezen cikk a sarkvidéki folyók, passzív mikrohullámú űrfelvételek alapján levezetett, hidrológiai idősorainak tanulmányozásából kapott eredményeket mutatja be. A vizsgálatba bevont folyók műholdas idősoraiban markáns változás jelzi a jégolvadás tavaszi-kora nyári kezdetét. Ezen időpont eltolódása a globális klímaváltozás egy fontos mutatója lehet.

Kulcsszavak: globális éghajlatváltozás, műholdas távérzékelés, GFDS, AMSR-E, SSM/I, sarkköri folyók, jégolvadás

1 Bevezetés

2009 szeptemberében két német kereskedelmi hajó, jégtörők segítsége nélkül, sikeresen kelt át a Jeges-tenger észak-keleti átjáróján. Az Ázsiát Európával összekötő tengeri út a hagyományos ázsiai szállítási útvonalhoz képest jelentősen rövidebb. Felmerül tehát a kérdés, hogy a tengerjég ilyen mértékű visszahúzódása egyszeri, véletlenszerűen bekövetkezett környezeti esemény eredménye, vagy valamilyen éghajlati, melegedési folyamat következménye?

Az éghajlatváltozás egyik látványos következménye a földi jégborítás megváltozása. Ezen jelenség tanulmányozása mind kvantitatív, mind pedig kvalitatív eredményeket hozhat a globális folyamat mértékének meghatározására. Felmelegedéskor azonban nemcsak a jól ismert gleccserjég (Bolch 2007, Molnia 2007, Farinotti et al. 2009) és tengeri jég mennyisége csökken (Worby és Comiso 2004, Bareiss és Görgen 2005, Cavalieri és Parkinson 2008, Mahoney et al. 2008), hanem a szárazföldi vízjég jelenléte is kisebb területű és rövidebb idejű lehet. A sarkköri, szárazföldi folyók,

[*]*BME Fotogrammetria és Térinformatika tanszék*
1111 Budapest, Műegyetem rkp. 3.
E-mail: zsofia.kugler@mail.bme.hu

morotva eredetű, illetve termokarszt tavak jégolvadásának egységes, távérzékelésen alapuló megfigyelésére nincsen elterjedt gyakorlat. Pedig a sarkköri nagy vízfolyások, mint pl. az Ob, a Jenyiszej, a Léna vagy a Kolima, illetve a környezetükben található tavak jégolvadási viszonyainak időbeli eltolódása a klímaváltozás egyik mérhető következménye lehet. Űrtechnika segítségével ezen folyók és tavak szezonális jegesedésének vizsgálata lehetővé válik azon területeken is, ahol helyszíni jégjelenlét-mérés nehezen kivitelezhető vagy hiányos.

Az elemzés során, a sarkköri folyók jégolvadási viszonyainak vizsgálatára két műhold megfigyeléseit használtuk fel. A vízrajzi idősorok előállításához egyrészt az Operatív Árvízmegfigyelő Rendszer (Global Flood Detection System, GFDS, www.gdacs.org/floods) adatait integráltuk, melyet az Európai Unió Közösségi Kutató Központjában (JRC), a szerző közreműködésével fejlesztettek ki (Kugler et al. 2007). Másrészt a kidolgozott módszert alkalmazva (Brakenridge et al. 2007) az idősorokat kiegészítettük egy további műhold megfigyeléseivel. A rendszer működésének alapelvét a következő fejezet mutatja be.

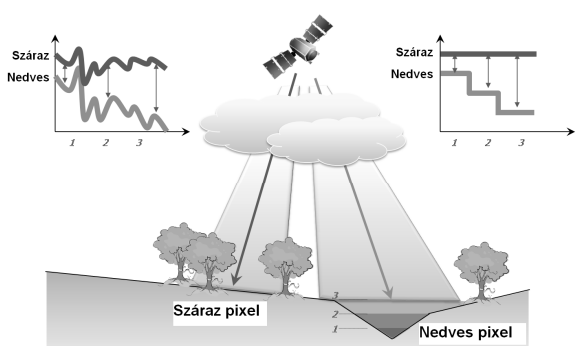
2 Műholdas vízrajzi idősorok

A GFDS műholdas vízrajzi megfigyelő rendszer az AMSR-E, passzív mikrohullámú műhold, éjszakai pályájú, 36 GHz frekvenciájú, H polarizációjú űrfelvételeinek adatain alapszik. A folyók állapotának megfigyelése két pontban történik. Az egyik megfigyelési pont a vízzel borított folyószakaszon helyezkedik el, ahol jégolvadás esetén jelentős környezeti változás megy végbe, a másik megfigyelés a száraz, folyótól független térszinten történik (1. ábra). Árvízi esemény vagy jégolvadás során a vízzel borított/megfigyelési pixel (M) sugárzási értéke csökken, még a száraz/kalibrációs pixelé (C) optimális esetben változatlan marad (1. ábra jobb felső idősora, 1, 2, 3 időpillanatban).

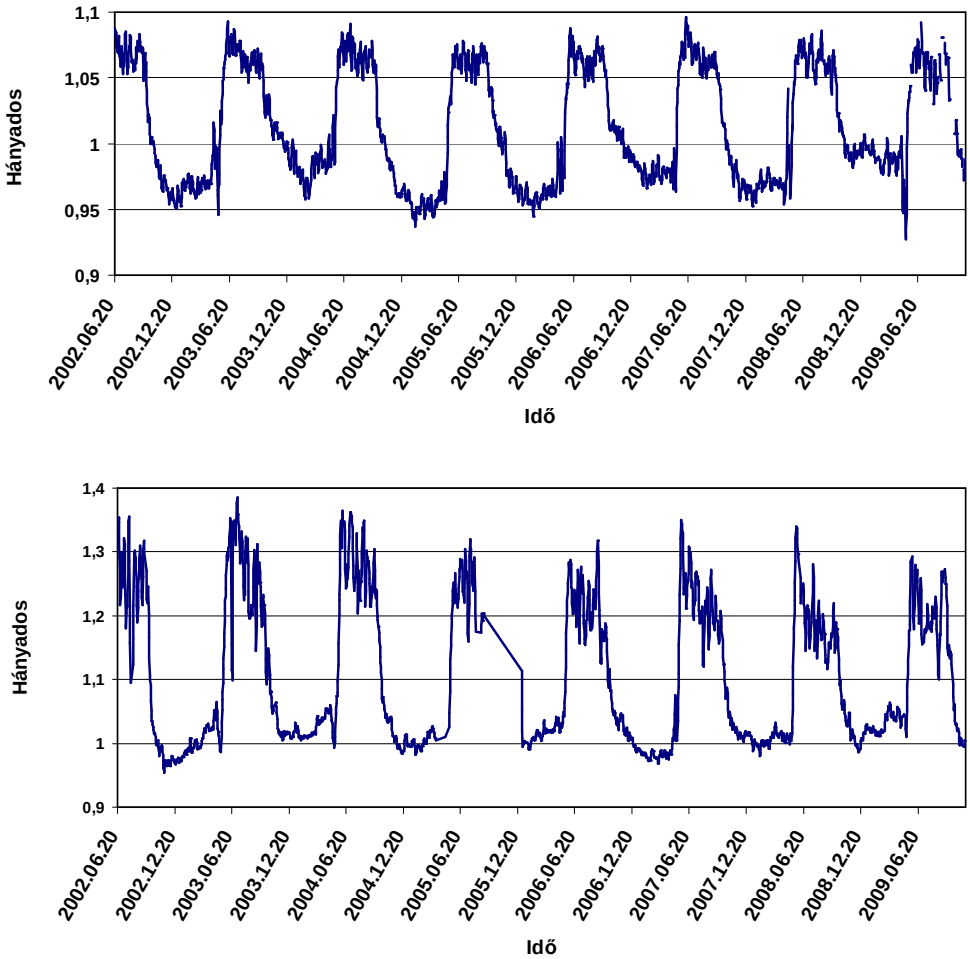
A valós megfigyelési értékek azonban zajjal terheltek, az ideális megfigyelési idősortól eltérnek (2. ábra bal felső idősora). A két megfigyelési pont M/C hányadosából képzett jelet már kisebb mértékben zavarja az említett zaj (1). A műholdas vízrajzi jelet a következő képlettel képezzük:

$$S = \frac{P_M}{P_C}, \tag{1}$$

ahol S az adott állomás jele adott napon, P_M, P_C a mérési jel a vízzel borított és a száraz (referencia) képpontról (Kugler et al. 2007). A jel idősorának előállítása az említett 4 szibériai folyó mellett az észak-amerikai Mackenzi folyó esetében is megtörtént. A folyók mentén 50 folyamkilométerenként megfigyelési pontokat jelöltünk ki, melyek idősorát első lépésben a kifejlesztett GFDS rendszerből nyertük. A rendszer alapjául szolgáló AMSR-E műhold közel 8 éves idősorát (2002-2010) kiegészítettük a Special Sensor Microwave/Imager (SSM/I) szenzor, F8, 11, 13, 17 műholdjának képeiből levezetett, hosszabb idősorral (1989-2010).



1. ábra. Operatív Árvízmegfigyelő Rendszer működési elve



2. ábra. A Kolima folyó 14374 azonosítójú állomásának vízrajzi idősora SSM/I (felső ábra) és AMSR-E (alsó ábra) műholdak megfigyelései alapján

Az utóbbi, NASA által működtetett műhold az AMSR-E-hez hasonló, passzív mikrohullámú érzékelője több frekvencián működik (19, 22, 37 és 85 GHz). Ebből a GFDS rendszerben használt 36 GHz frekvenciához leginkább közelítő, 37 GHz frekvenciájú, H polarizációjú, éjszakai pályájú űrfelvételek feldolgozását választottuk.

Az SSM/I adatok feldolgozása során a GFDS rendszerhez hasonló alapelveket követtünk. Az idősor teljes terjedelmében (1989-2010) a napi megfigyelésekből leválasztottuk a vízzel borított és a száraz pixelek értékét. A kapott sugárzási értékek kódolásában eltérés mutatkozott. Míg a nyers AMSR-E adatok sugárzási értékei -5000 és -15000 közé eső relatív számokkal kódoltak, addig az SSM/I képein ezen értékek tartománya a +1500 és +3000 közé esik. Ezért az idősorok szűrésérére alkalmazott 4 napi átlag számítását követően a C/M hányados bizonyult a legjobb közelítésnek. Összehasonlításképpen a 2. ábra adott állomás, két különböző műholdból nyerhető idősorának grafikonját mutatja be a maximális, közös időintervallumon.

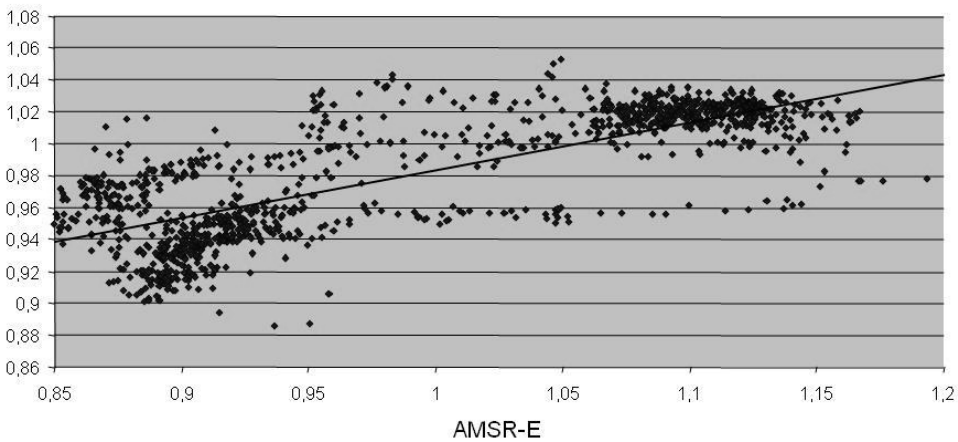
Mindkét műhold megfigyelési értékeiből számított arány időben hasonló lefutású. Különbségek abból adódnak, hogy még a régebbi SSM/I érzékelő térbeli felbontása alacsonyabb volt, addig az AMSR-E szenzor felbontása, elődjéhez képest jelentősen fejlődött. A két különböző műhold által megfigyelt pontok területe így nem tökéletesen fedi egymást. Ezen felül az SSM/I F 13 műhold élettartama végéhez közeledve, gyakran több napon át nem szolgáltatott adatot. Előfordult, hogy

akár 15 napon keresztül nem jött jel a műholdról. Ezeket a 2. ábrán az idősor folyamatos vonalának megszakadása jelzi, jellemzően a 2009. év vége felé közeledve.

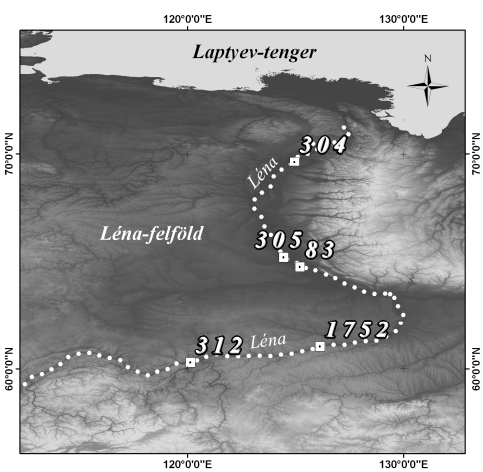
A két műhold képeiből előállított, vízrajzi változásokat tükröző jel több év átfedéssel rendelkezik. Az összefüggésüket egy korrelációs diagramon jelenítettük meg (3. ábra). Korrelációs együtthatóra 0,61-et kaptunk. Mivel a két műhold mérései kismértékben eltérő földfelszíni területre vonatkoznak, illetve az érzékelők kódolása is eltérő, ezért az azonos időpontra vonatkozó megfigyelési jelek nem teljesen esnek egybe. Mivel a cél a jelek idősorában megfigyelhető változás időpillanatának meghatározása, nem pedig a jelek kvantitatív összehasonlítása, a két műhold érzékelőjének különbségei elhanyagolható.

3 Jégolvadás megfigyelése

A következő lépésben a műholdas vízrajzi idősorok alapján, a vizsgált ázsiai, illetve észak-amerikai sarkvidéki folyók jegének tavaszi olvadását határoztuk meg. Ehhez először az 50 km-enként létesített megfigyelési pontokat emeltünk ki. Folyónként csupán néhány, kiválasztott pontban vizsgáltuk az idősorokat. Így például a Léna folyóra 5 kiemelt megfigyelési pontot vontunk be a részletes vizsgálatokba, melyen a kidolgozott módszert bemutatjuk (4. ábra).



3. ábra. Az SSM/I és AMSR-E műholdak vízrajzi idősorának összehasonlítása



4. ábra. Léna folyó megfigyelési pontjai. A kisebb fehér pontok az eredeti 50km-enkénti megfigyelési helyeket, a négyzetek az 5 kiválasztott állomás elhelyezkedését és azonosítóját mutatják

Az állomások jégolvadási időpontjait mind az AMSR-E műhold, mind az SSM/I szenzor megfigyeléseiből is levezettük. Jégolvadásuk meghatározásához az idősor alapján számolható magnitúdó értéket (M) használtuk fel, melyet a következő statisztikán alapuló képlettel állítottuk elő:

$$M = \frac{S - \overline{S}}{\sigma_S} \tag{2}$$

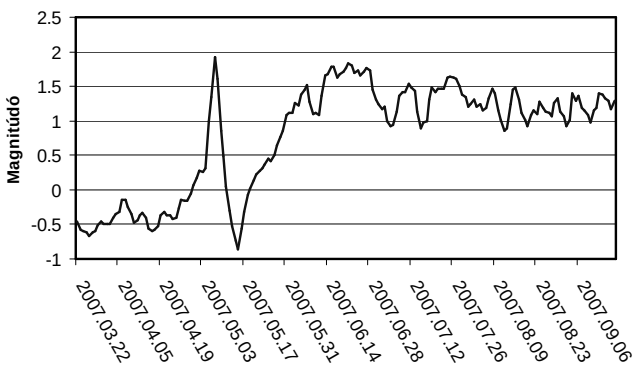
ahol S az adott állomáson megfigyelt jel, adott napon, $\overline{S}$ az állomás jeleinek átlaga, σ_S pedig a szórása. Ezen számítási mód úgy normalizálta a kapott vízrajzi jelet, hogy az összes megfigyelési pontban a 0 alatti értékek tartoztak a téli, fagyott időszakhoz, a 0 feletti értékek pedig a tavaszi olvadáshoz (Brakenridge et al. 2007, Groeve és Riva 2009). Azon időpontot határoztuk meg egységesen olvadási pillanatnak, amikor a magnitúdó érték 0 fölé emelkedik, és 10 napot meghaladó időtartamban, tartósan felette marad. Előfordult ugyanis, hogy néhány esetben az adott pontban mért magnitúdó 0 fölé emelkedett, majd néhány nap elteltével ismét negatív értékre zuhant vissza (5. ábra). Ilyenkor valószínűsíthetően a megolvadt jég újra visszafagyott, majd csak napokkal később olvadt meg végleg. Tapasztalatok szerint ezen időszak egy esetben sem haladta meg a 10 napos időintervallumot.

4 Eredmények

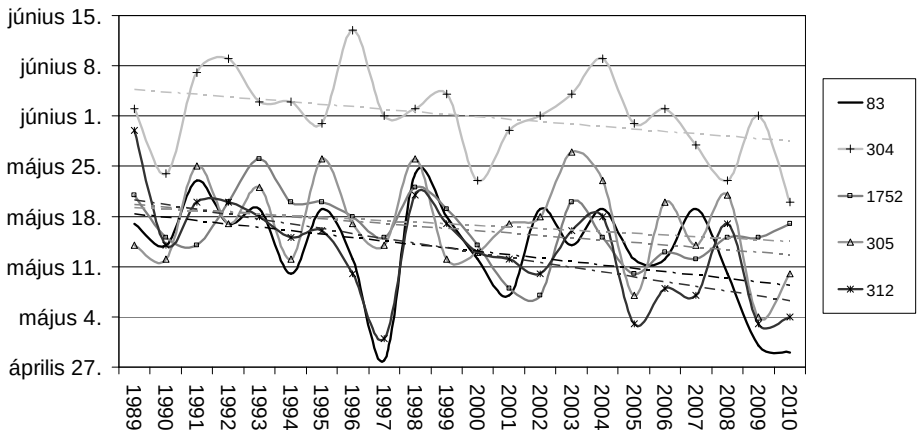
Mindkét műhold megfigyeléseiből képzett idősort a fent leírt módszerrel dolgoztuk fel. Az eredményeket két periódusra 1989-2010, illetve 2003-2010 osztottuk. Az előbbi időintervallumban az SSM/I megfigyeléseit elemeztük, a második intervallumban átfedés volt a két műhold megfigyelései között. A kidolgozott módszert a szibériai Léna folyón végzett elemzésen keresztül ismertetjük részletesen. A folyó a Bajkál-hegységben ered, felső szakasza hegyvidéki jellegű, majd az alsószakasz a közép-szibériai Léna-felföldön végighaladva torkollik a Laptyev-tengerbe (4. ábra). Az öt, részletesen bemutatott megfigyelési állomás mentén, délről-észak felé, a melegebből hidegebbe hajló éghajlati különbség csak kis mértékben érvényesül. A déli, felső szakaszon mért jégolvadási időpontok sokszor közelítik az északi, alsó szakasz olvadási időpontjait, és a középső szakasz olvadásai gyakran megelőzik a felső szakasz olvadásait.

4.1 SSM/I F13 idősor (1996-2009)

Elsőként a Léna folyó hosszabb, SSM/I műhold képeiből levezetett idősorát tárgyaljuk. A 6. ábra a folyón kiemelt öt állomás olvadásának kezdetét mutatja a vizsgált időintervallumon belül (1989-2010). A megfigyelési pontokban észlelt jégolvadások kezdete az évtizedek folyamán, időben eltérő képet mutatott. Az időbeli összefüggések vizsgálatára lineáris regresszióanalízist használtunk.



5. ábra. Tavaszi jégolvadás során előfordul, hogy a megolvadt jég napokra visszafagy, melyet a magnitudó érték megugrása majd csökkenése mutat



6. ábra. A Léna folyó jégolvadásának kezdete SSM/I műholdfelvételek alapján (1989-2010). A folyamatos vonal a jégolvadás időpontját, a szaggatott a folyamat trendjét mutatja be

Az olvadási görbékre legkisebb négyzetek módszerével illesztett lineáris trendvonalak minden esetben negatív változást mutattak, vagyis a vizsgált 22 év távlatában a jégolvadás időpillanatának korábbra tolódása volt megfigyelhető. Az egyenes meredeksége mutatta a változás mértékét. Megállapítható, hogy a vizsgált időszakban az összes állomás adatát figyelembe véve, átlagosan 4 nap/évtized mértékben tolódott korábbi időpontra a jégolvadás kezdete. A változás lineáris trendje 10 évre átlagolva maximum 6 nap és minimum 2 nap volt az 5 megfigyelési állomás mentén.

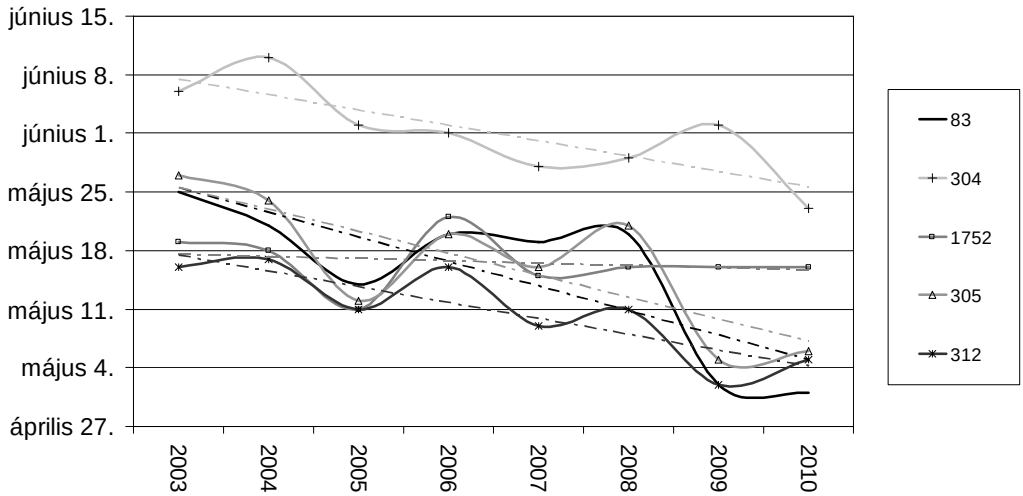
A legnagyobb változást a 312-es azonosítójú állomás mutatta, átlagosan 6 nap/évtized értékkel. Ezen állomás még a hidegebb éghajlatú, hegyvidéki, felső szakaszon található. A legnagyobb ingadozást a legkorábbi és a legkésőbbi olvadási időpont között is ezen állomás mutatta, a 22 vizsgált év alatt 28 nap. A folyó az Aldan, majd a Viljuj mellékfolyók torkolata után, a Léna-felföldre érkezve alsó szakasz jelleget mutatva, mellékágaival és lerakott hordalékával helyenként eléri a 20-30 km mederszéleséget. A szakaszon található 304-es és 305-ös azonosítójú állomások megfigyelései viszonylag kisebb változást mutattak, 2-3 napot egy évtizedre vetítve. A legkorábbi és a legkésőbbi olvadási időpontok közötti ingadozás, a 22 vizsgált év során 18 illetve 22 nap volt.

4.2 AMSR-E idősor (2003-2010)

Az AMSR-E műholdfelvételek alapján képzett jégolvadás idősorok rövidebbek (2003-2010), de az SSM/I megfigyelésekhez hasonló lefutásúak (7. ábra). A két különböző műhold képei alapján számított jégolvadási időpontok a Lénán kiemelt öt állomáson átlagosan 1-2 nap különbséget adtak. Az eltérést a két műholdas érzékelő sajátosságai, illetve a térbeli felbontásuk különbségei magyarázhatják.

Az AMSR-E felvételek alapján, a vizsgált állomások jégolvadása itt is évről évre eltérő volt. Az SSM/I feldolgozáshoz hasonló módon, a görbékre illesztett lineáris regressziós egyenessel közelítettük a változás irányát és mértékét. A változás mértékének becslése a rövidebb időintervallumon szélsőségesebb eltéréseket mutatott. Az egyenesek meredekségéből számolva a változás mértéke nagyobb volt, mint az SSM/I adatok esetében. Az utóbbi, hosszabb idősor statisztikailag kiegyensúlyozottabban határozta meg a változás mértékét. A legszélsőségesebb változást itt nem a felső szakasz jellegű állomásánál tapasztaltuk, hanem az alsó szakasz jellegű 83-as és 305-ös azonosítójú állomásokon, ahol 20 nap fölötti értéket kaptunk, évtizedre vetítve. A legnagyobb ingadozást a legkorábbi és legkésőbbi jégolvadási időpont között ugyanezen két állomás mutatta. A legkisebb ingadozást a 1752-es azonosítójú állomáson mértük, mindössze 3 napot egy évtizedre vetítve.

A Léna folyó kiemelt állomásain bemutatott, részletes elemzést a többi vizsgálatba vont szibériai és észak-amerikai folyón is elvégeztük. Ezen vizsgálatok eredményeit a következő fejezet foglalja össze.



7. ábra. A Léna folyó jégolvadásának kezdete AMSR-E műholdfelvételek alapján (2003-2010). A folyamatos vonal a jégolvadás időpontját, a szaggatott a folyamat trendjét mutatja be

4.3 Jégolvadási trendek

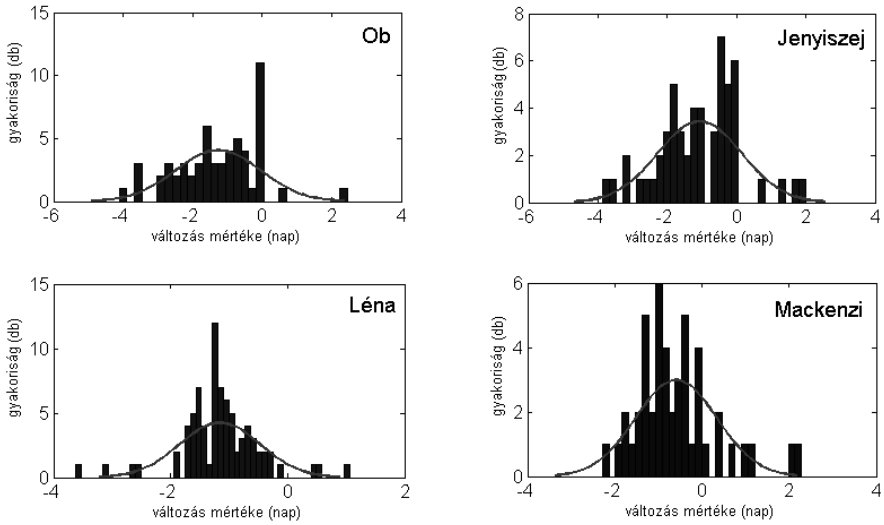
A sarkköri jégolvadási viszonyokat az AMSR-E műhold megfigyelései alapján tovább vizsgáltuk. A leírt módszerrel a Léna folyó mellett, az Ob, a Jenyiszej, a Kolima, illetve az észak-amerikai Mackenzi folyókon folytattunk további elemzéseket. A négy, szibériai, sarkköri folyó közelítőleg délről északra, a melegebbtől a hidegebb éghajlatú területek felé folyik, végül az északi Jegestengerbe torkollik. Első lépésben a zajos jelű állomások adatait szűrtük ki a vizsgálatokból. Ennek eredményeként az eredetileg 50 folyamkilométerenként meghatározott állomásokból az Obon csupán 48, a Jenyiszejen 51, a Lénán 79 és a Mackenzin 47 állomás adatát használtuk fel.

Mind a négy folyó olvadási időpontjaira lineáris regressziós egyenest illesztettünk. Az egyenesek meredekségéből folyónként gyakoriságot számoltunk, majd a kapott tapasztalati gyakorisági grafikonokra normális eloszlású sűrűségfüggvényt illesztettünk. A levezetett statisztikai eredményeket a vizsgált sarkköri folyókon a 8. ábra mutatja be.

Mind a négy folyó túlnyomóan negatív eltolódást mutatott, tehát a vizsgált időszakban a sarkköri folyók tavaszi jégolvadása egyre korábban következett be.

Természetesen nemcsak negatív értékeket kaptunk a változás mértékére, hiszen néhány mérési pontban pozitív eltolódást tapasztaltunk. Így például a Jenyiszej vagy a Mackenzi 5-8 megfigyelt állomásán tapasztaltuk, hogy a jégolvadás időben egyre később következett be. A Léna és az Ob folyók esetében alig 2 állomás mutatott pozitív eltérést.

A lineáris trendek gyakorisági mutatóit minimum, maximum, átlag és szórás értékkel tovább jellemeztük (1. táblázat). A legszélsőségesebb negatív változást (-4,1 nap) az Ob folyó egyik állomásán tapasztaltuk, a legkisebb változást, pedig a Mackenzi folyó állomásai mutatták. Átlagban ez a folyó közelített leginkább a 0 értékhez, vagyis ezen észak-amerikai folyó mutatta a legkisebb eltolódást az időszakos jégolvadás változásában. A legnagyobb változást a Léna folyón észleltük, ahol a jégolvadás kezdete 10 évre vetítve átlagosan majdnem 15 nappal tolódott el. A legkisebb szórást is ezen folyó mutatta, vagyis ennek a változása ingadozott állomásonként a legkevésbé.



8. ábra. Négy különböző sarkköri folyó jégolvadási változásának empirikus gyakorisági görbéje AMSR-E képek alapján

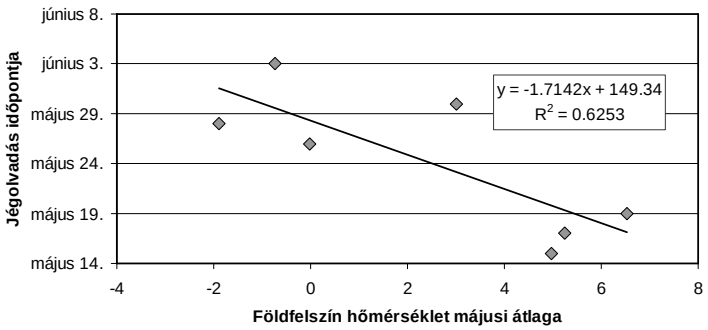
5 Hőmérséklet és jégolvadás kezdetének összefüggése

A jégolvadás egyik befolyásoló tényezője lehet a földfelszín hőmérséklete. Ezért a vizsgálatba további műholdas adatokat vontunk be. A következő elemzésre felhasznált MODIS műholdas érzékelő ugyancsak a NASA üzemeltetésében működik, az AMRS-E szenzorral azonos műhold platformon kering. Hiperspektráls felvételeinek termális infravörös csatornája alkalmas a földfelszíni hőmérséklet becslésére (https://lpdaac.usgs.gov/products, 2012-07-22). A továbbiakban az amerikai Land Processes Distributed Active Archive Center által feldolgozott képekből nyert hőmérséklet adatokat használtuk fel, melyek a földfelszín emisszióját és hőmérsékletét érzékelik (MODIS/Terra Land Surface Temperature and Emissivity). Az adat szolgáltatója a 0,05° felbontású, napi gyakoriságú képekből, globális lefedettséggel, havi átlaghőmérsékletet számol (Wan és Li 1997). A sarkköri folyókon ezen globális, havi átlag képekből vezettük le az adott állomáshoz tartozó havi hőmérsékleti átlagot. Mivel a jégolvadás legtöbb esetben május hónap folyamán zajlik, ezért a jégolvadási időpillanatot az adott évre vonatkozó, májusi átlaghőmérséklettel vetettük össze.

A vizsgálat során az adott megfigyelési állomás, adott évének jégolvadását vetettük össze az azonos hely, azonos évének májusi átlaghőmérsékletével (9. ábra). A lineáris regressziós elemzések során kiderült, hogy nem minden állomásnál állapítható meg egyértelmű, fordított összefüggés a havi átlag hőmérséklet és az olvadás időpontja között úgy, mint a példaként bemutatott, Kolima folyó, 14542 azonosítójú állomása esetében. Vagyis nem minden állomásnál érvényes, hogy a hidegebb májusi középhőmérséklethez későbbi jégolvadási időpillanat tartozik. A hőmérsékleti adatok elemzése vegyesen adott pozitív és negatív előjelű regressziós összefüggést. Sőt előfordult, hogy adott hőmérséklet intervallumhoz korai és késői olvadási időpont is tartozott. A jelenségre magyarázat lehet, hogy a jégolvadást nem csupán a hőmérséklet alakulása határozza meg. A meder morfológiája, a folyókeresztszelvény geometriája, összefolyási pontok mind tovább befolyásolhatják a jégolvadás időpillanatát.

1. táblázat. Sarkköri folyók jégolvadási változásának (nap) statisztikája

	Jenyiszej	Léna	Ob	Mackenzi
max.	2,0	1,1	2,5	2,3
min.	-3,9	-3,6	-4,1	-2,3
átlag	-1,1	-1,2	-1,5	-0,6
szórás	1,2	0,7	1,2	0,9

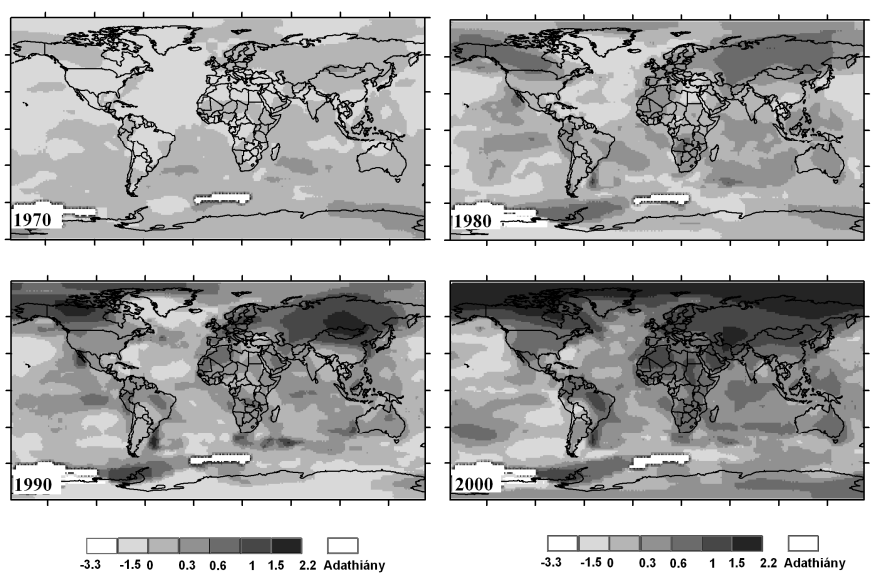


9. ábra. Jégolvadás kezdetének időpontja és havi átlaghőmérséklet (°C) közötti összefüggés a Kolima folyó 14542-es számú állomása mentén (2003-2010)

6 Diszkusszió

A jégolvadás eltolódásának vizsgálata a két időszakban, 1989 és 2010, illetve 2003 és 2010 között különböző mértékű változást mutatott. Az előbbi időszakban kisebb eltolódást tapasztaltunk, mint az utóbbiban. Ennek több oka is lehetséges. Egyrészt a hosszabb idősor stabilabb eredményt hozott a lineáris regresszióelemzés során, másrészt a két évtized globális hőmérsékleti anomáliája eltérő volt. Jelentős számú szakirodalom foglalkozik az északi félgömb sarkvidéki területeinek éghajlatváltozásával. Megállapításaik alapján az utolsó 10 év éghajlati változása jelentősen felgyorsult (Overland et al. 2008). Az 1975 óta mért átlagos 0,2-0,5°C/évtized globális hőmérsékletnövekedés elérte a majdnem 2°C/évtizedes emelkedési átlagot 2000-2010 között Amerika és Eurázsia északi területein, valamint az Arktisz és Antartisz vidékén (10. ábra, Hansen et al 2010).

Ezen belül a téli és tavaszi időszakban nagyobb változást tapasztaltak, mint a nyári illetve őszi időszakban (Turner et al. 2008). Vagyis éghajlati kutatások alapján, az elmúlt évtized során a műholdas vizsgálatba vont északi, sarkvidéki terület szenvedte el a legnagyobb hőmérsékleti változást. Ezt látszik alátámasztani a bemutatott, műholdas megfigyelések alapján számított jégolvadási változások mértéke is.

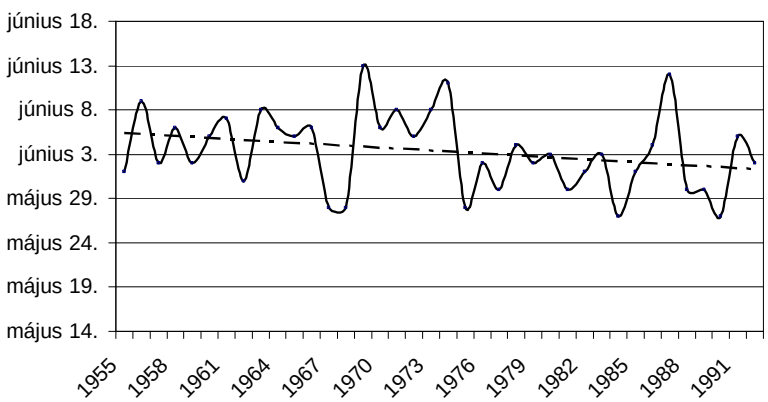


10. ábra. Globális hőmérsékletváltozási trendek (°C/évtized) 1950–2009 között, az 1951–1980 közötti bázisidőszakhoz hasonlítva (Hansen et al. 2010 nyomán)

A vizsgált szárazföldi folyók felszíni adatokkal történő összehasonlítását nehezíti a hidrológiai mérőállomások számának csökkenése. Mind az eurázsiai, mind az amerikai sarkvidéki területek földi megfigyelő hálózatának száma 1986 után drasztikusan lecsökkent (Shiklomanov et al. 2002). A bezárások különösen a távol-keleti szibériai térséget érintették.

A műholdas vizsgáltba vont területen mindössze öt földfelszíni állomás adatai álltak rendelkezésünkre, melyek idősorainak hossza állomásonként eltérő volt (Vuglinsky 2000). Egyes felszíni állomások jégolvadási idősora a 1930-as évekre nyúlik vissza, de volt olyan is, mely csak a 1960-70-es évektől szolgáltat adatot. Az idősorok általában az 1980-as évek végéig tartanak, a leghosszabb idősor 1994-ig tart. A jégolvadási trendek ezen idősorok alapján, a műholdas megfigyeléshez hasonló, negatív trendet mutattak. Vagyis a helyszíni észlelések is alátámasztják, hogy az olvadás minden vizsgált folyó esetében az év egyre korábbi időpontjára tehető.

A Léna folyó mentén egyetlen sarkvidéki, helyszíni állomás méréseit sikerült elérni. A folyó torkolati szakaszához közel található Kusur hidrológiai mérőállomás adatai a műholdas megfigyeléshez hasonló változásokat mutatnak (11. ábra). Kusur a részletes műholdas vizsgálatba bevont 304-es azonosítójú állomástól nagyjából 200 folyamkilométerre, északra található. Jégolvadás megfigyelései a 1955–1992 közötti időszakot ölelik fel. A teljes időintervallumon végzett lineáris regressziós elemzéssel megállapított jégolvadás változása 1 nap/évtized volt. Ugyanezen állomás mentén, műholdas megfigyelés alapján, a 2003–2010 időintervallumra számolt változás mértéke 3 nap/évtized. A kétféle – műholdas és helyszíni – megfigyelés között átfedési idő nincs, ennek ellenére megállapítható, hogy a jégolvadás idejének változása jelentősen felgyorsult az elmúlt évtized során.



11. ábra. Jégolvadási időpontok a Léna folyó Kusur (70° 41’ É 127° 24’ K) menti megfigyelő állomásán 1955-1991 között (Vuglinsky 2000 alapján)

7 Összefoglalás

Az északi-sarkvidéki folyók tavaszi jégolvadásának megfigyelését két mikrohullámú műhold segítségével végeztük el. A levezetett vízrajzi idősorok a globális éghajlatváltozás következményének számszerűsítésére szolgáltak. A Léna folyón végzett vizsgálatokban az AMSR-E műhold mellett a hosszabb idősorú SSM/I műhold megfigyeléseit is bevontuk. A két műhold megfigyelése hasonló eredményt hozott.

Megállapítható, hogy a változás nyomon követése a hosszabb SSM/I idősoron statisztikailag kiegyensúlyozottabb, alacsonyabb szórású eredményt adott. A jégolvadási változás lineáris regressziós egyenessel való becslése a Léna folyón, az öt kiemelt megfigyelési pontban átlagosan 4 nap/évtized értékre adódott. Ugyanezen érték a rövidebb idősorú AMSR-E megfigyelések esetében egy évtizedre vetítve 18 napos, szélsőségesebb átlagra adódott. A két műhold hasonló technikai adottságokkal bír, de felbontásbeli különbségük a megfigyelések során elkerülhetetlen eltérést okoz.

A Léna részletesebb elemzését a szibériai Ob, Jenyiszej, Kolima és az észak-amerikai Mackenzi folyó vizsgálata követte.

Itt statisztikai módszerek segítségével, folyónként közel 50 megfigyelési állomás AMSR-E műholdról levezetett jégolvadási változását értékeltük ki. A folyók olvadási változása minden esetben eltérő, de többségében negatív eltérést mutatott.

A legkisebb változás a Mackenzi folyón következett be, míg a szibériai folyókon nagyobb eltolódás volt észlelhető. Ezen eredményeket a hosszú távon, földi állomásokon észlelt hőmérsékleti változások is alátámasztják. A szakirodalom az utolsó évtizedben felgyorsulni véli az eurázsiai sarkvidéki területek felmelegedési trendjét. Az 1975 óta mért átlagos 0,2-0,5°C/évtized trendhez képest, az elmúlt 10 évre 2°C/évtizedes változást állapít meg.

További műholdas megfigyelések bevonásával megállapítható, hogy a földfelszíni hőmérséklet éves ingadozása viszont nem határozza meg egyértelműen az adott év jégolvadásának időpillanatát. Nincsen tehát egyértelmű összefüggés az adott év átlagos tavaszi átlaghőmérséklete és ugyanazon évben lejátszódó jégolvadás időpontja között. Ennek magyarázata lehet, hogy a folyóvíz olvadási folyamatát a felszíni középhőmérsékleten felül a folyó morfológiai adottságai is befolyásolják.

Összefoglalva megállapítható, hogy az északi-sarkköri folyók tavaszi jégolvadása korábbi időpont felé tolódik. A változás az utóbbi évtized során felgyorsult, mértéke akár az átlagos 10 nap/évtizedet is elérheti. A hőmérsékleti anomáliákkal való összehasonlítása kimutatta, hogy éves szinten az összefüggés nem egyértelmű, de évtizedes távlatokban vizsgálva jól követheti a hőmérséklet fordított trendjét.

Köszönetnyilvánítás. Ezen cikk a Magyary Zoltán Közalapítvány posztdoktori kutatásainak keretében valósult meg. A szerző hálás köszönettel tartozik a Közalapítványnak a bizalomért és a támogatásért, mely a Norvég Alap segítségével valósult meg. Továbbá a munka szakmai tartalma kapcsolódik a "Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen" c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.

Hivatkozások

Bareiss J, Görgen K (2005): Spatial and temporal variability of sea ice in the Laptev Sea: Analyses and review of satellite passive-microwave data and model results, 1979 to 2002. Global and Planetary Change, 48(1–3), 28-54.

Brakenridge G R, Nghiem S V, Anderson E, Mic R (2007): Orbital Microwave Measurement of River Discharge and Ice Status. Water Resources Research, 43, 1-16.

Bolch T (2007): Climate Change and Glacier Retreat in Northern Tien Shan (Kasachstan/Kyrgyzstan) using Remote Sensing Data. Global and Planetary Change 56, 1-12.

Cavalieri D J, Parkinson C L (2008): Antarctic sea ice variability and trends, 1979–2006. Journal of Geophysical Research Oceans, 113, C07004.

Hansen J, Ruedy R, Sato M, Lo K (2010): Global surface temperature change. Reviews of Geophysics, 48, 1-29.

Farinotti D, Huss M, Bauder A, Funk M, Truffer M (2009): A method to estimate the ice volume and ice-thickness distribution of alpine glaciers. Journal of Glaciology, 55(191), 422-430.

Groeve T D, Riva P (2009): Global real-time detection of major floods using passive microwave remote sensing. Proceedings of the 33rd ISRSE Conference, II. 587-590.

Kugler Zs, De Groeve T, Brakenridge G R, Anderson E (2007): Towards Near-real Time Global Flood Detection System. International Archives Of Photogrammetry And Remote Sensing, 36(7/C50), 1-8.

Mahoney A R, Barry R G, Smolyanitsky V, Fetterer F (2008): Observed sea ice extent in the Russian Arctic, 1933–2006. Journal of Geophysical Research, 113, C11005.

Molnia B F (2007): Late nineteenth to early twenty-first century behavior of Alaskan glaciers as indicators of changing regional climate. Global and Planetary Change, 56(1–2), 23-56.

Overland E, Wang M, Salo S (2008): The recent Arctic warm period, Series A. Dynamic Meteorology and Oceanography Tellus A, 60(4), 589–597.

Shiklomanov A I, Lammers R B, Vörösmarty C J (2002): Widespread Decline in Hydrological Monitoring Threatens Pan-Arctic Research. EOS Transactions, American Geophysical Union, 83(2), 13-17.

Turner J, Overland J E, John E (2007): An Arctic and antarctic perspective on recent climate change. International Journal of Climatology, 27(3), 277–293.

Vuglinsky V (2000): Russian river ice thickness and duration. Boulder, CO: National Snow and Ice Data Center/World Data Center for Glaciology. Digital media. http://nsidc.org/data/docs/noaa/g01187_russian_river_ice_thickness/index.html

Wan Z, Li L (1997): A physics-based algorithm for retrieving land-surface emissivity and temperature from EOS/MODIS data, IEEE Trans. Geosci. Remote Sens., 35(4), 980-996.

Worby A P, Comiso J C (2004): Studies of the Antarctic sea ice edge and ice extent from satellite and ship observations. Remote Sensing of Environment, 92(1), 98-111.

RADIOLÓGIAI MONITORING TÉRINFORMATIKAI MODELLJE

Dr. Bartha Gábor[*], *Szebényi Géza*[**], *Benő Dávid*[***], *Kocsis Sándor*[****]

GIS model of a radiological monitoring system – *The top level of the Geographical Information Systems (GIS) is represented by the expert systems which store, visualize and analyze data depending on geographical location. The decision support system is a sort of the expert systems, it claims special knowledge to handle and it supports the work of experts. The scope of this kind of systems is to determine those territories where the measured data satisfy a predetermined target value. The general features of the expert systems in earth sciences are reviewed in the paper and an example of an experimental GIS based decision support system for the evaluation of monitoring data in the underground radioactive waste disposal in Bátaapáti, Hungary is given.*

Keywords: Decision Support System

A térinformatikai rendszerek legfejlettebb formája a szakértői rendszer, amely a földrajzi helyzettől függő adatokat nem csak tárolja, és grafikus formában megjeleníti, hanem az adatok magas szintű szakmai analizálására is képes. A döntéstámogató rendszer a szakértői rendszereknek az egyik típusa, amelynek kezeléséhez szakértői ismeretek szükségesek és szakértők munkáját támogatják. Földtudományi térinformatikai rendszerek esetében ez egy olyan célfeladat érdekében végzett mérések analízisét jelenti, amely azt vizsgálja, hogy melyek azok a területek, ahol a mérési adatok kielégítenek valamilyen célfeladatot. A tanulmányban áttekintjük a földtudományi szakértő rendszerek általános tulajdonságait és ismertetjük a Bátaapáti felszín alatti radioaktív hulladéktároló vizsgálata során kifejlesztett kísérleti térinformatikai döntéstámogató rendszert.

Kulcsszavak: Döntéstámogató rendszer

1 Bevezetés

A mesterséges intelligencia az a tudományterület, amely a számítógép emberi intelligenciát igénylő alkalmazásainak fejlesztésével foglalkozik. A fogalom John McCarthy-tól származik, és az 1956-ban Darthmouthban tartott "Artificial Intelligence" konferencián hangzott el. Nagy remények fűződtek ehhez a számítógépi alkalmazáshoz. Marvel Minsky a Life magazinban 1970-ben megjelent cikkében még így fogalmazott: "In from three to eight years we will have a machine with the general intelligence of an average human being." (Crevier 1993). Newell pedig párhuzamot vont az emberi és a mesterséges intelligencia között (Newell 1980).

Bár ezt az optimista jóslatot a 70-es években sok neves kutató osztotta, mégsem sikerült a mesterséges intelligenciát kifejleszteni. Így a 80-as évektől a kutatás pénzforrásai elapadtak, az érdeklődés speciális tudást igénylő feladatok megoldása felé fordult, felhasználva a korábbi kutatások eredményeit (logikai programozás, PROLOG nyelv, stb.). Megszületett a mesterséges intelligencia kutatás egyetlen igazi sikertörténete, a szakértői rendszer (Expert System).

A szakértői rendszer definíciója a rendszer atyjának tartott Edward Feigenbaumtól származik: "A szakértői rendszer olyan számítógépi program, amelyik ismeretet (tudást) és következtetési módszert használ fel emberi szakértőket igénylő feladatok megoldására" (Kurzveil 1990). A szakértői rendszerek legelterjedtebb típusa a tudásbázisú technológián (Knowledge Base Technology) alapuló programok. Ezek a rendszerek az adott feladat megoldásához szükséges szakértelmet HA → AKKOR (IF → THEN) szabályok formájában tárolják, ezért gyakran szabályokra alapozott rendszernek (Rule Based System) is nevezik ezeket a programokat.

[*]*Miskolci Egyetem, Geodéziai és Bányaméréstani Intézeti Tanszék. E-mail: iitgabor@uni-miskolc.hu*
[**]*Mecsekérc Zrt. 7633 Pécs, Esztergár Lajos u. 19. E-mail: szebenyigeza@mecsekerc.hu*
[***]*Miskolci Egyetem, Geodéziai és Bányaméréstani Intézeti Tanszék. E-mail: gbmbd@uni-miskolc.hu*
[****]*Miskolci Egyetem, Geodéziai és Bányaméréstani Intézeti Tanszék. E-mail: alexander.kocsis@yahoo.com*

A tudásbázisú szakértői rendszer legegyszerűbb típusa a döntéstámogatói rendszer, amely megállapítja, hogy egy mérési adat megfelel-e adott feltételeknek. A rendszer négy részből áll:

- Felhasználói felület (user interface), amelyen keresztül a rendszer a megoldandó feladatra vonatkozó kérdéseket tesz fel, a felhasználó pedig válaszol ezekre a kérdésekre. A feladat elemzése után a program ezen a felületen közli a teendőket és ezek magyarázatát.
- Következtetési mechanizmus (inference engine), az a program rész, amely a logikai következtetéseket végzi.
- Tudásbázis (knowledge base), amelyben a humán szakértő(k) tudását tárolja a program.
- Adatbázis (database), ahol a feladat megoldásához szükséges adatokat tárolja a rendszer.

A szakértői rendszerek nagy családjába tartozó földtudományi szakértői, illetve az egyszerűbb döntéstámogató rendszerek hosszú múltra tekinthetnek vissza. Már a MYCIN-nel egyidőben kifejlesztették a PROSPECTOR-t az első geológiai szakértői rendszert (Johnson et al. 1985). Ezt számos javítás követte, majd más földtudományi területen is megjelentek ezek a rendszerek (Lenanun et al. 2000, Dokas 2005, McCarthy et al. 2008). Közös tulajdonságuk, hogy az adat- és tudásbázis, valamint a következtetési rendszer földrajzi helyhez kötött továbbá az adatok mintavételen alapulnak. Ezért a következtetések túlnyomó része statisztikus jellegűek és viszonylagosak. A következtetések, információk bizonytalanságára nem csak a természeti paraméterek változékonysága, de maga az adatgyűjtés módszere és az értékelő szubjektuma is hatással van (Szebényi et al. 2008a).

A földtudományi szakértői rendszerek felhasználói felületén megjelenő kimenő adatok könnyebben értelmezhetők grafikus, térképen adott formában. Párhuzamosan a szakértői rendszerek fejlesztésével, már a 70-es évektől kezdve dolgoztak ki olyan számítógépes programokat, amelyekkel földrajzi helyzethez kötött adatokat lehetett grafikusan megjeleníteni, tárolni, sőt egyszerű analíziseket is elvégezni. Ezeket a programokat az angol nomenklatúra Geographical Information System (GIS)-nek nevezte el, míg a magyar nyelvben a térinformatikai vagy geoinformatikai rendszer kifejezés honosodott meg.

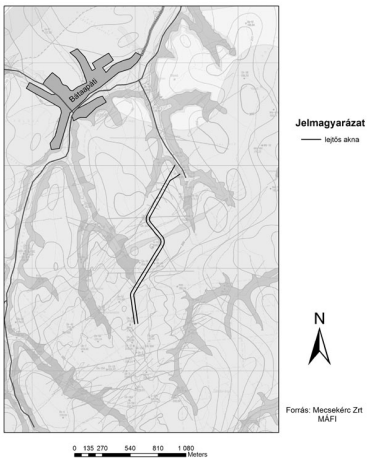
A GIS rendelkezik adatbázissal, grafikus felhasználói felülettel, és bizonyos műveletek elvégzéséhez szükséges apparátussal, de nem rendelkezik tudásbázissal és következtetési mechanizmussal. Ezt a programot kezelő személy biztosítja. Bár a GIS önmagában nem tekinthető szakértői rendszernek, de kiegészítve tudásbázissal és következtetési mechanizmussal, földtudományi szakértői rendszerré fejleszthető.

2 Paksi Atomerőmű és a Bátaapáti felszín alatti nukleáris hulladéktároló

A Paksi Atomerőmű Zrt. szolgáltatja országunk villamosenergia-felhasználásának több mint 40%-át. Működése során különböző radioaktív hulladékok keletkeznek, amelyeket kis és közepes, valamint nagy aktivitású osztályokba sorolhatunk. Korábban, megállapodások szerint, mivel a szükséges fűtőelemeket Magyarország Oroszországtól (illetve a volt Szovjetuniótól) szerezte be, a radioaktív hulladékok elhelyezéséről is gondoskodtak egészen 1997-ig. Ezen anyagok elhelyezése során nemzetközi kötelezettségeink értelmében napjainkra már csak országunk területe jöhet szóba. A nagy aktivitású hulladékok (kiégett fűtőelemek) elhelyezése jelenleg Pakson, egy 1997-ben 50 évre tervezett élettartamú átmeneti tárolóban történik. A végleges tárolás kidolgozása jelenleg is zajlik.

Az Országos Atomenergia Bizottság kezdeményezésére 1993-ban kezdték meg a Paksi Atomerőmű kis és közepes aktivitású radioaktív hulladékainak kezelésének és elhelyezésének megoldására irányuló programot. A kutatások során a hulladékok tárolására Bátaapátit választották. A szűkebb helyszín meghatározására és a terület alkalmasságának felmérésére irányuló geológiai kutatásokat 1997-1998-ban végezték. A felszíni ideiglenes tároló 2008-ra készült el, 2011-ben a földalatti végleges tároló első két kamrájának kivitelezése is befejeződött.

A vizsgált terület a Dunántúli-dombságban, Bátaapátitól délkeletre, illetve Mórágy településtől délnyugatra található (1. ábra). A tájra jellemzőek a meridionális (észak-déli) futású völgyeket kialakító patakok, továbbá a mélyben észak-déli irányban húzódó kőzetszerkezeti törésvonalak. A mintaterület mintegy 96 540 négyzetméter, ahonnan a mérési adataink származtak.

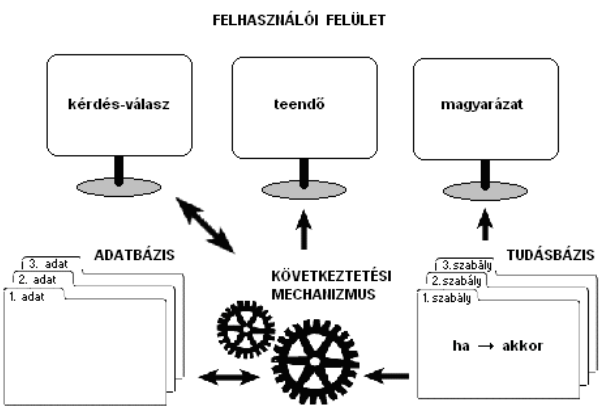


1. ábra. Áttekintő térkép a mintaterület elhelyezkedéséről

3 Döntéstámogató rendszer modellje

A döntéstámogató rendszer célja, hogy meghatározza azokat a területeket, amelyek adott radioaktív sugárzási szinthez tartoznak. Ehhez több radioaktív anyag (nuklid) adott pontokon vett kőzetmintákból, gamma spektroszkópiai elemzéssel meghatározott koncentráció adatai állnak rendelkezésre, valamint az a szakértői ismeret, amely a koncentrációból a sugárzásra következtet (Bódizs 1997). In-situ mérésekre alkalmas gamma spektroszkópokat is kifejlesztettek, amelyek megfelelő hitelesítés után a helyszínen végzik a mérést és az analízist. Az általunk kifejlesztett döntéstámogató rendszer tesztelésénél hitelesítési célból vett kőzetminták laboratóriumi gamma spektroszkópiai elemzéssel meghatározott koncentráció adatait használtuk fel. A modell és az implementálás a megrendelő Mecsekérc Zrt. megrendelésére készült, szemléltetési célból. Természetesen, továbbfejlesztve és kibővítve, a rendszer alkalmas a későbbiekben egy in-situ méréseken alapuló monitoring rendszer adatainak real-time értékelésére is.

A döntéstámogató rendszerünk „deszka példánya” a 2. ábrán vázolt szerkezetű, azaz az adatbázisból, a tudásbázisból a következtetési mechanizmusból és a felhasználói felületből épül fel, amelyeket az alábbiakban részletesen áttekintünk.



2. ábra. Tudásbázisú szakértői rendszer felépítése

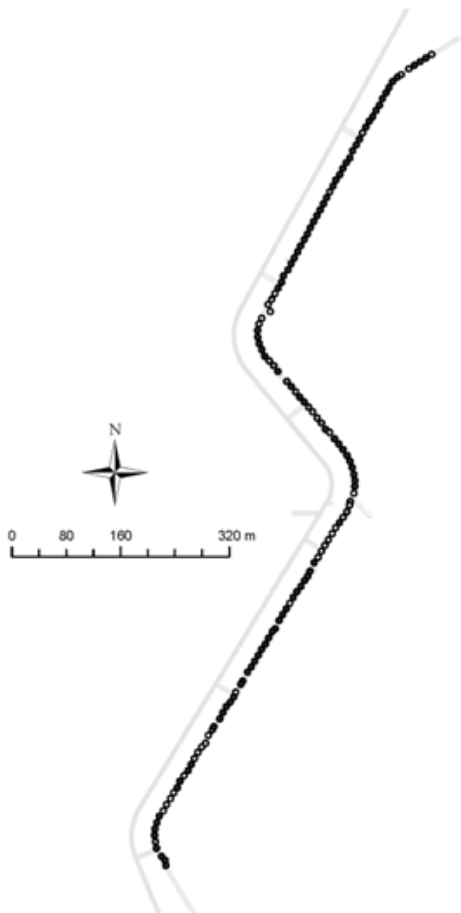
3.1 Adatbázis

A gamma-spektrometria a gamma-sugárzó nuklidok gamma-energiájának meghatározása alapján a nuklid minőségi meghatározását teszi lehetővé, és a gamma-spektrum teljes energia csúcsainak intenzitásaiból (csúcs alatti terület) pedig a radioizotóp mennyisége határozható meg (Bódizs 1997).

A Mecsekérc Zrt. rendelkezésünkre bocsátotta a 148 mérőpont laboratóriumi gamma-spektrometriai adatait a Mária-lejtősaknából Excel tábla formájában (xls), továbbá a mérőpontok koordinátáit vektoros állományként (dxf) formátumban. A mérőpontok elhelyezését a 3. ábra tünteti fel. Az Excel táblákat az ArcGIS 9.2 programcsomaggal alakítottuk át a döntéstámogató rendszer adatbázisává. Ezt az átalakítást a 4. pontban mutatjuk be a számítógépes implementáció leírásánál. Megjegyezzük, hogy az in-situ mérések real-time feldolgozásához a modellre kifejlesztett jelen számítógépes implementációt ki kell egészíteni egy scripttel, amely automatikusan elvégzi a "manuálisan" végrehajtott transzformációkat a folyamatosan beérkező in-situ mérési adatokon.

3.2 Tudásbázis

A gamma spektrometriai adatok a sugárzó anyagok koncentrációját adják meg. A koncentráció és a sugárzási szint kapcsolatának megadása a szakértő feladata, akinek "kiváltására" a szakértői rendszert létrehoztuk.



3. ábra. A lejtősakna mérőpontjainak elhelyezkedése

Esetünkben a koncentráció – sugárzás szint megfeleltetés, a szerzőcsoport geológusának, Szebényi Gézának köszönhető, aki részletesen foglalkozott ezzel a témakörrel (Szebényi et al. 2008b). A szakértő értékelését az 1. táblázatban foglaltuk össze. A táblázat feltünteti azokat az elemeket (urán, tórium, kálium, radon), amelyeket figyelembe vettünk a modellben, a koncentrációjuk mértékegységét, valamint azokat a koncentráció határokat (sávhatárok), amelyek valamilyen sugárzási szintbe sorolhatók. Ezek a szintminősítések (Földkéreg átlagánál kisebb, Földkéreg átlagához közeli, Enyhe lokális emelkedés, Lokális dúsultság, Erős lokális dúsultság) elfogadott elnevezések a kapcsolódó sávhatárokba eső koncentrációs értékekre (Szebényi et al. 2008b). A grafikus megjelenítéshez (ld. később 3.4) az egyes szintekhez különböző színeket rendeltünk. Megfigyelhetjük, hogy a különböző sugárzási szintekhez különböző koncentrációk tartoznak az egyes nuklidok esetében. Ezért a sugárzási szintekhez 1-től 5-ig terjedő numerikus értéket is rendeltünk, hogy a következtetési mechanizmus egységesen kezelhesse az egyes nuklidok adatait együttes sugárzási szint mérések esetén.

3.3 Következtetési mechanizmus

A legegyszerűbb esetben az input adat egy nuklid és egy sugárzási szint. Az adatbázisban szereplő koordináta-koncentráció adatokból a tudásbázis a beadott sugárzási szintnek megfelelő koncentrációhoz tartozó pontokat kiválogatja, és a hozzátartozó színnel a felhasználói felület pedig megjeleníti.

Több elem együttes sugárzási szintjének meghatározása a szintekhez rendelt, 1-től 5-ig terjedő numerikus értékek összegzésével történik. Az input adat két vagy több nuklid és egy sugárzási szint. A releváns pontok koordinátáinak kiválogatásához összegezzük minden mérési pontban az egyes nuklidok koncentráció értékeihez tartozó sugárzási szintek numerikus értékeit és elosztjuk a nuklidok számával. A hányadost egész értékre kerekítve, a beadott sugárzási szint numerikus értékével összevethető számot kapunk, amelynek alapján az adott pont osztályozható, éppúgy mint az egyedi nuklid esetében. A modell tesztelése során a kálium+tórium+uera+urán, tórium+uera+urán, urán+uera kombinációkat vizsgáltuk, mivel ezek az összeállítások gyakran szerepelnek a tényleges vizsgálatokban.

1. táblázat. A tudásbázis alapjául szolgáló osztályozás

Paraméter	Jelölés	Mérték-egység	Sávhatárok	Szakmai értékelés	Numerikus érték
Urán	U	g/tonna	U < 3,0	Földkéreg átlagnál kisebb	1
			3,0 ≤ U < 7,4	Földkéreg átlaghoz közeli	2
			7,4 ≤ U < 9,7	Enyhe lokális emelkedés	3
			9,7 ≤ U < 11,9	Lokális dúsultság	4
			11,9 ≤ U	Erős lokális dúsultság	5
Tórium	Th	g/tonna	Th < 12	Földkéreg átlagnál kisebb	1
			12 ≤ Th < 33,6	Földkéreg átlaghoz közeli	2
			33,6 ≤ Th < 40,5	Enyhe lokális emelkedés	3
			40,5 ≤ Th < 47,4	Lokális dúsultság	4
			47,4 ≤ Th	Erős lokális dúsultság	5
Kálium	K	%	K < 2,5	Földkéreg átlagnál kisebb	1
			2,5 ≤ K < 4,2	Földkéreg átlaghoz közeli	2
			4,2 ≤ K < 5,1	Enyhe lokális emelkedés	3
			5,1 ≤ K < 6,0	Lokális dúsultság	4
			6,0 ≤ K	Erős lokális dúsultság	5
Urán egyenértékes rádium	^{Ue}Ra	g/tonna	U < 3,0	Földkéreg átlagnál kisebb	1
			3,0 ≤ U < 7,4	Földkéreg átlaghoz közeli	2
			7,4 ≤ U < 9,7	Enyhe lokális emelkedés	3
			9,7 ≤ U < 11,9	Lokális dúsultság	4
			11,9 ≤ U	Erős lokális dúsultság	5

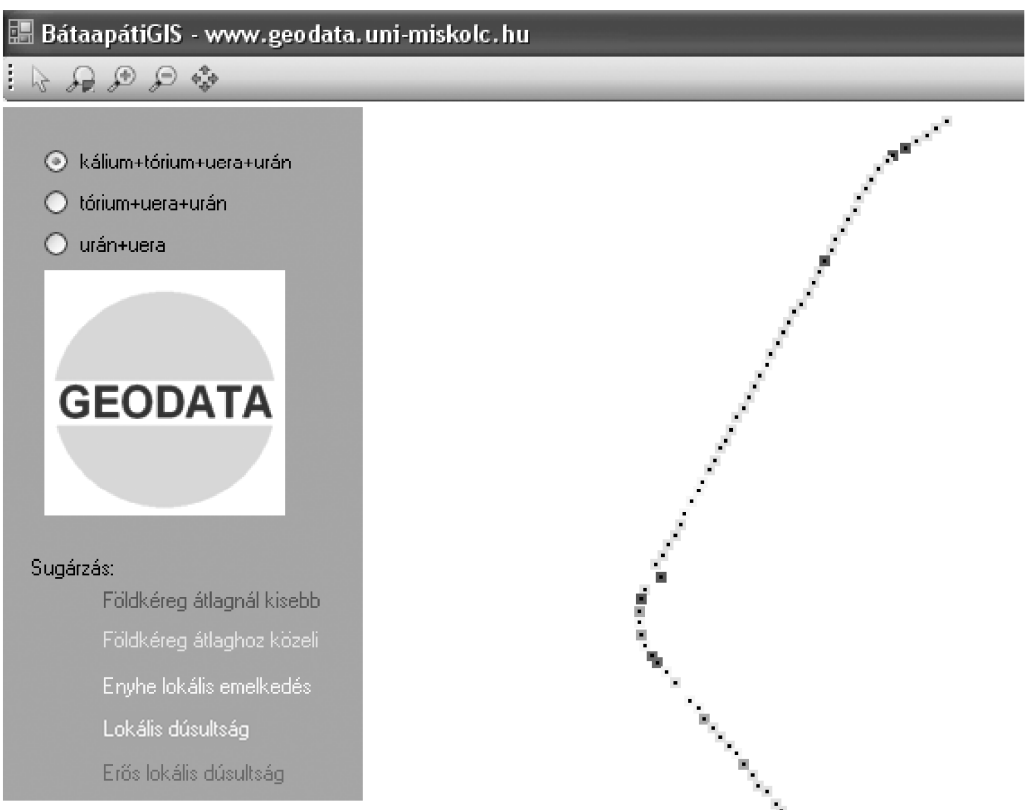
3.4 Felhasználói felület

A felhasználói felületet a 4. ábra mutatja be. Ez szolgál az input adatok beadására – azaz az előző pontban említett nuklid kombinációk illetve sugárszintek kiválasztására. Ezen a felületen jelenik meg a grafikus végeredmény – azaz a megfelelő színnel megjelölve azok a pontok, amelyek megfelelnek az input feltételeknek, míg a többi pontot színtelen karika jelöli.

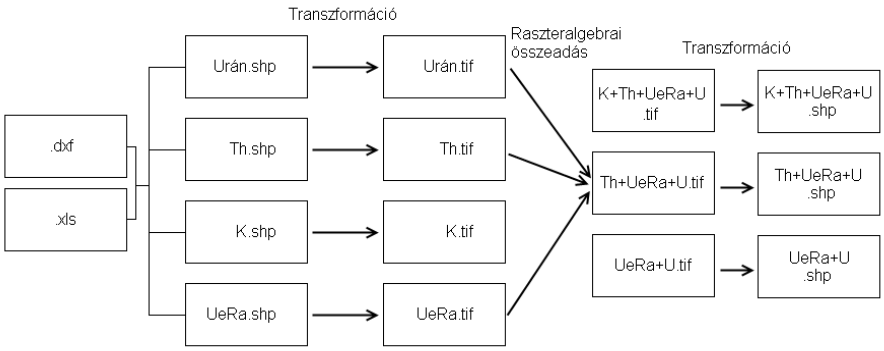
A jelenlegi programban csak ezek a kombinációk vizsgálhatók, de egy egyszerű bővítéssel más, tetszőleges kombinációk is kialakíthatók.

4 A rendszer számítógépi implementációja

A számítógépi implementáció három részből áll. Az első rész az adatbázis előállítása amelyet ArcGIS 9.2 programcsomaggal végeztünk el. A folyamatot az 5. ábra mutatja be, amelyet minden egyes nuklidra (U, K,Th, UeRa) végrehajtottunk. A rendelkezésünkre bocsátott, koordináta – koncentráció xls, dxf fájlokból négy shp fájl készült, amelyek mindegyike 148 pontot tartalmazott. Ezeket raszteres tiff formátumba konvertáltuk, és a választott kombinációknak megfelelően összegeztük, majd visszakonvertáltuk shp vektoros formátumba a válogatáshoz. Ez a három shp file képezi a döntéstámogató rendszer adatbázisát. A konverziókat az összegzés és átlagolás elvégzéséhez kellett végrehajtanunk. Elegánsabb megoldásnak tűnhet „ personal geodatabase” alkalmazása, amivel a konverziók elkerülhetők. Ennek ellenére a bonyolultabb megoldást választottuk a bemutató modellben. A konverziós eljárás ugyanis automatikusan végrehajtható lesz a végleges rendszerben, a szabad forráskódú MapWindows GIS programmal, és az ezt vezérlő, korábban már említett scripttel.



4. ábra. A döntéstámogató rendszer felhasználói felülete



5. ábra. A döntéstámogató rendszer adatbázis előállításának számítógépes implementálása

Ez azzal az előnnyel jár, hogy az Arc GIS „kihagyható”, ami egyrészt jelentős anyagi megtakarítást jelent, másrészt egységes GIS platform oldja meg a feladatot.

A második rész egy általunk fejlesztett C# program (Demeter 2008) amely megvalósítja a tudásbázis, a következtetési mechanizmus és a felhasználói felület funkciókat. A program megjeleníti a felhasználói felületet, betölti az adatbázis előzőekben leírt három fájljából az input felületen kiválasztott kombinációnak megfelelőt. Ezután a beadott sugárzási szint értékének megfelelő válogatást végez és megszínezi a releváns pontokat - azaz előállítja az output shp fájlt. A későbbiekben ezt a programot kell kiegészíteni az adatbázis automatikus előállítására szolgáló scripttel.

A döntéstámogató rendszer harmadik része az MapWindow GIS program. Ez az output shp fájl megjelenítésére szolgál, amit a C# program hív be és lát el a megfelelő paraméterekkel. Többek között így vált elérhetővé a nagyító-, és a térkép pozícionáló eszköz a grafikus megjelenítésben.

5 Összefoglalás

A munkánkban bemutatott térinformatikai döntéstámogató rendszer adott sugárszintek helyszíneinek megállapítására alkalmas. A rendszer koncepcionális modelljének implementálása jelenleg négy komponens három kombinációjának figyelembevételére alkalmas, hatásuk egyszerű, additív összegzésével. Ez a modell nyilvánvalóan továbbfejleszthető több komponensre és kifinomultabb összegzési módszer alkalmazásával. Ez indokolta, hogy a kifejlesztett rendszert „kísérleti” jelzővel láttuk el. Úgy véljük azonban, hogy az elvégzett feladatok (adatbázis, tudásbázis, következtetési mechanizmus, az implementáláshoz kifejlesztett C# program, MapWindow alkalmazások) megfelelő alapot nyújtanak a továbbfejlesztéshez.

Munkánkból az alábbi következtetések vonhatók le:

- A szakértői rendszer alkalmazásával az adatok kiértékelése lényegesen könnyebbé, egyszerűbbé vált, és a rendszer felgyorsította a kiértékelést végző földtudományi szakember munkáját.
- Egyszerű esetekben, mint a fenti példában, a tudásbázis gyorsan, kevés munkával elkészíthető. Nyilvánvalóan, komplex esetekben ez nagyságrendekkel több időt valamint nehezebb munkát igényel. Nagy rendszer kifejlesztése akkor célszerű, ha várhatóan nagyszámú kiértékelést kell elvégezni egy adatrendszerből.
- A szakértői rendszer fenti formája nem tartalmaz statisztikai elemeket, azaz nem veszi figyelembe a mérési bizonytalanságokat. Míg a humán kiértékelő "ösztönösen" tekintettel van erre a problémára, a számítógépi programba való beépítése komoly nehézséget jelent.
- Ugyanaz az adatrendszer ellentmondó eredményeket szolgáltathat egymással összefüggő célfeladatokra. Ennek kiküszöbölése humán szakember számára nem jelent nehézséget, de

az ilyen ellentmondások "előre" történő kiküszöbölése számítógépi programozással, komoly, nem minden esetben megoldható probléma.

Összegezve, a szakértői rendszer komoly segítséget jelent a földtudományi kiértékelő munkában, de a humán szakember "teljes" kiküszöbölése még nem várható a közeljövőben.

Köszönetnyilvánítás. A szerzők köszönetet mondanak a Radioaktív Hulladékokat Kezelő Közhasznú Nonprofit Kft-nak a Bátaapáti felszín alatti radioaktív hulladéktároló cikkben közölt adatainak publikálási engedélyezéséért.

A tanulmány a TÁMOP - 4.2.1.B - 10/2/KONV – 2010 - 0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

Hivatkozások

Bódizs D (1997)**:** Félvezető Detektoros Gamma Spektroszkópia. http:// mf2002.uw.hu/anyagok/gamma.pdf (2011.08.14.)

Crevier D (1993): The Tumultuous Search for Artificial Intelligence. Basic Books, New York. 109.

Demeter M I (2008): Visual Studio 2005-2008. Panem Könyvkiadó, Budapest. 15-624.

Johnson L, Keravnou E T (1985): Expert SystemTechnology. AbacusPress, Cambridge. 184.

Kurzveil R (1990): The age of inteeligent machines. MITPress, Cambridge. 580.

Lenanun S, Kawtrakul A, Mairaing W, Suksart V (2000): A Development of Expert System Shell for Slope Stability Analysis. WAINS 7 : E-Business for the new Millennium. Bangkok, Thailand. 1-9.

McCarthy J, Graniero P, Rozic S (2008): An Integrated GIS-Expert System Framework for Live Hazard Monitoring and Detection. Sensors, 2008, 8, 830-846.

Newell A (1980): Physical Symbol Systems. In: Cognitive Science 4 Ed. Clark, A Carnegie Mellon. University 133-183.

Szebényi G, Kovács G P, Kovács L O (2008a): Exploration methodology as a factor of geological uncertainty in evaluation of Recsk Deep's ore mineralizations. In Földessy J, Hartai É (eds.): GEOSCIENCES Publications of the University of Miskolc Series A, Mining, Volume 73, Miskolc University Press, 145-166.

Szebényi G, Gorjánácz Z, Várhegyi A (2008b): Gammaspektrometriai elemzések kiértékelése. In: Balla Z (szerk.): Bátaapáti hulladéktároló felszín alatti létesítményeinek előkészítési munkái 2004-2007. A felszín alatti földtani kutatás zárójelentése. 3. kötet, X. függelék, 35. Kézirat, 2008. május, Magyar Állami Földtani Intézet-Mecsekérc Zrt., Budapest-Pécs, RHK Kft. Adattára, Paks, RHK-K-082/08.