

ÉVFOLYAM  
*Volume*

**XXII**

2019

---

**G E O M A T I K A I  
K Ö Z L E M É N Y E K**

*Publications in Geomatics*

**FŐSZERKESZTŐ**  
*Editor in Chief*

**PAPP G**

**TANÁCSADÓ TESTÜLET**  
*Advisory board*

**ÁDÁM J** (*elnök/chair*)  
**BIRÓ P**  
**BOZÓ L**  
**MÁRTON P**

HU ISSN 1419-6492



---

*MTA CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZET  
SOPRON*

# **Geomatikai Közlemények**

*Publications in Geomatics*

kiadja a

## **CSFK GEODÉZIAI ÉS GEOFIZIKAI INTÉZETE**

9400 Sopron, Csatkai E. u. 6-8. Pf. 5.

tel.: 99 / 508-340 fax.: 99 / 508-355

e-mail: [geomatika@ggki.hu](mailto:geomatika@ggki.hu)

web: [www.geomatika.ggki.hu](http://www.geomatika.ggki.hu)

web programozó: Lovranits Tamás

felelős kiadó:

***Kiss L. László***  
*főigazgató*

főszerkesztő:

***Papp Gábor***

angol nyelvi szerkesztő:

***Papp Gábor***

technikai szerkesztő:

***Szlávy Anna***

készült a

**LŐVÉR PRINT Kft.** nyomdájában

9400 Sopron, Ady Endre u. 5.

tel.: 99 / 329-977

megjelent 100 példányban

Sopron, 2019

HU ISSN 1419-6492

**GEOMATIKAI  
KÖZLEMÉNYEK  
XXII.**

"Minden nemzet a maga  
nyelvén lett tudós,  
de idegenen sohasem."

(Bessenyei György)

# ÁLTALÁNOS INFORMÁCIÓK ÉS ÚTMUTATÓ

A Geomatikai Közlemények 1998 óta rendszeresen, általában évenként egy alkalommal megjelenő folyóirat. A kiadvány célja, hogy elsősorban magyar és esetenként angol nyelvű fórumot biztosítson a hazai, ill. külföldi kutatóknak és szakembereknek, akik a geodézia, fotogrammetria, térinformatika, fizikai geodézia, geofizika, földmágnesség, geodinamika, a Föld belső szerkezete és a Föld körüli térség fizikája, tágabb értelemben véve a geomatika szakterületén elért tudományos eredményeiket szeretnék közzétenni. A kiadványban megjelenő cikkek és tanulmányok a mai normáknak megfelelő lektorálási folyamaton mennek keresztül, azaz mielőtt publikálásra kerülnek legalább kettő független bíráló véleményt alkot a közlésre benyújtott kéziratról. A bírálók nevét alap helyzetben csak a szerkesztőbizottság ismeri, de a bírálók kérhetik anonimitásuk függesztését. A bírálatok alapján a szerkesztőbizottság dönti el, hogy az adott kézirat megfelel-e a Geomatikai Közlemények formai és tartalmi követelmény-rendszerének, illetve, hogy az esetlegesen felmerülő hibák és hiányosságok kijavíthatók- és pótolhatók-e a kézirat kisebb-nagyobb átdolgozásával.

A Geomatikai Közlemények szerkesztését – amelyet 2011-től már egy, az Interneten keresztül elérhető és működtethető web felület is támogat ([www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek](http://www.geomatika.ggki.hu/kozlemenyek)) ©Lovranits Tamás és Papp Gábor – társadalmi munkában végző szerkesztőség nagy hangsúlyt fektet a lehető leggyorsabb minőségi munkára. Ez mind a szerzőktől, mind a bírálóktól erőfeszítéseket és fegyelmet kíván, amit a szerkesztőség előre is tisztelettel megköszön. Ennek biztosításához javasoljuk áttanulmányozni a következő anyagokat:

[formai\\_es\\_tartalmi\\_kovetelmenyek.docx](#),  
[geomatikai\\_kozlemenyek\\_utmutato\\_biraloknak.pdf](#),

amelyek a már fent megadott címre belépve letölthetők a megfelelő linkekről. A regisztrált felhasználók ugyanezen a címen keresztül végezhetik el a rendszer által koordinált aktuális feladataikat, akár szerzői, akár bírálói szerepkörben. Az új felhasználók ugyanitt regisztrálhatnak, felhasználói név és e-mail cím megadásával.

A feltöltött kéziratokat a szerkesztőség előbírálja, elsősorban az instrukciókban megfogalmazott formai szempontok szerint. Ha a kézirat formailag kielégítőnek bizonyul, akkor elindul a bírálati folyamat, amely általában több ciklust is képez, és egészen addig tart, ameddig a bírálók, ill. a szerkesztőség ezt tartalmi-formai indokok miatt szükségesnek tartják. A bírálati fázisokról és az aktuális teendőkről mind a szerzők mind a bírálók automatikus üzenetekben értesülnek.

A Geomatikai Közleményeket a CSFK Geodéziai és Geofizikai Intézete adja ki. A kiadás anyagi háttérét egyrészt a két évente Sopronban megrendezésre kerülő Geomatika Szeminárium, másrészt különböző pályázatok és tudományos szervezetek (pl. Soproni Tudós Társaság) támogatásai biztosítják. A XXII. kötet megjelenését a Soproni Tudós Társaság tette lehetővé.

A Geomatikai Közlemények jelen kötetének felelős szerkesztői:

Benedek Judit, Bányai László, Geiger János, Gráczer Zoltán, Gribovszki Katalin, Kalmár János, Szabó Szilárd, Szűcs Eszter, Újvári Gábor.

## A KÖTETBEN MEGJELENT CIKKEK BÍRÁLÓI

Homolya	András
Takács	Bence
Burai	Péter
Vekerdy	Zoltán
Barta	Veronika
Weidinger	Tamás
Rózsa	Szabolcs
Földváry	Lóránt
Lovas	Tamás
Jancsó	Tamás
Gribovszki	Zoltán
Márkus	László
Jánosi	Imre
Kristóf	Dániel
Wojtaszek	Malgorzata

# TARTALOMJEGYZÉK

## CONTENTS

<b>Földváry Lóránt</b> .....	7
GRACE hónapos nehézségi erőter változások elemzése és előrejelzése ARIMA modellezéssel <i>Analysis and forecasting of GRACE monthly gravity field solutions using ARIMA modelling</i>	
<b>Juni Ildikó, Rózsa Szabolcs</b> .....	27
A nedves troposzferikus késleltetés és az integrált vízgőztartalom közötti kapcsolat globális vizsgálata <i>Analysis of the relationship between the wet tropospheric delay and the integrated water vapour on a global scale</i>	
<b>Csala Bettina, Tóth Gyula</b> .....	43
Geoid helyi felületdarabjának meghatározása a QDaedalus-rendszerrel végzett függővonal-elhajlás mérésekkel <i>Local geoid determination based on measuring the deflection of the vertical by QDaedalus system</i>	
<b>Molnár Tamás, Birinyi Mátyás, Király Géza, Móricz Norbert, Koltay András, Hirka Anikó, Csóka György, Somogyi Zoltán</b> .....	53
Egy bükki hótörés távérzékelési elemzése Modis és Sentinel-2 űrfelvételek alapján <i>Snow-damage analysis in the Bükk Mountains based on MODIS and Sentinel-2 satellite images</i>	
<b>Barton Iván, Czimmer Kornél, Király Géza, Moskal L Monika</b> .....	65
Konzisztens Sentinel-2 űrfelvétel-idősor készítése erdőterületek kiértékeléséhez <i>Consistent Sentinel-2 time series construction for evaluating forested areas</i>	
<b>Kalmár János</b> .....	77
A modern navigáció alapjai: műholdak, gráfok, mesterséges intelligencia <i>The basics of the modern navigation: satellites, graphs, AI</i>	
<b>Busics György, Tóth Sándor</b> .....	93
A középkori magyar hossz mértékegység rekonstrukciója <i>The reconstruction of the medieval Hungarian length unit</i>	

# GRACE HÓNAPOS NEHÉZSÉGI ERŐTÉR VÁLTOZÁSOK ELEMZÉSE ÉS ELŐREJELZÉSE ARIMA MODELLEZÉSEL

Földváry Lóránt\* \*\*



**Analysis and forecasting of GRACE monthly gravity field solutions using ARIMA modelling** – *This paper delivers the analysis and forecasting of GRACE mission derived monthly gravity field solutions estimating by ARIMA model. The ARIMA model enables the extrapolation of the gravity variations for the approximately 1-year period between the GRACE and GRACE-FO.*

**Keywords:** ARIMA, Box-Jenkins Method, GRACE, GRACE-FO

*A tanulmányban a GRACE műholdpár által szolgáltatott hónapos nehézségi erőter modellek idősorának elemzését és előrejelzését végezzük ARIMA modellezéssel. Az ARIMA modellezés módszerével lehetőségünk van a GRACE és a GRACE-FO mérések közötti mintegy éves időszak hiányzó adatainak becslésére, előrejelzésére.*

**Kulcsszavak:** ARIMA, Box-Jenkins módszer, GRACE, GRACE-FO

## 1 Bevezetés

A GRACE műholdak 2017 novemberében befejezték működésüket, az utolsó méréseik alapján levezetett hónapos nehézségi erőter modell 2017 júniusára esik, ezzel összesen 163 hónapos modellt szolgáltatva 2002 áprilisától számított bő 15 évre. A GRACE műholdak által elérhetővé vált hónapos modellek a nehézségi erőter (így a tömegeloszlás) időbeli változásait, annak lineáris, valamint évszakos periódusú (éves, féléves) változásainak monitoringozását teszik lehetővé (Földváry 2004).

A GRACE műholdpár által szolgáltatott idősor jelentőségét bizonyítja, hogy a NASA 2018 május 22-én pályára állította a GRACE utódját, a GRACE-FO műholdpárt, melyet a GRACE-szel teljesen megegyező elrendezésben és technikai megoldásokkal alakítottak ki, csupán a műholdak közötti távolságmérés pontosságán javítottak egy nagyságrendet (Flechtner et al. 2016).

A GRACE-FO pályamenti tesztelése, kalibrációja folyamatban van. A fedélzeti mérések legfontosabbját, a műholdak közötti távolságmérés lézereit 2018 júniusában sikerrel beüzemelték – minden adott egy újabb sikeres küldetéshez (Mission status available at GRACE FO online: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/g/grace-fo>, 2018-08-22). Az első GRACE-FO hónapos modell a jelen helyzet alapján 2018 júniusára vonatkozik, amely modelleket publikussá 2019 júniusában tesznek (Flechtner F személyes közlése).

A GRACE és a GRACE-FO között így mintegy éves hiány lesz a tömegváltozások idősorában. Ennek pótlását egyéb műholdas információk alapján tervezik részlegesen kipótolni, de ez kellő pontossággal nem megoldható. Jelen tanulmányban az idősor-analízis módszereivel próbálom meg elemezni a GRACE által szolgáltatott modelleket, egyben ezek alapján becslést adni a következő időszakokra. Mint minden extrapolációnak, ennek eredményei is fenntartásokkal kezelendők, azonban arra mindenképpen alkalmas, hogy az első GRACE-FO modellek megjelenésével számot adjanak a kieső év során fellépő esetleges drasztikus változásokról.

A GRACE és a GRACE-FO közötti időszak tömegváltozásainak előrejelzéséhez a közgazdaságtanban elterjedt idősor elemző és előrejelző módszereket használunk. Tekintettel arra, hogy a hazai geodéziai gyakorlatban ezen módszerek nem használatosak, a következő részben a megszokottnál részletesebben ismertetjük a módszertant azzal a nem titkolt céllal, hogy egyéb geodéziai alkalmazásokhoz elméleti háttérrel biztosítsunk. Hiszen a geodéziai mérések értelmezésekor is számos alkalommal felmerül az idősor-elemzés igénye: szükséges lehet mozgásvizsgálati célú mérések (Bányai et al. 2013, Bányai et al. 2014, Szűcs et al. 2017), földrengés-előrejelzések (Varga 2013), árapály monitor-



ing (Papp et al. 2018) esetén, de az igény ugyancsak felmerülhet speciális szakterületek vonatkozásában is, így bányamérési (Tóth és Tóth 2005), erdészeti (Barton et al. 2017), hidrológiai (Kontur et al. 2003) vagy régészeti (Balázsik és Tóth 2016, Pokrovenszki et al. 2016, Szöllősy et al. 2013) alkalmazások esetén is.

Az időszorelemzés átfogó ismertetését Box et al. (2016), Brockwell-Davis (2002) és Hamilton (1994) tankönyvei adják, de felhívnom a figyelmet egyéb, interneten könnyen elérhető és/vagy olvasmányos szakirodalmakra is, amelyek jelen cikk készítése során hasznosnak bizonyultak ([https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0029\\_de\\_okonometria\\_elmelet/index.html](https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop412A/2011-0029_de_okonometria_elmelet/index.html), 2019-12-03, <https://users.itk.ppke.hu/~vago/IDOSOR2.pdf>, 2019-12-03, [https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027\\_MSTE7/ch01.html](https://www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/0027_MSTE7/ch01.html), 2019-12-03). A következő fejezetben az idősor alapjainak áttekintését ezen tankönyvek alapján adjuk.

A cikkben a számításokat a MATLAB R2018b programmal végeztük (MATLAB Documentation. <https://uk.mathworks.com/help/>, 2019-08-19). A gyakorlati alkalmazásokat támogatandó, a cikkben megadjuk a MATLAB programnyelvben az egyes számítási lépésekhez használt program elnevezését, használatának esetleges buktatóit, nehézségeit.

## 2 Időszorelemzés

Bármely idősor általánosságban leírható négy fő, egymástól független komponens eredőjeként. A *trend* kifejezi az idősor hosszabb időszakon tartósan érvényesülő tendenciáját, *ciklusnak* a trend feletti vagy alatti tartósabb, szabálytalan ingadozását, hullámzását nevezik, a *szezonális ingadozás* az idősor szabályos, többnyire rövid távú ingadozásait írja le, végezetül az idősorok legváltozatosabb, szabálytalan változásait *véletlen ingadozással* jellemzik. Ezen összetevők alapján az idősor leírható a komponensek alapján összezszerű (additív), illetve szorzatszerű (multiplikatív) modellekkel. Az additív modell matematikailag az

$$X(t) = \text{trend} + \text{ciklus} + \text{szezonális} + \text{véletlen} \quad (1)$$

formában áll elő. Az összetevők közül a trend analitikusan modellezhető, a görbe lefutását legjobban leíró függvény (polinom, exponenciális, logaritmus, stb.) megkeresésével. A szezonális komponens ugyancsak meghatározható a megfelelő hullámhosszra illesztett periodikus függvények segítségével. A másik két összetevő, a ciklus és a véletlen ingadozás azonban inkább tűnik egy véletlen által generált folyamatnak, sem mint determinisztikusan előállíthatóknak. A kettő között eltérést jelent, hogy míg a véletlen ingadozás sztochasztikusan változik, addig a ciklus a numerikus integrálási műveletek során tapasztalható véletlen bolyongás (random walk) tulajdonságait mutatja.

A geodéziai gyakorlat időszorelemzés során leginkább a trend és a szezonális komponens meghatározására törekszik a javítások négyzetének minimalizálása mellett. Ez egyfajta *determinisztikus megközelítés*, amely során feltételezzük, hogy a javítások zajjal azonosíthatók és  $N(0,1)$  normális eloszlást követnek. Önmagában javítások normális eloszlása alapján nem mondható ki, hogy azok zajt reprezentálnak. A zaj viselkedését tekintve stacionárius változó, azonban a trendtől és szezonális komponensektől mentesített idősor javításai időbeni szabálytalanságokat mutathatnak, pl. középértékük és/vagy varianciájuk időben változhat. Matematikailag a sztochasztikus komponensnek külön kell kezelni a stacionárius (véletlen ingadozás) és az egységgyök (ciklus, véletlen bolyongás) folyamatokat.

A közgazdaságtanban a determinisztikus megközelítés helyett előszeretettel használják a *sztochasztikus megközelítést*. Ilyenkor a modellre alapvetően a véletlen hat, amelynek az így kialakuló értékeire a véletlennek a későbbiekben is hatása van, így az idősor időbeni alakulását is befolyásolja. Ennek megfelelően az idősor időbeni alakulásában „öngeneráló” folyamatok is érvényesülnek, tehát az adott időpontbeli véletlen befolyással bír a későbbi értékekre is, így a véletlen komponensnek folyamatalakító hatása van. A sztochasztikus megközelítés során annak meghatározása a feladat, hogy a korábbi érték(ek)nek valamint a véletlennek mekkora befolyása van az aktuális értékre. Az idősorokat ebben a megközelítésben egy autoregresszív és mozgóátlag (ARIMA) folyamatokként lehet leírni. Az ARIMA modellek az 1970-es évektől nagy jelentőséget kaptak, mivel az ARIMA folyamatok matematikailag jól kezelhetőek, és a gyakorlatban előforduló stacionárius folyamatok nagy része

jól közelíthető velük. ARIMA modellek az autóregrszív (AR) és a mozgó átlag (MA) folyamatok együttes figyelembevételével állnak elő.

Megjegyzendő, hogy az ARIMA modell csak azonos időlépéssel mintavételezett, stacionárius adatsorokra állítható fel (3. fejezet). Ez azt is jelenti, hogy egy idősor nem stacionárius részét el kell a modellállítás előtt távolítani. Geodéziai idősorok esetén ez azt jelenti, hogy elengedhetetlen az ismert determinisztikus rész megfelelő modellezése, majd levonása ahhoz, hogy a véletlenszerű részét az idősorok ARIMA modellezéssel elemezhesük.

Egy  $p$ -ed rendű autóregrszív folyamat,  $AR(p)$  az alábbi alakban írható le:

$$X(t) = \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \dots + \alpha_p X(t-p) + \sigma_\varepsilon \varepsilon(t). \quad (2)$$

Az egyenletben  $X(1), X(2), \dots, X(n)$  változók egy idősor egymást követő elemei. A (2) egyenlet mutatja, hogy a folyamat (részben) a saját múltjától függ, és valamely  $t$  időpont értéke megadható az azt megelőző  $p$  db. elem lineáris regressziójaként (a lineáris regresszió  $\alpha_i$  együtthatói 0 és 1 közötti számok). A  $t$ -edik időpont értékében ezen kívül szerepe van a véletlennek, melyet az  $\varepsilon(t)$  független értékű zaj (pl. fehérzaj) ír le. Az egyenletben még szerepel ennek szórása,  $\sigma_\varepsilon$ , ami standard normál eloszlású zaj esetén  $\sigma_\varepsilon = 1$ .

A mozgó átlag folyamatok (MA) a lineáris regresszió hibatagjának,  $\varepsilon(t)$  mozgó átlagaként, vagyis a jelen és a múlt lineáris kombinációjaként állnak elő. Egy  $q$ -ad rendű mozgó átlag folyamat,  $MA(q)$  definíciója:

$$X(t) = \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \varepsilon(t-1) + \dots + \beta_q \varepsilon(t-q), \quad (3)$$

ahol  $\varepsilon(t)$  a fehérzajt jelöli.

Egy ARIMA  $(p, q)$  folyamat egy  $p$ -ed rendű autoregressziós és  $q$ -ad rendű mozgó átlag folyamat összességéeként az alábbi:

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha_1 X(t-1) + \alpha_2 X(t-2) + \dots + \alpha_p X(t-p) \\ &\quad + \beta_0 \varepsilon(t) + \beta_1 \varepsilon(t-1) + \dots + \beta_q \varepsilon(t-q) \\ &= \sum_{i=1}^p \alpha_i X(t-i) + \sum_{i=0}^q \beta_i \varepsilon(t-i). \end{aligned} \quad (4)$$

Az ARIMA modellt gyakran az  $L$  késleltetés, időeltolás operátorral kifejezve írják le. Fejezze ki  $L^i X(t)$  jelölés az  $X$  változó  $t$  időponthoz képesti  $i$  mértékű késleltetést, tehát  $L^i X(t) = X(t-i)$ . Ekkor (4) az alábbi frappáns alakban adható meg:

$$(1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i) X(t) = (1 + \sum_{i=1}^q \beta_i L^i) \varepsilon(t). \quad (5)$$

Bizonyítható, hogy stacionárius folyamatok a megfelelő  $p$  és  $q$  paraméterek megválasztása esetén az ARIMA modellel kiválóan leírhatók. A következőkben áttekintjük, mi a teendő nem stacionárius folyamatok esetén, illetve hogy miként történik az adott idősorra legjobban illeszkedő  $p$  és  $q$  paraméter becslése.

#### 4 A Box-Jenkins módszer

A sztochasztikus idősorok vizsgálatára bevált és elterjedt módszert Box-Jenkins (1970) dolgozta ki, amelynek itt csak a gyakorlati menetét tekintjük át. A módszer szerint az ARIMA  $(p, q)$  modell megadásának feltétele, hogy a vizsgált idősor stacionárius legyen, azonban, ha ez nem teljesül, akkor azt a modellezéshez stacionáriussá alakítjuk. A stacionaritás hiányát jelzik a fent áttekintett egységgyök-próbák: amennyiben az egységgyök-próbák eredményei egységgyök jelenlétét mutatták, az idősort a további modellezés során integrált idősoroként kezelhetjük. Közismerten a numerikus integrálás (kumulatív szummázás) véletlen bolyongást (ciklust) generál. Ennek „eltüntetése” értelemszerűen az egységgyök-folyamatok numerikus differenciálása alkalmazhatók:

$$Y(t) = X(t) - X(t-1) = X(t) - LX(t) = (1 - L)X(t). \quad (6)$$

A (6) egyenlet akkor tekinthető numerikus differenciálásnak, amennyiben a  $t$  időskálának  $\Delta t$  lépésköze egységnyi. Jó eséllyel a (6) szerinti idősor már az egységgyöktől (tehát a sztochasztikus változók közül a ciklustól) mentes, így stacionárius. Amennyiben az egyszerű differenciálás nem eredményez stacionárius folyamatot, akkor egy második differenciálással mindig eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} Z(t) &= Y(t) - Y(t-1) = (X(t) - LX(t)) - (LX(t) - L^2X(t)) = \\ &= (1 - 2L + L^2)X(t) = (1 - L)^2X(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Az ARIMA( $p, q$ ) modell (4) egyenletébe helyettesítsük be a derivált fokának megfelelő (6) vagy (7) egyenletet. Ezzel az

$$X(t) = \sum_{i=1}^p \alpha_i (1-L)^d X(t-i) + \sum_{i=0}^q \beta_i \varepsilon(t-i) \quad (8)$$

ARIMA( $p, d, q$ ) alakú modelleket kapjuk, ahol  $d$  a derivált rendje. Az ARIMA( $p, d, q$ ) modelleket integrált autoregresszív mozgóátlag modellnek nevezzük, (ahol a gyakorlatban  $d = 1$  vagy  $d = 2$ ), illetve frakcionálisan integrált autoregresszív mozgóátlag modellnek, FARIMA( $p, d, q$ ), amely esetben  $d$  értéke nem egész szám (Budai 2013). A Box-Jenkins módszer az ARIMA( $p, d, q$ ) modell előállításával foglalkozik. Szezonális komponenstől mentes folyamat esetén a Box-Jenkins módszer fontosabb lépései: 1. a  $p$ ,  $d$  és  $q$  paraméterek meghatározása, 2. az ARIMA modell előállítása, 3. a modelltől való eltérések (reziduálok) normalitásának és függetlenségének vizsgálat, 4. előrejelzés.

#### 4.1 Az ARIMA modell paramétereinek meghatározása

A  $p$ ,  $d$  és  $q$  paraméterek meghatározásához mindenképpen érdemes megjeleníteni és vizuálisan kiértékelni az autokorreláció függvényt (*ACF*)

$$ACF(s) = Corr(X(t), X(t-s)) = \frac{cov(X(t), X(t-s))}{\sigma(X(t))\sigma(X(t-s))} \quad (9)$$

és a parciális autokorreláció függvényt (*PCF*)

$$PCF(s) = Corr(X(t) - P_{t,s}(X(t)), X(t-s) - P_{t-s,s}(X(t-s))), \quad (10)$$

ahol *Corr* a korreláció függvény, *cov* a kovariancia függvény, a szórás,  $P_{t,s}(X(t))$  pedig az  $X(t+1), X(t+2), \dots, X(t+s-1)$  idősor lineáris trendje, ennek megfelelően a  $X(t) - P_{t,s}(X(t))$  tag az  $[X(t+2), X(t+s-1)]$  intervallumra levetített részfolyamat (részletes leírást, pontos definíciókat lásd kapcsolódó tankönyvekben).

Box-Jenkins (1970) módszere szerint, ha az *ACF* egy  $s$  késleltetésnél határozottan levág (tehát amely érték alatt az *ACF* a szignifikáns értéket nem éri el), miközben a *PCF* lecseng, akkor az egy MA( $s$ ) mozgóátlag folyamatnak felel meg, míg ha a *PCF* vág le  $s$ -nél, miközben az *ACF* lecseng, az egy AR( $s$ ) autoregresszív folyamatként írható le. Ha pedig mind *ACF* és *PCF* lecseng, és a lecsengés egy szignifikáns érték alá  $S_A$  illetve  $S_P$  értéknél történik, akkor azt egy ARIMA ( $S_A, S_P$ ) modellel közelíthetjük. Ha azonban a folyamat nem stacionárius (tehát a fenti jelenségeket nem produkálja, pl. hosszan cseng csak le, vagy periodikusan ingadozik), akkor addig kell deriválni ((6), (7) egyenlet), amíg az *ACF* és a *PCF* stacionáriusnak nem tűnik. Ezzel a  $d$  deriváltság rendjét is meghatároztuk.

A  $p$ ,  $d$  és  $q$  paraméterek *ACF* és *PCF* alapján történő meghatározása általában nem egyértelmű, és nem is igazán automatizálható. A reális paraméterezések közül az optimális megkeresése történhet az Akaike-féle Információs Kritérium (*AIC*) vagy a Bayes-féle Információs Kritérium (*BIC*) értékeinek segítségével. Az *AIC* értékét az

$$AIC = -2\hat{L} + 2N \quad (11)$$

összefüggés alapján (Akaike 1974), míg a *BIC* értékét

$$BIC = -2\hat{L} + N \log M \quad (12)$$

képlettel határozhatjuk meg (Schwartz 1978). A (11) és (12) összefüggésben  $\hat{L}$  értéke a tesztelendő ARIMA modell loglikelihood függvényének maximuma,  $N$  a modell definiálásához szükséges paraméterek száma,  $M$  pedig a modell alkotásához rendelkezésre álló mérések száma. Az  $AIC$  és a  $BIC$  tesztek nem adnak abszolút értelemben választ egy modell alkalmasságáról, viszont segítségükkel két (vagy több) modell közül kiválasztható, hogy melyik írja le realisabban a vizsgált folyamatot: az, amelyiknek az  $AIC$  vagy a  $BIC$  értéke a legkisebb.

#### 4.2 Az ARIMA modell alkotása

Az  $ACF$ ,  $PCF$ ,  $AIC$  és/vagy  $BIC$  vizsgálata alapján kiválasztott  $p$ ,  $d$  és  $q$  paraméterekkel felállítjuk az ARIMA modellt. A modell felépítése a mérésekre felírt (8) egyenletből a  $p$  db. regressziós együttható,  $\alpha_i$ , valamint a  $q$  db. mozgó átlag együttható,  $\beta_i$  meghatározását jelenti. A nem lineáris egyenletrendszer megoldását általában maximum likelihood becsléssel (esetenként nem lineáris legkisebb négyzetek módszerével) végzik; a megoldás menetét lásd pl. Brockwell-Davis (1991) könyvében. A modell alkotása során meghatározható a paraméterek kovariancia mátrixa,  $C_{XX}$  és a loglikelihood függvény szélsőértéke,  $\hat{L}$  is.

Az  $\alpha_i$  és  $\beta_i$  együtthatókkal a folyamat ARIMA modelljéből a folyamat egy-egy megvalósulása  $N(0,1)$  eloszlású  $\varepsilon(t)$  fehérzajt generálva Monte-Carlo szimulációval állítható elő. A konkrét szimulációnál jóval hasznosabb információt jelent a modelltől való eltérések (reziduálok) és a feltételes variancia mátrix becslése, melyek alapján a modellhez tartozó valószínűségi tartományok nagy megbízhatósággal becsülhetők, illetve a modell pontossági vizsgálata elvégezhető.

#### 4.3. A reziduálok normalitásának és függetlenségének vizsgálata

Az ARIMA modell akkor megfelelően kiválasztott, ha a reziduálok (tehát a modelltől számolt értékek eltérése a valódi értékektől) normális eloszlásúak és függetlenek egymástól. A normalitás vizsgálata történhet a Kolmogorov–Szmirnov próbával (Kolmogorov 1933) vagy a Lilliefors-próbával (Lilliefors 1967), a függetlenség vizsgálatára pedig a Ljung-Box Q-próbát fejlesztették ki (Ljung-Box 1978), mellyel a reziduálok idősorában az autokorreláció mértéke vizsgálható.

A teljesség kedvéért a kétféle Kolmogorov–Szmirnov próba lényege, hogy valamilyen szignifikancia szint mellett az  $X(t)$  megfigyelésekre felírt érték a normáloszlásból számolható elméleti értéknél kisebb-e. A Kolmogorov–Szmirnov próba célfüggvénye:

$$\max ( |S(X(t)) - F_0(X(t)), S(X(t-1)) - F_0(X(t))| ), \quad (13)$$

ahol  $S(X(t))$  az egyes elemekhez tartozó relatív gyakoriságokat jelöli,  $F_0(X(t))$  a megfigyelések feltételezett eloszlása. A célfüggvénynek (5% szignifikancia szint esetén) az  $1,3581/\sqrt{M}$  értéknél kell kisebbnek lennie, ahol  $M$  a megfigyelések száma. Ha az egyenlőtlenség fennáll, akkor a nullhipotézist elfogadjuk, tehát a megfigyelések a feltételezett (jelen esetben normál) eloszlást követik.

A Kolmogorov-Szmirnov próbát módosította Lilliefors (1967) úgy, hogy ismeretlen várható értékű és eloszlású adatok normalitásvizsgálatára is alkalmas legyen. A Lilliefors-próba célfüggvénye megegyezik a Kolmogorov-Szmirnov próbáéval (13) csak a próba első lépéseként a mintából a várható értéket és a szórást megbecsüljük, majd a (13) egyenletből kapott értéket a Lilliefors-eloszlásnak megfelelő érték alapján minősítjük.

A Ljung-Box Q-próba azt vizsgálja, hogy az alábbi kifejezés

$$Q = M(M+2) \sum_{s=1}^h \frac{ACF(s)^2}{M-s} \quad (14)$$

$\chi^2_{1-\alpha, h}$  eloszlást követ-e. Az egyenletben  $s$  a késleltetés,  $h$  a vizsgált maximális késleltetést jelenti, az  $ACF(s)$  pedig a  $s$  késleltetéshez tartozó autokorreláció értékét.

A számszerű vizsgálatok mellett érdemes a reziduálok idősorára vizuálisan is ránézni, illetve megnézni az  $ACF$  és  $PCF$  ábrájukat: ha függetlenek a reziduálok elemei egymástól, akkor mind az  $ACF$ , mind a  $PCF$  az  $s = 0$  késleltetésen kívül nem mutat szignifikáns értéket.

#### 4.4 Előrejelzés

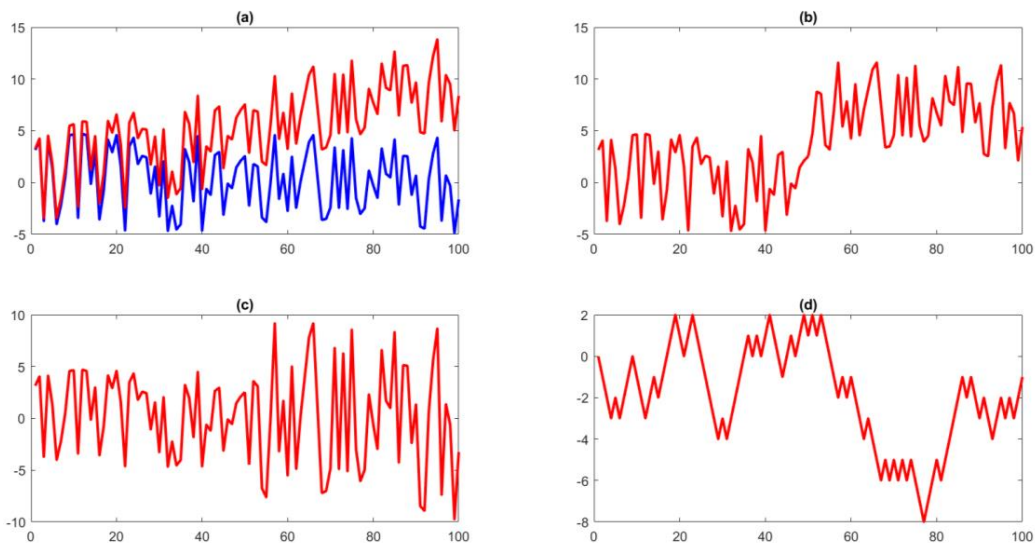
Egy fontos alkalmazása az ARIMA modelleknek a jövőbeni események előrejelzése, a folyamat extrapolációja. Ha az ARIMA modell jól megválasztott, továbbá ha a folyamat periodicitásának és rendelkezésre álló adatok hosszának megfelelő a kívánt extrapoláció időtartama, akkor ezt (a zaj kivételével) lehetőségünk van elvégezni. Az extrapoláció során kapott függvényértékek (feltételes várható értékek) pontossági mérőszámai (mint pl. a variancia) a zaj hatását is leírják, így az ezek alapján becsült hibahatárok realisztikusak.

### 5 GRACE hónapos tömegváltozások idősorelemzése

#### 3 A stacionaritás vizsgálata

A sztochasztikus megközelítés módszerei számára fontos, hogy az idősor stacionárius legyen. Egy idősor akkor *stacionárius*, ha az idősor maradék tagjának várható értéke, varianciája és az autókovariancia függvénye,  $C_{XX}(t, t-s) = cov(X(t), X(t-s))$  is független a  $t$  időtől; ez utóbbi csak az  $s$  fázistól függ. (Valójában a stacionaritás jóval összetettebb definícióval bír, megkülönböztetünk gyengén és erősen stacionárius folyamatokat is, de ezekre jelen tanulmány összefoglaló jellege miatt nem térünk ki). A gyakorlatban a stacionaritás számos esetben nem határozható meg egyértelműen; vizsgálatára különböző módszerek dolgoztak ki, illetve terjedtek el. A stacionaritás ellenőrzésére gyakran *egységgyök-próbákat* végeznek. Valamely folyamat vizsgálata során a stacionaritás hiányát több jelenség (együttes vagy külön-külön jelentkező hatása) is okozhatja: az idősor tartalmazhat determinisztikus komponenseket (1a. ábra), de lehetnek az idősorban strukturális törések is: okozhatja egy időpont után a várható érték (1b. ábra) vagy a szórás (1c. ábra) hirtelen megváltozása, illetve lehet a folyamat egységgyök-folyamat is (1d. ábra).

*Egységgyök-folyamatnak* az olyan folyamatot nevezzük, amelynek a (2) szerinti autoregresszív egyenletében az  $\alpha_i$  egységnyi ( $\alpha_i = 1$ ). Az egységgyök folyamat tipikusan a véletlen bolyongás, tehát a korábban ismertetett dekompozíciós felbontásban a ciklus által dominált folyamat. Bár az egységgyök folyamat is véletlen jellegű folyamat, azért nem tekinthető stacionáriusnak, mert ennek értékei nem követnek normális eloszlást (2. ábra lásd <https://pdfs.semanticscholar.org/2d0e/62db75bdeaf2277fab1039f4866aef642b7.pdf>, 2019-12-03). De ez belátható az 1d. ábra példáján is: mintegy 20 elemből álló részeit vizsgálva a folyamatnak láthatóan sem a várható érték, sem a szórás nem állandó.



**1. ábra.** Szimulált példák nem stacionárius idősorokra. a) a jel determinisztikus komponenst (a példában lineáris trendet) tartalmaz. b) A várható érték megváltozik  $x=50$  időpontban. c) A szórás megváltozik az  $x=50$  időpontban. d) Egységgyök-folyamat

Alapvető különbség a stacionárius folyamat és az egységgyök-folyamat viselkedésében, hogy ha a folyamatot időközben sokkhatás éri (egy erős impulzus, egy outlier) akkor az stacionárius folyamat esetén idővel elhal (tehát nincs tartósan hatással az idősor szintjére, így a teljes idősort vizsgálva fennáll az állandó várható érték tulajdonsága), míg egységgyök idősorok esetén a folyamatot időközben ért sokkhatás nem múlik el, hanem a sokkhatás mértékének megfelelően eltolódik a várható érték, és a kvázi véletlen folyamat az annak megfelelő szinten folytatódik tovább, időben növekvő varianciával. Az eltérő statisztikai viselkedés miatt fontos felismerni egy folyamat esetén az egységgyököt; vagy a determinisztikus megközelítés megfogalmazásában: elkülöníteni a ciklust a zajtól.

A legelterjedtebb módszer a stacionaritás vizsgálatára a kiterjesztett Dickey–Fuller próba (Augmented Dickey-Fuller test; *ADF* test) (Fuller 1995). Az *ADF* próba egy egységgyök-teszt: sikeressége (tehát a nullhipotézis teljesülése esetén) azt mutatja, hogy egységgyök van jelen az idősorban. Az *ADF* próba nullhipotézis elutasítása esetén elmondható, hogy nincs egységgyöke a folyamatnak, tehát a folyamat stacionárius (1. táblázat). Ez az egységgyök-próba azonban esetenként tévesen a szakaszonkénti stacionaritást (ekkor: a strukturális törések közötti szakaszok stacionárius folyamatok) és a trend-stacionaritást (ekkor: egy determinisztikus trend levonása után stacionárius folyamat) is egységgyök folyamatnak észleli. Ezért amennyiben az *ADF*-próba eredménye elfogadja a nullhipotézist, meg kell vizsgálni, hogy strukturális törések találhatóak-e a folyamatban, és a továbbiakban az idősort a törések mentén részekre bontva vizsgálni. Ha strukturális törés nincs (vagy részekre bontással kezeltük a problémát), akkor a folyamat még mindig lehet trend-stacionárius folyamat (1a. ábra) is (1. táblázat).

1. táblázat. Az *ADF* és a *KPSS* próbák kimenete

	$H_0$ :nullhipotézis	$H_1$ :ellenhipotézis
<i>ADF</i>	egységgyök v. trend-stacionárius	stacionárius
<i>KPSS</i>	stacionárius v. trend-stacionárius	egységgyök

Miután ismertté vált az *ADF*-próba hiányossága a trend-stacionárius folyamatok felismerése terén (Nelson és Plosser 1982), az *ADF*-próba alternatívjaként kidolgozták a Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (*KPSS*) próbát (Kwiatkowski et al. 1992). A *KPSS*-próba segítségével a trend-stacionaritást lehet vizsgálni, tehát hogy a determinisztikus trend levonása után maradó jel stacionárius folyamatként viselkedik-e. A *KPSS*-próba elutasítása esetén a folyamat egységgyök folyamat. Így az *ADF*-próba eredményének függvényében érdemes megvizsgálnunk a stacionaritást a *KPSS*-próbával, amellyel lehetőségünk van az *ADF*-próba által egységgyök-folyamatként észlelt folyamatról kimutatni, hogy az valójában egységgyök vagy trend-stacionárius folyamat-e.

Az egységgyök-próbák eredményét az 1. ábrán bemutatott szimulációkra a 2. táblázatban mutatjuk. A nullhipotézis elfogadásának jelölése a 2. táblázatban 1, elutasítása pedig 0. (Megjegyzés: a MATLAB programrendszerben használatos *ADF*test.m és *KPSS*test.m programok, de valamennyi hipotézisvizsgálati esetén is ezzel ellentétesen a nullhipotézis elfogadását a 0, míg elvetését az 1 jelöli). A 2. táblázat (b) és (c) esetei mutatják, hogy strukturális törések esetén a próba eredménye esetleges, egyébként az eredmények az 1. táblázatban felvázolt kimeneteknek megfelelően alakulnak.

2. táblázat. Az *ADF* és a *KPSS* próbák kimenete a szimulált példák (1. ábra)

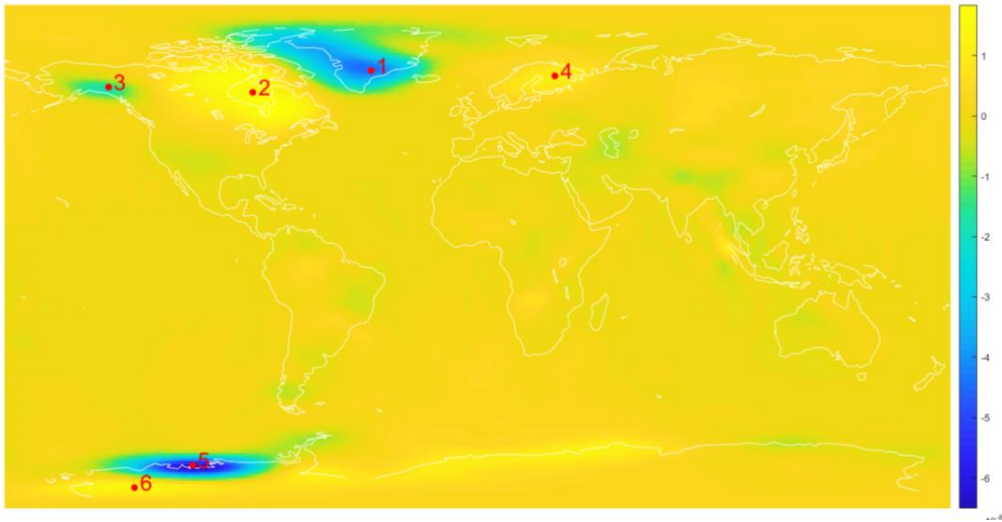
	$N(0,1)$ zaj	(a)	(b)	(c)	(d)
<i>ADF</i>	0	1	1	0	1
<i>KPSS</i>	1	1	0	1	0

## 5.1 Vizsgálati idősorok generálása

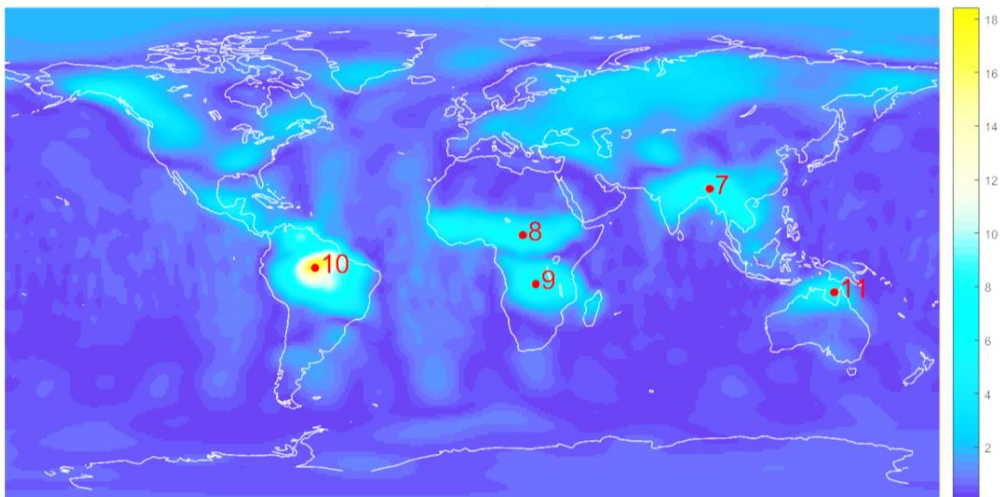
A GRACE műholdpár adatai alapján a hivatalos feldolgozó központok (CSR: University Texas, Center for Space Research, GFZ: Deutsches GeoForschungsZentrum, JPL: NASA Jet Propulsion Laboratory) modelljei közül a CSR RL05 modelleket (Bettadpur 2018) használtuk  $l_{max} = 60$  fokig és ren-

dig. A feldolgozás során a GRACE modellek ismert szabályos hibáit egy standardnak mondható eljárással korrigáltuk: egy  $r = 300$  km-es Gauss-simítás alkalmazása mellett a Sweson és Wahr (2006) módszerével csökkentettük a meridián-irányú sávosságot. A modellek alapján nehézségi anomália idősorokat határoztunk meg (részletesebben Kiss és Földvály 2015) a teljes Földre  $1^\circ \times 1^\circ$  felbontásban.

Az ARIMA modellel tervezett vizsgálatok céljára a tömegváltozások szempontjából érdekes idősorokat keresünk. Érdekesnek minősítettünk olyan területeket, ahol a tömegváltozás idősora vagy erős lineáris trendet, vagy erős szezonalitást mutat. Az idősorokra lineáris trendet, valamint éves periódusú szinuszgömbét illesztettünk. Az eredményül kapott lineáris trendek a 2. ábrán, az éves változások amplitúdója pedig a 3. ábrán látható, egyben mindkét ábrán bejelöltük az érdekes területek egy-egy jellegzetes pontját. Az érdekesnek talált pontokat a 3. táblázat összegzi.



2. ábra. Lineáris trend nagysága a CSR modellek alapján [ $mm^2/év$ ], és az ezek alapján kiválasztott vizsgálati helyek



3. ábra. Az éves periódusú változás amplitúdója a CSR modellek alapján [ $m/s^2$ ], és az ezek alapján kiválasztott vizsgálati helyek

3. táblázat. Az ADF és a KPSS próbák kimenete szimulált példák

Pontszám	Földrajzi név	$\phi$ [°]	$\lambda$ [°]	Domináns jelenség
1	Grönland	68	-40	Csökkenő trend
2	Hudson-öböl	60	-85	Növekvő trend
3	Alaszkai-hegység	62	-140	Csökkenő trend
4	Skandinávia	66	30	Növekvő trend
5	Amundsen-tenger (Antarktisz)	-74	-108	Csökkenő trend
6	Marie Byrd Föld (Antarktisz)	-82	-130	Növekvő trend
7	Bengália	25	92	Éves periódusú változás
8	Afrikai szavanna	8	20	Éves periódusú változás
9	Kongó-medence	-10	25	Éves periódusú változás
10	Amazonas-medence	-4	-60	Éves periódusú változás
11	Észak-Ausztrália	-13	140	Éves periódusú változás

## 5.2 Előfeldolgozás

A GRACE Science Data System Newsletter ([ftp://podaac-ftp.jpl.nasa.gov/all-Data/grace/docs/newsletters/GRACE\\_SDS\\_NL\\_1611.pdf](ftp://podaac-ftp.jpl.nasa.gov/all-Data/grace/docs/newsletters/GRACE_SDS_NL_1611.pdf)) közlése alapján ismeretes, hogy a GRACE-2 műhold fedélzeti gyorsulásmérőjét 2016 októberében le kellett állítani. Ezt követően a GRACE-2 gyorsulásmérés adatokat a GRACE-1 mért adataival pótolták. Ez természetesen az időbeni eltolás miatt (az atmoszférikus folyamatok dinamikája függvényében) nem adja meg pontosan a GRACE-2 áthaladásának a felületi fêkezôdés pillanatnyi nagyságát, aminek következtében a 2016 novemberétôl készült hónapos nehézségi erôter modellek (tehát a 2016 novemberi (318-345), 2016 decemberi (346-006), 2017 januári (007-034), 2017 márciusi-áprilisi (076-104), 2017 áprilisi (100-128), 2017 májusi (122-142) és 2017 júniusi (143-179) modellek) pontossága visszaesett.

Az említett modellek pontossági mérôszámai mellett megnéztük, hogy a vizsgálati helyeken mennyire okozott változást az egyes idôsorok lefutásában. A tapasztalat szerint a vizsgálati pontok mintegy felénél az utolsó két (2017 májusi és 2017 júniusi) modell láthatóan eltérô értéket mutat az addigi folyamathoz képest. Lehet ez valódi megváltozása az idôsornak, de valószínűsíthetôen a modell pontosságáé visszaesése áll a jelenség hátterében. Ezek alapján a feldolgozásokból az utolsó két modell elhagyása mellett döntöttünk, így célunk a rendelkezésre álló 161 modell alapján ARIMA modellt alkotni, és azzal extrapolálni a 2017 májusa és 2018 júniusa által megadott 14 hónapos idôszakra.

Az előfeldolgozás további lépése az idôsorok állandó lépésközûre alakítása volt. Az ARIMA típusú modellek ugyanis feltételezik az idôsor egyenletes (vagy kvázi-egyenletes) mintavételezését, módszertanilag nincs is lehetôségünk a független változó (idô) figyelembevételére a modellezés során. Mivel a GRACE közel hónapos nehézségi erôter modelljei nem pontosan 1/12 évente mintavételezettek, ráadásul az idôsor nem is folytonos, az idôsor egyenletes mintavételezésére interpolálása mellett döntöttünk.

A nehézségi erôter változásainak éves periódusa kiemelten jelentkezik, ezért az egyenletes mintavételezést 1/12 évre (mintegy 30.42 napra) vettük fel, és ennek megfelelôen újramintavételeztük az idôsorokat. Ez viszont számos nehézséget vet fel: egyrészt már a GRACE modellek egy idôponthoz rendelése sem egyértelmű (a modellhez felhasznált mérések elsô és utolsó napja által megadott intervallum felébe vettük fel), másrészt minimalizálni szeretnénk az interpoláció hibáit (ezt úgy oldottuk meg, hogy a 1/12 éves idôskálát úgy toltuk el, hogy a GRACE modellek idôpontjához képest minimális idôeltérést mutasson). A megfelelô újramintavételezés kezdô idôpontja 2002 év 107.2 napja (ez durván 2002 április 17, 4:48 idôpontját jelenti), a mintavételezés köze pedig 1/12 év. A mintavételezés eszközéül (számos interpolációs és simító eljárás vizsgálata után) a spline-interpolációt használtuk, mivel ez simult leginkább realiztikusan az idôsor ismert pontjaira.



### 5.3 Determinisztikus komponensek (szezónális változás, lineáris trend) meghatározása

A feldolgozás szempontjából alapvető fontosságú, és az ARIMA módszer alkalmazhatóságának egyik feltétele, hogy a vizsgált jel stacionárius legyen. A vizsgálatra kiválasztott 11 idősor pont nem ilyen: egyik része éppen az erős lineáris trend, másik pedig a karakterisztikus éves periódusú változás jelenléte miatt érdekes számunkra. A feladatot ezért úgy oldjuk meg, hogy előbb meghatározzuk a jel determinisztikus részét, ezt levonjuk, és a fennmaradó jelet vizsgáljuk, hogy stacionárius-e; igény esetén differenciálással stacionáriussá tesszük, és arra építjük fel az optimális ARIMA modellt.

A determinisztikus rész meghatározását az alábbi függvény illesztésével végezzük:

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega_{\text{év}} \cdot t + B) + C \cdot \sin(\omega_{\text{félév}} \cdot t + D) + E \cdot t + F, \quad (15)$$

ahol  $A$  és  $B$ , illetve  $C$  és  $D$  együtthatók az  $f(t)$  idősor éves, illetve fél éves szezónális komponenseinek amplitúdója és fázisa,  $E$  a lineáris trend együtthatója,  $F$  pedig az eltolás értéke. A gyakorlatban a (15) egyenlet jobb oldalának első két tagjában numerikusan nehézséget jelenthet az amplitúdó és a fázis megfelelő kiválasztása, ezért az egyenletet egy másik alakban javasoljuk kiegyenlíteni. Ehhez vegyük figyelembe a jól ismert trigonometriai azonosságot, hogy  $\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$ , így a (15)-ben a  $\sin(\omega_{\text{év}} \cdot t + B) = \sin(\omega_{\text{év}} \cdot t) \cos(B) + \cos(\omega_{\text{év}} \cdot t) \sin(B)$  bevezetésével, (és ennek analógiájára a fél éves tagot is átalakítva), az egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$\begin{aligned} f(t) &= A \cdot \sin(\omega_{\text{év}} \cdot t) \cdot \cos(B) + A \cdot \cos(\omega_{\text{év}} \cdot t) \cdot \sin(B) + C \cdot \sin(\omega_{\text{félév}} \cdot t) \cdot \cos(D) + \\ &+ C \cdot \cos(\omega_{\text{félév}} \cdot t) \cdot \sin(D) + E \cdot t + F = \\ &= G \cdot \sin(\omega_{\text{év}} \cdot t) + H \cdot \cos(\omega_{\text{év}} \cdot t) + J \cdot \sin(\omega_{\text{félév}} \cdot t) + K \cdot \cos(\omega_{\text{félév}} \cdot t) + E \cdot t + F, \end{aligned} \quad (16)$$

ahol az új ismeretlenek  $G = A \cdot \cos(B)$ ,  $H = A \cdot \sin(B)$ ,  $J = C \cdot \cos(D)$  és  $K = C \cdot \sin(D)$ . A (16) egyenletben ugyanúgy 6 ismeretlen szerepel, mint a (15)-ben, csak ez már az új ismeretlenekre lineáris, egyértelműen megoldható, a megoldás alapján pedig az eredeti ismeretlenek meghatározhatók az

$$A = \sqrt{G^2 + H^2} \quad (17a)$$

$$B = \arctg\left(\frac{H}{G}\right) \quad (17b)$$

$$C = \sqrt{J^2 + K^2} \quad (17c)$$

$$D = \arctg\left(\frac{K}{J}\right) \quad (17d)$$

összefüggésekkel.

A függvény illesztése után az egyes idősorok esetén a 4. táblázatban feltüntetett értékeket kaptuk eredményül. A 4. táblázat értékeit vizsgálva először is nyilvánvaló, hogy az első 6 tesztpont esetén jóval kisebb szezónális változás, de jelentősebb lineáris trend, mint a második 5 pont esetén. Ez megfelel a pontok kiválasztási szempontjainak (3. táblázat).

A 4. táblázatban feltüntetett függvényillesztések hatékonyságát vizuálisan is ellenőriztük. Ezen együtthatók felhasználásával meghatároztuk az egyes idősorok determinisztikus részét, és levontuk az eredeti idősorból. A későbbiek során a determinisztikus komponens előrejelzéséhez is a 4. táblázatban található együtthatókat használjuk.

A determinisztikus rész levonásával kapott jel vizsgálata esetenként ránézésre stacionáriusnak tűnt, máskor erős véletlen bolyongást mutat a jel. A véletlen bolyongás (az idősozelemzési terminológiával) ciklusnak minősül, így ezen jelek nem tekinthetők stacionáriusnak. Megvizsgálva a jelenséget azt tapasztaltuk, hogy egy magasabb (pl. harmad) fokú polinom, vagy egy több (5-10) éves periódusú szinuszgörbe illesztésével ezen hatás csökkenthető, azonban mégsem így tettünk, mivel nincs ismert fizikai oka ezen illesztéseknek, lehet, hogy csak a véletlen bolyongás alakult ezen szabályos változásokhoz hasonló alakúra, így tehát semmi okunk feltételezni, hogy a folyamat a jövőben is így marad. Ennek megfelelően nem tartjuk indokoltnak, hogy az extrapoláció során a determinisztikus komponens részét képezze, ezért a stacionaritás elérésére a Box-Jenkins módszer szerint javasolt numerikus differenciálással ((6), (7) egyenletek) törekszünk.

4. táblázat. A szezonális és a lineáris komponensek együtthatói

Pontszám	<i>A</i> [μGal]	<i>B</i> [°]	<i>C</i> [μGal]	<i>D</i> [°]	<i>E</i> [μGal/év]	<i>F</i> [mGal]
1	2.36	-10.8031	0.58	-36.1651	-4.5548	-52214
2	0.90	154.5095	0.72	-133.2070	1.4308	-52377
3	4.44	-2.7647	0.41	-84.1847	-1.3662	33358
4	1.81	36.2791	0.60	-153.8678	0.9661	4269
5	0.34	-172.7697	0.39	-99.2707	-5.5379	-3068
6	0.25	39.3301	0.28	-123.7990	1.2054	-32099
7	8.74	-163.8430	1.48	98.9956	-0.4684	-29363
8	6.23	166.3354	1.04	177.7315	-0.1291	-3412
9	7.17	-1.4636	0.82	122.7677	0.1369	-4070
10	18.85	-45.6579	1.86	-11.9175	0.1066	-11426
11	4.92	35.3452	1.29	89.5533	-0.0675	36239

#### 5.4 Az ARIMA modell paramétereinek meghatározása

Az ARIMA modell  $p$  és  $q$  paramétereinek meghatározását a 3 fejezetben ismertetett *ADF* és *KPSS* próbákkal, valamint az *ACF* és *PCF* diagramok vizuális vizsgálata alapján lehet elvégezni. A vizsgálatot elvégeztük valamennyi idősorra (a fejlécben 1-től 11-ig jelölve), és annak első és második deriváltjaira (a fejlécben a  $d$  oszlop mutatja a derivált fokszámát). A vizsgálat eredményét összegzi az 5. táblázat, amelyben a nullhipotézis elfogadását 1, elvetését 0 érték jelöli.

Az *ADF* próba nullhipotézise, hogy a vizsgálat folyamat egységgyök folyamat (de a trend-stacionárius folyamatokat is sokszor tévesen idesorolja), ellenhipotézise, hogy nem egységgyök (jó eséllyel stacionárius) folyamat. Az *ADF* próba eredménye tehát valamennyi idősorra és annak valamennyi deriváltjára stacionaritást valószínűsít.

A *KPSS* próba értelmében már árnyaltabb a kép. A *KPSS* próba nullhipotézise, hogy a folyamat stacionárius vagy trend-stacionárius folyamat, ellenhipotézise, hogy egységgyök folyamat. Az egyes idősorokra ( $d = 0$ ) a nullhipotézis elvetése egységgyök folyamatot valószínűsít. Az első ( $d = 1$ ) és a második ( $d = 2$ ) deriváltak esetében (az 1-es pont idősorainak  $d = 1$  deriváltja kivételével) a *KPSS* próba elfogadja a nullhipotézist, mely szerint a vizsgált folyamat stacionárius vagy trend-stacionárius folyamat (megjegyzem, hogy mivel a folyamatokból a stacionárius komponens az előfeldolgozás során levontuk, jelen esetben a *KPSS* próba sikeressége stacionaritást jelent).

5. táblázat. Az *ADF* és a *KPSS* próbák eredménye

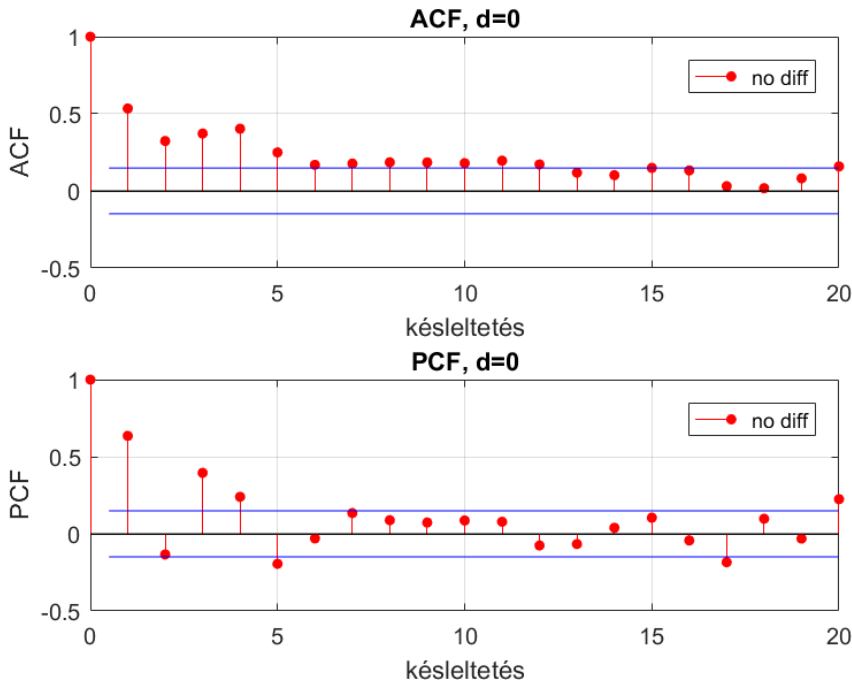
	$d$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<i>ADF</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>ADF</i>	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>ADF</i>	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>KPSS</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>KPSS</i>	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
<i>KPSS</i>	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Összegezve: mivel az eredeti idősorok ( $d = 0$ ) az egyik próba szerint stacionáriusak (*ADF*), a másik szerint nem (*KPSS*), érdemes az ARIMA modell felállítását megpróbálni. Ha ez nem sikerül, meg kell próbálni az első vagy a második deriváltra is, mivel ezen idősorok mindkét próba értelmében stacionáriusnak tűnnek.

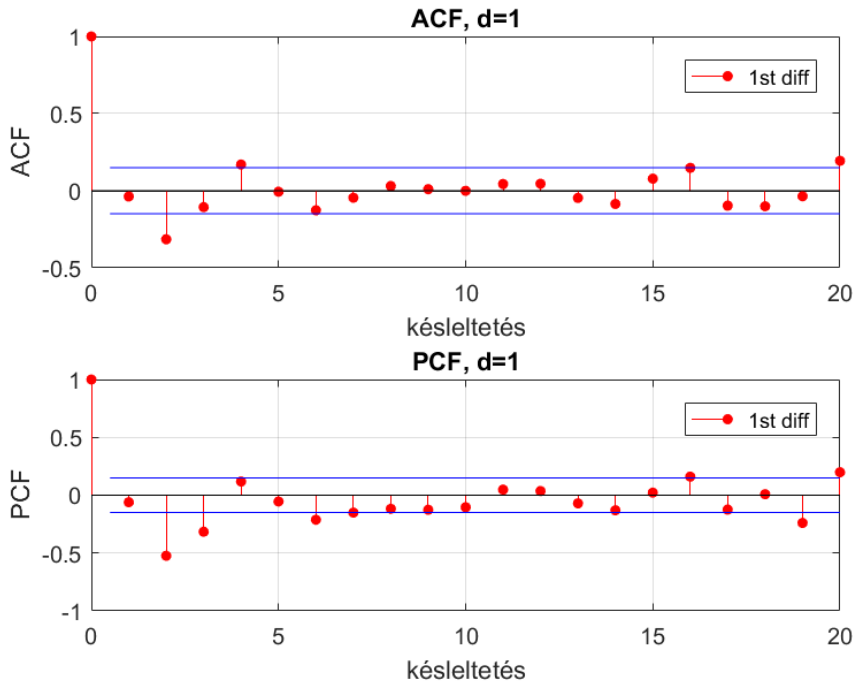
A következő lépés a stacionáriusnak vélt idősorokra a  $p$  és  $q$  modell paraméterek becslése az autokorrelációs (*ACF*) és parciális autokorrelációs (*PCF*) függvények alapján. Helyigényes lenne valamennyi görbét megjeleníteni, ezért az egyik esetre koncentrálna illusztráljuk ennek menetét. Az

alábbi ábrák mutatják a 6-os vizsgálati pont esetén az eredeti idősor (4. ábra), az első derivált idősor (5. ábra) és a második derivált idősor (6. ábra) *ACF* (felül) és *PCF* (alul) függvényeit.

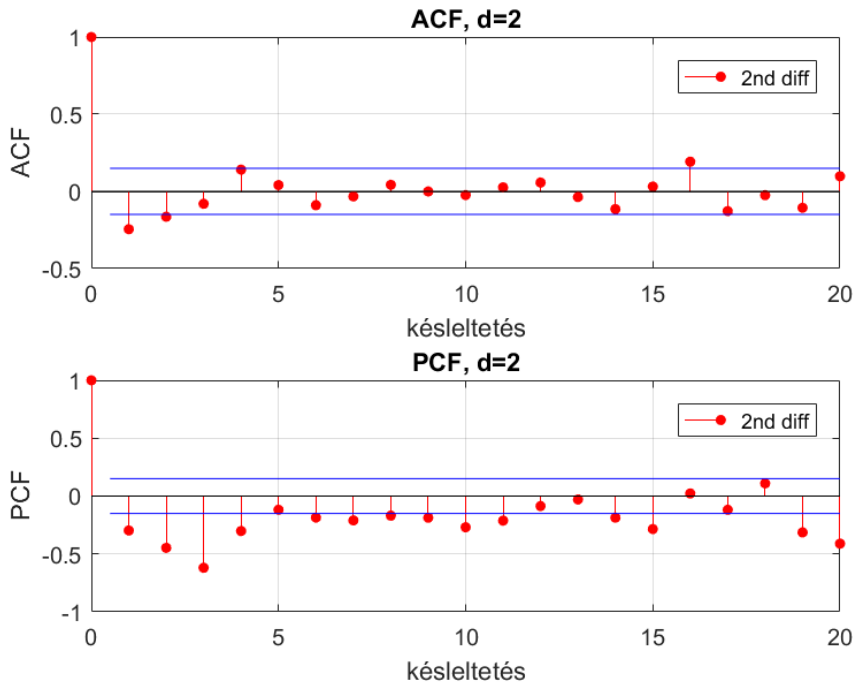
A 4. ábra nem zárja ki a folyamat stacionárius jellegét, viszont az *ACF* lassú lecsengése alapján az idősor egy mozgó átlag folyamatot sejtet ( $q = 11$ ), amelynek azért (a *PCF* alapján) van autokorrelációs része is ( $p = 5$ ). Láthatóan a *PCF* az  $s = 17$  késleltetés értéknél még visszatérnek a statisztikai szignifikanciát jelölő görbe fölé; szubjektív annak megítélése, hogy ezt érdemes-e figyelembe venni a modellezés során. Az 5. ábrán a  $d = 1$  esetben a kép jóval stacionáriusabbnak tűnik: a *PCF* alapján  $p = 3$ , az *ACF* alapján  $q = 2$  értékek esetén érünk célt. A 6. ábra alapján inkább az autokorrelációs rész a dominánsabb: az *AR*(4) függvényt egy *MA*(2) résszel kiegészítve várható a folyamat reális modelljének felállítása. Ez utóbbi esetben megjegyzendő, hogy az *ACF*  $s = 16$ , a *PCF* pedig  $s = 15$  és  $s = 19$  értékeknél is szignifikáns értéket mutat.



4. ábra. *ACF* és *PCF* függvények a Marie Byrd Föld (Antarktisz) vizsgálati pont idősorára



5. ábra. ACF és PCF függvények a Marie Byrd Föld (Antarktisz) vizsgálati pont (6) egyenlet szerint képzett első derivált idősorára



6. ábra. ACF és PCF függvények a Marie Byrd Föld (Antarktisz) vizsgálati pont (7) egyenlet szerint képzett második derivált idősorára

6. táblázat. A vizsgált idősorok paraméterezési lehetőségei

Pontszám	$d$	$p$	$q$	$AIC$	$BIC$	$J/Z$	$L$	LB-Q	döntés
1	1	2	2	-6230.80	-6208.41	13.335	1	1	+
1	2	7	3	-6219.22	-6174.44	5.594	1	1	
2	0	1	7	-6154.93	-6122.945	3.497	1	1	+
2	1	5	2	-6146.76	-6114.77	2.576	1	1	
2	2	8	1	-6096.00	-6054.42	1.691	1	1	
3	0	1	14	-6249.29	-6194.92	3.438	1	0	
3	1	2	0	-6259.94	-6243.95	3.515	1	0	
3	2	4	2	-6222.15	-6190.16	2.244	1	0	
3	2	7	2	-6224.44	-6182.86	2.712	1	1	+
4	0	3	6	-6240.58	-6205.40	2.828	1	0	
4	1	2	2	-6237.23	-6214.84	3.240	1	1	+
4	2	5	2	-6198.28	-6163.09	1.146	1	0	
5	1	3	2	-6164.19	-6138.60	8.166	1	1	+
5	2	10	1	-6076.24	-6028.27	7.074	0	1	
6	0	5	11	-6211.36	-6169.78	1.968	1	1	
6	1	3	2	-6234.39	-6208.80	2.353	1	1	+
6	2	4	2	-6140.93	-6121.74	1.282	1	1	
7	1	4	2	-6072.85	-6044.06	4.034	1	1	+
7	2	8	2	-6037.51	-5992.73	2.108	1	1	
8	1	2	2	-6110.42	-6088.03	1.424	1	1	
8	1	19	2	-6114.49	-6037.72	2.356	1	1	+
8	2	8	2	-6074.62	-6029.84	0.614	1	1	
9	0	3	9	-6058.57	-6013.79	1.845	1	1	+
9	1	3	2	-6056.18	-6030.59	2.131	1	1	
9	2	8	2	-5891.74	-5878.94	0.412	1	1	
10	0	2	6	-5892.73	-5860.74	2.732	1	1	+
10	1	1	1	-5886.06	-5870.07	1.456	0	0	
10	1	1	7	-5889.73	-5854.55	2.348	1	0	
10	2	2	1	-5848.96	-5826.57	0.279	1	1	
10	2	11	1	-5866.31	-5815.13	0.486	1	0	
11	0	1	1	-5973.04	-5960.25	1.478	1	1	+
11	1	4	2	-5953.33	-5924.54	1.862	1	1	
11	2	7	1	-5898.31	-5859.93	0.790	1	1	
11	2	11	1	-5911.72	-5860.54	0.847	1	1	

Az  $ACF$  és a  $PCF$  függvények alapján érdemes tehát egy-egy idősor elemzése során több paraméterezési lehetőséget is megvizsgálni, amihez megfelelő eszközt nyújtanak az  $AIC$  és a  $BIC$  indexek. A vizsgálatra érdemesnek talált eseteket, valamint az ezekhez tartozó  $AIC$  és  $BIC$  indexeket a 6. táblázat tartalmazza.

A további vizsgálatok számára a 6. táblázat valamennyi ARIMA modelljét elkészítettük, amelyek további vizsgálatai alapján meghatároztuk az egyes idősorok számára optimálisnak vélt modellt. Az

első vizsgálat lényege, hogy az időszak utolsó 15 elemének elhagyásával meghatároztuk a táblázatban szereplő paraméterekkel az ARIMA( $p, d, q$ ) modellt, amellyel az utolsó 15 elemet előrejeleztük. Értelemszerűen minél jobban közelíti az előrejelzés a valódi eseményeket, annál jobban írja le a folyamatot, ezért az előrejelzésből nyert és a valódi értékek eltérései (a továbbiakban: reziduálok) alapján határoztunk meg egy pontossági kritériumot. Mivel a reziduálok jelbecslésre gyakorolt hibahatása a jel nagyságának viszonylatában kifejező, a jel szórásának és a reziduálok szórásának hányadosaként meghatároztuk a jel/zaj arányt ( $J/Z$ ), és tüntettük fel a 6. táblázatban.

Fontos megjegyeznünk, hogy a reziduálok eloszlása nem ismert (így várható értéke és szórása sem), azonban ha a várható érték nem zérus, akkor a várható érték körüli ingadozás helyett a zérus körüli ingadozás jellemzi megfelelően a reziduálok nagyságát. Ennek figyelembevétele céljából a variancia,  $\sigma^2 = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - E[X]^2$  helyett az  $J/Z$  arány meghatározásához a  $\sigma^2 = E[X^2]$  összefüggéssel számoltunk.

Nyilvánvalóan ez a módszer sem tekinthető abszolút értelemben hiteles minősítésnek, tekintve, hogy valamennyi folyamat sztochasztikus komponenssel terhelt, így a folyamat adott 15 elemének esetlegességei a modell pontosságának megítélését torzíthatja, azonban az esetek többségében az  $AIC$  és a  $BIC$  indexekkel azonosan alakult a  $J/Z$  arány is.

Fontos az eredmények szempontjából, hogy a reziduálok eloszlása a normális eloszlást kövesse, illetve függetlenek legyenek egymástól. A normalitás vizsgálatára a Lilliefors-próbát végeztük el, mivel ez nem igényli a várható érték és a szórás előzetes ismeretét, hanem azt a mintából becsüli. A függetlenség vizsgálatára pedig elvégeztük a Ljung-Box Q-próbát. Mindkét próba eredményét feltüntettük a 6. táblázatban, amelyek elfogadása esetén 1, elvetése esetén 0 a logikai változó értéke. A Lilliefors-próba elfogadása esetén a reziduálok normális eloszlást követnek, míg a Ljung-Box Q-próba elfogadása esetén a reziduálok autokorrelálatlanok, függetlenek tekinthetők.

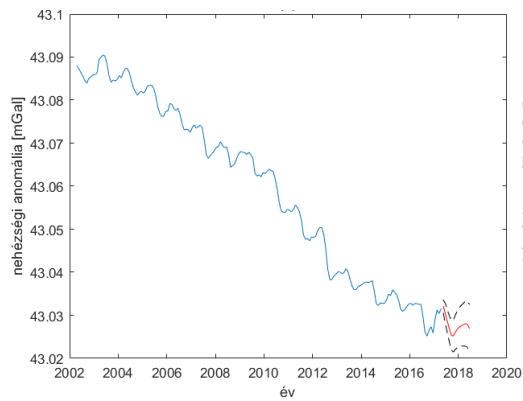
## 5.5 Az ARIMA model felállítás és vizsgálata

A 6. táblázatban bemutatott modellek közül kiválasztottuk minden egyes idősorra a legrealisabbnak tűnőt, ezeket a táblázat utolsó oszlopában + jellel jelöltük. Szempontok: ahol a modelltől számolt értékek alapján a Lilliefors-próba vagy a Ljung-Box Q-próba elutasításra került, azt a modellt kizártuk a további vizsgálatokból. A fennmaradó lehetőségek közül az  $AIC$ , a  $BIC$  és a  $J/Z$  arány alapján döntöttünk: minél kisebb az  $AIC$  és a  $BIC$  index értéke, illetve minél nagyobb a  $J/Z$  arány értéke, annál jobban írja le a modellt az idősort.

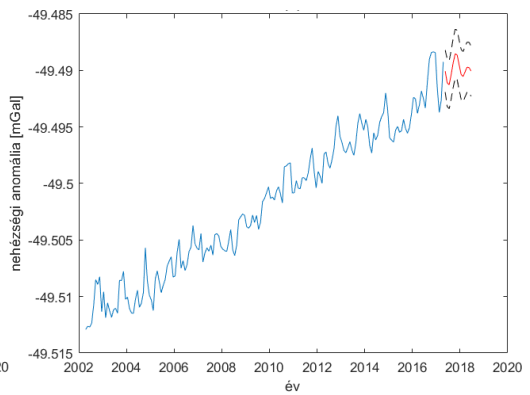
Egyes esetekben (8-as és 9-es pontszámokhoz tartozó idősorok) az  $AIC$  és a  $BIC$  index más-más paraméterezést talált megfelelőbbnek. Ezen esetekben a döntés az előrejelzett (extrapolált) és a valódi idősor vizuális megjelenítése alapján történt, mindkét esetben az  $AIC$  javára. Ez egyben megfelel a szakirodalmi következtetésnek, mely szerint bár a  $BIC$  a szofisztikáltabb és elméletileg megalapozott kritériumrendszer, az  $AIC$  jóval robusztusabb, így míg a  $BIC$  potenciálisan képes teljesen rossz modell kiválasztására, az  $AIC$  index alapján ennek kockázata minimális (Vrieze 2012).

## 5.6 Extrapoláció

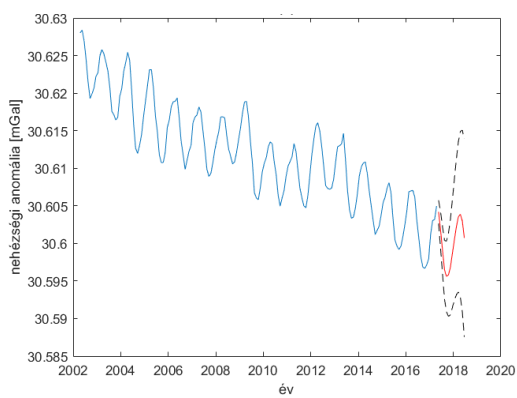
A fent bemutatott vizsgálatok alapján kiválasztott  $p$ ,  $d$  és  $q$  paraméterekkel a teljes adatsort felhasználva egy-egy ARIMA modellt készítettünk. Ezek alapján kísérletet tettünk a 2016 júniustól 2017 júliusáig tartó 14 hónap idősorának előrejelzésére (7. ábra). Az extrapoláció mellett feltüntettük a becsült hibahatárokat (szaggatott vonal a 7. ábrán). Az 5.5 fejezetben bemutatott vizsgálatok alapján a hibahatárok felvétele reális, hiszen a valódi jel mindig a becsült hibahatárok közé estek, ennek megfelelően a jövőbeli események előrejelzése szempontjából a hibahatárok jelentősége nagyobb, mint magának a becsült folyamatnak.



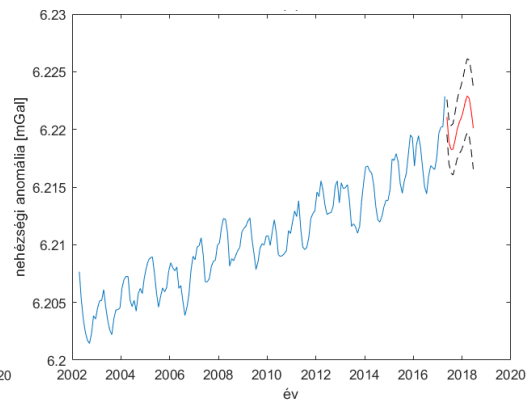
a)



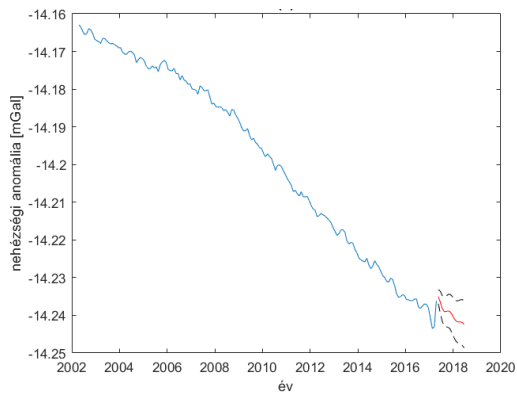
b)



c)



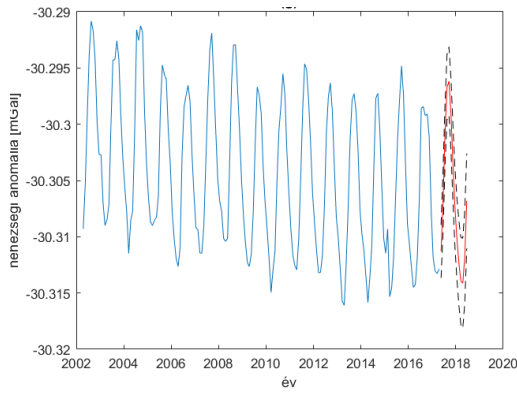
d)



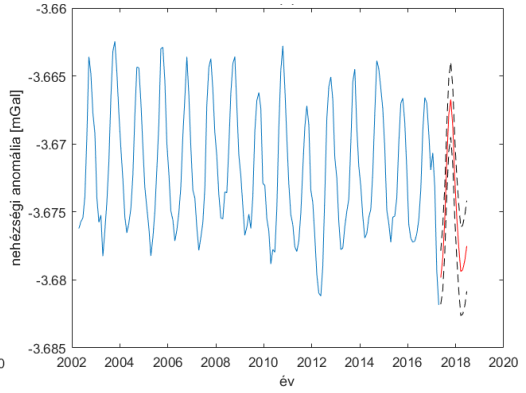
e)



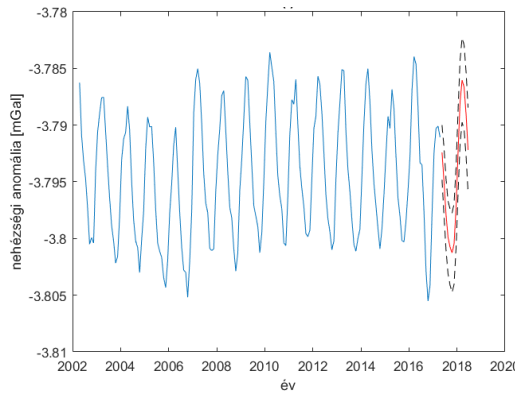
f)



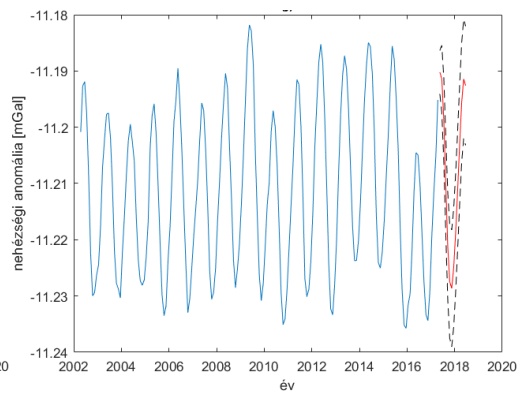
g)



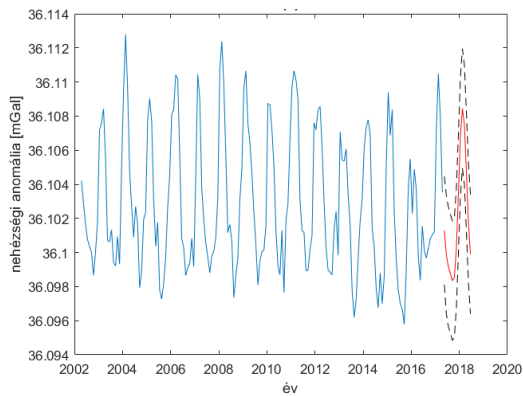
h)



i)



j)



k)

**7. ábra.** Extrapolált idősorok a vizsgálati pontokban. a) Grönland, b) Hudson-öböl, c) Alaszakai-hegység, d) Skandinávia, e) Amundsen-tenger (Antarktis), f) Marie Byrd Föld (Antarktis), g) Bengália, h) Afrikai szavanna, i) Kongó-medence, j) Amazonas-medence, k) Észak-Ausztrália



## 6 Eredmények értékelése

A tanulmányban egyes vizsgálati pontokban elvégeztük a GRACE nehézségi anomália idősorok ARIMA modellezését. Mivel a bemutatott idősorok GRACE észleléseken alapulnak, fizikai értelmezésüket tekintve meglehetősen összetettek: valamely helyen valamennyi tömegváltozás hatását öszszegzi. Az idősorok fizikai értelmezéséhez ezért az ismert és/vagy feltételezett folyamatok hatásait egyéb modellek segítségével kell számításba venni. Egyes területeken a lineáris trend értékében a GIA-folyamatok (GIA: Glacial Isostatic Adjustment, azaz Glaciális Izosztatikus Kiegyenlítődés) dominálnak, másutt a jégtakaró időbeli változásai, a szezonális periódusú változások okozójaként pedig hidrológiai folyamatok, óceáni tömegátrendeződések, továbbá az atmoszférikus korrekció (ugyanis a hónapos modelleket az atmoszféra szezonális tömegátrendeződéseire korrigálják) pontatlanságai is megjelennek (Kiss és Földvály 2017). Ez azt jelenti, hogy messzemenő fizikai következtetéseket az extrapolált idősorból levonni nem szabad, ugyanis bármely fizikai tényező vagy alkalmazott modell megváltozása az extrapolált időszakban megváltoztatja az előző évekből nyert előrejelzést.

A haszna az előrejelzéseknek leginkább az, hogy amennyiben a GRACE-FO első modelljei azt mutatják, hogy egyes helyeken az előrejelzéshez képest számottevő eltérés van, akkor az alapján a fizikai körülmények és az alkalmazott modellek megváltozásait érdemes végiggondolni. Milyen tényezők változhatnak meg?

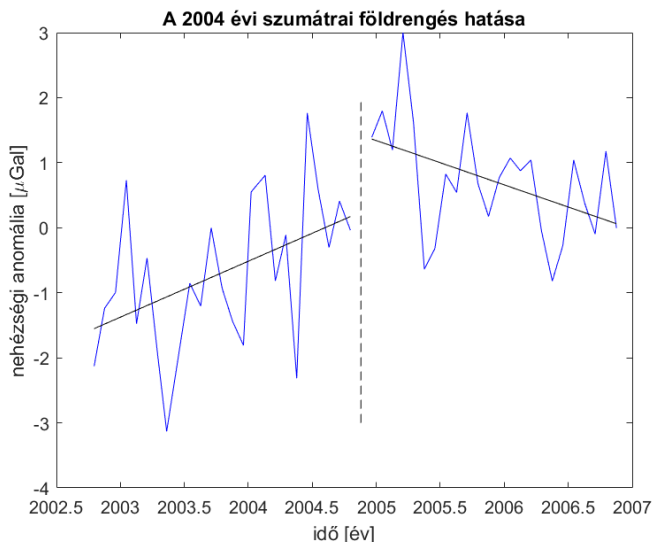
1. *Jégtakaró olvadásának / gyarapodásának intenzitása megváltozhat.* Ez különösen olyan területeken érdekes, ahol gyorsuló ütemű oladási folyamatról tudunk, mint Grönland vagy Nyugat-Antarktisz. Ezekben a helyeken a meglévő adatsorok alapján kvadrátikus regresszióval szokás a jövőbeli eseményeket becsülni, ennek alkalmassága azonban vitatható (Földvály 2012). Az extrapolált GRACE és a valódi GRACE-FO idősorok közötti ugrásszerű negatív irányú eltolódás az oladási folyamatok felgyorsulását, míg pozitív irányú hasonló eltolódás esetén az oladási folyamatok túlbecslését jelenti.

2. *Óceáni transzport folyamatok megváltozhatnak.* Hasonlóan a jégtakaró megváltozásához, a globális éghajlat változás során az óceáni transzport folyamatok is megváltoznak, egyes áramlatok a szalinitás és a hőmérséklet megváltozása következtében teljes más jellegűt öltenek.

3. *Atmoszférikus korrekció számításba vétele megváltozhat.* Az atmoszférikus tömegváltozásokra végzett korrekció a GRACE hónapos nehézségi erőter modellek egyik legfontosabb korrekciója, annak nagysága okán. Bár a pontossági minősítések alapján az atmoszférikus korrekció egész jó, egyes helyeken (különösen az Antarktiszon (Kiss és Földvály 2017) az atmoszférikus korrekció nem éri el a szükséges pontosságot. Elképzelhető, hogy az atmoszférikus korrekció modelljében vagy módszertanában előrelépést hoz a jövő – ez esetben a modell megváltozása szabályos eltérést eredményezhet az előrejelzett GRACE és a mért GRACE-FO nehézségi anomália idősorában.

4. *Dinamikus tömegátrendeződések történhetnek.* Erre közismert példa, hogy nagyobb földrengések tömegátrendező hatása a GRACE idősorokban regionálisan megjelenik. A 8. ábrán példaként a szumátrai földrengés hatására a rengés epicentrumában a nehézségi anomália idősorának alakulását, amelynek lefutása a földrengés hatására eltolódott, tendenciája megváltozott.

Összességében az ARIMA modellezéstől alapvetően azt várjuk, hogy előrevetítse, milyen változások várhatók, illetve a modellezés eredményeként kapott extrapolációtól azt, hogy milyen képet mutat a GRACE és a GRACE-FO adathiányos időszakában a nehézségi anomália idősora, amennyiben az egyes régiók tömegátrendező folyamatai drasztikusan nem változnak meg, továbbá a GRACE és a GRACE-FO során használt feldolgozási és modellezési módszertani különbségek látványos eltéréseket nem generálnak. A későbbiekben, a GRACE-FO modellek nyilvános elérhetővé válásával az extrapolált és a valódi adatok eltéréseinek elemzésével lehetőségünk lesz a modellezési és/vagy fizikai okok kiderítésére.



8. ábra. A 2004 december 26-i szumátrai földrengés hatása a GRACE mérések alapján levezetett nehézségi anomália idősorában

### Hivatkozások

- Akaike H** (1974): A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 19 (6), 716–723, doi: 10.1109/TAC.1974.1100705.
- Balázsik V, Tóth Z** (2016): Using geoinformatic tools in archeology. In: *Proceedings of 11th International Symposium on Applied Informatics and Related Areas (AIS 2016)*, Székesfehérvár, 2016.11.17, 104–108.
- Bányai L, Mentés Gy, Újvári G, Gribovszki K, Papp G** (2013): A dunaszekcsői földcsuszamlás mozgási tendenciája és modellje koordináta idősorok alapján. *Geomatikai Közlemények*, 16, 73–82.
- Bányai L, Mentés Gy, Újvári G, Kovács M, Czap Z, Gribovszki K, Papp G** (2014): Recurrent landsliding of a high bank at Dunaszekcső, Hungary: Geodetic deformation monitoring and finite element modeling. *Geomorphology*, 210, 1–13.
- Barton I, Király G, Czímber K** (2017): Lékek kimutatása Sentinel-2A úrfelvétel-idősorok alapján tölgyfaerdőben. *Geomatikai Közlemények*, 20, 87–97.
- Bettadpur S** (2018): Gravity Recovery and Climate Experiment Level-2 Gravity Field Product User Handbook, rev. 4.0. GRACE 327-734 (CSR-GR-03-01), Center for Space Research, University of Texas. 21.
- Box GEP, Jenkins GM** (1970): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. San Francisco: Holden-Day. 553.
- Box GEP, Jenkins GM, Reinsel GC, Ljung GM** (2016): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 5th edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey. 712. ISBN-13: 978-1118675021, ISBN-10: 1118675029.
- Brockwell PJ, Davis RA** (1991): *Time Series: Theory and Methods*. Springer-Verlag, New York. 273. ISBN 978-1-4419-0320-4.
- Brockwell PJ, Davis RA** (2002): *Introduction to Time Series and Forecasting*, Edition 2. Springer Texts in Statistics, Springer-Verlag New York. 437. ISBN 978-0-387-21657-7, ISBN 978-1-4757-7750-5.
- Budai FM** (2013): *Idősorok osztályozása*, ELTE, Alkalmazott matematikus MSc diplomamunka. 86.
- Flechtner F, Neumayer KH, Dahle Ch, Döbbslaw H, Fagiolini E, Raimondo JC, Güntner A** (2016): What Can be Expected from the GRACE-FO Laser Ranging Interferometer for Earth Science Applications?. In: Cazenave A, Champollion N, Benveniste J, Chen J (eds) *Remote Sensing and Water Resources*. Space Sciences Series of ISSI, Vol. 55. Springer.
- Földváry L** (2004): A gravimetriai műholdak korszaka. *Magyar Geofizika*, 45(4), 118–124.
- Földváry L** (2012): Mass-Change Acceleration in Antarctica from GRACE Monthly Gravity Field Solutions. In: *Geodesy for Planet Earth*, Proceedings of IAG Symposium in Buenos Aires, IAG Symposia, 131, 591–597.
- Fuller WA** (1995): *Introduction to Statistical Time Series*, 2 edition. Wiley-Interscience. 728. ISBN-10: 0471552399.
- Hamilton JD** (1994): *Time Series Analysis*. Princeton, Princeton University Press, New Jersey. 820. ISBN-10: 0691042896, ISBN-13: 978-0691042893.
- Kiss A, Földváry L** (2015): Éves hidrológiai változások meghatározása GRACE geopotenciális modellek segítségével. *Geomatikai Közlemények*, 18(2), 43–52.
- Kiss A, Földváry L** (2017): Uncertainty of GRACE-borne long periodic and secular ice mass variations in Antarctica. *Acta Geodaetica et Geophysica*, 52(4), 497–510.
- Kolmogorov A** (1933): Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 4, 83–91.

- Kontur I, Koris K, Winter J** (2003): Hidrológiai számítások. (3. javított és bővített kiadás). Linográf Kiadó, ISBN 963-05-6502-1.
- Kwiatkowski D, Phillips PCB, Schmidt P, Shin Y** (1992): Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root. *Journal of Econometrics*, 54 (1–3), 159–178. doi: 10.1016/0304-4076(92)90104-Y.
- Lilliefors H** (1967): On the Kolmogorov–Smirnov test for normality with mean and variance unknown. *Journal of the American Statistical Association*, 62, 399–402.
- Ljung GM, Box GEP** (1978): On a Measure of a Lack of Fit in Time Series Models. *Biometrika*, 65 (2), 297–303. doi: 10.1093/biomet/65.2.297.
- Nelson CR, Plosser CI** (1982): Trends versus random walks in macroeconomic time series: Some evidence and implications. *Journal of Monetary Economics*, 10, 139–162.
- Papp G, Benedek J, Varga P, Kis M, Koppán A, Meurers B, Leonhardt R, Baracza MK** (2018): Feasibility study applied to mapping tidal effects in the Pannonian basin – An effort to check location dependencies at  $\mu$ Gal level. *Geodesy and Geodynamics* 9, 237–245.
- Pokrovenszki K, Vágvölgyi B, Tóth Z** (2016): Practical Experience with the 3D Photogrammetric Methods used at the Excavation of Csókakő Castle, *Magyar Régészet*, 2016 Ősz: 20–27.
- Schwarz GE** (1978): Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics*, 6 (2): 461–464, doi:10.1214/aos/1176344136.
- Swenson, S, Wahr J** (2006): Post-processing removal of correlated errors in GRACE data. *Geophysical Research Letters*, 33, L08402. doi: 10.1029/2005GL025285
- Szöllősy Cs, Pokrovenszki K, Tóth Z** (2013): Szabadhídvég Pusztavár roncsolásmentes műszeres felmérése, *Gesta: Fiatal Miskolci Történészek Folyóirata*, 12, 20–29.
- Szűcs E, Bozsó I, Bányai L, Wesztergom V** (2017): Recens tektonikus folyamatok megfigyelése műholdradar interferometriával – a Belső-Kárpát-kanyar vizsgálata archív felvételek alapján. *Geomatikai Közlemények*, 20, 67–85.
- Tóth Z, Tóth J** (2005): Fejlesztési trendek, lehetőségek a bányamérési gyakorlatban, XLIV. Bányamérő Továbbképzés és Tapasztalatsere konferencia kiadványa, Salgótarján, 2005.05.05–2005.05.07, 5–11.
- Varga P** (2013): Törekvések a földrengéskárok enyhítésére – szeizmológiai riasztó rendszerek, *Természet Világa*, 144(1), 25–27.
- Vrieze SI** (2012): Model selection and psychological theory: a discussion of the differences between the Akaike Information Criterion (AIC) and the Bayesian Information Criterion (BIC). *Psychological Methods*, 17, 228–243, doi:10.1037/a0027127.

# A NEDVES TROPOSZFERIKUS KÉSLELTETÉS ÉS AZ INTEGRÁLT VÍZGŐZTARTALOM KÖZÖTTI KAPCSOLAT GLOBÁLIS VIZSGÁLATA

Juni Ildikó\*, Rózsa Szabolcs\*



**Analysis of the relationship between the wet tropospheric delay and the integrated water vapour on a global scale** – *The wet tropospheric delay is a systematic error of the satellite positioning, and it also plays an important role in meteorology. It strongly correlates with the upper limit of precipitable water content, called the integrated water vapour. The tropospheric wet delay can be converted to integrated water vapour using a simple scale factor. This scale factor can be determined by the empirical formulae of Bevis et al. (1992) and Emardson and Derks (2000). The former is calculated with radiosonde observations of United States, while the latter one is based on European measurements. Although these models should be used mainly within the two focus area there are several examples in which these empirical models are used globally. Our aim is to create a global model using ECMWF ERA-Interim reanalysis data that takes into consideration that the parameters of the empirical formulae depend on geographical location. 10 years long ECMWF ERA-Interim reanalysis datasets are used in our study in a grid with a resolution of  $1^\circ \times 1^\circ$  to assess the model performances and to develop new models.*

*The newly derived empirical coefficients of the models depend on only two external parameters: the geographical location of the receiver, and the air temperature at the lowest air pressure level (near the surface). Thus the derived models can be applied for the whole globe in the real- or near real time (90 minutes latency, for the reason of data processing) GNSS analysis for meteorological applications.*

*Our empirical models are validated by global radiosonde observations that stem from two different sources: NOAA/ESRL (National Oceanic and Atmospheric Administration/Earth System Research Laboratory) and GRUAN (Global Climate Observing System (GCOS) Reference Upper-Air Network) database. Our developed Polynomial model reaches improvement at least by the half of the stations considering the mean of the model residuals. The maximum of the mean improvement rate reached almost 2%.*

**Keywords:** wet tropospheric delay, integrated water vapour, scale factor

*A nedves troposzférikus késleltetés, amellyel, hogy a műholdas helymeghatározás egyik szabályos hibája, a meteorológiában is fontos szerepet játszik, mivel szoros kapcsolatban áll a kihullható csapadék felső korlátját megadó integrált vízgőztartalom értékével. A két mennyiség között egy skálátényező adja meg a kapcsolatot. E skálátényező Bevis et al. (1992), illetve Emardson és Derks (2000) empirikus képleteivel meghatározható. Míg előbbi egyesült államokbeli, utóbbit európai rádiószondák mérések segítségével vezették le. A szakirodalomban azonban számos olyan vizsgálattal találkozhatunk, ahol ezen empirikus képleteket a Föld különböző területeire is érvényesnek tekintik, és a GNSS mérések meteorológiai célú alkalmazása során fel is használják. Célunk, hogy ECMWF ERA-Interim reanalízis adatok segítségével egy olyan globális modellt alkossunk, amely figyelembe veszi a troposzféra okozta nedves késleltetés és az integrált vízgőztartalom közötti kapcsolatot leíró empirikus összefüggések földrajzi helytől való függését. E vizsgálatokhoz 10 évnyi  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontású ECMWF ERA-Interim reanalízis adatokat használtunk fel.*

*A kifejlesztett modellek alapvető tulajdonsága, hogy a földrajzi helyen kívül csak a felszín közeli hőmérséklettől (legalsó nyomásszinten mért hőmérséklet) függenek az empirikus összefüggések egyúttel, ezért az új modellek kiválóan alkalmazhatók a közel valószerű (max. 90 perc látencia az adatfeldolgozás miatt) GNSS meteorológiai alkalmazásokhoz.*

*Empirikus modelljeinket két globális skálájú adatforrásból származó rádiószonda állomások észleléseivel ellenőriztük: a NOAA/ESRL (National Oceanic and Atmospheric Administration/Earth*

*System Research Laboratory – Nemzetközi Óceáni és Légköri Hivatal/Földi Rendszer Kutató Központ) és a GRUAN (Global Climate Observing System (GCOS) Reference Upper-Air Network – Globális Klímamegfigyelő Rendszer Felsőlégtéri Referencia Hálózat) adataival. A kifejlesztett Polinomos modell mindkét referencia adatsor esetén – az eltérések középértékeit tekintve – legalább az átlomások felénél jobb eredményt ért el az eredeti modellhez képest. A javulás a 2% körüli mértéket is elérte.*

**Kulcsszavak:** nedves troposzférikus késleltetés, integrált vízgőztartalom, skálatényező

## 1 Bevezetés

A globális műholdas navigációs rendszerekkel (GNSS) egyre többször találkozunk mindennapjaink során. Az ezeknél fellépő egyik szabályos hibát, a troposzférikus késleltetést többnyire a minél pontosabb helymeghatározásra használjuk. Emellett a hibának a vízpárától függő része, a nedves troposzférikus késleltetés fontos információt tartalmaz az atmoszféra állapotáról is, így meteorológiai jelentőséggel bír. A nedves troposzférikus késleltetés a kihullható csapadék felső korlátjává, integrált vízgőztartalommal számítható át egy empirikus skálatényező segítségével. Ilyen empirikus képleteket határoztak meg Bevis et al. (1992) és Emardson és Derks (2000). Előbbit közel 9000 amerikai egyesült államokbeli észlelésből, míg utóbbit megközelítőleg 130000 Európában végzett mérésből állították elő. Ezekkel a modellekkel pontos eredményt leginkább azokra a területekre kaphatunk, amelyekre azok le lettek vezetve.

Célunk – az előbbi modelleket alapul véve – olyan skálatényezők megadása, amelyek figyelembe veszik a regionális éghajlati hatásokat. 10 évnyi,  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontású ECMWF ERA-Interim reanalízis adatokkal az integrált vízgőztartalom és a nedves troposzférikus késleltetés is kiszámítható, majd ezek hányadosaként a skálatényezőt is meghatározhatjuk. Az így levezett skálatényezőből és az aktuális nedves késleltetésből becsülhető az aktuális integrált vízgőztartalom, amely segítségünkre lehet a rövid távú csapadék előrejelzésében. A kapott skálatényezők ellenőrzését kétfajta globális rádiószonda észleléssel végeztük el.

## 2 A skálatényező meghatározásának módszerei

### 2.1 Bevis módszere

Az integrált vízgőztartalom és a nedves troposzférikus késleltetés közötti összefüggés a skálatényezővel adható meg:

$$Q = \frac{IWV}{ZWD}, \quad (1)$$

ahol  $Q$  a skálatényező [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ],  $IWV$  az integrált vízgőztartalom [ $\text{kg}/\text{m}^2$ ],  $ZWD$  a nedves troposzférikus késleltetés [m]. Bevis et al. (1992) egy empirikus képletet alkalmaz a vízgőz középhőmérsékletére:

$$T_m = a_0 + a_1 \cdot T_s, \quad (2)$$

ahol  $T_s$  a legalsó, 1000 hPa-os nyomásszinten mért felszíni hőmérséklet [K] és  $T_m$  a vízgőz középhőmérséklete [K]. A vízgőz középhőmérséklete függ a vízgőzsűrűségtől és a hőmérséklettől, részletes leírása a 3.2.3 fejezetben található. A (2) egyenlet az ezek közötti lineáris kapcsolatot írja le. Az Egyesült Államok  $27^\circ$  és  $65^\circ$  közötti szélességeiről 2 évnyi észlelésből származó 8718 rádiószondás profil alapján levezetett paraméterek:  $a_0 = 70.2$  K az eltolás és  $a_1 = 0.72$  a meredekség. A vízgőz középhőmérsékletének ismeretében a skálatényező számítható (Rózsa et al. 2009):

$$Q = \frac{10^6}{R_v \cdot \left( -\frac{R_d}{R_v} \cdot k_1 + k_2 + \frac{k_3}{T_m} \right)}, \quad (3)$$

ahol  $R_d = 286.9$  J/kg/K a száraz levegő specifikus gázállandója  $R_v = 461.5$  J/kg/K a nedves levegő specifikus gázállandója,  $k_1 = 0.77604$  K/Pa,  $k_2 = 0.64790$  K/Pa és  $k_3 = 3776$  K<sup>2</sup>/Pa a Thayer-féle tapasztalati konstansok (Thayer 1974).

## 2.2 Emardson-Derks módszere

Emardson és Derks (2000) közvetlenül a  $Q$  skálatényezőt vezette le:

$$Q = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot (T_s - \bar{T}) + a_2 \cdot (T_s - \bar{T})^2}, \quad (4)$$

ahol  $T_s$  a felszíni hőmérséklet [K],  $\bar{T}$  a vizsgált időtartam felszíni hőmérsékleteinek középértéke [K],  $a_0$ ,  $a_1$  és  $a_2$  a polinomillesztés paraméterei egy másodfokú összefüggésben. A (4) képlet paramétereit 38 európai rádiószonda állomás 1989 és 1997 közötti 128649 észleléséből határozták meg:

$a_0 = 6.458$  m<sup>3</sup>/kg,  $a_1 = -1.78 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup>/kg/K,  $a_2 = -2.2 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>/kg/K<sup>2</sup> és  $\bar{T} = 283.49$  K.

## 3 A skálatényező meghatározására fejlesztett modellek

A bemutatott modellek a levezetett paramétereiket a Föld egy-egy bizonyos területéről származó észleléseket alapul véve adták meg (Egyesült Államok, Európa), de ezeket sokszor az egész Földre érvényesnek tekintik (Haase et al. 2003, Igondová és Cibulka 2010). Célunk a fenti modellek alapján olyan új modellek kifejlesztése, amelyekkel figyelembe vehetők az éghajlati sajátosságok. Ennek érdekében globális ERA-Interim reanalízis adatokat használunk fel, amelyekből minden egyes rácspontra levezethetők a (2) és (4) összefüggés empirikus paraméterei. A továbbiakban Bevis módszerét alapul vevő modellre (2) Lineáris modellként, míg az Emardson-Derks módszerén nyugvó (4) modellre pedig Polinomos modellként fogunk hivatkozni.

### 3.1 A felhasznált adatok

A helyi meteorológiai jellemzőket az ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts – Európai Középtávú Időjárás Előrejelző Központ) ERA-Interim (Dee et al. 2011) adataiból nyertük. Az ERA-Interim adatok előállításánál a korábbi, több évtizedes észlelések újra analizálásával – reanalízisével – a légkör állapota sokkal pontosabban jellemezhető, mint az eredeti analízisnél. Emellett az egységes adatfeldolgozási módszernek köszönhetően az adatfeldolgozó modellek fejlesztéséből adódó eltéréseket is kiküszöbölhetjük. Az így előállított reanalízis adatbázisok a hosszú távú éghajlatváltozás elemzésére alkalmasak. (<http://www.met.hu/omsz/tevekenysegek/ecmwf/>, 2018-02-13). Az ERA-Interim 1979. január 1-től napjainkig 3 óránként a felszíni adatokat, illetve 6 óránként különböző nyomásszinteken mért légköri jellemzőket tartalmaz egy globális rácshálóban.

Az ECMWF 2001-2010. közötti ERA-Interim reanalízis adatok havi középértékeinek a teljes Földre kiterjedő,  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontását alkalmaztuk. 37 nyomásszintnek (1000-1 hPa) a hőmérséklet, relatív páratartalom és geopotenciál adatait használtunk fel. A relatív páratartalmat és a hőmérsékletet a vízgőz parciális páranomásává, a geopotenciált pedig tengerszint feletti magassággá konvertáltuk.

A troposzféra feletti sztratoszféra is okoz néhány cm-es késleltetést (Rózsa et al. 2012), így ezt is bevontuk a vizsgálatokba. Az ECMWF adatok felett az ISA (International Standard Atmosphere – Nemzetközi Sztenderd Atmoszféra) adatokat vesszük figyelembe, a számításainkat így egészen a 86000 m-es magasságig kiterjeszthetjük (ISO 2533:1975 szabvány).

### 3.2 A modellek paramétereinek meghatározása

Ahhoz, hogy megadjuk a Lineáris és a Polinomos modell paramétereit, először meg kell határozni a vízgöz középhőmérsékletét ( $T_m$ ), az integrált vízgőztartalmat ( $IWV$ ), a nedves troposzférikus késleltetést ( $ZWD$ ), illetve utóbbi két mennyiség hányadosát, a skálatényezőt ( $Q$ ), 10 évnvi,  $1^\circ \times 1^\circ$ -os

felbontású ECMWF ERA-Interim havi középértékekből, illetve ISA adatokból. Ez után a felszíni hőmérséklet segítségével már meghatározhatók globálisan,  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontás mellett a Lineáris (2) és a Polinomos modell (1) paraméterei (4) is.

### 3.2.1 Nedves troposzférikus késleltetés számítása a sugárkövetés módszerével

Az empirikus skálatényezők levezetéséhez szükségünk van a nedves troposzférikus késleltetések kiszámítására (1). Ehhez a sugárkövetés módszerét használtuk fel. A sugárkövetés módszere egymás feletti, különböző meteorológiai paraméterekkel rendelkező, homogén légrétegeken alapul (Boehm és Schuh 2003). A Föld felszínéről induló sugár a légrétegek határán a Snellius–Descartes-törvény szerint megtörik és irányt vált. A sugárkövetés numerikus megoldása nagy vertikális felbontású meteorológiai adatokat igényel, a magasságok előírt pontossága: 0-2 km között 10 m, 2-6 km között 20 m, 6-16 km között 50 m, 16-36 km között 100 m, 36-136 km között 500 m (Rocken et al. 2001). Ennek eléréséhez gyakran a modelladatokat interpolálására is szükség volt. Az ECMWF és az ISA adatok magassága alapján a légköri oszlop előírt vertikális felbontásának megfelelően lineárisan interpoláltuk a hőmérsékletet és exponenciálisan interpoláltuk a légnyomást és a vízgőz parciális párányomását (Boehm és Schuh 2003). Ez után a sűrített meteorológiai paramétereket felhasználva már meghatározhatók az egyes légrétegekhez tartozó nedves refraktivitás értékek:

$$N_{wi} = \left( k_2 - k_1 \cdot \frac{M_w}{M_d} \right) \cdot \frac{e_i}{T_i} + k_3 \cdot \frac{e_i}{T_i^2}, \quad (5)$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, k$ , ahol  $k$  a légrétegek száma,  $N_{wi}$  a nedves refraktivitás az adott légrétegben  $k_1, k_2, k_3$  tapasztalati konstansok, értékük: 77.604 K/hPa, 64.790 K/hPa és 377600 K<sup>2</sup>/hPa,  $M_w = 0.0180152$  kg/mol a vízgőz moláris tömege,  $M_d = 0.0289644$  kg/mol a száraz levegő moláris tömege,  $T_i$  a hőmérséklet [K] és  $e_i$  a vízgőz parciális párányomása [hPa].

Következő lépésben meghatároztuk minden légrétegben az elektromágneses sugárzás ténylegesen megtett útját. Ezt követően az egyes rétegekben lévő tört sugárhosszak és nedves refraktivitások szorzatösszege megadja a nedves troposzférikus késleltetés nagyságát:

$$ZWD = \sum_{i=1}^{k-1} s_i \cdot \frac{N_{wi} + N_{wi+1}}{2}, \quad (6)$$

ahol  $s_i$  az adott rétegben megtett úthossz [m].

### 3.2.2 Az integrált vízgőztartalom számítása

Az integrált vízgőztartalom a következő meteorológiai paraméterek függvénye: nyomás, hőmérséklet, relatív páratartalom, illetve a helyi nehézségi gyorsulás. Első lépésként az interpolációk utáni, már besűrített légrétegek keverési arányát határozzuk meg (WMO 2008):

$$MR_i = \frac{621.98 \cdot e_i}{p_i - e_i}, \quad (7)$$

ahol  $i = 1, 2, \dots, k$ , ahol  $k$  a légrétegek száma,  $e_i$  a vízgőz parciális párányomása [hPa],  $p_i$  a légnyomás [hPa],  $MR_i$  keverési arány [g/kg] az adott légrétegben. A keverési arány megadja a vízgőz és a száraz levegő tömege közötti arányt. Ez után az egyes rétegekben az integrált vízgőztartalom:

$$IWW_i = \frac{1}{g} \cdot (p_{i-1} - p_i) \cdot \frac{MR_{i-1} + MR_i}{20}, \quad (8)$$

ahol,  $IWW_i$  az integrált vízgőztartalom az adott légrétegben [kg/m<sup>2</sup>],  $g$  [m/s<sup>2</sup>] a helyi gravitációs gyorsulás, ami a földrajzi szélesség függvénye. A teljes integrált vízgőztartalom a légrétegek vízgőztartalmának vertikális integráltjával kapható meg:

$$IWW = \sum_{i=1}^{k-1} IWW_i, \quad (9)$$

### 3.2.3 A vízgőz középhőmérséklete

A légköri oszlopban található vízgőz középhőmérséklete Bevis modellje alapján fejlesztett Lineáris modellben játszik szerepet. Elsőként a vízgőzsűrűséget számítjuk ki a légköri hőmérséklet és a parciális párányomás függvényeként:

$$\rho_v = \frac{e \cdot 100}{R_v \cdot T}, \quad (10)$$

ahol  $\rho_v$  [kg/m<sup>3</sup>] a vízgőzsűrűség. A vízgőzsűrűség ismeretében a vízgőz középhőmérséklet ( $T_m$ ) (Askne és Nordius 1987):

$$T_m = \frac{\int_{h_0}^{h_{max}} \rho_v dz}{\int_{h_0}^{h_{max}} \frac{\rho_v}{T} dz}, \quad (11)$$

ahol  $h_{max}$  [m] az adatsor legnagyobb magassága, 86000 m. A vízgőz középhőmérséklete megadja a vízgőzsűrűség vertikális integráltjának és a vízgőzsűrűség-hőmérséklet hányados vertikális integráltjának arányát. Más szavakkal: a vizsgált rétegben a vízgőz átlagsűrűségének és a vízgőz középhőmérsékletének a hányadosa megegyezik a vízgőzsűrűség-hőmérséklet integrálatlagával.

## 3.3 A kifejlesztett modellek eredményei

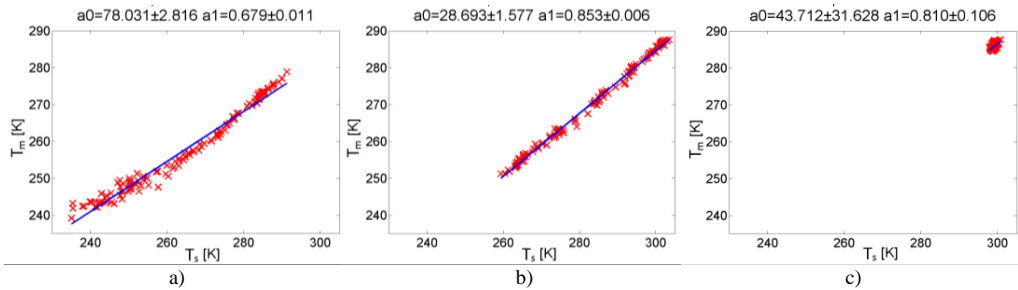
### 3.3.1 Lineáris modell

Bevis modellje alapján fejlesztett Lineáris modellnél a vízgőz középhőmérséklet ( $T_m$ ), illetve a felszíni hőmérséklet ( $T_s$ ) között a (2) egyenlettel lineáris kapcsolatot állítunk fel. Az  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontású, meteorológiai adatok 10 évnvi havi átlagértékeiből előállított 120 vízgőz középhőmérsékletre, illetve a hozzá tartozó felszíni hőmérsékletekre egyenest illesztettünk minden egyes rácspontban (1. ábra). Látható, hogy az egyenes illesztések bizonytalansága az Egyenlítőnél a legnagyobb, itt kis intervallumban változnak az értékek.

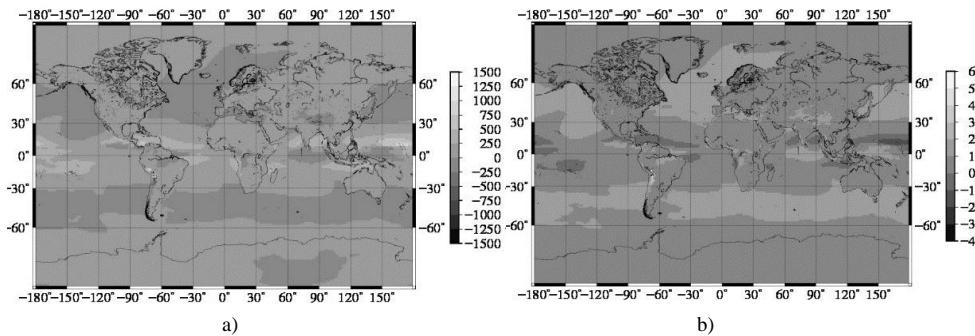
A továbbiakban a (2)-es képlet  $a_0$  és  $a_1$  paraméterei 2001 és 2010 közötti ECMWF ERA-Interim havi középértékei alapján  $1^\circ \times 1^\circ$ -os sűrűségben a teljes Földet lefedve rendelkezésre állnak (2. ábra). Megfigyelhető, hogy a paraméterek Bevis modelljében alkalmazott  $a_0 = 70.2$  K és  $a_1 = 0.72$  értékeitől eltérő eredményeket kapunk, főleg az Egyenlítő mentén elhelyezkedő szárazföldi területeken. Emellett az összes kontinensen találunk kisebb-nagyobb területeket, ahol változtak a paraméterek értékei, a legjelentősebben az Andok és a Himalája területén. Ezeken a területeken  $a_0$  és  $a_1$  kiugró, a Bevis-modellnél levezett paraméterektől nagyságrendekkel eltérő értéket is felvehet. Ennek oka lehet, hogy a magas hegységeken a felszíni hőmérsékletek havi átlagértékei szinte alig változnak és a vízgőz középhőmérséklete is csak kis változást mutat, így az adatok egy rövid közel függőleges, nagyon meredek egyenest rajzolnak ki, amihez illesztett egyenes ilyen kiugró paramétereket ad. Azt is meg kell jegyeznünk, hogy ezeken a területeken – az Egyenlítő mentén történő illesztéshez hasonlóan – a függvényillesztés bizonytalansága is nagyobb.

Ha egy tetszőleges helyen és időben meg szeretnénk határozni a skálatényező értékét, akkor a keresett ponttal az  $1^\circ \times 1^\circ$ -os rácshálóból a szomszédos négy pontban kiszámítjuk a vízgőz középhőmérsékletet a levezetett paraméterekkel és a felszíni hőmérséklet ismeretében a (2)-es képlettel, majd a (3)-as képlettel megadható a négy pont skálatényező értéke. A keresett skálatényező számítható a négy szomszédos skálatényező értékének bilineáris interpolációjával. Az előzőekben választott időben és helyen meghatározott nedves troposzferikus késleltetés (ZWD) és a skálatényező szorzatával (1) megadható az integrált vízgőztartalom (IWW). Így közel valós idejű vagy valós idejű GNSS feldolgozásból becsülhető az integrált vízgőztartalom.





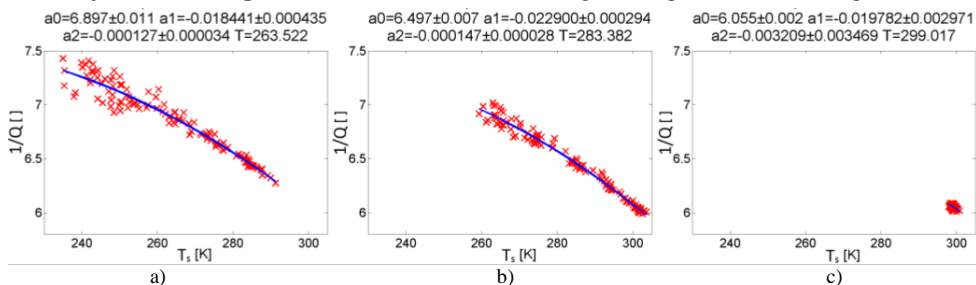
1. ábra. Lineáris modell egyenes illesztése 120 havi adata a 115°-os hosszúság mentén az a) 70°-os, a b) 45°-os, a c) 0°-os szélességeknél, illetve a kapott paraméterek értéke  $a_0$  [K],  $a_1$



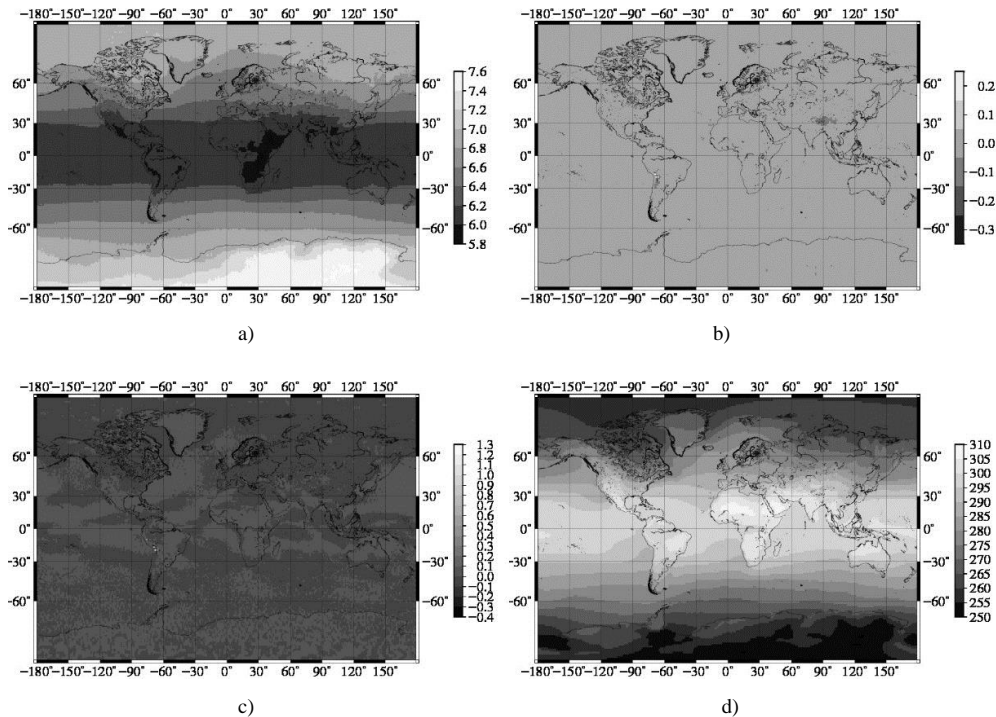
2. ábra. A Lineáris modellnél levezett a)  $a_0$  és b)  $a_1$  paraméterek  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontásban, illetve összehasonlításképp ugyanazeknek a paramétereknek az értéke Bevis modelljénél egységesen az egész Földre:  $a_0 = 70.2$  K és  $a_1 = 0.72$

### 3.3.2 Polinomos modell

Az Emardson–Derks-modellen alapuló Polinomos modellnél a (4)-es képletből közvetlenül kifejezhető a skálatényező ( $Q$ ). A skálatényező reciproka, illetve a felszíni hőmérséklet ( $T_s$ ) és a felszíni hőmérsékletek 120 havi átlagértéke ( $\bar{T}$ ) közötti összefüggés egy másodfokú polinommal jellemezhető. A nedves troposzferikus késleltetés ( $ZWD$ ) és az integrált vízgőztartalom ( $IWV$ ) kiszámítható az  $1^\circ \times 1^\circ$ -os rácson rendelkezésre álló 120 havi meteorológiai adat középértékéből, majd ezek alapján a skálatényező is megadható az (1)-es képlettel. A skálatényező reciproka, illetve a felszíni hőmérséklet és felszíni középhőmérséklet különbség 120 darab összetartozó értékpárjára másodfokú polinomot illesztünk a rácsponatokban (3. ábra). A polinom-illesztés után  $1^\circ \times 1^\circ$ -os sűrűségben adottak a Polinomos modell paraméterei:  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  és  $\bar{T}$  (4. ábra). A paraméterekben itt is az Egyenlítő környékén látható a legnagyobb változás az Emardson–Derks-modellértékeihez képest, ahol  $a_0 = 6.458$  m<sup>3</sup>/kg,  $a_1 = -1.78 \cdot 10^{-2}$  m<sup>3</sup>/kg/K,  $a_2 = -2.2 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>/kg/K<sup>2</sup> és  $\bar{T} = 283.49$  K. A skálatényező a levezetett paraméterek és a felszíni hőmérséklet ( $T_s$ ) és a középhőmérséklet ( $\bar{T}$ ) ismeretében számítható (4). Tetszőleges helyen és időben a skálatényező a szomszédos skálatényezők bilineáris interpolációjával fejezhető ki. Majd a nedves troposzferikus késleltetéssel az integrált vízgőztartalom is megadható (1).



3. ábra. Polinomos modell görbe illesztése 120 havi adata a 115°-os hosszúság mentén az a) 70°-os, a b) 45°-os, a c) 0°-os szélességeknél, illetve a kapott paraméterek és a középhőmérséklet értéke  $a_0$  [m<sup>3</sup>/kg],  $a_1$  [m<sup>3</sup>/kg/K],  $a_2$  [m<sup>3</sup>/kg/K<sup>2</sup>] és  $\bar{T}$  [K]



**4. ábra.** A Polinomos modell paramétereinek értéke a polinomillesztésnél levezetett a)  $a_0$ , b)  $a_1$ , c)  $a_2$  paraméterek és d)  $\bar{T}$  értéke  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontásban, illetve összehasonlításként a paramétereknek az értéke az Emardson–Derks-modellnél, egy-egy egészén az egész Földre:  $a_0 = 6.458 \text{ m}^3/\text{kg}$ ,  $a_1 = -1.78 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{K}$ ,  $a_2 = -2.2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{kg}/\text{K}^2$  és  $\bar{T} = 283.49 \text{ K}$

## 4 A fejlesztett modellek ellenőrzése rádiószonda adatokkal

### 4.1 NOAA rádiószonda adatok

A modellek ellenőrzéséhez a NOAA/ESRL-ben elérhető (National Oceanic and Atmospheric Administration/Earth System Research Laboratory – Nemzetközi Óceáni és Légköri Hivatal/Földi Rendszer Kutató Központ), a Földet lefedő 16 rádiószonda állomás 2010–2015. közötti adatait használtuk (1. és 2. táblázat). Az ellenőrzéshez használt adatok kiválasztásánál fontos szempont volt, hogy egy hosszabb időszakot öleljen fel, de ez az időtartam minél kisebb időbeli átfedést mutasson a modellparaméterek levezetéséhez használt 2001–2010. közötti ECMWF ERA-Interim reanalízis adatokkal. Erre azért van szükség, mert az ECMWF ERA-Interim adatok – sok más adat mellett – a rádiószondás méréseket is tartalmazzák. Számításainkhoz az ingyenesen letölthető néhány NOAA/ESRL adatból (nyomás, magasság, hőmérséklet és harmatpont) levezettük a nedves troposzferikus késleltetést és az integrált vízgőztartalmat (Rózsa et al. 2014). Ezek hányadosaként megkaptuk a skálatényezőt, ami referenciaértékként szolgál a modellek ellenőrzéséhez. A rádiószondás észlelés időpontjára a 2 m-es magasságban mért felszíni hőmérséklet felhasználva, meghatároztuk a Lineáris és a Polinomos modellel is a skálatényező értékét, majd ezeket összevetettük a referencia értékekkel.

Megjegyezzük, hogy jóval több rádiószonda állomást választottunk ki a modellek ellenőrzéséhez, de többet ki kellett zárunk a ritka mérések miatt, illetve kivettük a listából azokat is, ahol a rádiószonda felbocsájtási magassága, illetve az ECMWF adatok kezdeti magassága több mint 250 méterrel eltért egymástól. Ezek után 16 állomás maradt a Föld különböző részeiről (5. ábra).

1. táblázat. A NOAA/ESRL rádiószonda hálózatból használt állomások és jellemzőik

WMO	Szélesség [°]	Hosszúság [°]	Állomás neve, ország	Szonda- típus	Mérés- szám [db]
02185	65.55	22.13	Lulea Kallax (SE)	RS92/A	1783
12843	47.43	19.18	Budapest/Pestszentlőrinc (HU)	RS92/DC3	1961
20292	77.72	104.30	GMO IM.E.K. Fedorova (RA)	MRZ/MARL	3460
24125	68.50	112.43	Olenek (RA)	MRZ/VEK	3743
24959	62.08	129.75	Jakutsk (RA)	MRZ/VEK	3900
40437	24.93	46.72	King Khalid Int. Airport (SA)	RS92/DC3	2719
42182	28.58	77.20	New Delhi/Safdarjung (IN)	RS92/DC3	2463
45004	22.32	114.17	Kowloon (HK)	RS92/A	3831
48698	1.37	103.98	Singapore/Changi Airport (SG)	DFM9	3158
61291	12.53	-7.95	Bamako/Senou (ML)	RS92/DC	2524
72402	37.93	-75.48	Wallops Island, VA. (US)	LMS6	4289
83378	-15.87	-47.93	Brasilia Airport (BR)	RS92/DC3	3600
89002	-70.67	-8.25	Neumayer (DE)	RS92/DC3	1936
89664	-77.85	166.67	Mcmurdo (US)	RS92/DC3	2066
94610	-31.93	115.95	Perth Airport (AU)	RS92/DC3	1479
94866	-37.67	144.83	Melbourne Airport (AU)	RS92/DC3	2602

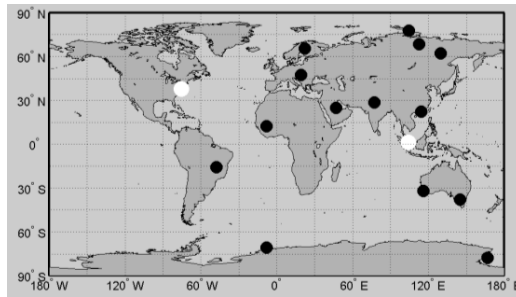
2. táblázat. A NOAA/ESRL hálózat számításainknál használt rádiószondák rövidítése és a kifejtése

Rövidítés	Rádiószonda típus kifejtése
<b>RS92/A</b>	Vaisala RS92/Autosonde (Finnország)
<b>RS92/DC</b>	Vaisala RS92/Digicora I, II vagy MARWIN (Finnország)
<b>RS92/DC3</b>	Vaisala RS92/Digicora III (Finnország)
<b>MRZ</b>	MARL-A vagy Vektor-M-MRZ (Orosz Föderáció)
<b>DFM9</b>	Graw DFM-09 (Németország)
<b>LMS6</b>	Sippican LMS6 w

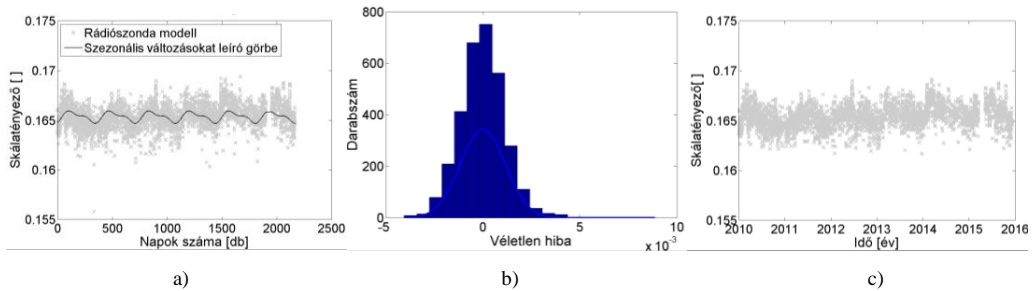
A modellek ellenőrzését két kiválasztott NOAA rádiószonda állomás alapján mutatjuk be: az egyik a 48698-Singapore, míg a másik a 72402-Wallops Island (5. ábra). Azért esett a választás ezekre az állomásokra, mert az egyik a Bevis- és az Emardson–Derks-modell paramétereinek levezetési helyétől távol, az Egyenlítő környékén a másik pedig az Egyesült Államok területén helyezkedik el, ahonnan a Bevis-modell paraméterei származnak.

A rádiószonda állomások méréseiből levezetett skálatényező értékek tartalmaznak néhány kiugró értéket. Ennek oka, hogy méréseink valószínűségi változónak tekinthetők, amelyeket véletlen hibák terhelhetnek. Ezek tévesen befolyásolhatják az eredményeket, így mielőtt a vizsgált modellek skálatényezőivel összevetnénk őket, szűrjük az adatokat. Feltételezhető, hogy a véletlen hibák a normál eloszlást követik, így a kiugró értékek szűrésére a 3 szigma szabályt alkalmaztuk. Első lépésként a rádiószonda profilokból meghatározott skálatényező skálatényező változásait jól jellemző éves periódusú görbét illesztettünk az adatsorra (6.a ábra, 8.a ábra). Ezt követően a szezonális hatásokat eltávolítva meghatároztuk a véletlen hibákat. Majd a véletlen hiba értékekre Gauss-görbét (normálgörbét) illesztettünk (6.b ábra, 8.b ábra). Ez alapján a szórás háromszorosánál nagyobb értékeket kiszűrtük az adatsorokból (6.c ábra, 8.c ábra).

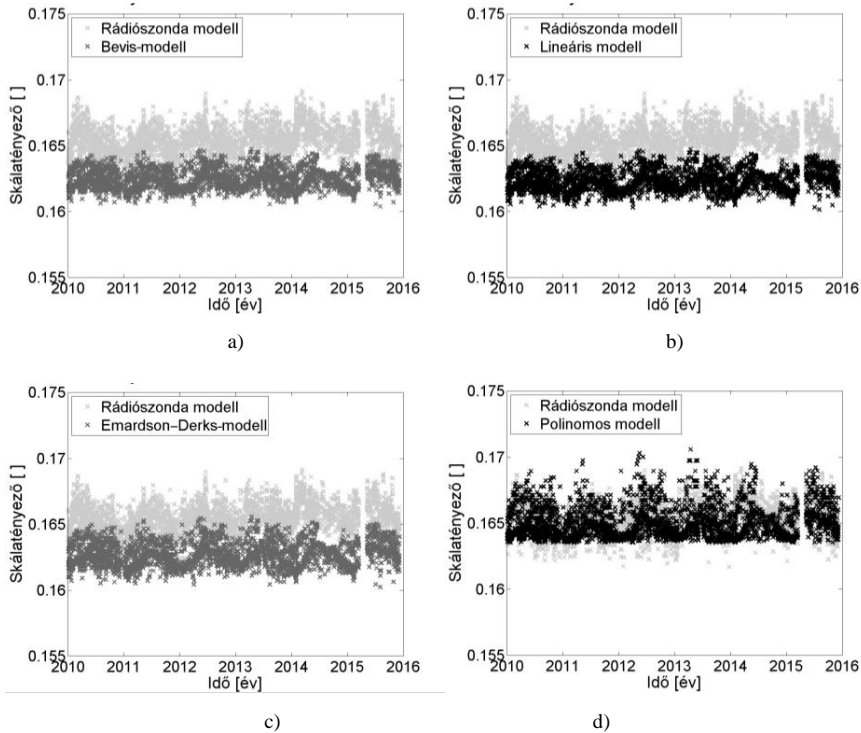
Az Egyenlítőnél lévő Singapore állomás szűrt skálatényező értékei (6.c ábra) nagy szórást mutatnak, a szezonális változások nem láthatók olyan egyértelműen, mint a Wallops Island-i (8.c ábra) adatoknál. Ez jellemző még a szintén Egyenlítő közeli brazil állomás adatsorára is. Ennek oka lehet az éghajlat, mert az egyenlítői övben a különböző meteorológiai jellemzők évi változása kisebb, mint a 4 évszakú mérsékelt övben. A 7. ábrán látható, hogy a Bevis-modell és az általunk fejlesztett Lineáris modell skálatényezői is hasonló módon közelítik a rádiószondás értékeket, de a modellek közötti eltérésről nem tudunk pontosabb információt leolvasni. Az viszont már egyértelműen látszik, hogy a Polinomos modell jobban közelíti a rádiószondás méréseiből levezetett skálatényezőt, mint az eredeti Emardson–Derks-modell.



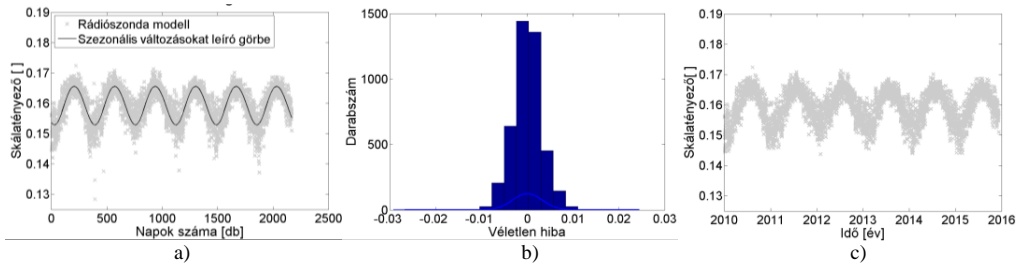
5. ábra. A NOAA rádiószonda hálózat felhasznált állomásai, illetve kiemelve a modellek ellenőrzését bemutató két állomás: 48698-Singapore és 72402-Wallops Island



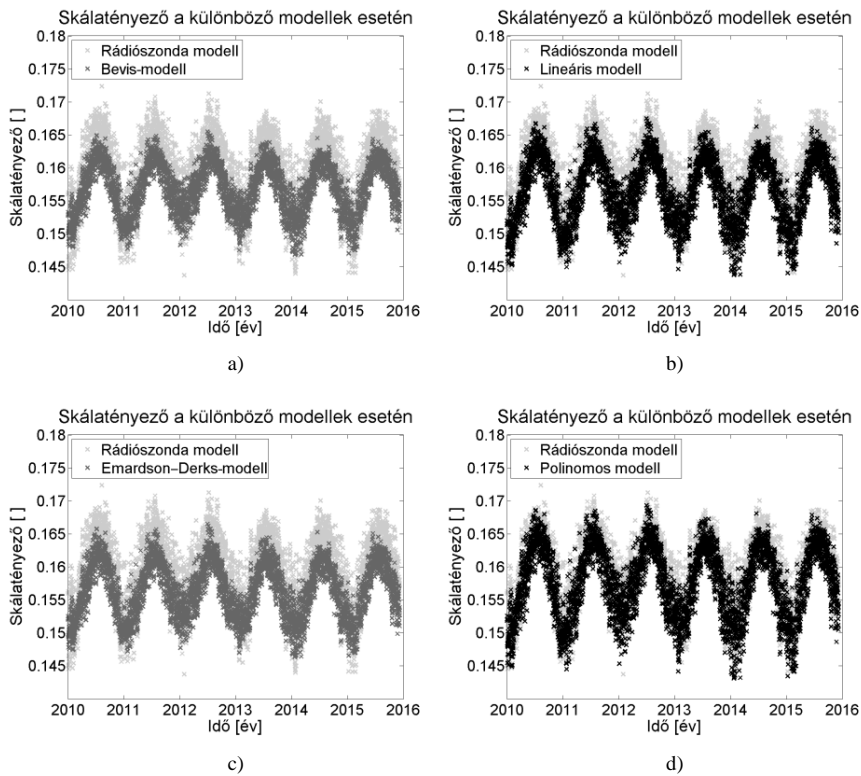
6. ábra. A NOAA rádiószonda adatok szűrése (48698-Singapore) a) Skálátényező és annak szezonális változásait leíró görbe. b) Hisztogram a véletlen hibákról és normálgörbe illesztése. c) Szűrt rádiószonda adatok



7. ábra. A NOAA rádiószonda adatokból levezett, az eredeti (a) Bevis-modell, illetve c) Emardson–Derks-modell és a fejlesztett modellek (b) Lineáris, illetve d) Polinomos) skálátényező értékeinek összehasonlítása (48698-Singapore)



8. ábra. A NOAA rádiószonda adatok szűrése (72402-Wallops Island) a) Skálatényező és annak szezonális változásait leíró görbe. b) Hísztoqram a véletlen hibákról és normálgörbe illesztése. c) Szűrt rádiószonda adatok



9. ábra. A NOAA rádiószonda adatokból levezett, az eredeti (a) Bevis-modell, illetve c) Emdarson–Derks-modell és a fejlesztett modellek (b) Lineáris, illetve d) Polinomos skálatényező értékeinek összehasonlítása (72402-Wallops Island)

A pontosabb következtetések levonásához a modellek értékelését számszerűsítettük, az alábbi mennyiségek bevezetésével:

$$Q_{\text{átlag}\%} = \frac{|\langle \text{átlag}(Q_R - Q_{B,ED}) \rangle| - |\langle \text{átlag}(Q_R - Q_{L,P}) \rangle|}{\text{átlag } Q_R} \cdot 100, \quad (12)$$

$$Q_{\text{szórás}\%} = \frac{|\langle \text{szórás}(Q_R - Q_{B,ED}) \rangle| - |\langle \text{szórás}(Q_R - Q_{L,P}) \rangle|}{\text{átlag } Q_R} \cdot 100, \quad (13)$$

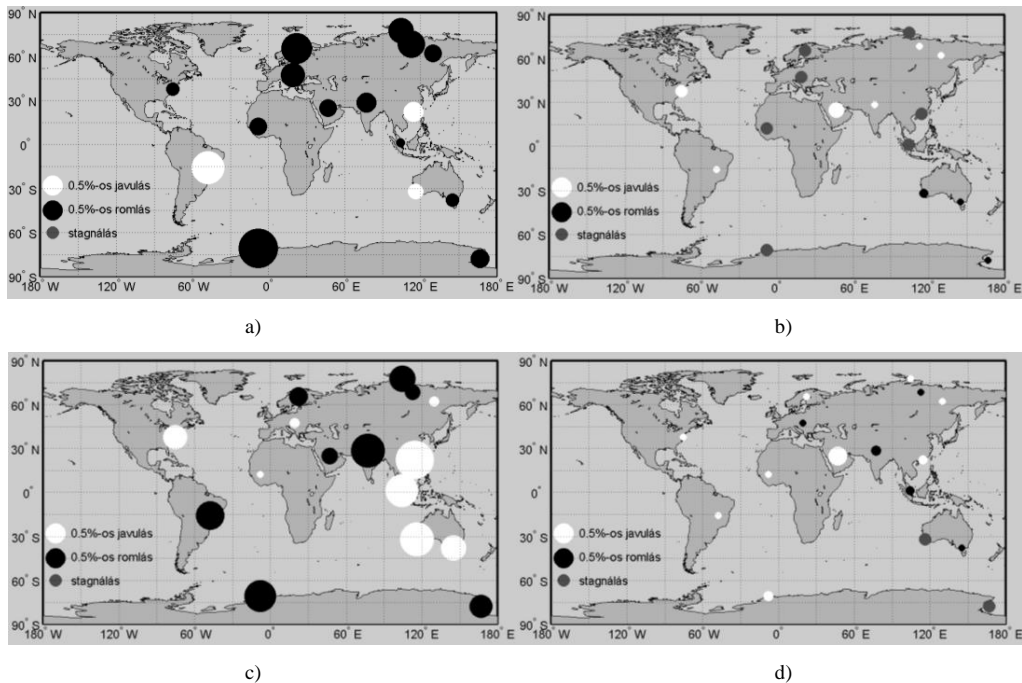
ahol  $Q_{\text{átlag}\%}$  a Bevis/Emdarson–Derks és Lineáris/Polinomos modellek referenciamodelltől vett eltérései középértékeinek különbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva [%],  $Q_{\text{szórás}\%}$  Be-

vis/Emardson–Derks és Lineáris/Polinomos modellek referenciamodelltől vett eltéréseinek szóráskülönbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva [%].  $Q_{\text{átlag\%}}$  és  $Q_{\text{szórás\%}}$  2-2 esetet tartalmaz minden állomás esetén: a Bevis- és Lineáris, illetve Emardson–Derks- és Polinomos modell összehasonlítását.  $Q_R$  a referenciaként szolgáló rádiószondás mérésből levezett skálátényező értéke,  $Q_{B,ED}$  az eredeti Bevis-, illetve Emardson–Derks-modell alapján meghatározott skálátényező, illetve a  $Q_{L,P}$  a fejlesztett Lineáris és Polinomos modellek skálátényező értékei (3. táblázat, 10. ábra).

Így már látható, hogy az átlagoknál a Bevis-modell csekély mértékben jobb eredményt ad, mint a Lineáris átlagosan mintegy 0.1%-kal. A Polinomos modell viszont már jelentős, 1.5%-os javulást ért el az Emardson–Derks-modellhez képest (3. táblázat, 10. ábra).

Wallops Island skálátényező értékei szépen mutatják a szezonális változásokat (8.a, c ábra). Az átlagoknál megfigyelhető, hogy az eredeti Bevis-modell kis  $-0.3\%$ -os  $-$  mértékben jobb eredményt ad, mint az új Lineáris modell, ennek valószínű az az oka, hogy a Bevis-modell az Egyesült Államok rádiószondás adataiból lett levezetve. A fejlesztett Polinomos modell itt is jobban közelíti a referencia skálátényező értékek ( $0.8\%$ -kal), mint az eredeti Emardson–Derks-modell (9-10. ábra, 3. táblázat).

Az összes NOAA rádiószondázó állomás adatait figyelembe véve nehéz egyértelmű következtetéseket levonni. Várható volt, hogy az északi területeken a fejlesztett modellek a régi modellekhez képest nem hoznak nagy javulást a referenciaadatok közelítésében, mert a Bevis-modell az egyesült államokbeli adatokból, míg az Emardson–Derks-modell európai adatok alapján lett levezetve. Jobb eredményekre inkább az Egyenlítő környékén és a déli féltekén lehetett számítani. A Lineáris modelről nem mondható el egyértelműen, hogy ezeken a területeken javulást ért el. Az eltérések középértéke összesen három helyen javult valamelyest ( $0.3\%$ ,  $0.5\%$ ,  $1.4\%$ ), mindegyik a várt térségben, de vannak olyan állomások délen, ahol igaz kis mértékben, de rosszabb eredményt kaptunk, míg a Déli-sarkon jelentősebb romlás is tapasztalható ( $2.0\%$ ) (10.a ábra).



**10. ábra.** a) A Bevis és a Lineáris valamint c) az Emardson–Derks és Polinomos modellek referenciamodelltől vett %-os eltéréseinek a különbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva (12. képlet). b) A Bevis és a Lineáris valamint d) az Emardson–Derks és a Polinomos modellek referenciamodelltől vett %-os eltéréseinek szóráskülönbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva (13. képlet). Az újonnan fejlesztett modell jobb eredményt ad: fehér, a régi modellek adnak jobb eredményt: fekete, nincs változás: szürke. A körök átmérője jelzi az értékek nagyságát

3. táblázat. A vizsgált NOAA/ESRL rádiószondázó állomások jellemzői (12)-es, (13)-as képlet alapján

Állomás neve, ország	Vizsgált modellek	Vizsgált mennyiség	Érték [%]
Singapore/Changi Airport (SG)	Emardson–Derks/Polino- mos	$Q_{\text{átlag\%}}$ (12)	1.5
		$Q_{\text{szórás\%}}$ (13)	-0.1
	Bevis/Lineáris	$Q_{\text{átlag\%}}$ (12)	-0.1
		$Q_{\text{szórás\%}}$ (13)	0.0
Wallops Island, VA. (US)	Emardson–Derks/Polino- mos	$Q_{\text{átlag\%}}$ (12)	0.8
		$Q_{\text{szórás\%}}$ (13)	0.1
	Bevis/Lineáris	$Q_{\text{átlag\%}}$ (12)	-0.3
		$Q_{\text{szórás\%}}$ (13)	0.2

A Lineáris modellnél pontosabbnak tekinthető Polinomos modellnél már az állomások felénél, 8 helyen javultak a középértékek (0.1-1.9%), ebből 5 az Egyenlítő és Ausztrália körül helyezkedik el. Meglepetésszerűen kisebb javulások az északabbra lévő állomásoknál is tapasztalhatók, köztük a hazai állomásunknál (12843, Budapest-Pestszentlőrinc) is, illetve a Déli-sarkon ismét rosszabb eredményeket kaptunk (10.c ábra). A vizsgálatainkban nagyobb jelentőséget tulajdonítunk a középértékek változásának, hiszen ez fejezi ki jobban a modell szabályos hibájának mértékét. A szórások csak kis mértékben változtak mindkét fejlesztett modellnél, többnyire javultak (0.1-0.5%) vagy stagnálnak, pár helyen romlottak (0.1%) (10.b, d ábra).

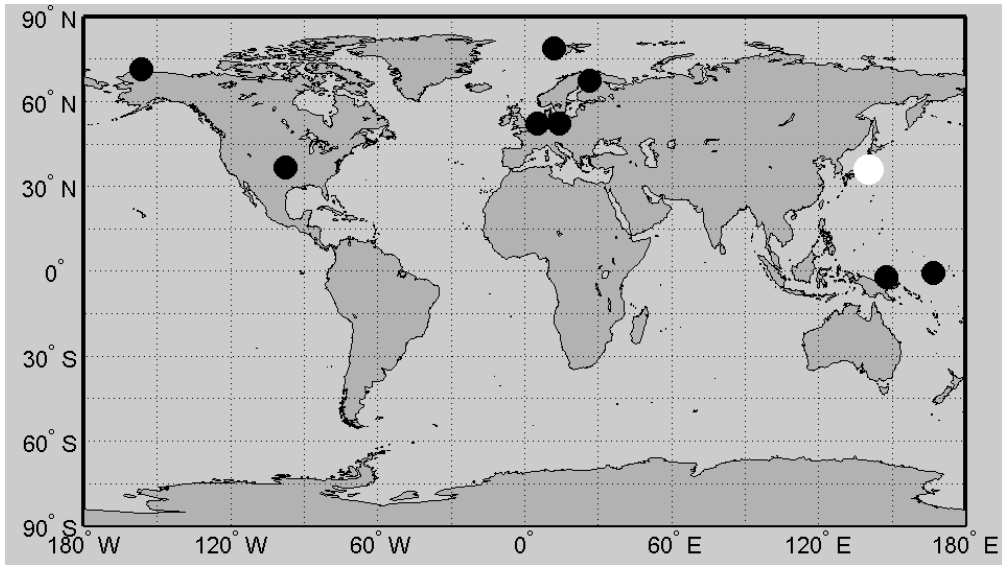
Meg kell jegyeznünk, hogy a vizsgált hálózatban különböző típusú rádiószondákat alkalmaznak, ezek méréseivel esetenként különböző pontosságú adatok nyerhetők (Nash et al. 2011), ami befolyásolhatja a vizsgálatokat. Emiatt a következőkben egy homogén műszerezettségűvel rendelkező rádiószonda hálózatot is felhasználtunk a modellek ellenőrzéséhez. A GRUAN (Global Climate Observing System (GCOS) Reference Upper-Air Network – Globális Klímamegfigyelő Rendszer Felsőlégi Referencia Hálózat) feladata hosszútávú, nagy pontosságú légköri profilmérések folytatása a felszíntől, a troposzférán át a sztratoszféra alsóbb rétegéig. A GRUAN a hosszútávú - évtizedes, évszázados, végig azonos műszerrel történő adatgyűjtéssel a klímaváltozás megismerésében is fontos szerepet játszik (Bodeker et al. 2014).

## 4.2 GRUAN rádiószonda hálózat

Jelenleg 24 globális állomással rendelkezik a hálózat, amelyből 16 állomáson történt Vaisaila RS92 felbocsájtás, néhányon csak próbaszerűen vagy pár éves időszakban. A korábban felhasznált állomáshálózathoz hasonlóan, itt is kihagytuk azokat az állomásokat a feldolgozásból, ahol ritka vagy néhány éves mérés áll rendelkezésre. Illetve egy állomást azért zártunk ki, mert a rádiószonda felbocsájtási magassága, illetve az ECMWF adatok kezdeti magassága jelentősen eltért, 400 m körüli értékkel. Végül 9 állomás maradt a referencia skálátényező értékek számításához (4. táblázat, 11. ábra).

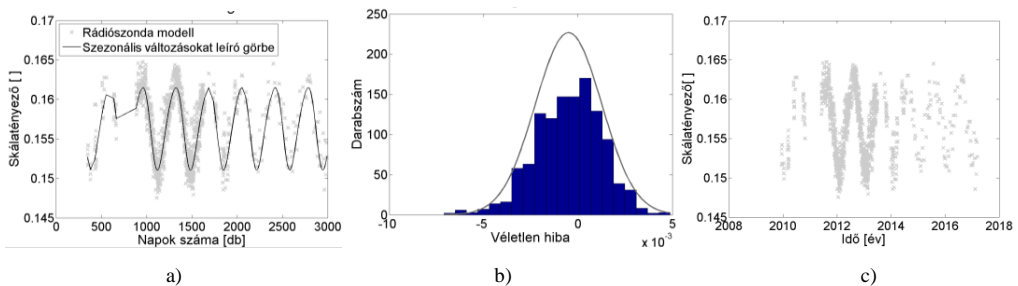
4. táblázat. A GRUAN rádiószonda hálózatból használt állomások és jellemzőik

WMO Rövidítés	Szélesség [°]	Hosszúság [°]	Állomás neve, ország	Szonda-típus	Mérés-szám [db]	
70027	BAR	71.32	-156.62	Barrow (US)	RS92-GDP.2	3558
06260	CAB	52.10	5.18	Cabauw (NL)	RS92-GDP.2	1328
10393	LIN	52.21	14.12	Lindenberg (DE)	RS92-GDP.2	10242
	MAN	-2.06	147.43	Manus (PG)	RS92-GDP.2	389
91530	NAU	-0.52	166.92	Nauru (NR)	RS92-GDP.2	287
01004	NYA	78.92	11.92	Ny-Alesund (NO)	RS92-GDP.2	3526
74647	SGP	36.61	-97.49	Lamont (US)	RS92-GDP.2	7484
02836	SOD	67.37	26.63	Sodankylä (FI)	RS92-GDP.2	2563
47646	TAT	36.06	140.13	Tateno (JP)	RS92-GDP.2	1174



11. ábra. A GRUAN rádiószonda hálózat felhasznált állomásai, illetve kiemelve a modellek ellenőrzését bemutató GRUAN rádiószonda állomás: TAT-Tateno

A Japánban lévő Tateno állomás 2010-2016. közötti adatsorából egyszerre szembevetünk, hogy 2011-től 2013-ig egész sűrű rádiószonda-felbocsajtás volt, átlagosan napi kettő, az idősor maradék részében viszont elég ritka, csak havonta néhány alkalommal. A szezonális változások így is jól megfigyelhetők (12.a ábra). A skálatényező értékek szűrése itt is elvégezhető Gauss-görbe illesztésével a véletlen hibákhoz és a 3 szigma szabály alkalmazásával (12.b, c ábra). Látható, hogy a Lineáris modell a sűrű méréseknel jobban eltalálja az amplitúdót, de összességében 0.6%-kal rosszabbul közelíti a GRUAN mérésekből levezetett skálatényező értékeket, mint az eredeti Bevis-modell. A Polinomos modellnél minimális javulás, 0.2% tapasztalható az Emaradson–Derks-modellhez képest (13. ábra, 5. táblázat).

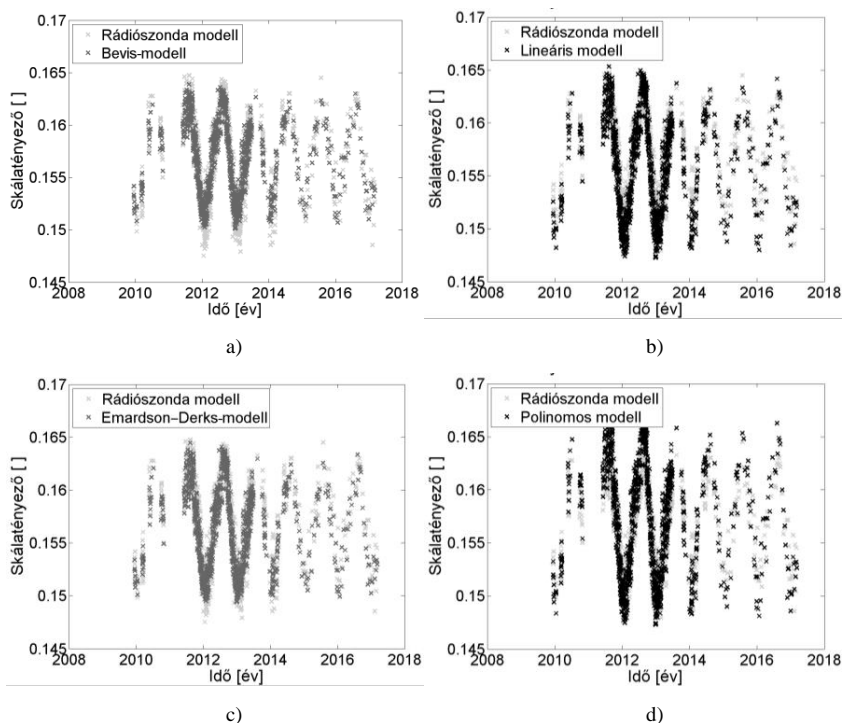


12. ábra. A GRUAN rádiószonda adatok szűrése (TAT-Tateno) a) skálatényező és annak szezonális változásait leíró görbe. b) Histogramm a véletlen hibákról és normálgörbe illesztése. c) Szűrt rádiószonda modell

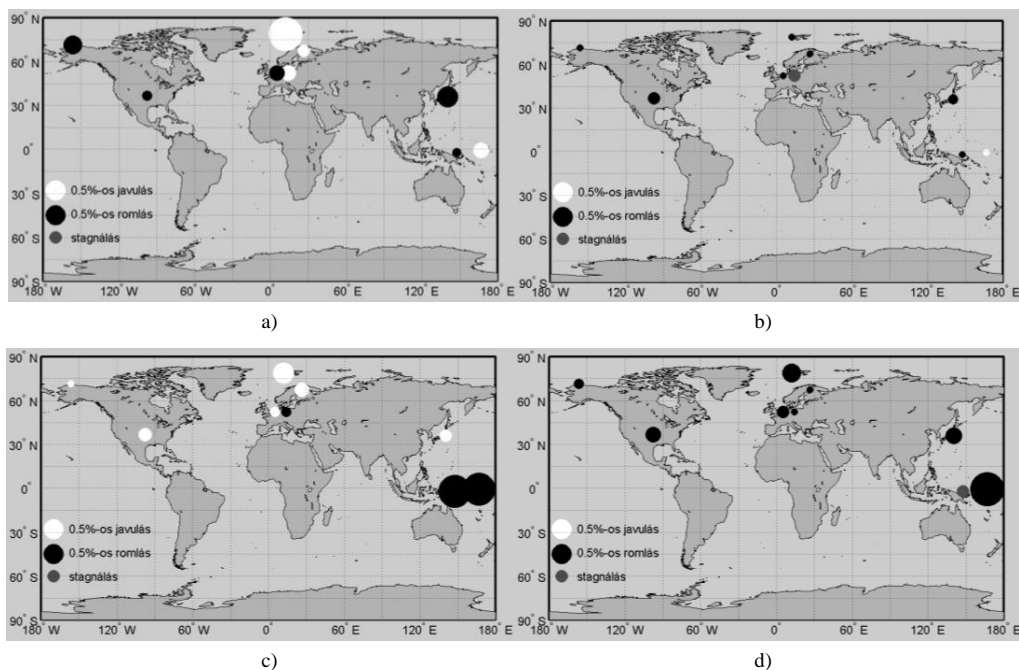
5. táblázat. A vizsgált NOAA/ESRL rádiószondázó állomások jellemzői (12)-es, (13)-as képlet alapján

Állomás neve, ország	Vizsgált modellek	Vizsgált mennyiség	Érték [%]
Tateno (JP)	Emaradson–Derks/Polinomos	$Q_{\text{átlag}}\%$ (12)	0.2
		$Q_{\text{szórás}}\%$ (13)	-0.4
	Bevis/Lineáris	$Q_{\text{átlag}}\%$ (12)	-0.6
		$Q_{\text{szórás}}\%$ (13)	-0.1





13. ábra. A GRUAN rádiószonda adatokból levezett, az eredeti (a) Bevis-modell, illetve c) Emardson–Derks-modell és a fejlesztett modellek (b) Lineáris, illetve d) Polinomos) skálatényező értékeinek összehasonlítása (TAT-Tateno)



14. ábra a)/c) Bevis/Emardson–Derks és Lineáris/Polinomos modellek referenciamodelltől vett eltéréseinek a középértékeinek különbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva (12. képlet) [%] b)/d) Bevis/Emardson–Derks és Lineáris/Polinomos modellek referenciamodelltől vett eltéréseinek szórás-különbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva (13. képlet) [%].

A NOAA adatokkal ellentétben a GRUAN állomáshálózat kevés olyan állomással rendelkezik, amelyre 5 éves, legalább napi rendszerességű rádiószonda idősor áll rendelkezésre, illetve ezek az állomások nem biztosítanak globális lefedettséget, így a déli féltekéről nincs is információnk. Az összes állomást elemezve, a Bevis- és a Lineáris modell referenciamodelltől vett eltérései középértékeinek különbsége a referenciamodell középértékéhez viszonyítva 4 helyen javult (0.2-1.5%) és 5 állomáson romlott (0.1-0.6%), területi összefüggés nélkül (14.a ábra).

Az átlagérték az Emaradson–Derks-modell és a Polinomos modell vizsgálatánál a fejlesztett modell javára 6 helyen javult, 3 helyen romlott. Az északi féltekén kismértékű javulást tapasztaltunk (0.1-0.6%), de az Egyenlítő környékén lévő 2 állomás esetén 1.4%-kal, illetve 1.5%-kal rosszabbul közelített (14.c ábra). A szórások többnyire elenyésző romlást mutatnak a Lineáris modellnél: 0.1-0.2%, egy helyen változatlan és egy alkalommal 0.1%-kal javult. A Polinomos modellnél egy helyen stagnál, a többi helyen romlott: 0.1-1.5% közötti értékkel (14.b-d ábra).

## 5 Összegzés

Bevis- és Emaradson–Derks-modell empirikus képleteit alapul véve új modelleket vezettünk le a skálátényező meghatározásához: a Lineáris és a Polinomos modellt. Az eredeti modellekkel ellentétben a levezett modellekkel figyelembe vehetők a helyi éghajlati sajátosságok, mert 2001-2010. közötti  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontású ECMWF ERA-Interim reanalízis mezők havi középértékeiből lettek levezetve paramétereik. Ez után a Lineáris és Polinomos modell skálátényező értékei  $1^\circ \times 1^\circ$ -os felbontásban megadhatók. A skálátényező értékeit a NOAA és a GRUAN rádiószondás mérési adatokkal is ellenőriztük, előbbi előnye a globális lefedettség, utóbbié az egységes rádiószonda típus.

A NOAA rádiószondás adatokkal ellenőrizve a Lineáris modell átlagértékei 3 helyen javultak az Egyenlítő környékén és a déli féltekén, 13 helyen kis mértékben rosszabb eredményt kaptunk, főleg az északi féltekén a  $20^\circ$ -nál magasabb szélességű állomások esetében. Ennek oka lehet, hogy az egyesült államokbeli adatokból levezett Bevis-modell jó értékeket ad ezekre a területekre. Az átlag a Polinomos modellnél már a vizsgált állomások felénél javulást mutat, összefüggő Egyenlítő környéki területre és meglepően az északi féltekén a magasabb földrajzi szélességű állomásoknál is.

A GRUAN sajnos még nem elég kiépített a vizsgálat szempontjából fontosabb déli területeken, a Lineáris modell átlagos eltérései 4 helyen javultak és 5 állomásnál romlottak. A Polinomos modell itt is nagyobb javulást ért el, 9 állomásból, 6-nál javult az érték, 3-nál rosszabb eredményt kaptunk, amelyből 2 az Egyenlítő közelében található. A szórások mindkét állomáshálózatnál és modellnél szinte kivétel nélkül minimális változásokat mutattak.

Ami várható volt, az a vizsgálatokból látszik, hogy az Emaradson–Derks-modellen alapuló, másodfokú Polinomos modell jobb eredményeket ad, mint a Bevis-modellen alapuló Lineáris. Egyik ellenőrzéshez használt állomáshálózat sem tökéletes, globális lefedettségre és egy állomáshálózaton belül azonos rádiószonda típusra lenne szükség. Az eredmények néhol ellentétes értékeket mutatnak a várttal, így célunk a közeljövőben egy teljesen független ECMWF többéves adatsorral való ellenőrzés.

## Hivatkozások

- Askne J, Nordius H** (1987) Estimation of tropospheric delay for microwaves from surface weather data. *Radio Science*, 22(3), 379-386.
- Bevis M, Businger S, Herring TA, Rocken C, Anthes A, Ware R** (1992): GPS meteorology: Remote sensing of atmospheric water vapor using the global positioning system. *Journal of Geophysical Research*, 97, 15787–15801.
- Bodeker G, Mikalsen A, Calbet X, Kurylo M, Lahoz W, Rosenlof K** (2014) Outcomes of the GRUAN Network. Expansion Workshop (GRUAN-RP-4).
- Boehm J, Schuh H** (2003): Vienna Mapping Functions. 16. Working Meeting on European VLBI for Geodesy and Astrometry, 131-143.
- Dee DP, Uppala S, Simmons A, Berrisford P, Poli P, Kobayashi S, Andrae UM, Balmaseda A, Balsamo G, Bauer P, Bechtold P, Beljaars ACM, van de Berg L, Bidlot JR, Bormann N, Delsol C, Dragani R, Fuentes M, Geer A, Haimberger L, Healy S, Hersbach H, Hólm EV, Isaksen L, Kállberg PW, Köhler M, Matricardi M, McNally A, Monge-Sanz BM, Morcrette JJ, Park BK, Peubey C, De Rosnay P, Tavalato C, Thepaut JJ, Vitart F** (2011): The ERA-Interim reanalysis: configuration and performance of the data assimilation system. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 137, 553–597.

- Emardson TR, Derks HJP** (2000): On the relation between the wet delay and the integrated precipitable water vapour in the European atmosphere. *Meteorological Applications*, 7, 61–68.
- Haase J, Ge M, Vedel H, Calais E** (2003) Accuracy and variability of GPS tropospheric delay measurements of water vapor in the western Mediterranean. *Journal of Applied Meteorology*, 42(11), 1547-1568.
- Igondová M, Cibulka D** (2010) Precipitable water vapour and zenith total delay time series and models over Slovakia and vicinity. *Contributions to Geophysics and Geodesy*, 40(4), 299-312.
- ISO 2533** (1975): 1975 szabvány, Standard Atmosphere.
- Nash J, Oakley T, Vömel H, Wei LI** (2011): WMO intercomparison of high quality radiosonde systems. Yangjiang, China, 12 July – 3 August 2010, WMO instruments and observing methods Report No. 107.
- Rocken C, Sokolovskiy S, Johnson JM, Hunt D** (2001): Improved Mapping of Tropospheric Delays. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 18, 1205-1213.
- Rózsza Sz, Dombai F, Németh P, Ablonczy D** (2009) Integrált vízgőztartalom becslése GPS adatok alapján *Geomatikai Közlemények*, 12, 187-196.
- Rózsza Sz, Weidinger T, Gyöngyösi AZ, Kenyeres A** (2012): The role of GNSS infrastructure in the monitoring of atmospheric water vapor. *IDOJÁRÁS / Quarterly Journal of the Hungarian Meteorological Service*, 116, 1-20.
- Rózsza Sz, Kenyeres A, Weidinger T, Gyöngyösi AZ** (2014) Near real-time estimation of integrated water vapour from GNSS observations in Hungary. *International Association of Geodesy Symposia*, 139, 31-39.
- Thayer GD** (1974): An improved equation for the radio refractive index of air. *Radio Science*, 9, 803–807.
- World Meteorological Organization (WMO)** (2008): Guide to meteorological instruments and methods of observation. WMO-No. 8.

# GEOID HELYI FELÜLETDARABJÁNAK MEGHATÁROZÁSA A QDAEDALUS-RENDSZERREL VÉGZETT FÜGGŐVONAL- ELHAJLÁS MÉRÉSEKKEL

Csala Bettina\*, Tóth Gyula\*\*



**Local geoid determination based on measuring the deflection of the vertical by QDaedalus system** – One of the most important task of geodesy is the determination of the Earth's theoretical shape – the geoid – with the highest available accuracy. Several methods are used to determine the geoid which has an indispensable importance in high precision surveying. One of the methods is the determination by measuring the deflection of the vertical. The QDaedalus system, that has been developed in the last decade, offers cost and time efficient way in astronomical geodetic measurement. It can be used for high precision determination of the deflection of the vertical. With the measured vertical deflections, precise local geoid surface can be calculated as it is demonstrated by this paper.

**Keywords:** deflection of the vertical, astro-geodesy, geoid, inversion

A felsőgeodézia legfontosabb feladata a Föld elméleti alakjának szélső pontosságú meghatározása, ami a gyakorlati geodéziában is egyre nagyobb szerephez jut. A geoid-meghatározás egyik lehetséges módja a csillagászati szintezés, melynek kiinduló adata a helyi függőleges iránya, azaz a függővonal-elhajlás. Az utóbbi években kifejlesztett QDaedalus rendszer idő- és költséghatékony megoldást nyújt a szükséges csillagászati-geodéziai mérések elvégzéséhez. Az így nyert szélső pontosságú függővonal-elhajlás értékekből lehetővé válik a lehető legpontosabb geoid felületdarab meghatározása.

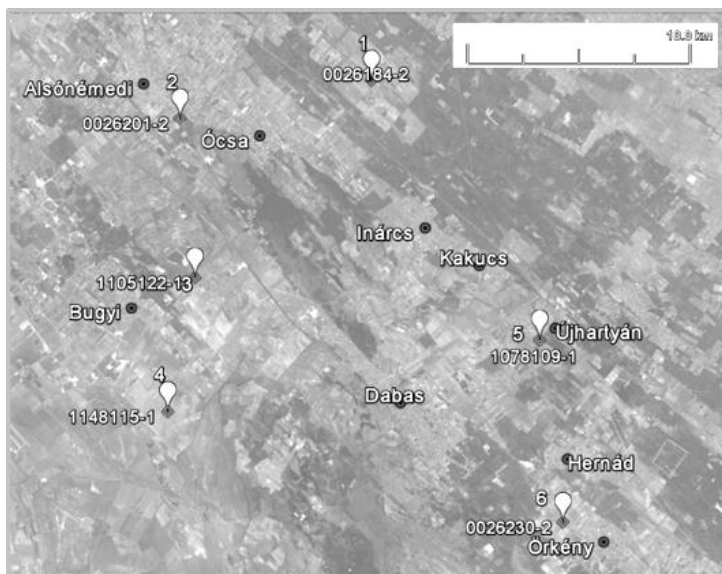
**Kulcsszavak:** függővonal-elhajlás, csillagászati-geodézia, geoid, inverzió

## 1 Bevezetés

A szélső pontosságú geoid-meghatározás mind az elméleti, mind a gyakorlati geodéziában nagy jelentőséggel bír. Itt megemlíthetjük akár a széles körben alkalmazott GNSS-technikát vagy a nagy pontosságot igénylő mérnökgeodéziai alkalmazásokat. A GNSS mérésekből nyert ellipszoid feletti magasságértékek gyakorlati felhasználásához szükségünk van a geoid nagyon pontos ismeretére. A geoidot meghatározhatjuk a helyi függőleges irányának ismeretében. Mivel a hagyományos geodéziai méréseknél a műszerek állótengelyének függőlegessé tételekor a helyi függőleges irányához igazodunk, ezért ennek pontos ismerete kulcsfontosságú bizonyos nagy pontosságot igénylő mérnökgeodéziai munkák elvégzéséhez. Erre a tényre már ráismertek az alagútépítések kapcsán is, mint például az AlpTransit alagút építésekor (Bürki et al. 2007). A leghosszabb, 17 km hosszú alagútját 0,1" pontosság mellett kellett kiépíteni, amihez igen pontos mérnökgeodéziai munkára volt szükség. Az alagút építésekor a felszíni hálózat létrehozásához szükséges geodéziai méréseket zenitkamerával végezték el. Ez egy jó példa arra, hogy a megkövetelt, szélső pontosságot csak a függővonal-elhajlások figyelembevételével lehet biztosítani. A CERN egy részecskegyorsítójának építése kapcsán szintén fontos szerepet kapott a helyi függőleges iránya. A megkövetelt pontosság 1 mm volt 1 km-en. A feladat végrehajtásához a QDaedalus rendszerrel végezték el a szükséges méréseket.

A mérési terület bemutatása már egy korábbi tanulmány során megtörtént, amikor GNSS méréseket végeztünk felsőrendű szintezéssel kiegészítve szintén geoid-meghatározás céljából (Csala 2013), így lehetőségünk nyílt a kétféle mérési módszer és a kétféle geoid-meghatározási eljárás összehasonlítására is. A mérési terület Alsónémeditől Örkényig terjed (1. ábra). A hat mérési pont megközelítő-

leg 20 km-es átmérőjű kör mentén helyezkedik el közel homogén eloszlásban. A pontok kiválasztásakor fontos szempont volt, hogy azok magassági alappontok legyenek és alkalmasak legyenek GNSS mérések elvégzéséhez.



1. ábra. A mérési területen kiválasztott hat mérési pont fehérrel jelölve, 1-től 6-ig számozva. Mindegyik magassági alappont mellett szerepel a 8 jegyű pontszáma is

## 2 Geoidundulációk meghatározása és függővonal-elhajlás mérések

A mérési pontok geoidundulációinak meghatározásához ismerni kell minden pont ellipszoid feletti ( $h_{GNSS}$ ) magasságát, ami GNSS mérések eredményeiből állítható elő. Továbbá szükséges a pontok tengerszint feletti ( $H_{szintezett}$ ) magassága, ami magassági alappontok révén rendelkezésünkre áll. A mért geoidunduláció  $N = h_{GNSS} - H_{szintezett}$  különbséggel számítható. A GNSS/szintezés mérések részletes leírása és eredményei a hivatkozott forrásban olvashatók (Csala 2013).

A függővonal-elhajlás méréseket mind a hat mérési ponton a QDaedalus-rendszerrel hajtottuk végre. A rendszer alapja egy Leica robot-mérőállomás, amit CCD-érzékelővel és GNSS-technikával egészítettek ki (Völgyesi és Tóth 2016). Az automatikus észleléseket a QDaedalus rendszer feldolgozó szoftvere a rögzített adatokból a helyszínen kiszámítja a mért csillagok pillanatnyi topocentrikus koordinátáit, majd kiegyenlítéssel meghatározza a keresett függővonal-elhajlást, észak-déli ( $\xi$ ) és kelet-nyugati ( $\eta$ ) komponenseire bontva.

## 3 A terület geoidképének meghatározása

A vizsgált területen a geoid helyi felületdarabjának meghatározásához szükséges geoidundulációkat a potenciálzavar függvényéből vezetjük le, ami a nehézségi erőter teljes potenciáljának és a földi potenciált jól közelítő referencia modell különbsége. Első lépésként tehát definiálnunk kell a potenciálzavar, azaz potenciálkülönbség függvényét, amit függővonal-elhajlás értékek alapján végzünk egy inverziós algoritmus segítségével. Azért esett erre a módszerre a választásunk, mert jóval nagyobb pontosságot biztosít, mint a különböző interpolációs módszerek (Dobróka 2005).

Kiindulásunk a  $T(x, y)$  potenciálzavar függvénye valamely  $P_0 \dots P_p$  bázisfüggvény rendszer szerinti sorfejtés alakjában

$$T(x, y) = \sum_{n=0}^m \sum_{i=0}^n B_i P_i(y) P_i(x), \quad (1)$$

ahol  $B_j$  a sorfejtési együtthatók,  $P_j(y)$ ,  $P_l(x)$  az ismert bázisfüggvények, melyek jelölése arra utal, hogy polinomok alakjában határoztuk meg őket, amik fokszáma  $n$ . Az  $n, i, j, l$  paraméterek között a következő összefüggések állnak fent

$$j = \frac{(n+1)n}{2} i, \quad (2)$$

$$n = l + i. \quad (3)$$

A felírt potenciálkülönbségből a következő képlet alapján számítható a geoidunduláció értéke

$$N = \frac{T(x, y)}{\bar{\gamma}}, \quad (4)$$

= ahol  $\bar{\gamma}$  a normál nehézségi térerősség átlagos értékét jelöli. A normál nehézségi térerősséget a következő összefüggés határozza meg a  $\varphi$  ellipszoidi földrajzi szélesség függvényében (Torge 2001)

$$\gamma = \gamma_0(1 + \beta \sin^2 \varphi + \beta_1 \sin^2 2\varphi), \quad (5)$$

ahol  $\beta_i$  a nehézségi lapultság. Mivel a mért pontok viszonylag kis területen helyezkednek el, a  $\varphi$  ellipszoidi földrajzi szélességei különbségei is kicsik, ezért helyettesítve őket egy átlagos értékkel kiszámíthatjuk a területet jellemző  $\bar{\gamma}$  nehézségi erőter átlagos értékét.

Az  $N$  geoidunduláció ismeretében meghatározható a függővonal-elhajlás a már korábban említett csillagászati szintezés módszerével, azaz a geoidunduláció vízszintes ívhossz szerinti differenciálhányadosaként. A felvett koordináta-rendszer  $x$  tengelye északi irányú, az  $y$  tengelye keleti irányú az EOVS-nak megfelelően, így a függővonal-elhajlás észak-déli ( $\xi$ ) és kelet-nyugati ( $\eta$ ) komponense egyértelműen meghatározható a megfelelő tengelyek menti differenciálhányadosaként. Az észak-déli összetevőt a szintfelületi földrajzi szélesség és ellipszoidi földrajzi szélesség különbsége adja, azaz  $\xi = \Phi - \varphi$ , így negatív előjellel fog szerepelni, mint ahogy a kelet-nyugati összetevő is. Tehát a komponensek a következő képletek alapján számíthatók

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{-dN}{dx} = \frac{-1}{\bar{\gamma}} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-T_x}{\bar{\gamma}} \\ \eta &= \frac{-dN}{dy} = \frac{-1}{\bar{\gamma}} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{-T_y}{\bar{\gamma}}. \end{aligned} \quad (6)$$

A geoid-ellipszoid távolságra és a függővonal-elhajlás komponensekre felírt összefüggésekből a következő differenciálegyenletek írhatók fel

$$\begin{aligned} T &= N \bar{\gamma} \\ T_x &= -\xi \bar{\gamma} \\ T_y &= -\eta \bar{\gamma}, \end{aligned} \quad (7)$$

amibe behelyettesíthetők a mért geoidundulációk és függővonal-elhajlások. Az  $i$ -dik mérési pontra vonatkozóan

$$\begin{aligned} T(y_i, x_i) &= \bar{\gamma} N_i(y_i, x_i) \\ T_x(y_i, x_i) &= -\bar{\gamma} \xi_i(y_i, x_i) \\ T_y(y_i, x_i) &= -\bar{\gamma} \eta_i(y_i, x_i). \end{aligned} \quad (8)$$

Az így felírt differenciálegyenletek lesznek a kiegyenlítéshez szükséges közvetítő egyenletek. A megoldhatóság feltétele, hogy az ismeretlenek száma ( $r$ ) ne haladja meg a mérések számát ( $n$ ), mely a következő képlettel számítható

$$r = \frac{(n_{max} + 1)(n_{max} + 2)}{2}, \quad (9)$$

$$n = 2k + m$$

ahol  $n_{max}$  a mérések maximális száma,  $k$  azoknak a pontoknak a száma, ahol függővonal-elhajlás méréseket végeztünk,  $m$  pedig azoknak a pontoknak a száma, ahol geoid feletti magasságokat mérünk. A tanulmányban a 6 pontban mért függővonal-elhajlás összetevők és geoidundulációk értékeit még egy pontban mért függővonal-elhajlás összetevőkkel egészítettük ki, ami összesen  $n = 19$  mérést jelent, így az  $n \geq r$  feltétel kielégítése érdekében maximum negyedfokú polinomokat használhatunk a megoldás során. A bázisfüggvényeket határozzuk meg a következő hatványpolinomok alakjában:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n, \\ P_n(y) &= y^n. \end{aligned} \quad (10)$$

Ekkor a polinomok fokszámától ( $n$ ) függően alakulnak az  $i, j, l$  paraméterek értékei a (2) képlet alapján. A geoidundulációk és a függővonal-elhajlás összetevők számításához szükséges polinomszorzatok az 1. táblázatban foglaltak szerint írhatók fel, ahol a függővonal-elhajlás  $\xi$  és  $\eta$  összetevői a (6) összefüggés alapján számítható a potenciálzavar függvényének  $x$ , illetve  $y$  tengelyek szerinti deriváltjaiból.

1. táblázat.  $N$ ,  $\xi$  és  $\eta$  számításához szükséges polinomszorzatok  $n$  fokszám függvényében és a  $B_j$  sorfejtési együtthatók

$n$	$j$	$i$	$l$	$N$ $P_i(y)P_l(x)$	$\xi$ $P_i(y)P_l'(x)$	$\eta$ $P_i'(y)P_l(x)$	$B_j$
0	0	0	0	1	0	0	$B_0$
1	1	0	1	$x$	1	0	$B_1$
	2	1	0	$y$	0	1	$B_2$
2	3	0	2	$x^2$	$2x$	0	$B_3$
	4	1	1	$xy$	$y$	$x$	$B_4$
	5	2	0	$y^2$	0	$2y$	$B_5$
3	6	0	3	$x^3$	$3x^2$	0	$B_6$
	7	1	2	$x^2y$	$2xy$	$x^2$	$B_7$
	8	2	1	$y^2x$	$y^2$	$2xy$	$B_8$
4	9	3	0	$y^3$	0	$3y^2$	$B_9$
	10	0	4	$x^4$	$4x^3$	0	$B_{10}$
	11	1	3	$x^3y$	$3x^2y$	$x^3$	$B_{11}$
	12	2	2	$x^2y^2$	$2xy^2$	$2x^2y$	$B_{12}$
13	13	3	1	$y^3x$	$y^3$	$3xy^2$	$B_{13}$
	14	4	0	$y^4$	0	$4y^3$	$B_{14}$

A feladat tehát a bázisfüggvények ismeretében, a felvett polinomok esetén, a mért geoidundulációk és függővonal-elhajlás összetevők alapján kiegyenlítéssel meghatározni a sorfejtési együtthatókat és ezzel rekonstruálni a nehézségi erőter potenciálfüggvényét. A kiegyenlítést a legkisebb négyzetek módszerével végezzük el a II. kiegyenlítési csoport alapján (Detrekői 1991). A közvetítő egyenletek a következő alakban írható fel a már ismertetett jelöléseket használva:

$$\begin{aligned}
 T_x(x,y) &= \sum_{n=0}^q \sum_{i=0}^n B_j P_i(y) P_i'(x) = -\bar{\gamma} \xi_i, \\
 T_y(x,y) &= \sum_{n=0}^q \sum_{i=0}^n B_j P_i'(y) P_i(x) = -\bar{\gamma} \eta_i, \\
 T(x,y) &= \sum_{n=0}^q \sum_{i=0}^n B_j P_i(y) P_i(x) = \bar{\gamma} N_i.
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Az 1. táblázatban foglalt polinomokat behelyettesítjük a közvetítő egyenletekbe, így az alakmátrix a következőképpen alakul:

$$\mathbf{A}_{(n,r)} = \begin{bmatrix}
 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & \dots \\
 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & x_2 y_2 & y_2^2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 1 & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1 & 0 & 2x_1 & y_1 & 0 & \dots \\
 0 & 1 & 0 & 2x_2 & y_2 & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 1 & 0 & 2x_i & y_i & 0 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & \dots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_2 & 2y_2 & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 1 & 0 & x_i & 2y_i & \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}
 \tag{12}$$

Az alakmátrix egy sorában vannak az adott mérési pontban egy mért paraméterre vonatkozóan a  $B_j$  sorfejtési együtthatók szerinti deriváltak értékei. Az első tömbben a geoidundulációk, a középsőben a függővonal-elhajlás észak-déli összetevői, a harmadik, egyben utolsó tömbben a függővonal-elhajlás kelet-nyugati összetevői találhatók.

A tisztatag vektor elemeit a közvetítő egyenletek jobb oldala adja:

$$\mathbf{l}_{(1,n)}^T = [\bar{\gamma} N_1 \quad \bar{\gamma} N_2 \quad \dots \quad \bar{\gamma} N_i \quad \dots \quad -\bar{\gamma} \xi_1 \quad \dots \quad -\bar{\gamma} \xi_i \quad \dots \quad -\bar{\gamma} \eta_1 \quad \dots \quad -\bar{\gamma} \eta_i \quad \dots].
 \tag{13}$$

Az ismeretlen paraméterek vektora egyértelműen a  $B_j$  sorfejtési együtthatók:

$$\mathbf{x} = [B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4 \quad B_5 \quad \dots].
 \tag{14}$$

A kiegyenlítés eredményeként megkapjuk az ismeretleneket:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}_{xx} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l},
 \tag{15}$$

ahol a súlykoefficiens mátrix:

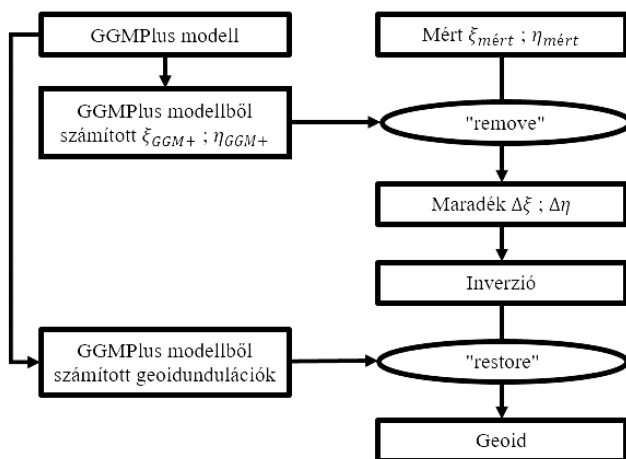
$$\mathbf{Q}_{xx} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}.
 \tag{16}$$

A mostani méréseink egységnyi súllyal szerepelnek a kiegyenlítésben. A sorfejtési együtthatók egy helyi geoidmodellt szolgáltatnak, amely alapján már modellezni tudjuk a potenciálzavar függvényét, amiből a nehézségi erőteret jellemző mennyiségek bármelyike levezethető, így kiszámítható tetszőleges pontok geoid feletti magassága és függővonal-elhajlás értéke.

A terület geoidképezének meghatározásához a következő módosításokkal élünk a mérési adatokra vonatkozóan. Annak érdekében, hogy az interpoláció elvégezhető legyen a kisszámú méréseink mellett is, le kell egyszerűsíteni az interpolálandó függvényt. Ennek egyik módja, hogy a méréseinkből



eltávolítjuk a modellben meghatározott, nagy hullámhosszú hatásokat, így a maradék függővonal-elhajlások már csak a közvetlen felszín alatti egyenlőtlen tömegeloszlás hatását tartalmazzák. A „remove-restore” eljárásnak (Forsberg et al. 2012) megfelelően a GGMPplus modellből (Hirt et al. 2013) levezetett geoidundulációkat, illetve függővonal-elhajlás összetevőket levonjuk a GNSS mérésekből meghatározott geoidundulációkból, illetve a csillagászati-geodéziai módszerrel mért függővonal-elhajlás összetevőkből. Az így nyert különbségre futtatjuk a fent ismertetett inverziós algoritmust, amely során meghatározzuk a sorfejtési együtthatókat, azaz rekonstruáljuk a potenciálzavar függvényét. Végül a potenciálzavar függvényéből levezett geoidunduláció különbségekre visszahelyezzük a modell hatását, így előállítva a mérési terület teljes geoidképét (2. ábra).



2. ábra. Geoid-meghatározás menete a függővonal-elhajlás mérésekből „remove-restore” eljárással

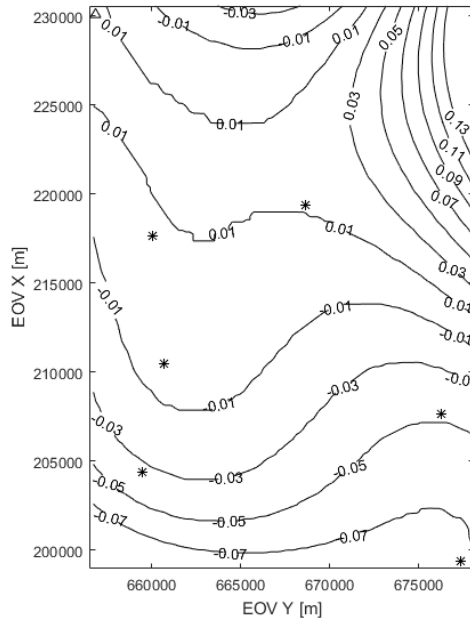
A hat mérési pont mindegyikében három mért érték áll rendelkezésünkre, a geoidunduláció és a függővonal-elhajlás összetevők értékei. Az összesen 18 mérési eredmény maximum negyedfokú polinomok együtthatóinak meghatározását teszi lehetővé. A méréseket azonosan egységnyi súllyal vesszük figyelembe. Az 2. táblázat összefoglalja a mérési pontokra vonatkozóan a modellből levezetett és a mért geoid feletti magasságokat, ezek különbségeit, amikkel rekonstruáltuk a potenciálzavar függvényét, az ebből levezetett javított különbségeket, amikhez utolsó lépésként visszaadtuk a GGMPplus modell hatását. Az inverziós számítást lefuttattuk harmadfokú polinomok esetén is, melynek eredménye és összehasonlítása a 4. fejezetben olvashatók.

2. táblázat. A GGMPplus modellből levezetett és a mért geoidundulációk, ezek különbségei, a negyedfokú polinommal futtatott inverziószámítással kapott javítások, a javított különbségek és a javított geoidundulációk méterben

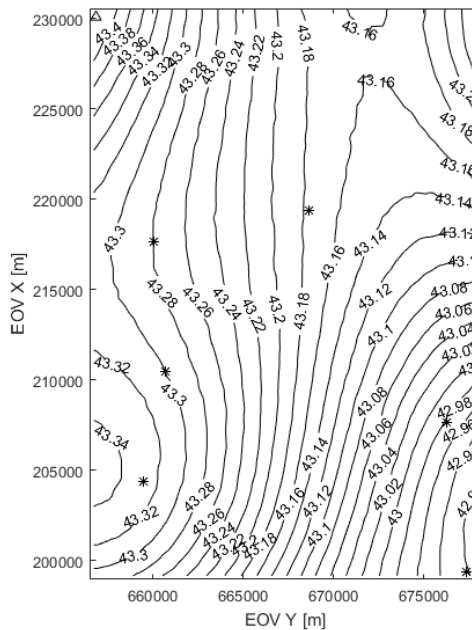
Psz	$N_{GGM+}$	$N_{mért}$	$\Delta N$	$v_{N4}$	$\Delta N_{jav4}$	$N_{jav4}$
1	43.462	43.142	-0.320	0.036	-0.284	43.178
2	43.569	43.259	-0.310	0.022	-0.288	43.281
3	43.600	43.273	-0.327	0.028	-0.299	43.301
4	43.659	43.354	-0.305	-0.023	-0.328	43.331
5	43.321	42.975	-0.346	0.004	-0.342	42.979
6	43.292	42.989	-0.303	-0.066	-0.369	42.923

A potenciálzavar függvényének meghatározását követően kiszámíthatók a mérési területet lefedő rács pontjainak geoidunduláció különbségei (3. ábra), amihez visszaadva a GGMPplus modellt előáll a terület geoidképe (4. ábra). A tengelyeken az EOv-koordináták vannak méter egységben. A csillagok

jelölik a csillagászati-geodéziai módszerrel bemért pontokat, ahol adottak a függővonal-elhajlás összetevők és a mért geoidundulációk is. Az ábra bal felső sarkában lévő háromszög az a pont, ahol csak a függővonal-elhajlásokat mértük.



**3. ábra.** A mérési területre negyedfokú polinomos közelítéssel levezetett geoidunduláció különbségek [m] és a geoidundulációval is rendelkező mérési pontok csillaggal, a csak mért függővonal-elhajlással rendelkező pont háromszöggel jelölve



**4. ábra.** Inverzióval számított geoidmodell negyedfokú polinomos közelítéssel, számított geoidundulációk [m], a geoidundulációval is rendelkező mérési pontok csillaggal, a csak mért függővonal-elhajlással rendelkező pont háromszöggel jelölve

#### 4 Összehasonlítás

Elsőként vizsgáljuk meg a mérési pontokra vonatkozóan a GGMPplus modellből levezetett és a GNSS mérésekből meghatározott geoidundulációk eltérését. A különbségek átlaga:  $-0.319$  m, szórása:  $0.015$  m. A különbségeknél megfigyelhető konstans eltérés valószínűleg a GGMPplus modellben alkalmazott geocentrikus, illetve a GNSS mérések ETRS89/ETRF2000 2007.4 nem geocentrikus dátumai eltéréseinek hatása. Továbbá fontos megjegyezni, hogy a mért geoidundulációk levezetéséhez a mért ellipszoid feletti magasságok mellett, a magassági alappontok tengerszint feletti magasságait is felhasználtuk, ezért egyértelműen ennek pontossága is befolyásolja a számított geoidundulációk pontosságát. Az alappontok szintezett magasságai a meghatározásuk óta eltelt három évtizedben jelentősen megváltoztak, a változás mértéke egyes pontok esetén eléri akár a  $10$  cm nagyságot is (Busics 2010). Ennek érdekében megvizsgáltuk a GNSS mérések feldolgozásakor használt permanens állomásokat is, ahol szintén kimutatható a közel azonos mértékű konstans eltérés (3. táblázat).

**3. táblázat.** Geoidundulációk a GGMPplus modellből és mérésekből, illetve azok eltérései [m]

PSZ	$N_{GGM+}$	$N_{mért}$	$\Delta N$
BUTE	43.963	43.634	-0.329
DUJV	43.961	43.642	-0.319
KECS	43.289	42.913	-0.376
MONO	43.312	42.957	-0.355

A GGMPplus modell alapja az EGM2008 (Hirt et al. 2013), melynek vonatkoztatási ellipszoidja a geocentrikus WGS84. A GNSS mérések feldolgozásához használt permanens állomások szintén WGS84 ellipszoidra vonatkoznak, viszont már a nem geocentrikus az ETRS89/ETRF2000 2007.4 rendszerben. A konstans  $30$  cm eltávolításával a 2. ábrán látható geoidunduláció különbségeke kapjuk. A kiegyenlítés normájának következménye, hogy az alkalmazott geoid-meghatározás relatív módszer. Ebből következik, hogy tapasztalt konstans eltérés nem okoz hibát a potenciálzavar-függvény konstansától ( $B_0$ ) különböző tagjainak a meghatározásában. Nem kizárt azonban az sem, hogy a két felület nem párhuzamos, hanem pl. észak-déli irányba kismértékben dől (ez a  $B_1$  és  $B_2$  együtthatókat érintheti), vagy egyéb hullámhosszú együtthatót is befolyásol, azonban nagyságrendjét tekintve a  $B_0$  tagra gyakorolt hatása a legnagyobb.

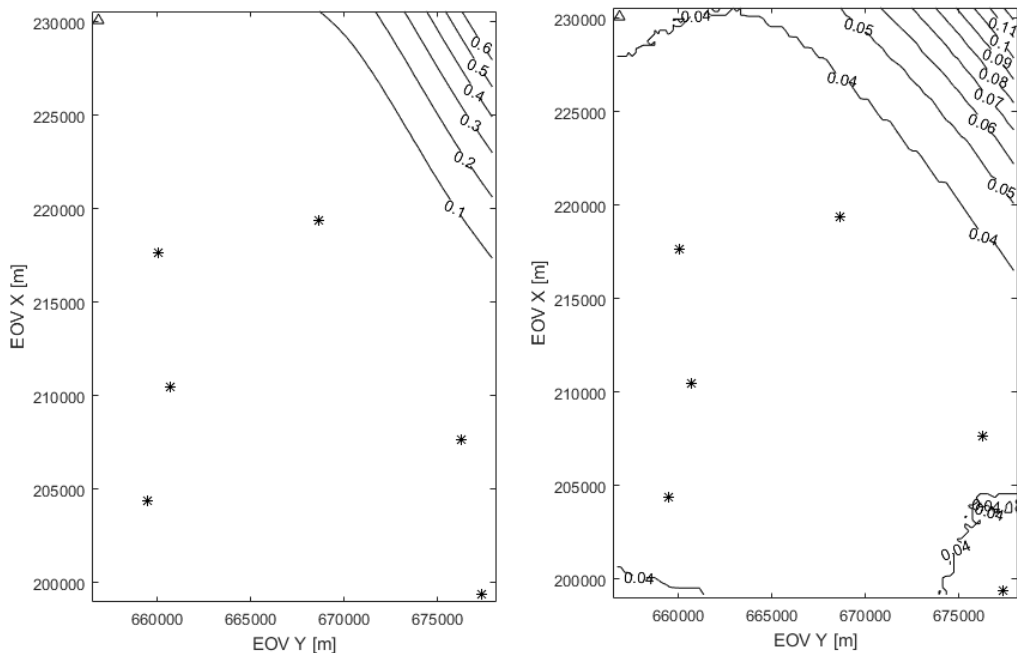
Következő lépésként elvégeztük a harmad- és negyedfokú polinomos megoldások összehasonlítását. A potenciálzavar függvényének paramétereit és a geoidundulációkra és függővonal-elhajlásokra kapott pontossági mérőszámokat a 4. táblázat tartalmazza.

**4. táblázat.** Harmadfokú és negyedfokú polinomos megoldások paramétereit

polinom fokszáma:	3	4
függővonal-elhajlási pontok száma:	7	7
geoidundulációs pontok száma:	6	6
összes mérés száma:	20	20
normálegyenlet-rendszer kondíciószáma:	189.3	29940
meghatározandó együtthatók száma:	10	15
főlős mérések száma:	10	5
aposteriori súlyegység középhiba:	2.68	2.26
adattérbeli (relatív) távolság:	27	12.77
korrelációs norma:	0.393	0.601
$N$ javítások szórása [m]:	-0.035	-0.039
$\zeta$ javítások szórása ["]:	-0.50	-0.19
$\eta$ javítások szórása ["]:	-0.41	-0.22

A feldolgozásokat ugyanarra a területre végeztük el, így a bemenő paraméterek egyértelműen azonosak voltak. A potenciálzavar-függvény együtthatóinak száma az alkalmazott polinom fokszámának függvényében számítható a korábban már ismertetett (2) összefüggés alapján. A mérések egymáshoz viszonyított kapcsolatát a kiegyenlítés során meghatározott korrelációs mátrix alapján vizsgálhatjuk meg. A korrelációs norma a korrelációs mátrix főátlón kívüli elemeinek átlaga, ami a harmadfokú közelítés esetén kisebbre adódott, azaz ez a megoldás stabilabbnak mondható. A normálegyenlet-rendszer kondíciószáma az egyenletek kondicionáltságának megítélésére szolgál. Mivel ennek értéke a negyedfokú közelítés esetén nagyobb, ezért ezt az egyenletrendszert gyengébben meghatározhatónak tekintjük. Az adattérbeli (relatív) távolság, ami a mért és számított adatok illeszkedését mérő szám, a negyedfokú polinomos megoldás esetén kisebb értéket vesz fel, ezért ez a modell jobb illeszkedést mutat.

Az 5. ábra a különböző fokszámok esetén kapott geoidundulációk középphibáit szemlélteti. Mindkét esetben jellegre hasonlóképpen alakulnak a középphibák, viszont értékei a harmadfokú polinomos közelítéssel egyértelműen kisebbek lesznek.



**5. ábra.** Geoidundulációk középphibái negyedfokú (bal) és harmadfokú (jobb) polinomos megoldással [m] és a geoidundulációval is rendelkező mérési pontok csillaggal, a csak mért függővonal-elhajlással rendelkező pont háromszöggel jelölve

Mindkét megoldás esetén a geoidundulációk javításainak szórása közel azonos értékre adódik. A függővonal-elhajlás összetevőkre vonatkozóan viszont a javítások szórása feleakkora értéket mutat a negyedfokú polinomos megoldás esetén, mint a harmadfokúnál. A korrelációs norma és középphibák alapján a harmadfokú közelítés mutat pontosabb megoldást, viszont a függővonal-elhajlás összetevőkre számított javítások szórása alapján a negyedfokú polinom közelíti jobban a meghatározandó felületet, így erre vonatkozóan végezzük a további összehasonlításokat.

Hasonlítsuk össze az inverziós algoritmussal rekonstruált potenciálzavar-függvénnyel meghatározott, végleges geoidundulációkat a GNSS mérésekből levezetett értékekkel. A táblázat ötödik oszlopában található a  $v_{N4}$  mért függővonal-elhajlás és a GNSS mérésekből meghatározott értékek különbsége. A  $\Delta N_4$  értékek felfoghatók a GNSS mérések javításaként is az egyes pontokban, de fontos megjegyezni, hogy ezek az értékek tartalmazzák az interpoláció esetlegesen felmerülő hibáit is. Mivel ezt külön nem tudjuk meghatározni, a GNSS mérések javítása sem határozható meg pontosan. A javítások átlaga: 0.000 m, szórása: 0.035 m. A legkisebb javítás értéke 4 mm, viszont adódott ennél

jóval nagyobb érték is, ami 66 mm. Ez az eltérés a terület szélén, DK-i sarkában található 6-os számú pontban van, és feltehetően nagyobbbrészt az előállított geoidmodellből a mérési pontokra történő interpoláció hibájából adódik, ami a mérési terület széle felé haladva kisebb pontossággal végezhető el. Az interpoláció hibájának csökkentéséhez még több pontban lenne szükséges méréseket végezni. A GNSS/szintezés mérésekből, illetve a mért függővonal-elhajlás értékekből levezetett geoid feletti magasságok eltérnek egymástól. Azonban fontos megjegyezni, hogy mind a mérési, mind pedig a feldolgozási módszerek eltértek egymástól. Valamint fontos megemlíteni, hogy a GNSS mérések együttesen jóval több időt vettek igénybe, mint a QDaedalus rendszerrel végzett függővonal-elhajlás mérések.

A „remove-restore” eljáráshoz alkalmazott GGMPPlus modell az egyik legújabb nehézségi térerősség modell, ami a korábbi EGM2008 geopotenciális modell további gravimetriai mérésekkel és topográfia tömegvonzási hatásával történő javítása, továbbfejlesztése. Eltávolítva a modell hatását a mérésekből, azok már csak a felszín alatti, ahhoz közeli egyenlőtlen tömegeloszlások hatását tartalmazzák.

## 5 Összefoglalás

Összegezve elmondhatjuk, hogy a QDaedalus rendszerrel végzett függővonal-elhajlás méréseket GNSS/szintezés mérésekből meghatározott geoidundulációkkal kiegészítve, inverziós algoritmussal rekonstruált potenciálfüggvény segítségével levezetett geoid feletti magasságok a vizsgált területen egy 2-3 cm-es nagyságú összetevő jelenlétét mutatják a korábbi GNSS/szintezéssel meghatározott geoidundulációkhoz, illetve a GGMPPlus modellhez képest. Az eltérés okának pontos meghatározásához további vizsgálatok elvégzése szükséges. Fontos megjegyezni, hogy a levezetett geoid feletti magasságok pontosságára hatással van a függővonal-elhajlás mérések hibája és a már korábban említett EOMA magasságok három évtized alatt végbement változásai is. Az alkalmazott mérési és számítási módszer még számos ponton továbbfejleszhető, finomítható, és nyilván még több ponton lenne szükséges méréseket végezni. Viszont a QDaedalus rendszerrel szerzett tapasztalataink és a jelen tanulmányban ismertetett eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a terepi függővonal-elhajlás mérések a pontos és részletes geoid-meghatározás céljára kiválóan alkalmazhatók.

**Köszönetnyilvánítás** – Szeretnénk köszönetet nyilvánítani Dr. Völgyesi Lajosnak, aki biztosította számunkra a mérési eszközöket, segített a mérések lebonyolításában és tanácsaival támogatott.

## Hivatkozások

- Bíró P, Ádám J, Völgyesi L, Tóth Gy** (2013): A felsőgeodézia elmélete és gyakorlata (egyetemi tankönyv és kézikönyv). HM Zrínyi Térképészeti és Kommunikációs Szolgáltató Nonprofit Kft. Kiadó, Budapest. 131-135.
- Bürki B, Somieski AE, Hirt C, Marti U, Radogna PV, Schlatter A, Wiget A** (2007): Geodetic Works for AlpTransit Gotthard (Deflections of the Vertical, Azimuths and Gravity Measurements). Swiss national report on the geodetic activities in the years 2003-2007, Perugia. 108-109.
- Busics Gy** (2010): Az EOMA újramérésének előzetes eredményei az első három poligonban. Geomatikai Közlemények, 13(2), 141-148.
- Csala B** (2013): Geoidmodellek lokális ellenőrzése GNSS mérésekkel és felsőrendű szintezéssel. Diplomaterv, BME Ált. és Felsőgeodézia Tsz. 15-20.
- Detrekői Á** (1991): Kiegyenlítő számítások. Tankönyvkiadó, Budapest, 684.
- Dobróka M, Völgyesi L** (2005): A nehézségi erőtér potenciálfüggvényének inverziós rekonstrukciója Eötvös-inga adatok alapján. Geomatika Közlemények, 8, 219-226.
- Forsberg R, Yildiz H, Agren J, Tscherning C, Sjöberg L** (2012): Comparison of remove-compute-restore and least squares modification of Stokes' formula techniques to quasi-geoid determination over the Auvergne test area. Journal of Geodetic Science, 2, 53-64, doi: 10.2478/v10156-011-0024-9.
- Hirt C, Claessens S, Fecher T, Kuhn M, Pail R, Rexer M** (2013): New ultrahigh-resolution picture of Earth's gravity field. Geophysical Research Letters, 40, 1-5.
- Torge W** (2001): Geodesy (3rd Edition). Walter de Gruyter, Berlin – New York. 101-105.
- Völgyesi L, Tóth Gy** (2016): A QDaedalus-rendszer geodéziai alkalmazási lehetőségei. Geodézia és Kartográfia, 68, 9-10.

# EGY BÜKKI HÓTÖRÉS TÁVÉRZÉKELÉSI ELEMZÉSE MODIS ÉS SENTINEL-2 ŰRFELVÉTELEK ALAPJÁN

Molnár Tamás<sup>\*,\*\*</sup>, Birinyi Mátyás<sup>\*\*</sup>, Király Géza<sup>\*\*</sup>, Móricz Norbert<sup>\*</sup>,  
Koltay András<sup>\*\*\*</sup>, Hirka Anikó<sup>\*\*\*</sup>, Csóka György<sup>\*\*\*</sup>, Somogyi Zoltán<sup>\*</sup>



**Snow-damage analysis in the Bükk Mountains based on MODIS and Sentinel-2 satellite images** – After heavy snow and windfall in 19.4.2017 in the Bükk Mountains, 4409 hectares forest area was damaged. The severe damage effected mostly the forests at 500-600 m altitude. We investigated the effects by remote-sensing methods based on MODIS and Sentinel-2 satellite images, then compared the results to the Hungarian National Forest Damage Registration System data and to field survey. Damage is clearly detectable on the moderate-resolution standardized NDVI (NDVI Z) maps of Remote-sensing Based Forest Health Monitoring System (TEMRE) of NARIC Forest Research Institute, and analysis of high-resolution Sentinel-2 NDVI. Classified maps also confirmed that moderate (250m×250m) and high resolution (10m×10m) satellite images are suitable for forest damage survey by 92.325% overall accuracy.

**Keywords:** remote sensing, satellite image, MODIS, Sentinel-2, snow damage, Bükk Mountains

A 2017. április 19-i bükkői hótorés és szélöntés nyomán 4409 hektáron keletkezett erdőkárosítás leginkább az 500-600 m tszfm. régióban érezte hatását. Ebben a magasságban vizsgáltuk a Bükk-hegységet sújtó károsodást távérzékelési módszerekkel, MODIS és Sentinel-2 műholdképeken, majd összehasonlítottuk az eredményeket az erdővédelmi kárbejelentő lapokkal és terepi felméréssel. A NAIK Erdészeti Tudományos Intézetének Távérzékelésen alapuló Erdőállapot Monitoring Rendszerének (TEMRE) közepes felbontású, 2017 nyarán készült MODIS alapú erdőállapot-térképein egyértelműen kimutathatók a standardizált NDVI eltérések és a nagy felbontású, osztályozott Sentinel-2 felvételek elemzése is alátámasztja, hogy a közepes- és nagyfelbontású űrfelvételek alkalmasak a káresemények utáni nagyterületű kárfelmérésre, amit a 92.3%-os pontosság is alátámaszt.

**Kulcsszavak:** távérzékelés, műholdkép, MODIS, Sentinel-2, hótorés, Bükk

## 1 Bevezetés

A földmegfigyelő műholdak nyújtotta távérzékelési lehetőségeket az erdőszéleken is eredményesen lehet alkalmazni. Lausch et al. (2016) és Saarinen et al. (2018) a Landsat, Kovács és Gulácsi (2018) a Terra MODIS és Barka et al. (2018) a Sentinel-2 műholdak adatait használták fel erdőmonitoringra. Ezen műholdak adatai ingyenesen, a Landsat esetében 16, a Terra esetében 1 - 2, míg a Sentinel-2 esetében 2 - 3 naponta frissítve elérhetőek az egész Föld területére, és az előfeldolgozottságnak (radiometriai és geometriai korrekció, továbbá ortorektifikáció) köszönhetően, geoinformatikai szoftverekkel (GIS) feldolgozva az adatokat alkalmasak a nagyterületű erdőket érintő földhasználati, éghajlatváltozási és erdőszéleki célú adatfeldolgozásra.

Tanulmányunkban mi a Bükk-hegységben bekövetkezett károk felmérésének távérzékelési módszerekkel történő megvalósítását tűztük ki célul. Vizsgálati területünkön az utóbbi évtized legnagyobb területű hótorés és szélöntés okozta kárait jelezték 2017 áprilisában, összesen több mint 4409 hektárról a Központi-Bükkből ([http://www.erti.hu/images/erti/Publikacio/ev-Prognzis-2017-2018\\_3.pdf](http://www.erti.hu/images/erti/Publikacio/ev-Prognzis-2017-2018_3.pdf), 2019-12-05), ami az erdőgazdasági táj 52713 hektáros területének 8.36%-át jelenti. A káresemény nagy földrajzi kiterjedése miatt célszerűnek ítéltük a műholdas távérzékelés alkalmazását a terepi felvételezés kiegészítésére. Ehhez több műhold közepes és nagyfelbontású űrfelvételeit felhasználtuk fel.

Geomatikai	Publications
Közlemények	in Geomatics

\* NAIK Erdészeti Tudományos Intézet, Ökológiai és Erdőművelési Osztály  
E-mail: molnar.tamas@erti.naik.hu

\*\* Soproni Egyetem Erdőmérnöki Kar, Geomatikai, Erdőfeltárási és Vizsgáldokadési Intézet, Földmérési és Távérzékelési Tanszék

\*\*\* NAIK Erdészeti Tudományos Intézet, Erdővédelmi Osztály

## 2 Anyag és módszer

Az erdőkár elemzéshez a NASA Terra műholdjának közepes felbontású MODIS, az ESA Sentinel-2 MSI nagyfelbontású műholdképeit, illetve terepi referenciának a NÉBIH Erdészeti Igazgatósága és a NAIK ERTI által közösen működtetett Országos Erdőkár Nyilvántartási Rendszer (OENyR) Kárbejelentő Lapjainak adatait használtuk fel. Továbbá terepi bejárással is felmértünk sérült erdőterületeket. Kiválasztottunk két űrfelvételt (2016.08.28-i és 2017.06.04-i), melyek a káresetet (2017.04.19.) megelőző, illetve az azt követő két nyarat jelentik, és ezekre az időpontokra elemeztük az űrfelvételeket többféle módszerrel, majd a terepi referencia adatokhoz hasonlítottuk őket.

### 2.1 Terra MODIS felvételek alkalmazása

A MODIS műholdképek a NAIK ERTI Távérzékelésen alapuló Erdőállapot Monitoring Rendszerből (TEMRE) származnak, mely alapját a NASA Terra műholdjának MODIS szenzora (<https://terra.nasa.gov/about/terra-instruments/modis>, 2019-12-05) által készített 250 m × 250 m felbontású MOD13Q1 termékéből előállított vegetációs index standardizált változatát (Peters et al. 2002) tartalmazó felvételek alkotják. A hazai erdőterületre vonatkozó adatok begyűjtése, hibaszűrése és térképi megjelenítése automatikusan, (ún. R nyelven írt) számítógépes programmal történik a TEMRE-ben. Az így létrejött, a vegetációs időszak alatt az ország teljes erdőterületére 16 naponta folyamatosan frissített térképek 241830 db pixelt tartalmaznak, ahol minden legalább 75%-ban erdővel borított pixel mérete 6.25 ha. Az ország erdeiben bekövetkező múltbeli változások a 2000-ig visszamenőleg elkészült térképeken esetenként folyamatukban is tanulmányozhatók (Somogyi et al. 2018). A TEMRE térképek felhasználása a közepes felbontású műholdképek alkalmazhatóságát hivatott megvizsgálni a bükki hótörés hatásainak felmérésében.

Vizsgálati területünkre, a Központi-Bükkre 7723 db pixel esik közel 48270 hektáros területtel. A 2017. áprilisában bekövetkezett hótörés hatásait végig lehet követni ezen a területen az egész vegetációs időszakban, áprilistól októberig. Az erre az időszakra elérhető nyolc felhőmentes felvételen a vegetáció állapotának változásait elemeztük a Normalizált Vegetációs Index (Huete 2002):

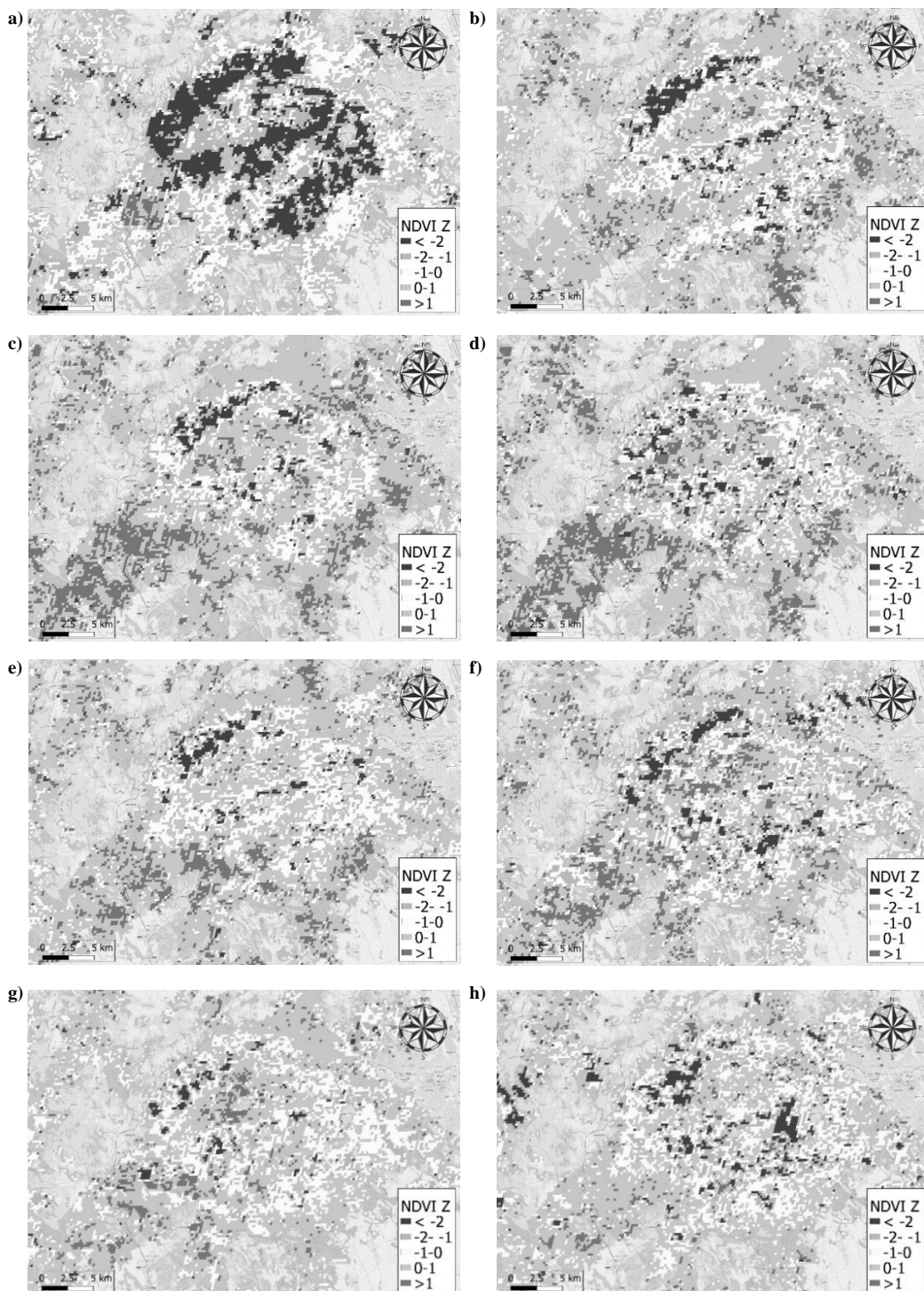
$$NDVI = \frac{NIR+RED}{NIR-RED} \quad (1)$$

és standardizált változatának használatával:

$$NDVI Z = \frac{NDVI - \overline{NDVI}}{\sigma_{NDVI}}, \quad (2)$$

ahol az NIR a közeli infravörös, a RED a vörös csatorna intenzitásértéke, az *NDVI* az év adott időszakában mért érték, *NDVI* az adott időszaknak megfelelő sokéves átlag (2000-2018),  $\sigma_{NDVI}$  pedig az adott időszak szórása (2000-2018). Az *NDVI Z* értékek színskáláján a negatív eltérések mértékét citromsárgával ( $Z < 0$ ), narancssárgával ( $Z < -1$ ), illetve vörössel ( $Z < -2$ ), a pozitív eltéréseket világos ( $Z = 0 - 1$ ), illetve sötétzöld színekkel jelöltük ( $Z > 1$ ).

A térképeken (1. ábra) a tartósan átlagostól alacsonyabb fotoszintetikus aktivitású (*NDVI Z* < -2) területek vörös színnel jelennek meg, melyek kiterjedése bár változik, de végig nagy területen jelentkezik az egész vegetációs időszakban. Ezek alapján kimutathatók a legnagyobb mértékben károsodott területek, melyek a Központi-Bükk két kistáját, az Északi-Bükköt és a Déli-Bükköt érintik leginkább.



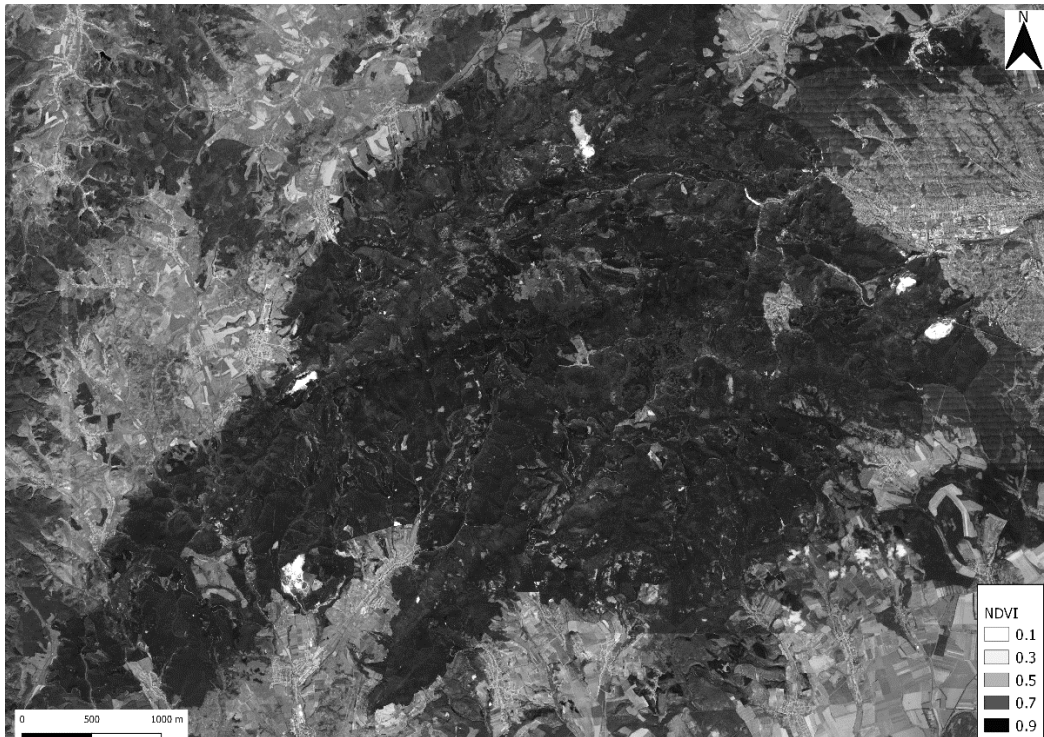
1. ábra. A Központi-Bükk egészségi állapotának változása 2017-ben Z NDVI alapján, 2017.05.16. (a), 2017.05.31. (b), 2017.06.16. (c), 2017.07.02. (d), 2017.07.18. (e), 2017.08.03. (f), 2017.08.19. (g), 2017.09.02. (h)



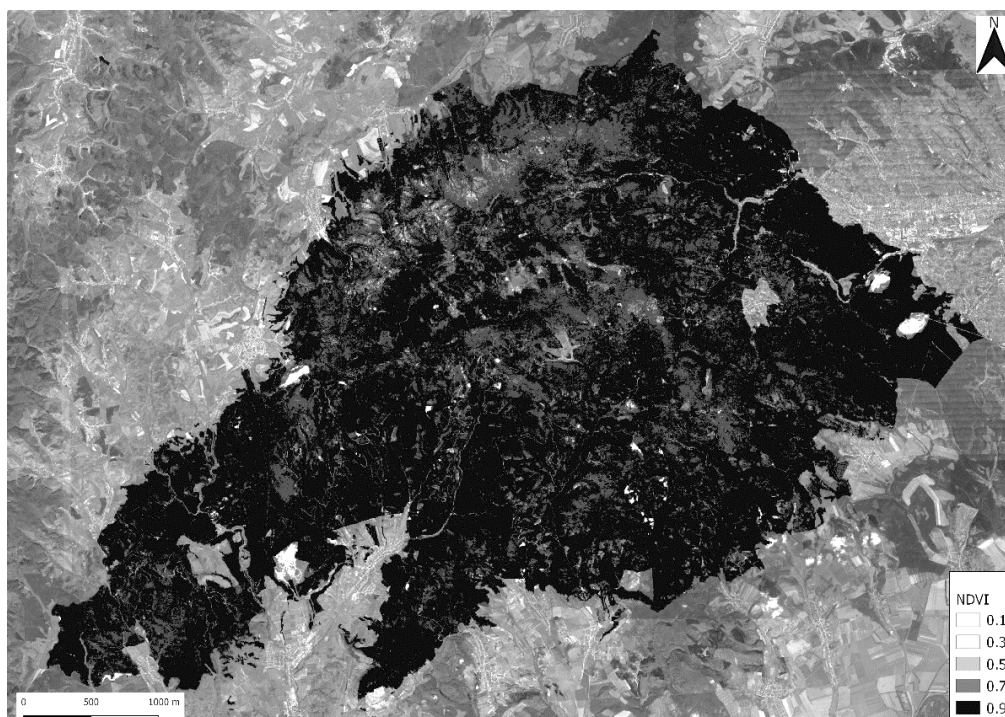
## 2.2 Sentinel-2 űrfelvételek alkalmazása

Az Európai Űrügynökség (ESA) Sentinel-2 L1C és L2A felvételei az ESA Copernicus Open Acces Hub-járól származnak, előbbi csak a PlanetDEM digitális domborzatmodellel, utóbbi a Sen2Cor segítségével atmoszféricusan is korrigált (<https://sentinel.esa.int/web/sentinel/missions/sentinel-2>, 2019-12-05). A L1C felvételből az L2A felvételt a Sentinel Application Platform (SNAP) Sen2Cor pluginjének segítségével állítottuk elő. Az így elkészült nagyfelbontású (10m × 10 m) L2 raszterekből az *NDVI* térképeket a QGIS programmal készítettük el, ahol vetületi rendszernek az Egységes Országos Vetületet (EOV) használtuk, raszter vetület konverziós módszerrel. A Sentinel-2 felvételek felhasználását a magasabb térbeli és időbeli felbontás indokolta, habár hosszú standardizált *NDVI* – *t* (*Z NDVI*) a műhold működésének rövid ideje miatt (négy év) még nem indokolt számolni.

A *NDVI* skála (–1 – + 1) segítségével az előzőekhez hasonlóan kimutatható a károsodással leginkább érintett terület. A káreset előtti képen (2. ábra) és a káresetet követően (3. ábra) jelentős eltérések mutatkoznak. Utóbbin főként az Északi-Bükkben lehet összefüggő, nagyterületű hőtörésre utaló *NDVI* különbséget kimutatni, de kisebb területen a Bükk-fennsík, illetve a Déli-Bükkben is megjelenik a hőtörés hatása. A nagyfelbontású műholdkép segítségével a károk kiterjedése is pontosabban kirajzolódik pl. a sérült hegyoldalak, völgyek alakja egyértelműen azonosítható, ahol az *NDVI* az egészséges erdő átlagos 0.9-et elérő értékéhez képest csak 0.5-et ér el (2. ábra). Továbbá a vegetációmentes vágásterületek is szépen kirajolódnak a Dél-Bükkben (*NDVI* < 0.1). A felhők által kikapart pixelek számának csökkentésére a 2017.07.04. és a 2017.07.24-i felvételekből kompozitot készítettünk.



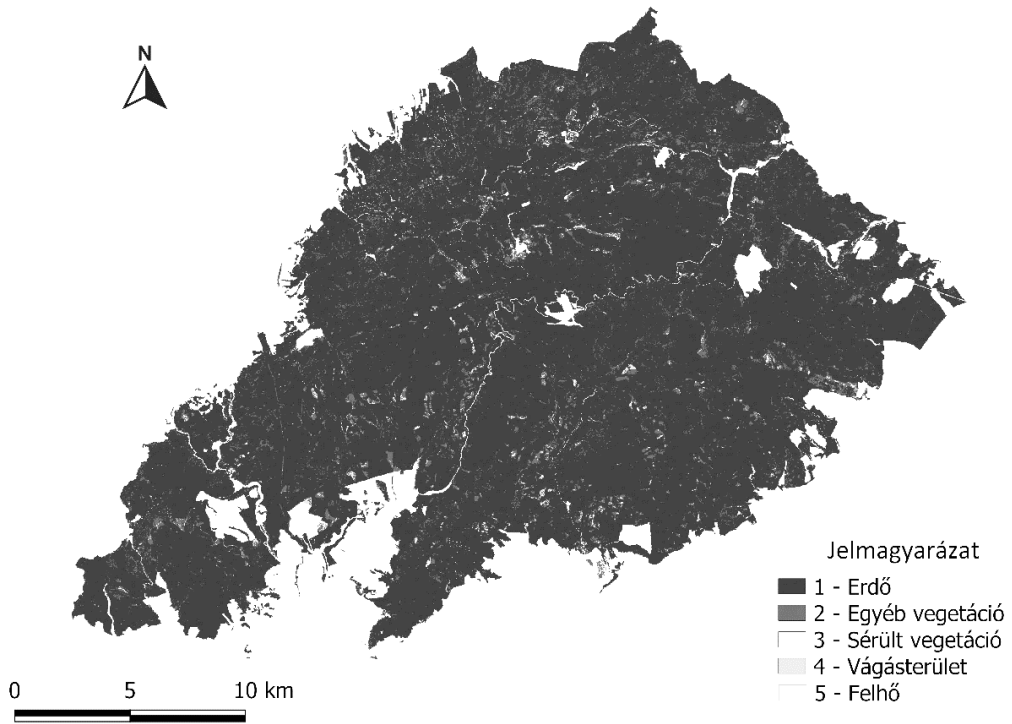
2. ábra. Központi-Bükk, Sentinel-2 *NDVI*, 2016.08.28.



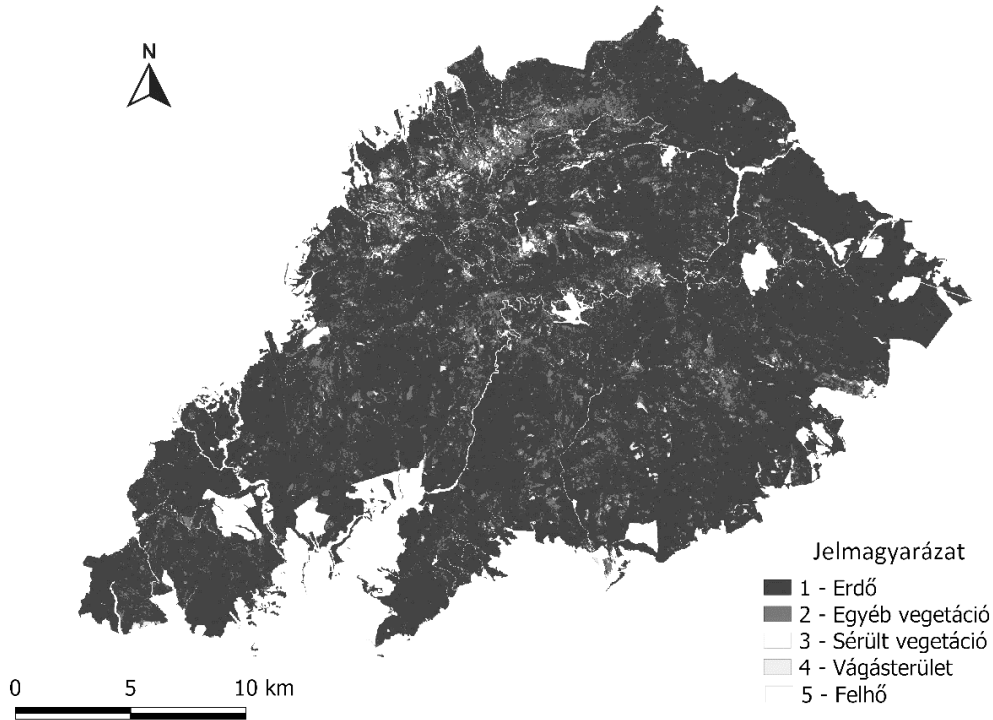
3. ábra. Kőzponti-Bükk, Sentinel-2 2017.07.04-ei és 2017.07.24-ei felvételeinek NDVI kompozitja

A Sentinel-2 űrfelvételek vizsgálatára a felügyelt osztályozás is lehetőséget ad. Ez a képfeldolgozási technika a különböző tematikus kategóriák elkülönítését teszi lehetővé, az ún. tanító területek segítségével gyűjtött spektrális jellemzők alapján. Az osztályozás elvégzéséhez a QGIS 3 térinformatikai program SCP (Semi-automatic Classification Plugin) modulját használtuk. Először a 2016.08.28-i felvételt osztályoztuk, mint hótörés előtti állapot, majd a 2017.06.04-i képet, mint hótörés utáni állapot. A hótörés utáni felvételen az Északi-Bükkben kis területen felhő található. Ennek kimaszkolását a 2017.06.24-i felvétel megfelelő részével végeztük el. Az űrfelvételek B2-es kék, B3-as zöld, B4-es vörös, és 08-as közeli infravörös sávjait használtuk, mivel ezek tartalmazzák a legtöbb, számunkra értékes információt, 10 m-es terepi felbontásuk lévén. A 4 sávból egy virtuális réteget hoztunk létre, majd abból a Kőzponti-Bükk (211-es erdőgazdasági táj) térképével kivonatot készítettünk. A célunk négy osztály elkülönítése volt. Ezek az erdő, egyéb vegetáció, sérült vegetáció és a vágásterület kategóriák. (A hótörést megelőző felvételen egy felhő osztály is kijelölésre került). A tanító területeket főként a terepi bejárások során gyűjtött tapasztalataink alapján választottuk ki a térképen. Ezeket szabadkézi kijelöléssel, illetve a program Regin Growing Algorithm elnevezésű, tanító terület generáló funkciójával rögzítettük. A tanítóterületek kijelölése után lefuttattuk az osztályozást. Az osztályozás módja az átlagtól való legkisebb távolság módszere (minimum distance to mean osztályozó) volt. Ez az eljárás a képi pixelek és a tanító területek spektrális jellemzőinek Euklideszi távolságát számítja ki. A távolság a felvétel összes pixelére számításra kerül, hozzárendelve a közelebbi spektrális jellemző osztályát. Szembetűnő a differencia a két állapot között, mivel a „Sérült vegetáció” osztály jelentős növekedést mutat a hótörés utáni felvételnél (4. és 5. ábrák).

A „Sérült vegetáció” osztály azokat a területeket képviseli, ahol a zárt erdőtümbök folytonossága megszakad, és a csupasz talajfelszín, valamint a dőlő törzsek színe láthatóvá válik a képen. Az osztály tanítóterületeit főként terepi bejárásaink tapasztalataink alapján vettük fel. Akár egy terepi bejárás is elegendő ahhoz, hogy később a műholdfelvételen önállóan felismerjük a hótörés és szélöntés által károsított vegetáció megjelenését.



4. ábra. Központi-Bükk, Sentinel-2 osztályozott, 2016.08.28.

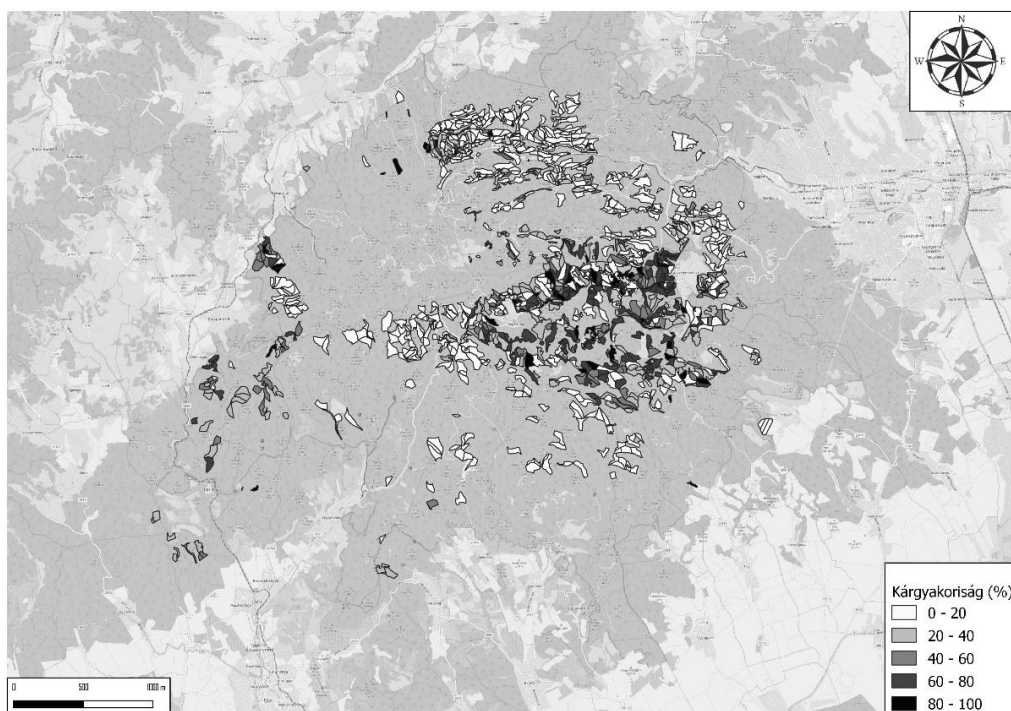


5. ábra. Központi-Bükk, Sentinel-2 osztályozott, 2017.06.04 és 06.24-i kompozit

### 3 Erdővédelmi kárbejelentő lapok

A terepi káradatok a NÉBIH Erdészeti Igazgatósága és a NAIK ERTI által közösen működtetett Országos Erdőkár Nyilvántartási Rendszer Kárbejelentő Lapjaiból származnak. Ezen bejelentések alapján 4409 hektáron károsodott az erdő a Központi-Bükkben (6. ábra) ([http://www.erti.hu/images/erti/Publikaciok/EV-Prognzis-2017-2018\\_3.pdf](http://www.erti.hu/images/erti/Publikaciok/EV-Prognzis-2017-2018_3.pdf), 2019-12-05). A károk közt szerepel a hótörés (3232 ha), a széldöntés (1174 ha) és a széltörés (3 ha). A károsodott erdő meghatározásánál az ONyER Útmutató 2018-as kiadásának ([https://portal.nebih.gov.hu/documents/10182/1047730/Erdővédelmi+kárbejelentő\\_Útmutató\\_új\\_20180604.pdf/96c53f3a-89ca-967f-f40a-98b059115fad](https://portal.nebih.gov.hu/documents/10182/1047730/Erdővédelmi+kárbejelentő_Útmutató_új_20180604.pdf/96c53f3a-89ca-967f-f40a-98b059115fad), 2019-12-05) károsodással érintett terület fogalmát vettük alapul: „Az összefüggő, vagy egyben kezelt, kárral érintett területet nevezzük érintett területnek. A károsítással érintett faállományt körülhatárolva, annak mért vagy becsült területét jelenti hektárban, 0.01 ha pontossággal. A lehatárolás nem kell, hogy megegyezzen a megadott erdőrészlet területével, de akkor annál csak kisebb lehet. Ha egy részleten belül több kis területű, de azonos kárral és kárérélyvel érintett terület található, akkor ezek területe összevonható.” A teljes Bükk területére kizárólag az ONyER-ből kaphatunk terepi káradatokat.

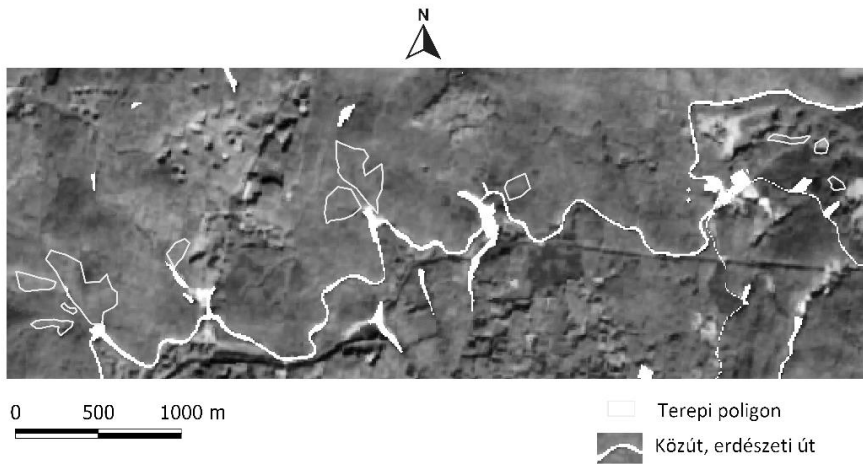
A súlyosan károsodott erdőterületek nagysága 245 ha, ahol a kárgyakoriság eléri, vagy meghaladja a 60%-ot erdőrészletenként. A gyakoriság: „Az érintett területen, egy adott fafaj károsodással érintett egyedeinek aránya az érintett területen található ugyanazon fafaj összes egyedeihez képest, százalékban kifejezve. (Pl.: 100 db KTT található az érintett terület lehatároló vonalán belül, melyből 60 db egyeden van pl.: lombrágás, akkor e káresemény leírásakor a gyakorisághoz 60%-ot kell beírni akkor is, ha az érintett területen van még 50 db egészséges CS egyed is.)”.



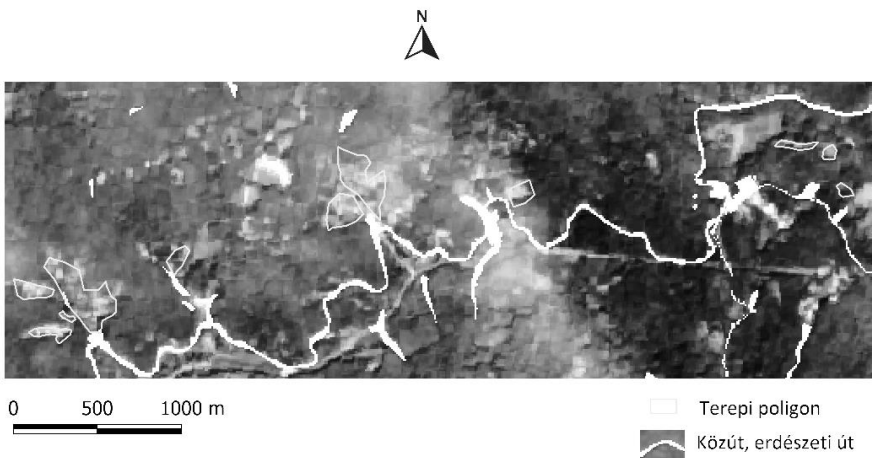
6. ábra. Hótörés, széldöntés és széltörés összesített kárgyakorisága a Központi-Bükk területén 2017 tavaszán az Erdővédelmi Kárbejelentő Lapok alapján

#### 4 Terepi bejárás

A műholdfelvételek elemzése irodai körülmények között, a megfelelő technikai háttér segítségével elvégezhető. A kiértékeléshez azonban elengedhetetlen a terepi bejárás, amelynek során felmérjük az erdő aktuális állapotát. A terepi bejárást és adatrögzítést korlátok közé kényszerítették az erdőben jelen lévő fizikai akadályok. A kidőlt törzsek, a kifordult gyökértányérok, a gödrök, az elszaporodott aljnövényzet és a törzsekből kiálló hegyes ágcsomok balesetveszélyessé tették a mintaterületeket. Ezek a körülmények negatívan befolyásolták a terepi felmérés pontosságát. A terepen mintaterületek kerültek kijelölésre GNSS alkalmazásával, ezt ábrázoltuk a káreset előtti (7. ábra), illetve utáni (8. ábra) kompozitokon. Az említett kaotikus állapotok mellett szembesültünk még egy nehezítő tényezővel: amíg a „tömbös” jellegű károsításoknál viszonylag egyszerűen elhatárolható a károsítás területe, addig a „szálankénti” dőléseknél nem állapítható meg egyértelműen a sérült és az egészséges területek közötti határ (9. ábra).



7. ábra. Terepi poligonok a hőtörés előtti állapotot mutató űrfelvételen (Bükkszentkereszt és Répáshuta között)



8. ábra. Terepi poligonok a hőtörés utáni állapotot mutató űrfelvételen (Bükkszentkereszt és Répáshuta között)



9. ábra. Az erdőkárok terepi felmérése a Répáshuta 6G erdőrészletben (2018.11.01.)

## 5 Eredmények

A Bükk központi részében 52713 ha-os területére végzett elemzések során mindegyik alkalmazott módszerrel sikeresen tudtunk erdőkárokat kimutatni. Az erdővédelmi kárbejelentő lapok terepen felmért adatai szolgáltak referenciaként, ezekhez hasonlítottuk a műholdképen kimutatott károsodások kiterjedését. A közepes felbontású, illetve nagyfelbontású műholdképeken a kár előtt, illetve után képeket elemezve (0.4-2.2) %-os károsodást tapasztaltunk, melyek területe (301.3-1048.9) ha között változott, a különbségek mértéke pedig 1% és 1.8 % közé esett (1. táblázat).

1. táblázat. Erdőkárok különböző módszerekkel felmérve

	Dátum	összterület [ha]	súlyosan sérült [ha]	sérülésarány [%]	sérülés definíció
Kárbejelentő lapok	2017.4-6. hónap	52713	245	0.5	Kárgyakoriság > 60 %
MODIS	2016.08.28	48272	187	0.4	Z < -2.5
MODIS	2017.08.28	48516	1048	2.2	Z < -2.5
MODIS eltérés	-	244	861	1.8	kategória = 3, sé- rülés
Sentinel osztályozott	2016.08.28	52705	301	0.6	kategória = 3, sé- rülés
Sentinel osztályozott	2017.06.04 . és 24.	52704	986	1.9	kategória = 3, sé- rülés
Sentinel o. eltérés	-	1	685	1.3	NDVI < 0.81
Sentinel NDVI	2016.08.28	52703	534	1.0	NDVI < 0.81
Sentinel NDVI	2017.06.04 . és 24.	52695	1037	2.0	NDVI < 0.81
Sentinel N. eltérés	-	8	503	1.0	NDVI < 0.81

A pontosságvizsgálatot hibamátrix előállításával végeztük, aminek alapját a raszterizált erdészeti kárbejelentő lapok és a 2017.07.04-24. Sentinel-2 *NDVI* térkép adta. A rasztereket QGIS-ben újraosztályozva 1 és 2 értékkel (1: nem sérült, 2: sérült, ahol az kárgyakorosság > 60%) láttuk el. Majd az *NDVI* raszter 1 és 2 értékei 20 és 30-as értéket kaptak (20: nem sérült, 30: sérült, ahol az *NDVI* < 0.81). Az így elkészült két rasztert összeadtuk, ami négy kategóriát eredményezett: 21 (1+20), 22 (2+20), 31 (1+30), 32 (2+30). Ezekből területstatisztikát számolva kaptuk meg a mátrixot (2. táblázat), melyben 1031.5 hektáron, az összterület 2.0 %-án tudunk mindkét módszerrel kimutatni sérüléseket.

2. táblázat. Hibamátrix az erdészeti kárbejelentő lapok és a Sentinel-2 felvétel alapján

Osztály (pixelérték)		Sentinel-2 <i>NDVI</i> [ha és %]	
		Nem sérült (20)	Sérült (30)
Kárbejelentők [ha és %]	Nem sérült (1)	4261 ha (8.1%)	47168.31 (89.8%)
	Sérült (2)	56.8 ha (0.1%)	1031.5 (2.0%)

Az osztályozott 2017.07.04-24-i Sentinel-2 felvételnél pedig az általunk sérültnek megjelölt és a program által sérültnek osztályozott kategóriák összevetéséből készült a mátrix (3. és 4. táblázatok).

3. táblázat. Hibamátrix az osztályozott Sentinel-2 felvétel alapján

Osztály	Erdő [ha]	Egyéb vegetáció [ha]	Sérült vegetáció [ha]	Vágásterület [ha]	Összesen [ha]
Erdő	6856	49	245	0	7150
Egyéb vegetáció	329	2231	139	57	2756
Sérült vegetáció	115	0	1082	29	1226
Vágásterület	0	0	18	388	406
Összesen:	7300	2280	1484	478	11542

4. táblázat. Pontosságvizsgálat az osztályozott Sentinel-2 felvétel alapján

Osztály	Gyártó „producer” pontosság [%]	Felhasználói „user” pontosság [%]
Erdő	95.3	98.9
Egyéb vegetáció	97.8	83.8
Sérült vegetáció	87.3	94.2
Vágásterület	81.2	100.0

A pontossági vizsgálat eredményeként a teljes pontosság: 92.3%. Az eltérés oka az lehet, hogy a mintaterületen a sérült vegetáció a teljes területhez képest kisméretű és igen mozaikos, néhol nehezen elkülöníthető a környezetétől.

## 6 Következtetések

A térképek területének különbségei (8-18 ha a Sentinel-nél, illetve 244 ha a MODIS-nál) az eltérő felbontásból, a geoinformatikai algoritmusok módszertani eltéréseiből, a felhőszűrésből, illetve az ezekre visszavezethető adatvesztésből adódnak. Továbbá célszerű az Sentinel-2 felvételeken is további felhőszűrést végezni, hogy kiválthassuk a nem használható, kítakart pixeleket egy másik, közeli időpont felhőmentes pixeleivel. Ez az *NDVI* értékek precízebb skálázását teszi lehetővé, ami jobban megközelíti az erdő valós fotoszintetikus aktivitási mértékét, továbbá hozzájárul az osztályozás továbbfejlesztéséhez.

A képosztályozás pontosítása érdekében célszerű a felvételen egy olyan szűrőt beiktatni (pl. Gauss vagy Kálmán-félet), amely a pixelértékek simítását végzi el. Ennek következtében egyértelműbb lehet a változások nyomon követése. További fejlesztési irány a raszterből az olyan területek kivágása, amelyek az adott témában nem jelentősek. Így például a rétek, legelők egy része, vagy a terméketlen területek. Ezen kívül szűkebb területre – néhány községhatárra fókuszálva – is célszerű vizsgálatokat végezni a jövőben.

A növekvő erdőkárok okán egyre nagyobb teret kaphatnak a távérzékelésen alapuló erdőmonitoring módszerek, hiszen a műholdképek használatával nagy területen, objektíven és közvetlenül a káresetet követően lehet a térképezést elvégezni. Továbbá a korábbi adatokkal összevetve az erdőegészségi változásokat ki lehet mutatni különböző indexek, illetve osztályozási módszerek segítségével, majd a terepi valamint a nagyfelbontású űrfelvételekből készült távérzékelte kártérképek térbeli átfedését is vizsgálni lehet, mely segítségével mindkét módszer fejleszhető.

**Köszönetnyilvánítás** – A szerzők megköszönik a NÉBIH Erdészeti Igazgatóságnak az Országos Erdőkár Nyilvántartási Rendszer Kárbejelentő Lapjainak rendelkezésre bocsátását.

### Hivatkozások

- Barka I, Lukeš P, Bucha T, Hlásny T, Strejček R, Mlčoušek M, Křístek Š** (2018): Remote sensing-based forest health monitoring systems-case studies from Czechia and Slovakia. *Lesnícky Časopis*, 64(3-4), 259–275, doi: 10.1515/forj-2017-0051.
- Huete A, Didan K, Miura T, Rodriguez E, Gao X, Ferreira LG** (2002): Overview of the Radiometric and Biophysical Performance of the MODIS Vegetation Indices. *Remote Sensing of Environment*, 83, 195–213, doi: 10.1016/S0034-4257(02)00096-2.
- Kovács F, Gulácsi A** (2018): MODIS EVI/NDVI alapú monitoring erdőterületeken 2000–2017 között a klímaváltozás földrajzi hatásának kimutatásában. *Geodézia és Kartográfia*, 50(5), 19–27, doi: 10.30921/GK.70.2018.5.3.
- Lausch A, Erasmí S, King DJ, Magdon P, Heurich M** (2016): Understanding Forest Health with Remote Sensing—Part I—A Review of Spectral Traits, Processes and Remote-Sensing Characteristics. *Remote Sensing*, 8(12), doi: 10.3390/rs8121029.
- Peters AJ, Walter-Shea EA, Andrés Viña LJ, Hayes M, Svoboda MD** (2002): Drought monitoring with NDVI-based standardized vegetation index. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, 68(1), 71–75.
- Saarinen N, White JC, Wulder MA, Kangas A, Tuominen S, Kankare V, Holopainen M, Hyypä J, Vastaranta M** (2018): Landsat archive holdings for Finland: opportunities for forest monitoring. *Silva Fennica*, 52(3), 11, doi: 10.14214/sf.9986.
- Somogyi Z, Koltay A, Molnár T, Móricz N** (2018): Forest health monitoring system in Hungary based on MODIS products. Az elmélet és a gyakorlat találkozása a térinformatikában IX.: theory meets practice in GIS : Debreceni Egyetem, IX. Térinformatika Konferencia és Szakkiállítás. Szerk. Molnár Vanda Éva. Debrecen, ISBN 978-963-318-723-4.



# KONZISZTENS SENTINEL-2 ŪRFELVÉTEL-IDŐSOR KÉSZÍTÉSE ERDŐTERÜLETEK KIÉRTÉKELÉSÉHEZ

Barton Iván\*, Czimber Kornél\*, Király Géza\*, Moskal L Monika\*\*



**Consistent Sentinel-2 time series construction for evaluating forested areas** – Fully automated solutions are available for acquiring and pre-processing open access satellite imagery. However, these solutions are not suitable for all applications. To apply machine learning methods on images, a consistent time series is required, which is free from clouds and cloud shadows. In this study we developed a workflow for Sentinel-2 Earth observation satellite's imagery which can detect clouds and cloud shadows more efficiently by applying the Kalman filter. A data filling method was applied for cloud gaps and the empirical rotation based topographic normalization was utilized in the processing chain. On the pre-processed imagery a more accurate evaluation of forests can be performed.

**Keywords:** cloud mask, pre-processing, time series, forestry, radiometric correction

Az ingyenesen elérhető ūrfelvételek beszerzéséhez és előfeldolgozásához már teljesen automatizált megoldások érhetők el, de ezeknek a minősége nem minden alkalmazáshoz felel meg. A gépi tanulási módszerek alkalmazásához olyan konzisztens idősorokra van szükség a távérzékelnél, ami mentes a földfelszínről visszaverődő fény útját gátló felhőktől és árnyékoktól. Munkánkban a Sentinel-2 föld-megfigyelő műholdak felvételeihez dolgoztunk ki egy módszertant, amivel hatékonyabban ki lehet szűrni a felhőket és felhőárnyékokat a Kálmán-szűrő segítségével. A feldolgozási láncban az adathiányos területek pótlása és az empirikus forgatás modelljén alapuló topográfiai normalizáció is helyet kapott. Az így előkészített képanyagon az erdőterületek pontosabb kiértékelése végezhető el.

**Kulcsszavak:** felhőmaszk, előfeldolgozás, idősor, erdőszet, radiometriai korrekció

## 1 Bevezetés

Az erdők műholdas távérzékéssel történő vizsgálata egyre gyakrabban alkalmazott módszer. A műholdas távérzékélés az 1970-es évek óta folyamatosan fejlődő tudományág (Phiri és Morgenroth, 2017). Elterjedésének korlátjai a képanyagok nehéz hozzáférése és a feldolgozáshoz szükséges módszerek, valamint a feldolgozó egységek hiányai voltak. A 2010-es években oldódott fel ezen korlátok nagy része a nyílt és ingyenes adatok térhódításával, és a hatalmas számítási kapacitásokat fajlagosan olcsón elvégző számítógépes rendszerek megjelenésével (Gorelick et al. 2017). A nagy mennyiségű ingyenesen elérhető ūrfelvétel-idősorokkal hatékonyabban lehet térképezni az erdőben történő változásokat (Kennedy et al. 2010) vagy a faállományok típusát (Pasquarella et al. 2018) és szerkezetét (Barton et al. 2017).

A pontos távérzékéletes elemzéshez konzisztens idősorra van szükség, ami alatt olyan ūrfelvételek sorozatát értjük, ami a vizsgált területre vonatkozóan:

- Magas időbeli felbontású.
- Az atmoszféra alján értelmezett reflektancia-értékeket tartalmazza.
- A vizsgálat szempontjából elfogadható mértékű geometriai hibákat tartalmaz.
- Csak olyan mértékben tartalmaz atmoszférikus zajokat, felhőket, felhőárnyékokat, melyek a vizsgálat eredményét nem befolyásolják.
- Mentés a domborzaton megjelenő természetes árnyalásoktól.

Az ilyen módon előkészített idősor alkalmas automatizált képosztályozó módszerek futtatására, ami nagy kiterjedésű erdőterületek leltározásánál nélkülözhetetlen.

Az űrfelvételek előfeldolgozási fázisában valósul meg a konzisztens idősor készítése. A több mint 40 éve működő Landsat földmegfigyelő program (Dwyer et al. 2018) egyes alkalmazásaihoz készült már több olyan módszer (Gorelick et al. 2017) (Kennedy et al. 2010), ami a fenti szempontokat közel megfelelő idősort hoz létre automatizált módon. A Landsat felvételek archívuma a felhasználók igényeihez igazodva már javított radiometriai és geometriai pontossággal érhető el közvetlenül az adat-szolgáltatótól (Micijevic et al. 2016). A Sentinel-2 (S-2) műholdakhoz az Európai Űrügynökség által kínált Sen2Cor és Sen2Three szoftverek kombinációjával állítható elő hasonló jellegű idősor (<https://github.com/S2GlobalMosaic/UserManual/blob/master/docs/source/pages/download/S2GM-SC2-ATBD-BC-v1.3.pdf>, 2019-10-02), ez azonban a pontatlanabb felhőosztályozás esetén (Baetens et al. 2019) kevésbé megbízható megoldás.

Az erdőterületek távérzékeléses kiértékelését több tényező is nehezíteni tudja, melyek más felszínborítási formánál ritkábban jelennek meg. Az erdők nagyobb víztartó kapacitása miatt a felhőborításon túl a pára is nagy mértékben befolyásolja a rögzített felvételek radiometriai tulajdonságait. A hazai erdők jelentős része hegy és dombvidékeken található, ahol a nap állásának függvényében árnyalások jelennek meg a felvételeken. Ahhoz, hogy a műholdas távérzékelés alapú, erdőgazdálkodásban is felhasználható tematikus térképek pontossága a sűrű terepi mintavételezésen alapuló térképekkel összehasonlítható legyen, a jelenleg elérhető űrfelvétel előfeldolgozó munkafolyamatok fejlesztése szükséges. Ezért esett a választás egy új előfeldolgozó folyamat fejlesztésére, amiben az egyes komponensek az S-2 képanyagához és az erdőterületek spektrális tulajdonságaihoz jobban illő módszereket alkalmaznak.

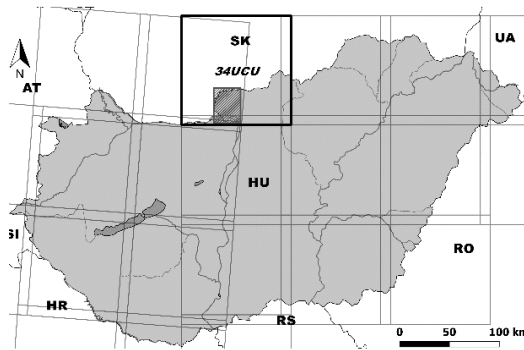
## 2 Anyag

Az S-2 műholdak a Copernicus földmegfigyelő program (Szantoi és Strobl 2019) nagyfelbontású, optikai tartományban érzékelő komponensei. A Sentinel-2A műholdat 2015-ben, a Sentinel-2B műholdat 2017-ben állították pályára. A két műhold teljesen azonos, fedélzetükön az MSI szenzor található meg, ami a spektrum 13 tartományában rögzít képeket. Négy sávja 10 méteres (kék [B2], zöld [B3], vörös [B4], közeli infravörös [B8]), hat sávja 20 méteres (vörös él [B5, B6, B7], keskeny közeli infravörös [B8A], rövid hullámú infravörös [B11, B12]) és 60 méteres (aeroszol [B1], vízpára [B9], cirrus [B10]) felbontással működik. A szenzor radiometriai felbontása 12 bit. A műholdpár visszatérési ideje azonos betekintési szögű felvételek készítéséhez 5 nap. A 290 km szélességű pászták átfedéseiben gyakoribb megfigyelések is elérhetők (Drusch et al. 2012). A magas visszatérési időnek köszönhetően sűrű idősorok alkotására alkalmas egy vegetációs időszakon belül, átlagos időjárási körülmények között havi egy, közel felhőmentes megfigyelés elérhető vele kisebb (~2500 km<sup>2</sup>) területekre. A felvételek ingyenesen hozzáférhetők Level 1 és Level 2 feldolgozottsági szinten (Main-Knorn et al. 2017).

Erdők elemzésére a 10 és 20 méteres térbeli felbontású sávok alkalmasak. A nagyobb felbontású sávok az erdő típusáról spektrálisan kevesebb információt hordoznak, de textúrában gazdagok. A 20 méteres felbontású sávokban kevesebb textúra jelenik meg, azonban spektrálisan nagyobb dinamikával írják le az erdőket. A 60 méteres felbontású sávok nem hordoznak releváns információkat az erdőkről, így ezek nem szerepelnek a kialakított idősorban.

A munkafolyamatok során több lépésben is digitális domborzatmodellt (DDM) alkalmaztunk, amin a magassági adatok forrásai az 1:10 000 méretarányú EOVTOP topográfiai térképek. A 20 méteres terepi felbontásra mintavételezett verzióját használtuk fel a digitális domborzatmodellnek.

A módszertan fejlesztéséhez olyan mintaterületet kívántunk kiválasztani, ahol változatos domborzati formák és erdőtípusok vannak jelen, ezért esett a választás a Börzsöny-hegységre (Nagy 2007) és környezetére (1. ábra). A hegység előnyösen helyezkedik el az űrfelvételek szempontjából, ugyanis két műholdpásztá (R036 és R079) átfedésében található, így gyakrabban érhető el felvételek, mint 5 nap. A vizsgálati időszak 2017. vegetációs időszakára esett. A vizsgálat csak az erdőterületekre terjedt ki, így az Országos Erdőállomány Adattárban (OEA) található erdőrészlet-poligonokon belül vizsgáltak a felvételeket, melyek 67890 ha területet fedtek le.



1. ábra. A kiválasztott mintaterület elhelyezkedése a 34UCU azonosítójú S-2 csempében

### 3 Módszertan

A konzisztens idősor létrehozása egy komplex folyamaton keresztül valósult meg. A folyamat egyes lépései egymásra épültek. A felvételek beszerzése, szűrése majd a felhő és felhőárnyék maszkok létrehozása történt meg először. Az adathiányos területek pótlása után a felvételek topográfiai normalizációja készült el, ami után már elemzésre alkalmassá vált az idősor. A feldolgozás egyes lépései az atmoszférikus korrekción kívül egy saját fejlesztésű képfeldolgozó keretrendszerben történt (Barton et al. 2018) a Kormányzati Informatikai Fejlesztési Ügynökség Nemzeti Információs Infrastruktúra Fejlesztési Program (KIFÜ NIIF) keretében Miskolcra telepített szuperszámítógépen.

#### 3.1 Az idősor előkészítése

A konzisztens idősor készítésének első lépése az űrfelvételek beszerzése. Az S-2 űrfelvételei több csatornán keresztül érhetőek el, melyek közül a Copernicus Open Access Hub-ot (<https://scihub.copernicus.eu/>, 2018-11-02.) választottuk. A letöltendő felvételek kiválasztásához térbeli és időbeli szűrést végeztünk az űrfelvétel metaadatbázisán. Az időbeli feltételnél 2017.03.01 és 2017.10.31 közötti tartományt, a térbeli feltételnél a (18.96,47.87;18.99,47.88) földrajzi befoglaló koordinátákat adtuk meg. Az S-2 290 km széles pásztája 100×100 km méretű, UTM vetületű szelvényekre osztva érhető el. A mintaterületen az UTM34N (EPSG:32634) vetület érvényes, így a 34UCU azonosítójú csempéket használtuk fel az egyes felvételekből. A letöltött felvételek L1C típusú adatok, melyek az atmoszféra tetején mért reflektancia-értékeket tartalmazzzák. A földfelszín tanulmányozásához az atmoszféra alján értelmezett (L2A) reflektancia-értékekre van szükség, amit atmoszférikus korrekció segítségével lehet elérni. Az atmoszférikus korrekciót a Sen2Cor 2.5.5 szoftverrel (<http://step.esa.int/main/third-party-plugins-2/sen2cor/>, 2018.11.02.) végeztük el. A szoftver az L2A típusú reflektancia termék mellett egy automatikus képosztályozást is készít, ami tartalmazza a főbb felszínborítási, valamint a felhő és felhőárnyék osztályokat. Az így létrehozott felhőosztályozást tudjuk felhasználni a letöltött felvételek szűrésére. A mintaterületre készített maszkból régiót képeztünk, amin belül pixel-alapon számítottuk ki a felhővel és felhőárnyékkal borított területek arányát. A korábbi tapasztalatok alapján a Sen2Cor által készített felhőmaszk minden esetben alul becsüli a borítás értékét, ezért 10 %-os küszöbértéket adtuk meg szűrés feltételnek. A szűrés után megmaradt felvételeket, melyekben 10 és 20 m terepi felbontású sávok találhatóak, 10 m-re mintavételeztük a legközelebbi szomszéd (*nearest neighbor*) módszerrel.

#### 3.2 Felhő- és felhőárnyék-szűrés

A felhők és a felhőárnyékok szűrése az egyik legfontosabb eleme az előfeldolgozásnak. A távérzékelés munkahipotézise, hogy a hasonló objektumok hasonló reflektancia-jellemzőkkel rendelkeznek. Ez a hipotézis teszi lehetővé a gépi tanulási módszerek alkalmazását is automatikus képosztályozáshoz

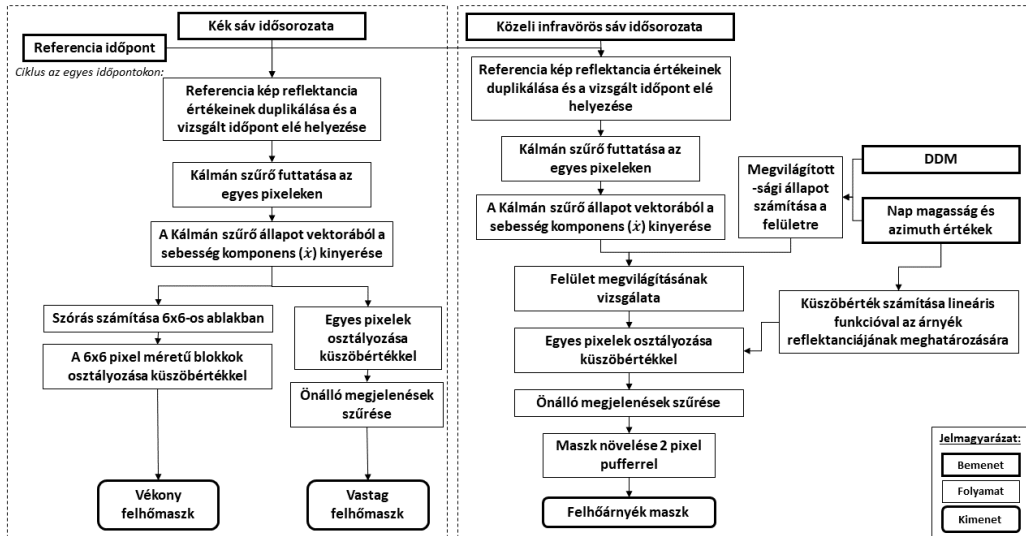
nagy területeken. Amennyiben a földfelszínen található objektumot vastag felhőréteg (Cumulus típusok) borítja, nem értelmezhető a felvételen az objektum. Ha vékony felhőréteg borítja (Cirrus típusok), az atmoszférára érzékeny hullámhosszokon zajos formában jelenik meg a spektrális reflektanciája, de alakjellemzői még értelmezhetők. A vastag felhők árnyékot vetítenek a felszínre, ami alacsonyabb dinamikát eredményez az objektumokon, ezért nem kiértékelhetők.

A Sen2Cor (Main-Knorn et al. 2017) által létrehozott felhő- és felhőárnyék-maszk egyetlen időpont alapján készül Self Organizing Map (SOM) módszerrel, ami mesterséges neurális hálózatot használ felügyelet nélküli osztályozásukhoz, valamint spektrális indexekre épülő küszöbértékes döntési fa modelleket. A felvételek előzetes szűrésére alkalmas ez a maszk. A vastagabb felhőket jól azonosítja, de a kerületükön található kevert pixeleket és a vékony felhőrétegeket már csak kisebb hatékonysággal tudja felismerni. A felhőárnyékok térképezése geometriai úton történik a szoftverben. Ennek a következménye, hogy ha a felhő mennyiségét alul becsülte a szoftver, a hozzá tartozó árnyékot is alábecsüli. A Sen2Cor által készített felhőmaszkon kívül más módszerek is születtek már az S-2 képeihez. Az eredetileg Landsat űrfelvételekhez fejlesztett Fmask algoritmus (Zhu et al. 2015) is alkalmazható, azonban a termális sáv hiánya miatt kevésbé hatékony az eredeti módszer. Született egy módosított változata az Fmask-nak kifejezetten az S-2 képeihez, ami a termális sáv helyett a két közeli infra tartományban érzékelő sáv különböző betekintési szöge alapján határozza meg a felhőket (Frantz et al. 2018). Egy másik megoldás döntési fákat alkalmazott a felhők detektálására Bayesi statisztikával kiegészítve (Hollstein et al. 2016). Ezekben a megoldásokban a közös, hogy egyetlen felvételt alapján történik a felhők osztályozása, amivel a vastag felhők jól, a vékony felhőrétegek kevésbé hatékonyan detektálhatók. A Multi-sensor Atmospheric Correction and Cloud Screening (MACCS) alkalmaz multitemporális felvételeket a felhők detektálásra (Hagolle et al. 2015). A szenzor kék tartományában rögzített sávjait hasonlítja össze a felhő detektáláshoz egy referencia időpont alapján. A felhő észlelése egy dinamikus küszöbérték alapján történik, ami a két időpont közötti idő különbségnek a függvénye. Hazai kutató műhelyben is készültek megoldások űrfelvételek felhő szűrésére, melyek egy logikai modell alapján a szenzor által rögzített sávok különbségei és arányainak küszöbértékes szűrésével hoz létre maszkokat (Ferencz et al. 1993), ami részben adaptálható lenne S-2 felvételekhez.

A felsorolt módszerek mindegyike alkalmas a felhők és árnyékaik detektálására szárazföldek fölött, azonban ezek általános felhasználási célra készültek. Az erdőgazdálkodást támogató tematikus térképek lokális szinten készülnek, melyek rendszerint néhány ezer hektárt foglalnak magukba. A lokális szintű tematikus erdőterképek előállításához olyan felhőszűrő módszerre van szükség, amely nagyon magas (90% >) felhasználói pontosságra képes erdőterületek fölött, akár más felszínborítási kategóriákat fölötti pontosság rovására is. Ezt a szempontot figyelembe véve fejlesztettük ki a több időpontot figyelembe vevő felhő és felhő-árnyék szűrő módszertant (2. ábra).

A vastag felhők egyértelműen meghatározhatók a látható kék tartományban az egyes felvételeken. Az idősorban kiugró megfigyelést mutat a magas reflektanciájuk. Ez a feltevés erdőterületek felett igaz, ahol a vegetációs időszak során minimális reflektancia-változás van. A mérsékelt övi erdőkben, melyek Magyarországon található csak katasztrófa események (pl.: hirtelen lombvesztés, széldöntés) okozhatnak kivételeket a feltevés alól, melyek szerencsére kis mértékben érintik az erdőterületeket. A vékony felhők is kiugrást okoznak az egyes felvételeken pozitív irányban, azonban a kiugrás mértéke az átlátszóságuk miatt alacsonyabb. A felhők felszíne nem egyenletes, így a bennük lévő aeroszol réteg vastagsága is szinte pixelenként változik. Ennek következtében nehéz egyetlen küszöbértéket találni a detektálásukra. A pontos detektálásuk csak idősorban lehetséges.

A felhők által vetített árnyékok detektálása is idősorral végezhető el hatékonyabban, ha nem geometriai úton határozzuk meg az egyes felvételeken. A különböző vegetáció típusoknak a közeli infravörös tartományban igen magas a reflektanciája, így, ha egy időpontban árnyék vetődik rá, hirtelen nagymértékben megváltozik. A változás iránya ellentétes a felhők által okozott kitéréssel. A kék tartománnyal szemben a közeli infravörös tartomány az erdők felett komolyabb dinamikával rendelkezik a vegetációs időszakban. A változás dinamikája összefüggésben van a nap állásával, ugyanis a besugárzás szöge határozza meg a felszínre jutó energia mennyiségét. A topográfiai árnyalással érintett területre eső vetített árnyékok képfeldolgozási módszerrel nem különíthetők el, így az ilyen területeknek a vizsgálatát ki kell zárni.



2. ábra. A felhő- és felhőárnyék-maszkolás munkafolyamata

A leírt feltevések alapján pixel alapon elvégezhető a felhők és a vetített árnyékok meghatározása az idősorban. A pixel alapú vizsgálatnak az előnye, hogy megtartja a magasabb térbeli felbontását a maszk, de a kimenet gyakran tartalmaz elkülönülő hibás észleléseket. Ezek a hibás észlelések utófeldolgozással csökkenthetők.

Az idősorban a kiugró értékek detektálása a Kálmán-szűrővel történt (Saravanan és Parthasarathy 2014). A Kálmán-szűrő a dinamikus rendszerek állapotának optimális becslését végzi el zajjal terhelt megfigyelések alapján. Az egyes időpontokban a négyzetes hibát minimalizálva éri el az optimális becslést. A rendszer változói és az időpontok között korrelációt feltételez a modell. Nagyon gyakran alkalmazott módszer adatasszimilációnál, GNSS navigációnál és a robotikában, de a földmegfigyelésben is számos alkalmazása volt már. A felhők detektálása esetén az egyes sávok idősorát egy lineáris rendszernek tekintjük, ahol minden egyes időponthoz tartozik egy állapotérték (reflektancia). A Kálmán-szűrő állapot-vektorának meghatározásához (1) szükség van az állapotváltozás modellre ( $F_k$ ), a mérési modellre ( $H_k$ ), a folyamat zaj kovarianciájára ( $Q_k$ ), mérési zajra ( $R_k$ ), control-input modellre ( $B_k$ ), azonban ezek az esetünkben konstansnak tekinthetők. Így az egyenlet egyszerűsített formája:

$$x_k = F_k x_{k-1} + W_k, \quad (1)$$

ahol  $x_k$  a rendszer állapot-vektora  $k$  időpontban,  $F_k$  az állapotváltozás modell alapján meghatározott érték  $k - 1$  időpontban,  $W_k$  folyamat zaja  $k$  időpontban.

Az állapot-vektor tartalmazza a rendszer pozíció és sebesség komponenseit (2). A rendszer egy új állapotának  $k$  időpontban van egy gyorsulása, aminek az értéke az egyes időpontokban normális eloszlást mutat a 0 átlag körül. Amikor a lineáris rendszerben nagyobb változás történik, a gyorsulás értéke 0-tól távoli extrém értékeket vesz fel. Az ilyen kilengés az állapot-vektor ( $\hat{x}_k$ ) sebesség komponensében ( $\dot{x}$ ) válik láthatóvá.

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \text{pozíció} \\ \text{sebesség} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

ahol  $\hat{x}_k$  a rendszer állapotának optimális becslése  $k$  időpontban.

A felhők detektálása a sebesség komponens változása alapján történt, amennyiben elértek egy bizonyos küszöbértéket. Az idősor kék sávjában történt kisebb mértékű változás vékony felhőréteget, a nagymértékű változás vastag felhőréteget mutat a feltételezésünk szerint. A mérési zajt empirikusan becsültük meg a modellhez. A felhők és felhőárnyékok szűrését képpárokon végeztük el. Egy teljesen

felhőmentes referencia képpel állítottuk párba az egyes vizsgált képeket. A referenciaképet vizuális vizsgálattal választottuk ki a vegetációs időszak közepéről, hogy minimalizáljuk a különbségeket. A Kálmán-szűrőhöz a referencia képet egymás után kétszer helyeztük el, majd az aktuálisan vizsgált felvételt is beillesztettük. Az első lépésben, amikor a referencia értéken fut a szűrő, a kezdeti állapotot találja meg, majd a második lépésben ér az aktuális képhez. Amennyiben a változás értéke  $-1$ -nél kisebb volt, akkor vastag felhőréteget jelzett. A vékony felhőréteg detektálása egy  $6 \times 6$  pixel méretű ablak alapján történt. A sebesség komponensek szórását vizsgáltuk az ablakban, és ha ez meghaladta a 70-es küszöbértéket, akkor felhőnek osztályoztuk a teljes ablakot. A küszöbértékek empirikus módon lettek meghatározva a képanyagnál a transzformált képek hisztogramjai alapján. A vastag felhőrétegnek osztályozott pixelek közül azokat állítottuk vissza nem felhő értékre, aminek 2-nél kevesebb, azonos osztályba tartozó szomszédja volt.

A felhőárnyékok esetében is hasonló módszer alkalmaztunk a 10 méteres felbontású közeli infravörös sáv idősorán. A topográfiai árnyalással borított területek kizárása az *IC* (*illumination condition*) megvilágítottsági állapot paraméter segítségével történt (Tan et al. 2013), melyet a nap állása és a domborzatmodell segítségével számítottunk ki az egyes időpontokban. Empirikusan a 0,5 érték feletti területeket tekintettük megvilágítottnak, így az annál alacsonyabb megvilágítottságú területeken a későbbi topográfiai normalizáció végzett korrekciót. A Kálmán-szűrő állapot-vektorának sebességváltozásához az infravörös tartomány nagy dinamikája miatt nem lehetett egyetlen határértéket meghatározni, ezért egy lineáris függvény készült empirikusan a Nap-magasság függvényében. A függvény meredekségét  $-0.5$ -nél, és tengelymetszését 125-nél határoztuk meg az egyes képekről vett minták alapján. A sebesség-változás képeket a kapott küszöbértékkel osztályozva kaptuk meg a vetített felhőárnyékokat. A vastag felhő osztályozásnál alkalmazott szomszédsági vizsgálattal itt is ki lettek szűrve az önálló megjelenések. A folyamat végén egy 2-pixel széles pufferezóna került a felhőárnyékok osztályozott területek köré, hogy a kevert pixelek se kerüljenek bele a végső elemzésbe. A három különböző típusú maszk egyesítésével kaptuk meg az egyes képekhez a pontos felhő- és felhőárnyékmazskot (1. ábra).

A felhő és felhőárnyék maszkoláshoz készített módszertan pontosságának meghatározása hibamátrix segítségével történt. Az egyes képeken vizuális interpretációval a kék, zöld és vörös sávokból készült RGB kompozit alapján a felhőket és felhőárnyékokat vektorizáltuk. Az egyes időpontokból származó hibamátrixok felhasználói pontossága lett összehasonlítva a saját fejlesztésű és a Sen2Cor által generált maszkokkal.

### 3.3 Hiányzó pixelek pótlása

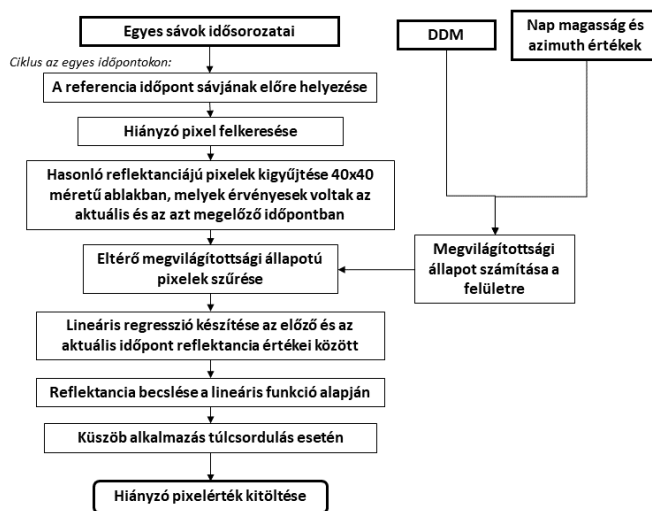
A felhők és felhőárnyékok maszkolása után adathiányos területek keletkeznek az egyes képeken. Gépi tanulási módszereknél az osztályozó modelleket  $n$  dimenziójú adattal tanítják. Az  $n$  dimenzió egy ürfelvétel idősnál a felvételek számának és a szenzor kiválasztott sávjainak a szorzata. Amennyiben az idősorban adathiányos területek vannak, akkor  $n$ -nél kevesebb érvényes dimenzió található csak meg. Ebben az esetben a tanított modell és az osztályozni kívánt objektum dimenziói nem egyeznek meg. Ha a hiányzó értékek helyén „nincs adat” értékek maradnak, az  $n$  dimenzióra tanított modell ezekhez képest számolja az euklideszi távolságokat, ami kevésbé megbízható osztályozáshoz vezethet. Két lehetséges mód van a jelenség feloldására: (1.) Az osztályozó modell dimenzióinak módosítása vagy (2.) az idősor „kifoltozása”. Egy vegetációs időszakon belüli ürfelvétel idősnál, ahol azt feltételezzük, hogy csak fenológiai változás következik be az erdőben, a második lehetőség alkalmazása jár kevesebb költséggel.

A foltozás szekvenciálisan történt meg az egyes időpontokban, sorban haladva az egyes pixeleken (3. ábra). Habár az egyes spektrális sávok között magas korreláció van erdők esetén, a módszer függetlenül kezeli őket. A hiányzó pixelek pótlása a legközelebbi érvényes pixelek alapján történt meg. A szekvenciális haladás miatt az előző időpontban már olyan kép szerepel, amin már nem található adathiányos terület. Ideális esetben, ha havonta egy közel felhőmentes felvétel elérhető, akkor a felvétel rögzítési körülményei között maximum  $10^\circ$  nap magasság vagy azimuth szög eltérés lehet, ami a megjelenő domborzati árnyalás szempontjából még vizuálisan elfogadható különbséget eredményez. Így az aktuálisan vizsgált képen az érvényes pixeleket párosítani lehetett a korábbi reflektancia

értékével. A reflektancia párokra lineáris regressziót lehetett állítani, aminek a meredeksége határozta meg a változás mértékét a két időpont között (3). Sűrű idősor esetén, amikor havonta 1-2 felvétel van, a mozgó árnyékok sem jelentenek nagyobb problémát az ilyen típusú modellezésnél. A reflektancia párok 40 x 40 pixel méretű ablakban kerülnek begyűjtésre. A kiválasztott ablak mérettel foltszerű felhőborítás mellett már nagy valószínűséggel lehetséges érvényes pixel párok mintavételezése a környezetből. A pixelpárok szűrése a megvilágítottsági állapotuk és a reflektancia értékük alapján történik. Azok a reflektancia-értékek kerülnek begyűjtésre, melyeknek az előző időpontban 5 %-nál nem volt nagyobb az eltérése. A megvilágítottsági állapot esetén 20 %-os eltérést határoztunk meg.

$$R_{i(x,y)} = S_{i-1(x,y)} \cdot a_{(x,y)} + b_{(x,y)}, \quad (3)$$

ahol  $R_{i(x,y)}$  egy sáv modellezett reflektancia értéke az aktuális időpontban,  $S_{i-1(x,y)}$  egy sáv reflektancia értéke az előző időpontban,  $a_{(x,y)}$  a környezetből vett reflektancia párokra állított lineáris regresszió meredeksége,  $b_{(x,y)}$  a környezetből vett reflektancia párokra állított lineáris regresszió tengelymetszése.



3. ábra. A hiányzó pixelek pótlásának munkafolyamata

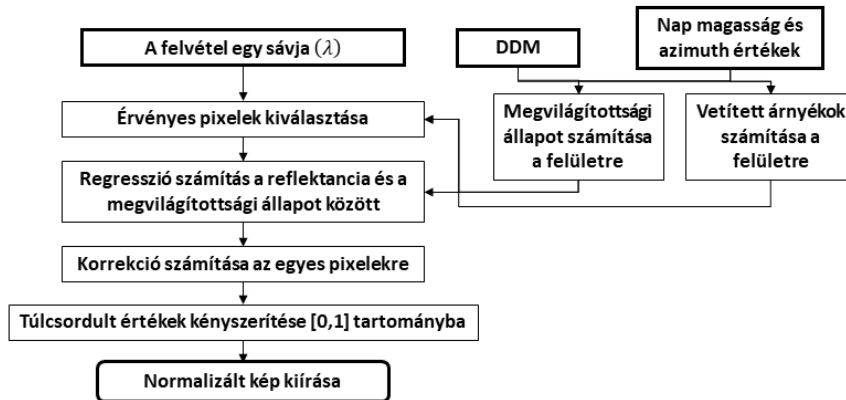
### 3.4 Topográfiai normalizáció

A topográfiai normalizációt az empirikus forgatás modelljével (*empirical rotation model*) (4) végeztük el (Tan et al. 2013). A gyakrabban alkalmazott C és cosinus topográfiai normalizációs eljárások során gyakori hiba, hogy a modell túlkorrigálja a reflektanciát az alacsony megvilágítású területeken, különösen a spektrum látható tartományában. A hiba oka, hogy ezek a módszerek figyelmen kívül hagyják a diffúz sugárzást. Az empirikus forgatás modellje ezt küszöböli ki adatvezérelt módon azzal, hogy megszünteti a megvilágítottság függését a reflektanciától. A módszer előnye, hogy nem feltételez Lambert-féle felületet, azonban felszínborítás-függő a paraméterezése. Az egyes spektrális sávokhoz tartozó paramétereket az adott felszínborításból vett mintákon kell meghatározni. Az egyes sávok és a megvilágítottsági érték között lineáris regressziót kell felállítani, melyben csak érvényes, nem árnyalt pixelek lehetnek. Az erdőterületekre készítettük el a modell paraméterezését, melyhez a mintaterületen található erdőrészek területéről gyűjtöttük ki a reflektancia-értékeket. Az erdőreszlet poligonokban található egyes pixelek értékei lettek felhasználva a regresszióknál, melyek különböző korú, záródású és erdő-típusú faállományokat foglaltak magukba. Az árnyalt területeket ki kellett zárni a vizsgálatból, melyeken a megvilágítottsági állapot 0 érték alatt volt. A vetített árnyékok szűréséhez sugárkövetéses módszerrel készült maszk.

$$R_{i(x,y)} = S_{i(x,y)} - a_i \cdot (IC_{(x,y)} - IC_h), \quad (4)$$

ahol  $R_{i(x,y)}$  normalizált reflektancia az  $i$  sáv egy pixelén,  $S_{i(x,y)}$  Eredeti reflektancia az  $i$  sáv egy pixelén,  $a_i$  lineáris regresszió meredeksége az adott sávon,  $IC_{(x,y)}$  megvilágítottsági állapot a felületen,  $IC_h$  vízszintes felület megvilágítottsági állapota, mely egyenlő a napállás zenit szögének cosinuszával.

A normalizáció után a 0-nál kisebb és 1-nél nagyobb értékek 0 vagy 1 értékkel lettek felülírva. A topográfiai normalizáció az idősor minden egyes képén megtörtént (4. ábra).



4. ábra. A topográfiai normalizáció munkafolyamata

#### 4 Eredmények és megvitatásuk

A felvételek letöltése és atmoszférikus korrekciója minden egyes felvételnél megtörtént a felhőborítás mértékétől függetlenül. Ennek oka, hogy csak ilyen módon érhető el a Sen2Cor által készített automatikus felszínsztályozás réteg. A maximum 10 %-os felhőborítottság kritériumának 9 darab felvétel felelt meg, melyeknek az időbeli eloszlása nem túl kedvező (1. táblázat). Jellemzően a vegetációs időszak közepén és végén voltak teljesen felhőmentes felvételek.

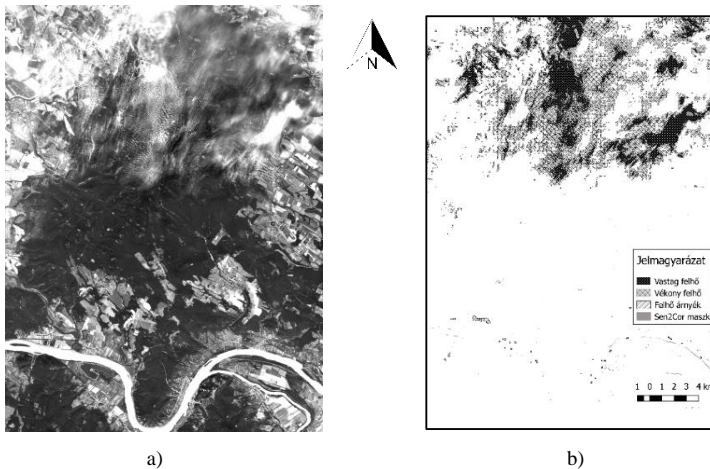
1. táblázat. A Sen2Cor felhőmaszkjai alapján kiválasztott felvételek listája

Dátum	Műhold pálya	Nap zenit	Nap azimut
2017.04.27	R079	27.65	158.13
2017.06.28	R036	31.77	151.23
2017.07.03	R036	32.92	152.16
2017.07.11	R079	34.30	157.88
2017.07.26	R079	38.83	161.22
2017.07.28	R036	40.07	157.91
2017.07.31	R079	40.49	162.34
2017.09.01	R036	52.45	165.82
2017.09.16	R036	57.91	168.01

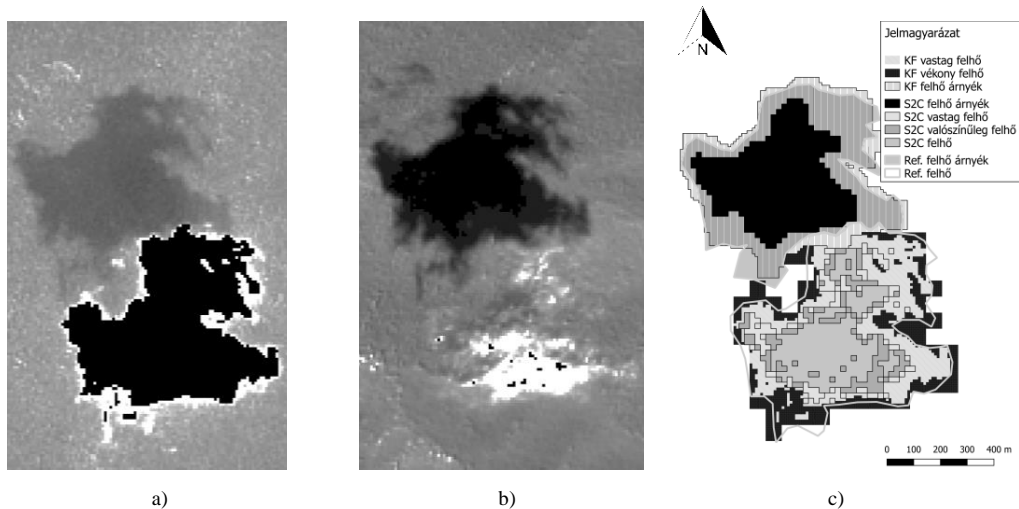
A felhőmaszkoláshoz a 2017.07.28-án készült teljesen felhőmentes felvétel lett kiválasztva referenciának. A Kálmán-szűrő alapú felhőmaszkolás után a 2017.07.26-án készült felvételt el kellett távolítani az idősből, ugyanis jelentős mértékben vékony felhőréteg borította, amit a kidolgozott kép-pótlás módszere nem tudott volna megfelelően javítani (5. ábra).



A pontossági vizsgálat eredménye a várt értékeket hozta (2. táblázat). A kézzel vektorizált felhő poligonokhoz viszonyítva a multitemporális elven működő maszk felhasználói pontossága (Congalton 1991) átlagosan 86%, míg a Sen2Cor által készített maszkok pontossága csak 12%. Az eredmények vizsgálata alapján a saját fejlesztésű felhőmaszk minden egyes vastag felhő előfordulást megtalált, a vékony felhőrétegek esetén a nagyon kis kiterjedésű ( $6 \times 6$  pixelnél kisebb) foltokat nem azonosította pontosan. Mivel a felhők nem azonos mértékben jelennek meg a teljes spektrumban, a látható tartományban nagyobb a kiterjedésük, míg az infravörös tartományban kisebb. A 6. ábrán látható, hogy a vegetáció szempontjából fontosabb tartományban megfelelő pontosságú a felhő maszk vastag és vékony felhőréteg esetén is. A felhőárnyékok detektálása is minden esetben pontosan történt meg, a kiterjedésüknél 1-2 pixel pontatlanság előfordult. A településeken, vízfelületeken és mezőgazdasági területeken az egy éven belüli gyors változások miatt sok hamis vastag felhőréteg osztályozás született, melyek további sávok bevonásával kiküszöbölhetők.



5. ábra. A 2017.07.26-án készült felvétel kék sávja a) és a Kálmán-szűrő segítségével készített felhőmaszk b)



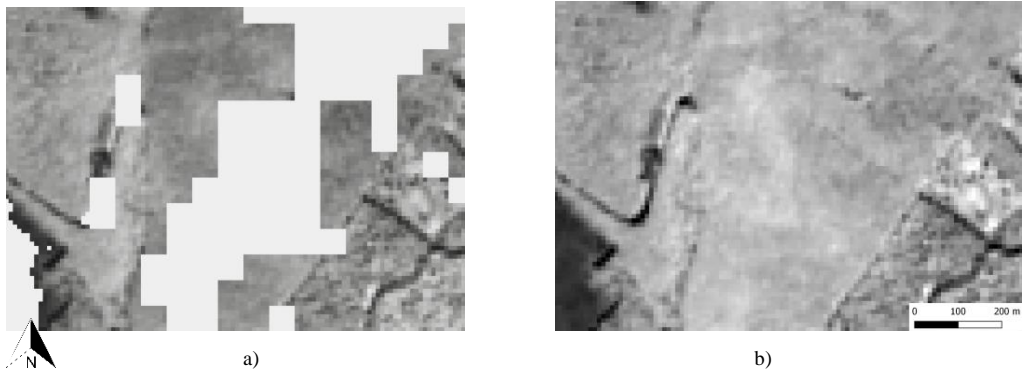
6. ábra. 2017.06.26-án készült felvétel egy részletén a kék sávban a) és a közeli infravörös sávban b) történt sebesség komponens változások és az ezek alapján készült felhőmaszk c)

A felhőmaszkoláshoz tartozó küszöbértékek a felhasznált képanyagnak a függvényei. Habár a Kálmán-szűrő alkalmazásával sikerült az egyszerű reflektancia különbségről egy standardizált skálára helyezni a változásokat, de így is a referencia-képhez kellett hangolni a paramétereket.

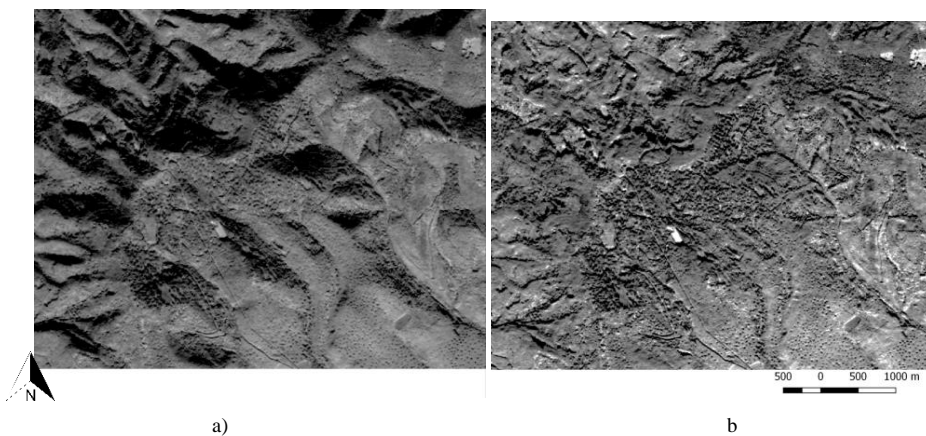
A hiányzó pixelek pótlása lineáris modell segítségével történt meg (7. ábra). Az elkészített képkompozitok megőrizték az objektumok képjellemzőit a  $40 \times 40$  pixel méretű ablakból vett változás-minták alapján. A hirtelen bekövetkezett változásokat nem tudta megfelelően követni a módszer, mint például a vetített árnyék pozíciójának mozgását, ha a szomszédos időpontok között túl nagy volt a távolság. Azonban az ilyen típusú változások nem az erdő koronaszintjén történnek, így ennek vizsgálatánál nem okoz nagy problémát.

**2. táblázat.** A részleges felhőborítottságú felvételeken végzett pontossági vizsgálat felhasználói pontosságai (user accuracy) a saját fejlesztésű (KF) és Sen2Cor (S2C) maszkoknál

Dátum	KF maszk	S2C maszk
2017.04.27	78.726 %	7.295 %
2017.06.28	93.764 %	28.066 %
2017.07.03	86.624 %	3.581 %
2017.07.11	98.916 %	13.391 %
2017.07.26	67.818 %	0.092 %
2017.09.01	89.017 %	19.515 %



**7. ábra.** 2017.06.28-án készült maszkolt felvételen a) történt hiányzó képpótlás eredménye b)



**8. ábra.** A Magas-Börzsöny egy alacsony napállás mellett 2017.09.16-án készült S-2 felvételen a) és normalizált képe b)

A topográfiai normalizációnál az empirikus forgatás modellje vizuálisan elfogadható eredményt adott (8. ábra). A módszer valóban kiküszöböli a túlkorrigálás hibáját azzal, hogy elválasztja a reflektancia és a megvilágítottsági érték közvetlen kapcsolatát. A forgatási modell felállításához az erdőterületek

vegyes korosztályú és erdőtípusú mintákat tartalmaztak, de az eredményt ez nem befolyásolta negatívan. A megfelelő működéshez, megfelelő méretű mintahalmozás szükséges, ami az összes lehetséges megvilágítottsági állapotot tartalmazza az egyes időpontokban

#### 4 Következtetések

A kutatás során létrehoztunk egy olyan munkafolyamatot, amivel konzisztens S-2 ūrfelvétel-idősor lehet létrehozni erdőterületek kiértékeléséhez. A mintaterületre előfeldolgozott idősor alkalmas további elemzésekre. A folyamatok jelentős része automatizált, így kevés paraméter megváltoztatásával a mintaterülethez hasonló területeken alkalmazni lehet. A felhőmaszkolásnál alkalmazott küszöbértékek automatikus megválasztása kiválasztott tanítóterületek alapján tovább automatizálható.

Az ūrfelvételek beszerzése és atmoszfērikus korrekciója idő- és erőforrás-igényes része a távérzékelés folyamatának. Földmegfigyelési adatközpontokban, ahol már közvetlenül az atmoszfērikus korrekción átesett felvételek találhatóak, rövid idő alatt elemzésre alkalmas képanyagot lehet létrehozni a módszerrel.

Minél nagyobb területet vizsgálunk egyszerre, annál nehezebb alacsony felhőborítottságú felvételeket találni. Ezért célszerű a mintaterülethez hasonló méretű 25 × 25 km területekre alkalmazni az eljárását. Ez a területméret jellemzően lefed egy erdészeti kistájat, ahol például gépi tanulási algoritmusokhoz megfelelő mennyiségű tanítóadat található.

A módszeren olyan irányba is fejleszhető, hogy magasabb felhőborítottságú képeket is be tudjon vonni. Nagyobb kiterjedésű felhőborítás esetén hosszabb idősor alapján, akár nem lineáris modellel megoldható a képpótlás, így ezek a felvételek is használhatóvá válhatnak, amivel a vegetációs időszak elején található felvételek is bekerülnének az elemzésekbe. A felhőmaszkolás jelen állapotában csak bitemporális módon működik egy referencia kép alapján. Ha a felhőmaszkolás és a képpótlás szekvenciálisan történik minden egyes időpontra, akkor a valódi multitemporális felhőmaszkolás is megvalósítható, ahol a referencia kép mindig az előző időpontban már felhőmentes felvétel. Ez minimalizálná az egyes felvételek közötti változás mértékét, így egyszerűbb paraméterek alkalmazását tenné lehetővé. Kezdeti referencia képnek S-2 ūrfelvételek mozaikjait lehetséges felhasználni a jövőben, melyek hosszabb időszakok alapján készült kompozitok, mint például a Copernicus program keretében készülő *Sentinel-2 Global Mosaic* (S2GM) termék (<https://land.copernicus.eu/imagery-in-situ/global-image-mosaics/>, 2019-10-02).

A bemutatott munkafolyamat egy vegetációs időszakból származó S-2 ūrfelvételekből képes létrehozni konzisztens idősort, olyan feltétel mellett, hogy nem történik jelentős változás az erdők kiterjedésében és levélfelületében a vizsgált időszak alatt. Az alacsony felhőborítottságú (<10%) felvételek integrálását lehetővé teszi az idősorba, az ennél magasabb felhőborítású felvételeket kiszűrni.

**Köszönetnyilvánítás** – A kutatás az Emberi Erőforrások Minisztériuma ÚNKP-18-3-IV kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának támogatásával készült. Köszönetet mondunk a KIFÜ NIIF Programjának a HPC infrastruktúra szolgáltatásáért, melyen a számítások készültek és a Precision Forestry Cooperative-nek (PFC) a kutatásban nyújtott segítségért.

#### Hivatkozások

- Baetens L., Desjardins C., Hagolle O** (2019): Validation of Copernicus Sentinel-2 Cloud Masks Obtained from MAJA, Sen2Cor, and FMask Processors Using Reference Cloud Masks Generated with a Supervised Active Learning Procedure. *Remote Sensing*, 11(4), 433.
- Barton I., Király G., Czímber K., Hollaus M., Pfeifer N** (2017): Treefall Gap Mapping Using Sentinel-2 Images. *Forests*, 426.
- Barton I., Király G., Czímber K** (2018): Képfeldolgozó program fejlesztése nagy mennyiségű földmegfigyelési adat feldolgozásához és kiértékeléséhez. In A. Bidló, & F. Facskó (Szerk.), Sopron: Soproni Egyetem Kiadó. Soproni Egyetem Erdőmérnöki Kar VI. Kari Tudományos Konferencia 164-167.
- Congalton RG** (1991). A review of assessing the accuracy of classifications of remotely sensed data. *Remote Sensing of Environment*, 37(1), 35–46.
- Drusch M., Del Bello U., Carlier S., Colin O., Fernandez V., Gascon F., . . . Martimort P** (2012): Sentinel-2: ESA's optical high-resolution mission for GMES operational services. *Remote sensing of Environment*, 120, 25-36.
- Dwyer J., Roy D., Sauer B., Jenkerson C., Zhang H., Lyburner L** (2018): Analysis ready data: enabling analysis of the Landsat archive. *Remote Sensing*, 10(9), 1363.

- Ferencz C, Tarcsai G, Lichtenberger J** (1993): Correction of atmospheric effects of satellite remote sensing data (Landsat MSS-NOAA AVHRR) for surface canopy investigations. *International Journal of Remote Sensing*, 14(18), 3417–3431.
- Frantz D, Haß E, Uhl A, Stoffels J, Hill J** (2018): Improvement of the Fmask algorithm for Sentinel-2 images: Separating clouds from bright surfaces based on parallax effects. *Remote Sensing of Environment*, 215, 471–481.
- Gorelick N, Hancher M, Dixon M, Lyushchenko S, Thau D, Moore R** (2017): Google Earth Engine: Planetary-scale geospatial analysis for everyone. *Remote Sensing of Environment*, 202, 18–27.
- Hagolle O, Huc M, Villa Pascual D, Dedieu G** (2015): A multi-temporal and multi-spectral method to estimate aerosol optical thickness over land, for the atmospheric correction of FormoSat-2, LandSat, VENUS and Sentinel-2 images. *Remote Sensing*, 7(3), 2668–2691.
- Hollstein A, Segl K, Guanter L, Brell M, Enesco M** (2016): Ready-to-Use Methods for the Detection of Clouds, Cirrus, Snow, Shadow, Water and Clear Sky Pixels in Sentinel-2 MSI Images. *Remote Sensing*, 8(8), 666.
- Kennedy RE, Yang Z, Cohen WB** (2010): Detecting trends in forest disturbance and recovery using yearly Landsat time series: 1. LandTrendr—Temporal segmentation algorithms. *Remote Sensing of Environment*, 114(12), 2897–2910.
- Main-Knorn M, Pflug B, Louis J, Debaecker V, Müller-Wilm U, Gascon F** (2017): Sen2Cor for Sentinel-2. Image and Signal Processing for Remote Sensing XXIII, 10427. Warsaw, Poland: Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE). doi:10.1117/12.2278218.
- Micijevic E, Haque M, Mishra N** (2016): Radiometric calibration updates to the Landsat collection. *Earth Observing Systems XXI*, 9972.
- Nagy J** (2007): A Börzsöny hegység edényes flórája. *Rosalia 2* (2007): 209. Budapest. Duna-Ipoly Nemzeti Park Igazgatóság.
- Pasquarella VJ, Holden CE, Woodcock CE** (2018): Improved mapping of forest type using spectral-temporal Landsat features. *Remote Sensing of Environment*, 210, 193–207.
- Phiri D, Morgenroth J** (2017): Developments in Landsat land cover classification methods: A review. *Remote Sensing*, 9(9), 967.
- Saravanan S, Parthasarathy K** (2014): Video Object Detection and Tracking using kalman filter. *International Journal of Engineering Research and Development*, 9(7), 31–39.
- Szantoi Z, Strobl P** (2019): Copernicus Sentinel-2 Calibration and Validation. *European Journal of Remote Sensing*, 52(1), 253–255.
- Tan B, Masek J, Wolfe R, Gao F, Huang C, Vermote E, . . . Ederer G** (2013): Improved forest change detection with terrain illumination corrected Landsat images. *Remote Sensing of Environment*, 136, 469–483.
- Zhu Z, Wang S, Woodcock CE** (2015): Improvement and expansion of the Fmask algorithm: Cloud, cloud shadow, and snow detection for Landsats 4-7, 8, and Sentinel 2 images. *Remote Sensing of Environment*, 159, 269–277.

# A MODERN NAVIGÁCIÓ ALAPJAI: MŰHOLDOK, GRÁFOK, MESTERSÉGES INTELLIGENCIA

Kalmár János\*



**The basics of the modern navigation: satellites, graphs, AI** – *In the performance of the navigation process there are three basic tasks which play central role in it. These are as follows: the satellites (positioning), the graphs (route planning) and artificial intelligence (for the automatic tracking of the vehicle in a given path). This study describes the basic applied technical and algorithmic solutions too.*

**Keywords:** navigation, GPS, graph theory, artificial intelligence

*A navigáció három alapeladatának ellátásában ma központi szerepe van a műholdaknak (GNSS bázisú helymeghatározás), a gráfoknak (útvonaltervezés) és a mesterséges intelligenciának (a jármű előírt pályán történő automatikus vezetése, irányítása). A tanulmány ismerteti az alkalmazott megoldások műszaki és algoritmikus alapjait, illetve a mesterséges intelligencia módszerek alkalmazását a CSFK GGI kutatásaiban.*

**Kulcsszavak:** navigáció, műholdas helymeghatározás, gráfelmélet, mesterséges intelligencia

## 1 Bevezetés

### 1.1 Történelmi áttekintés

Az emberek nagy része folyamatosan mozgásban van, gyakran olyan úti céllal, ahol még sosem járt. A mobilitás tette lehetővé emberek, áruk és kultúrák elterjedését (pl. az ókortól kezdve a selyemúton), melynek feltétele a sikeres navigáció. Ennek technikai feltételei (irányjelző halmok) már az ősidőkben megjelentek. A kőkorszakból ismertek olyan ábrázolások (Törökország, Catalhöyük, ie. 6200), melyeket a régészek térképként azonosítottak – az ókorban Ptolemaiosz (iu. 150) készített világtérképet. Az első műutakat Mezopotámiában építették, és a XVIII. századig nem készültek a rómaiaknál jobb utak. Az iránytűt Kínában már i.e. 1100 körül ismerték, Európában a XIII. század óta használják. A vikingek a X. században felhős időben hegyikristály segítségével állapították meg a Nap helyzetét, vagyis a déli irányt. A hajósok a XV. század óta használnak bolygó és csillagtérképeket a földrajzi szélesség megállapítására. A kronométer (pontos mechanikus óra) a XVIII. század óta segíti a tengereket a földrajzi hosszúság megállapításában.

### 1.2 Rádiós helymeghatározás a XX. században

A vizuális navigációt (pl. a terep és térkép összevetése, helymeghatározás a Nap illetve a csillagok alapján) az ókortól kezdve segítették mesterséges objektumok, a világítótoronyok. A XX. században feltalált rádiózás, a rádióhullámok szinte korlátlan terjedése és irányíthatósága lehetővé tette a helymeghatározás új alapokra helyezését. Tájékozási referencia pontokként rádióforrások is használhatók, ha ismerjük pozíciójukat, irányukat vagy távolságukat. Globális alkalmazhatóságuk feltétele, hogy a Föld bármely pontjáról észlelhető legyen legalább 2-3 referencia-állomás jele, ami földi telepítés esetén – VOR (VHF), LORAN (LF), (1937-) – több száz, űrbeli telepítés esetén – NAVSAT (UHF), (1958-), NAVSTAR (UHF), (1973-) - több tucat referencia-állomás meglétét követeli.

A giroszkóp használatán alapuló inerciális navigáció nem igényel referencia-pontokat, a pályakövetés módszerével állapítja meg a kiindulási ponthoz viszonyított pozíciót, a rádiós helymeghatározó rendszerektől eltérően, a megtett úttól és időtől függő pontossággal.



I. ábra. A königsbergi hidak sematikus térképe és gráfmodellje

### 1.3 Útvonaltervezés gráf modell alapján

Eulertől, a híres matematikustól 1736-ban megkérdezték Königsberg (ma Kalinyingrád) lakói, hogy miért nem tudnak egy olyan sétát tenni a folyóparton és a szigeteken (1. ábra), hogy mindegyik hídron pontosan egyszer menjenek át? Ezen feladat megoldása kapcsán Eulerhez kötjük a gráfelmélet alapjainak lerakását, fogalmainak és módszereinek kidolgozását. Lovász László, az MTA elnöke és napjaink legismertebb magyar matematikusa is ezen tudományág nemzetközileg kiemelkedő művelője.

Egy közlekedési hálózat gráf modelljében az elágazás nélküli útszakaszok alkotják a gráf éleit (egyirányú utaknál irányított éleket), az útkereszteződések és útelágazások pedig a gráf csomópontjait. Az útvonaltervezés alapfeladata az, hogy a kiindulási pontból a hálózat útszakaszait felhasználva jussunk el úti célunkhoz. Ha az útszakaszokhoz költséget/hosszúságot rendelünk, akkor a számos lehetséges út közül kiválaszthatjuk a legolcsóbbat/legrövidebbet, vagyis optimális útvonalat tervezhetünk, ami az úthálózat gráf-modelljében standard feladatként oldható meg.

### 1.4 A jármű automatizált vezetése

A navigáció harmadik alapfeladata (a jármű tervezett útvonalon való vezetése, irányítása) hagyományosan humán kivitelezésű, vagyis ember vezeti a járművet a pillanatnyi tartózkodási hely, a forgalmi viszonyok és a követendő útvonal ismeretében. Részfeladatokat egyszerű, könnyen átlátható környezetben, pl. a levegőben és vízben, ahol a jármű értékéhez képest kis ráfordítással lehet automatizálni a vezetést, már évtizedek óta ellátnak robotpilóták, de a közúti közlekedést tekintve most áll robbanás előtt a technológia, ami kevesebb balesetet, dugót, bírságot, biztosítási díjat és parkolóhely-igényt ígér, a járművek jobb kihasználását, több szabadidőt és pihenést garantál.

## 2 Műholdas rádió-navigáció (GNSS)

### 2.1 Az űr meghódítása

A műholdas rádió-navigáció referencia állomásainak, a műholdaknak az űrbe juttatása rakétákkal történik. A rakéta meghajtáshoz először használt fekete lőport az iránytűhöz hasonlóan Kínában fedezték fel az ókorban, és elsősorban tűzijátékok előállítására használták. A XII. században röppentyűként az ellenség – pl. a lovas nomádok - megfélemlítésére alkalmazták, lőfegyverként viszont először az oszmán törökök használták a XIII. században. A XIX. századi sci-fi nagymestere, Verne Gyula az űrutazást még egy ágyugolyóban képzelte el (1865), de a századforduló után Ciolkovszkij (1903, 1929) kidolgozta a Föld elhagyásának (többfokozatú) rakéta alapú elméletét. Az első folyékony hajtóműves rakétát Goddard (USA, 1926) építette, de a világűr - a 100 km-es magasságot - elsőként a német V2 rakéta (1942, tervezője Wernher von Braun, később a NASA egyik vezetője) érte el, és London bombázásával szerzett kétes hírnevet. 'Sebészi pontosságról' még nem beszélhetünk, a rakéta a 320 km-es hatótávon belül 17 km-es szórással csapódott be. A német rakéta-program elfogott szakembereire, lefoglalt terveire és anyagaira támaszkodva az USA és a Szovjetunió rivalizálása hajtotta a hidegháborús fegyverkezési versenyt, melynek alapvető célja az volt, hogy az új fegyvert, az atom-, majd

hidrogénbombát közvetlenül juttassák el a célterületre - a bombázó repülőgépek még időben kilőhetők, de egy több ezer km/h sebességgel becsapódó ballisztikus rakéta nem elhárítható, legalábbis a Reagen-féle csillagháborús programig (1983).

Az atombomba célba juttatása mellett a rakéták feladata a felderítő műholdak pályára állítása is. Ugyan a légi felderítés már az első világháborúban is fontos szerepe játszott, de a felderítő repülőgépek és léghajók könnyen leküzdhető célpontnak bizonyultak, ezért alkalmazásuk kockázatos volt. Az USA-nak volt ugyan 1956 után egy szinte támadhatatlan kémrepülőgépe (U-2, 21 km magasságban repült, és ez fedezte fel a SzU kubai rakétatelepítési programját – 1962, kubai rakétaválság), de azt a szovjet légvédelmi rakéták 1960 óta képesek 'semlegesíteni', és egyébként sem alkalmas folyamatos felderítésre a korlátozott hatótáv és üzemidő miatt. Egy műhold viszont saját erőforrásaira és a nap-elemekre támaszkodva évekig monitorozhatja a Föld felszínét, és megfigyeléseit rádióan továbbítja a földre.

Az első Szputnyik műhold 1957-ben állt föld körüli pályára, és a második, ugyanebben az évben már élőlényt is vitt magával (Lajka kutyát). Nem törekedtek arra, hogy élve vissza is hozzák. Jurij Gagarin 1961-ben, Tyereskova, az első nő, 1963-ban járt az űrben, az első űrsétát pedig Leonov hajtotta végre 1965-ben. A kezdeti sokk után az USA visszavágott, Kennedy elnök 1961-ben meghirdette a Hold programot, és 1969-ben Armstrong ('kis lépés egy embernek, hatalmas ugrás az emberiségnek') lépett először a Hold felszínére ('a Sas leszállt'). A SzU ember nélküli Lunohodja egy évvel később szállt le a Holdra.

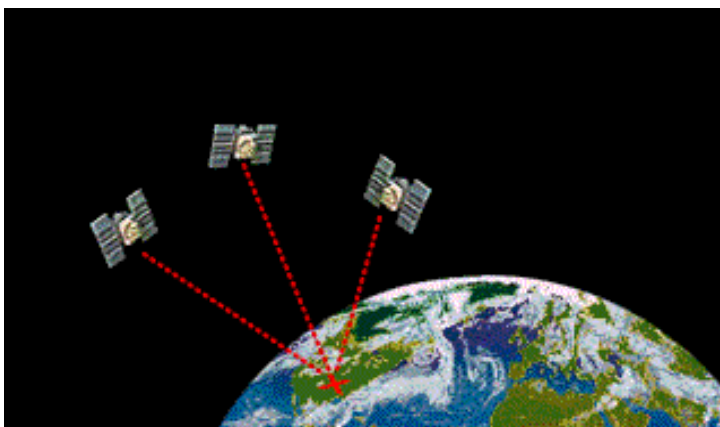
Az első űrállomást még a SzU lőtte fel (Szaljut 1, 1971), ahol nyolc napot Farkas Bertalan, az első magyar űrhajós is vendégeskedett (Szaljut 7, 1980). Második magyarként a microsoft-os Charles Simonyi fizetős 'űrturistaként' töltött két hetet a nemzetközi űrállomáson (ISS) 2007-ben illetve 2009-ben, alkalmanként 30 millió dollárért.

Az első űrrepülőgépet (Columbia, 1981, felrobbant 2003-ban) az USA lőtte fel, szovjet megfelelője, a Burán (1988) a SzU válsága miatt csak egyszer, ember nélkül járt az űrben.

Mindenesetre a Mír (1986) és az ISS (1998) mellett már Kínának is van moduláris űrállomása (Tienkung 1) 2011 óta, mely 2018-ban zuhant vissza a Földre, és Kínának igen ambiciózus tervei vannak mind a Holdra-szállással, mind a Mars-kutatással kapcsolatban – sajnos az Európai Űrügynökség, az ESA Mars expedícióinak leszálló egységei nem éledtek fel a landolás után (2003, 2016).

## 2.2 A GNSS rendszerek jellemzői

A GPS az USA által kifejlesztett és üzemeltetett – a Föld bármely pontján, a nap 24 órájában működő – műholdas helymeghatározó rendszer - 24 db, 6 pályán 20200 km magasságban folyamatosan keringő műholdból áll + 7 tartalék (Ádám et al. 2004). Civil pontossága kb. 5-10 méter, de differenciális mérési módszerekkel permanens hálózatokban néhány mm pontosság is elérhető. Civil célokra 1983 óta használható, teljes kiépítettségét a 90-es években érte el.



2. ábra. A GPS alapja: a műholdak képezik a helymeghatározás referencia-pontjait

A műholdas helymeghatározó rendszer időmérésre visszavezetett távolságmérésen alapul. Mivel ismerjük a rádióhullámok terjedési sebességét, és ismerjük a rádióhullám kibocsátásának és beérkezésének idejét, ezek alapján meghatározhatjuk a forrás távolságát.

A háromdimenziós térben három ismert helyzetű ponttól mért távolság pontos ismeretében már meg tudjuk határozni a pozíciót (2. ábra). A további műholdakra mért távolságokkal pontosítani tudjuk ezt az értéket.

A helymeghatározás lépései:

- A GPS-vevő folyamatosan rendelkezzen a műholdakon lévő atomórák pontos idejével,
- Legalább 3 műhold láthatósága esetén 'háromszögeléssel' meghatározható a földfelszíni pozíció,
- Ehhez ismerni kell a műholdak aktuális pozícióját (pályáját), a vevő és a műholdak pontos távolságát, ami a kisugárzott jel megérkezési idejének ismeretében számítható,
- Hibák és korrekciók számítása (ionoszféra, stb.).

A GPS-sel történő helymeghatározás előnyei:

- napszaktól független,
- földfelszín feletti magasságtól független,
- mozgási sebességtől független (a műszerrel akár repülőgépen is mérhetünk, egy bizonyos sebességhatárig).

A GPS-sel történő helymeghatározás hátrányai:

- a szükséges adatok vétele viszonylag hosszú időbe telik (bekapcsolás után több percbe is telhet),
- csak nyílt, fedetlen területeken alkalmazható (pl. alagútban nem),
- az épületekről visszaverődő jelek zavart (hibát) okoznak a mérésben,
- a ritkán előforduló erős napkitörések alatt használhatatlan a GPS a zajos rádióhullámok és a meghibásodott műholdak miatt,
- a gyenge műholdjelek mesterségesen (a Földről) is zavarhatók (GPS jammers), amit a hadviselő felek kihasználnak (pl. az amerikai drónok elfogása Iránban),
- a rendszer gazdája bármikor kikapcsolhatja ezt a szolgáltatást, és vehetjük elő a papírtérképet (1991, háború Irak ellen - a kuvaiti válság).

Konkurens műholdas helymeghatározó rendszerek:

- GLONASS: a Szovjetunió (majd Oroszország) fejlesztette és telepítette az amerikaihoz hasonló műszaki tartalommal (24+5 műhold 3 pályán, 2011 óta használható)
- GALILEO: az EU folyamatosan csúszó projektje, kizárólag civil alkalmazás, ingyenesen 1 m, fizetősén 1 cm pontossággal, (30 műhold lesz 3 pályán, jelenleg 22 működik, 2016. december 15-től szolgáltatót).
- BEI DOU-2 (COMPASS): Kína 2020-ig kiépítendő 35 műholdas rendszere, 10 m civil, és 10 cm katonai pontossággal, 2018-ban már 9 második generációs műholddal fedi le Ázsiát.
- IRNSS: India is kiépített 2016-ig egy saját lokális, 7 műholdas rendszert, melynek pontossága 20 m.

### 3 Gráfelmélet

Kezdjük a definíciókkal, majd az egyes problémák gráf modelljét ismertetjük (Andrásfai 1973, Lovász 2004, Fleiner 2015) alapján – a megoldó algoritmusokra nem térünk ki, azokat a hivatkozott irodalom már tartalmazza:

- Egy *gráf* két halmazból áll: a csúcsok, és az őket összekötő élek halmazából
- Ha egy csúcsba nem vezet él, akkor az *izolált csúcs*
- Az *üres gráf* csupa izolált csúcsokból álló gráf
- Ha egy élen csak egy irányba mehetünk, akkor az *irányított él*
- *Többszörös* élről beszélünk, ha két csúcsot több él köt össze



- A *hurok-él* önmagába visszatérő él, azaz két végpontja azonos
- Az *egyszerű gráfok* nem tartalmaznak sem hurok-élet, sem többszörös élet.
- Az élekhez bizonyos esetekben *hosszat/kapacitást* rendelünk
- A *teljes gráfok* olyan egyszerű gráfok, amelyekben bármely két különböző csúcs között vezet él (3. ábra, jobb oldala)
- Egy gráf *sík-gráf*, ha lerajzolható úgy a síkba, hogy élei csak a szögpontokban metszik egymást
- Egy csúcs *fokszáma* a belőle kiinduló élek száma
- *Sétán* két csúcsot összekötő él-sorozatot értünk. Speciális séták:
  - *vonalt*: olyan séta, melyben minden él legfeljebb egyszer szerepel (a csúcsok többször is szerepelhetnek).
  - *zárt vonalt*: olyan vonal, melynek kezdő és végpontja azonos.
  - *nyílt vonalt*: olyan vonal, melynek kezdő és végpontja különböző.
  - *út*: minden csúcsot legfeljebb egyszer érintő séta.
  - *kör*: út, melynek a kezdő és végpontja azonos, a többi csúcsot legfeljebb egyszer érinti.
- Egy gráf *nem összefüggő*, ha van két olyan csúcsa, melyek nincsenek úttal összekötve (3. ábra bal oldala).
- Egy gráf akkor *fa* (-gráf), ha összefüggő, és nem tartalmaz kört

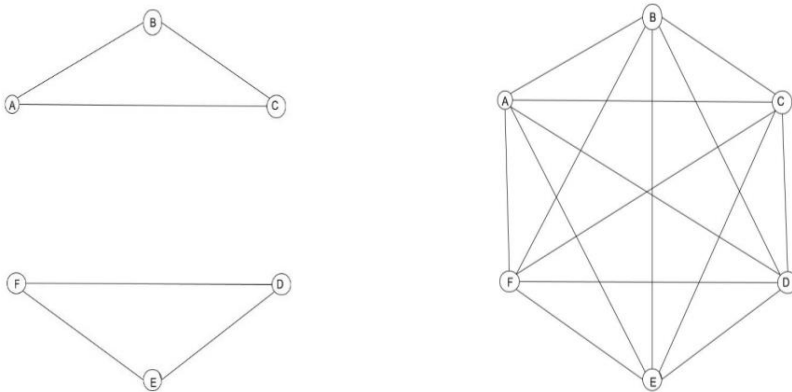
Ezután ábrákon mutatjuk be, milyen problémákat modellezhetünk a gráfokkal és hogyan oldhatjuk meg a segítségével.

A 4. ábra gráfját tekinthetjük az ún. *kínai postás probléma* modelljének is: a gráf pontjai útkereszteződések, élei pedig utcaszakaszokat reprezentálnak. Az A pontból (postahivatal) kiindulva úgy kell végigmenni az összes élen (utcán), hogy visszajussunk A-ba (tehát Euler kört keresünk), és minden élen csak egyszer mehetünk végig. Egy megoldása: A-B-C-D-E-F-A-C-E-B-F-D-A.

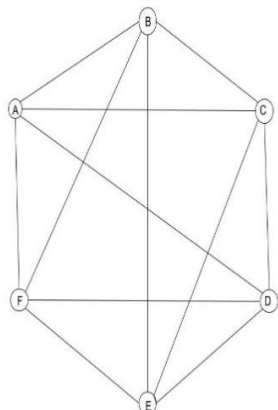
Az ún. *utazó ügynök problémát* is modellezheti a 4. ábra gráfja: a gráf pontjai az üzletkötő által felkeresendő városokat, az élek pedig a közöttük található közlekedési összeköttetéseket reprezentálják. A cél most is egy A-ból induló (Hamilton) kör meghatározása úgy, hogy minden várost pontosan egyszer érintve térjünk vissza A-ba. A talált körök: A-B-C-D-E-F-A, A-B-E-C-D-F-A, A-B-F-E-C-D-A, A-C-B-F-E-D-A, A-C-D-E-B-F-A és A-C-E-B-F-D-A.

Az 5. ábra a 4. ábra gráfjának egy olyan *izomorf* képét mutatja (a pontokat eltologattuk, de a kapcsolatok, azaz a *topológia* változatlan maradt), mely síkba rajzolható, vagyis az élek nem metszik egymást. Ilyen problémával pl. az elektromérnökök találkozhatnak, mert a nyomtatott áramköröket, chipeteket úgy kell megtervezni, hogy a nem szigetelt elektromos vezetékek síkban ne messék egymást.

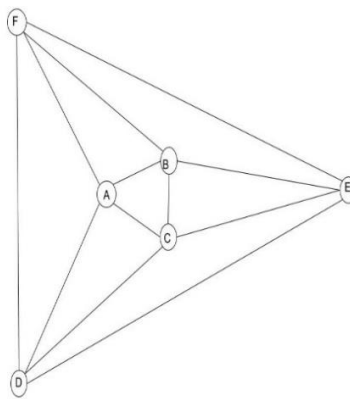
Ha a gráf éleihez hosszúságot vagy költséget rendelünk (6. ábra), akkor kereshetünk minimális hosszúságú vagy költségű feszítőfát. Alkalmas vezetékek (víz, villany, telefon, gáz) gazdaságos nyomvonalának meghatározására (7. ábra).



3. ábra. Hatpontos, nem összefüggő és teljes gráfok

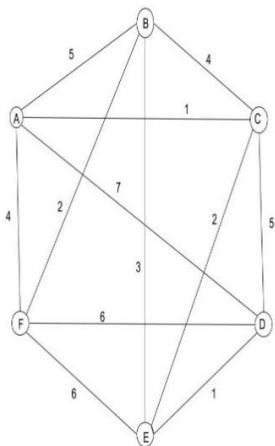


4. ábra. Hatpontos irányítatlan gráf

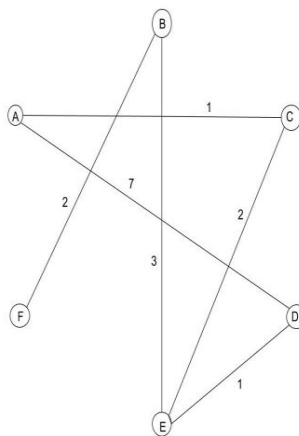


5. ábra. A 4 gráf izomorf képe

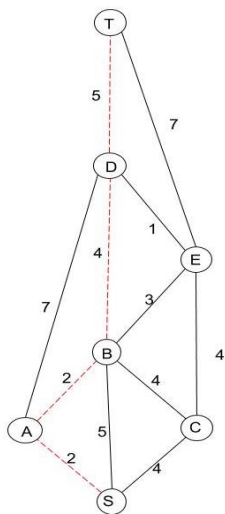
Egy útvonal-tervezési feladat gráf-modelljét látjuk a 8. ábrán. Az élekhez hosszokat/költségeket rendelünk. A 8. és 9. ábrák a gráf két legrövidebb, 13 hosszú, S kezdőpontból T célpontba vezető útját ábrázolják.



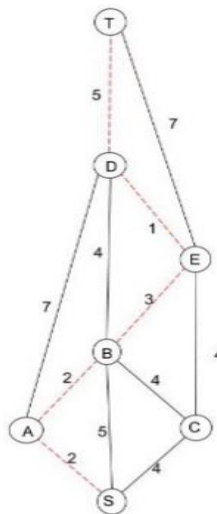
6. ábra. A 4 gráf éleihez költségeket rendelünk



7. ábra. A 4 gráf gazdaságos feszítőfája

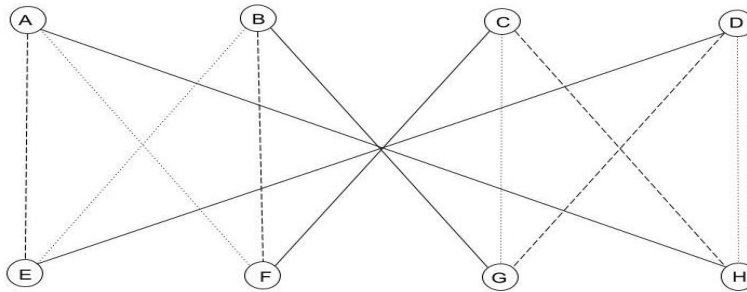


8. ábra. Legrövidebb út: S-A-B-D-T



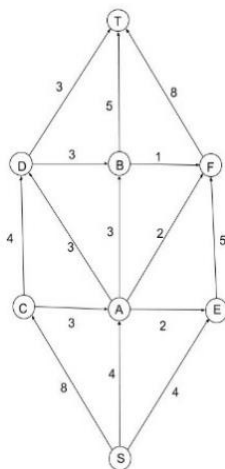
9. ábra. Legrövidebb út: S-A-B-E-D-T

Másik érdekes és gyakori feladat a *párosítási probléma*. Legyen adott két halmaz, például legyenek az egyik halmaz elemei munkások, a másik halmaz elemei pedig gépek/eszközök – ezek lesznek a páros gráf pontjai. Ismert, hogy az egyes munkásoknak mely gépekre van kezelési engedélye – ezen kapcsolatok adják a gráf éleit. Határozzuk meg a munkások és a gépek olyan kölcsönösen egyértelmű hozzárendelését, amikor a lehető legtöbb munkás (és gép) van egyidejűleg foglalkoztatva (használatban). Ezt a gráfelméletben a páros gráf maximális lefedésének nevezik, egy mintapéldáját a megoldásokkal a 10. ábrán látjuk.

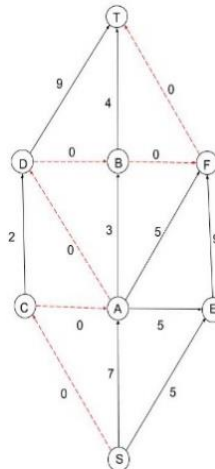


10. ábra. Páros gráf maximális párosításai

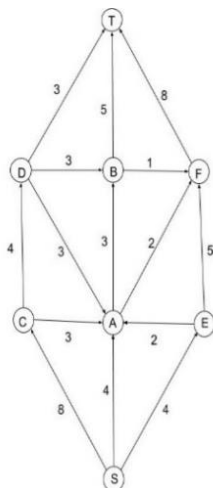
A hálótervezés célja egy projekt legrövidebb kivitelezési idejének meghatározása – már a Manhattan terv (1942-1945) is a (titkosított) *CPM* módszerrel lett koordinálva (Kelley és Walker 1959). A projekt tevékenységekből áll, melyekhez adott erőforrások tartoznak, és ismert a végrehajtás legrövidebb – a *PERT* módszernél várható – ideje. Az egyes tevékenységek között közvetlen megelőzési relációk fordulhatnak elő (pl. addig nem építhetjük a tetőt, amíg a falak el nem készültek). A feladat megoldására eredetileg *GANTT* diagramot (Gantt 1910) használtak, de a projekthez olyan gráf-modell is rendelhető, ahol a projekt készülségi fokai (állapotok) a gráf pontjai, a gráf irányított élei pedig a projekt tevékenységei, melyek időszükséglete az él hossza. Ha egy tevékenység az A és B állapotok között található, azt jelenti, hogy a B állapot elérésének feltétele az A állapot elérése után az AB tevékenység végrehajtása. A tevékenységi gráf felírása a megelőzési relációk miatt nem könnyű feladat, de ha már elkészült (11. ábra), a gráf modell alapján meghatározható a start és célállapot közötti leghosszabb (kritikus) út, amit az jellemez, hogy az út menti tevékenységek tartalékideje nulla (12. ábra), vagyis ezen tevékenységek végrehajtásakor előforduló késés a teljes projektet hátráltatná. A 11. ábra hálójának kritikus útja 26 hosszú, vagyis a projekt 26 időegységben belül nem kivitelezhető.



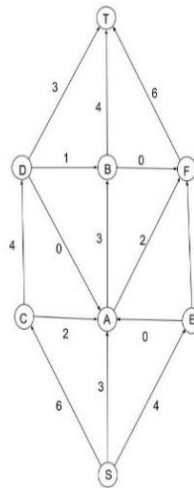
11. ábra. Tevékenység gráf időtartamokkal



12. ábra. Tartalékidők és kritikus út



13. ábra. Vezetékhálózat kapacitásokkal



14. ábra. A hálózat maximális folyama

A hálótervezéshez hasonlóan irányított gráffal modellezhető egy kapacitás-korlátos vezetékhálózat (víz, olaj, adat, stb.), ahol az élek hossza az él egységnyi idő alatti átviteli kapacitását mutatja. A cél annak meghatározása, mennyi a forrásból (S) a nyelőbe (T) a hálózaton keresztül egységnyi idő alatt maximálisan eljuttatható gáz/folyadék/információ, ha a hálózat belső pontjai Kirchhoff csomóponti törvénye szerint működnek, tehát időegység alatt ugyanannyi anyag áramlik be, mint amennyi ki. A 13. ábra vezetékhálózatának maximális átviteli kapacitása a 14. ábra szerint 13 (a T végpontú élek összes kapacitása).

#### 4 Az önvezető jármű irányítása

A robotpilóta feladata:

- Ismerje a pillanatnyi tartózkodási helyet, és mérje fel az aktuális forgalmi tényezőket;
  - Digitális térképet használ az útvonaltervezéshez,
  - Általában GNSS-t használ a pozíció meghatározásához,
  - Radart, LIDAR-t, ultrahangot, kamerákat (képfeldolgozás, fotogrammetria) használ a környezet felméréséhez
- A jármű kezelőszerveivel (kormányzás, sebesség-megválasztás, fék) biztosítja az úttartást és az akadályok kikerülését – a cselekvés-sorozatokat mesterséges intelligencia program tervezi meg.

A vezetékhálózatok számára öt fejlettségi szintje van:

- 1) szint: vezetés-támogató rendszer átveheti a kormányzást, vagy a fékezést-gyorsítást
- 2) szint: vezetés-támogató rendszer átveheti a kormányzást és a fékezést-gyorsítást
- 3) szint: a robotpilóta irányítja az összes, vezetéssel kapcsolatos műveletet, de szükség esetén a járművezetőnek reagálnia kell egy beavatkozási kérésre, vagy azonnal át kell vennie az autó irányítását
- 4) szint: a robotpilóta irányít mindent, és felülbíráhatja az ember beavatkozási kísérleteit
- 5) szint: nincs szükség emberi felügyeletre (teljesen önvezető) - a Google kísérleti autójában (15. ábra) már nincsenek emberi kezelőszervek (kormány, fék, gáz, stb.)

A sorozatgyártású autók robotpilótái egyelőre legfeljebb 2. szintű önvezetési részfeladatokat látnak el (távartás, sávartás, parkolás, sávváltás, kitérés, táblafelismerés, vészfékezés, stb.), a felelősség továbbra is a vezetőé, aki mindig készen kell álljon a beavatkozásra. Napjaink vezető elektromos-hajtású gépkocsigyártója, a Tesla Autopilot rendszere (ára 5000 \$) továbbfejlesztett szenzoraival (1 előrenéző radarral, 8 kamerával, 12 ultrahangos érzékelővel), az új, 2.5 hardverrel (kapacitása egy átlagos PC kapacitásának negyvenszerese) modellezi 250-500 m sugarú környezetét, gyakorlatilag

már alkalmas az önvezető 3. szintre, és 'csak' szoftverfejlesztés hiányzik a teljes önvezetéshez (további 5000 \$). Az üzemeltetés során szerzett tapasztalatok (*gépi tanulás*) remélhetőleg hatékonyabbá és megbízhatóbbá teszik az önvezető autók irányítását, és biztonságosabbá teszik a közlekedést. Sajnos a Tesla és az Uber autói okoztak már önvezető üzemmódban halálos balesetet.

Az autógyártók a technikai innovációk ellenére nem siettetik az önvezetés jogi státuszba helyezését, mert tartanak az esetleges kártérítési perekétől. A piaci kereslet sem felmérhető jelenleg, mert a teljesen önvezető személygépkocsik pótlólagos felszerelése többbe kerülhet (egyes fejlesztők szerint nem nélkülözhető a LIDAR!), mint az eredeti autó. Lehet, hogy előbb a nagy értékű haszongépjárműveken (kamionok, buszok) terjed el először ez az innováció, mert kiküszöböli a humán sofőrökre előírt korlátozásokat, vagyis javítja a kihasználtságot, növeli a gazdaságosságot. Csak egy jelentős költségcsökkenés után (30 évvel ezelőtt még két kezünkön megszámlálható volt a GPS vevők száma Magyarországon, ma pedig az okos-telefonok tartozéka) várható szélesebb körű elterjedése a civil személygépkocsik körében.

Az első autó, amely jogosítványt kapott (vagyis önállóan vehetett részt a forgalomban) egy, a Google által felkészített Toyota Prius volt 2012-ben (USA/Nevada). A járművet 150.000 \$ értékű szenzorokkal és hardverrel szerelték fel, és természetesen szoftverrel, ami kategóriájában a leghatékonyabb mesterséges-intelligencia alkalmazás volt. Azóta már elkészült a Google azon kísérleti autója (15. ábra), melynek már nincsenek humán kezelőszervei (fékpedál, kormánykerék, kuplungpedál, stb.) – nincs rá szükség, csak a helyet foglalná. Kimutatások szerint a balesetek 90%-át a járművezetők okozzák szabálytalan vezetés, figyelmetlenség, fáradtság, drog miatt, de az önvezető autókra ez nem jellemző. Például Kaliforniában napjainkig csak 24 balesetnek volt részese önvezető google autó ([https://www.dmv.ca.gov/portal/dmv/detail/vr/autonomous/autonomousveh\\_ol316+](https://www.dmv.ca.gov/portal/dmv/detail/vr/autonomous/autonomousveh_ol316+)), és az esetek többségében hátulról koccantak az önvezető járműnek piros lámpánál vagy útkereszteződésben.

Az önvezetés alapja a környezet felmérése. Láttuk, hogy műszerek tucatjainak jelét kell valós időben feldolgozni, és meghozni a jármű irányításához szükséges döntéseket. Ez nagy számítási kapacitást és hatékony, megbízható mesterséges intelligencia szoftvert feltételez.



15. ábra. A Google önvezető autója (2016)

## 5 A mesterséges intelligencia alapjai és alkalmazásai

### 5.1 A mesterséges intelligencia alapjai

A mesterséges intelligencia olyan gép, program, ami emberi beavatkozás nélkül képes válaszolni, alkalmazkodni a környezetéhez, vagyis az emberhez hasonlóan viselkedik, fejlődik, tanul. Ezen alapul az ún. Turing-teszt (Turing 1950), amely szerint akkor lesz a mesterséges intelligencia az emberrel egyenértékű, amikor az ember nem képes megkülönböztetni kommunikációja alapján az embert a géptől. Turing úgy gondolta, az MI 2000-ig átmege a teszten, de ez a mai napig se sikerült, bár egyes részterületeken az MI már jobban teljesít, mint az ember:

- 1997: az IBM Deep Blue legyőzi a sakkvilágbajnok Kaszparovot,
- 2011: az IBM Watson szuperszámítógép amerikai tévés kvízzjátékban diadalmaskodik,
- 2016: a Google AlphaGo nyert a go világbajnok ellen,

- 2017: a Libratus program pókertornát nyer egy pittsburgh-i kaszinóban profi pókerbajnokok ellen – utóbbi teljesítmény különösen azért értékes, mert a pókernél a játékosok ’rosszul informáltak’, nem tudhatják pontosan, milyen lapok vannak az ellenfél kezében,
- 2018: az IBM Watson alapú Project Debater (szónok program) a közönség-szavazatok szerint döntetlent ér el szónok-bajnokok ellen.

A MI alapfogalma (Szalay 2006) az ágens, ami olyan rendszert jelöl, amelyik érzékeli a környezetét és céljainak megfelelő cselekvéssorozatot hajt végre. Ezt a cselekvéssorozatot a lehetséges tevékenységek és állapotok gráfja alapján az ágensprogram (feladatmegoldó algoritmus) határozza meg. A feladat gráf-reprezentációja révén a megoldást tulajdonképpen gráfbeli útkeresésre vezetjük vissza.

Az ágensprogram hatékonyságának mérőszámai:

- *Teljeség*: az algoritmus teljes, ha mindig megtalálja a keresett megoldást, amennyiben van megoldás.
- *Optimalitás*: ha az algoritmus az optimális megoldást mindig megtalálja, akkor optimális.
- *Időigény*: az algoritmus futási idejére kapunk egy értéket. Itt azt vizsgáljuk, hogyan viszonyul az időigény azon halmaz elemszámához, amelyben keresünk. Feltételezzük, hogy véges sok elem közül keresünk egyet. Az időt az ágensprogram által felkeresett gráf csúcspontok számával szoktuk mérni.
- *Tárigény*: A kereséshez mennyi memóriára van szükség. A tármennyiséget az egyszerre tárolandó gráf-csúcspontok számával mérjük.

A gráf-reprezentáció csúcsaihoz (az állapotokhoz) kiértékelő függvényt rendelünk, ami a kezdőállapotból a csúcsig megtett utat jellemzi (pl. költség). Ha ismerünk egy olyan becslő függvényt, amely alulról közelíti az adott csúcsból (állapotból) a célállapothoz vezető lépések költségét, akkor heurisztikus függvényről beszélünk, minek figyelembe vétele jelentősen csökkenti az idő- és tárigényt, de alkalmazása valószínűleg csak egy optimálishoz közeli megoldáshoz vezet.

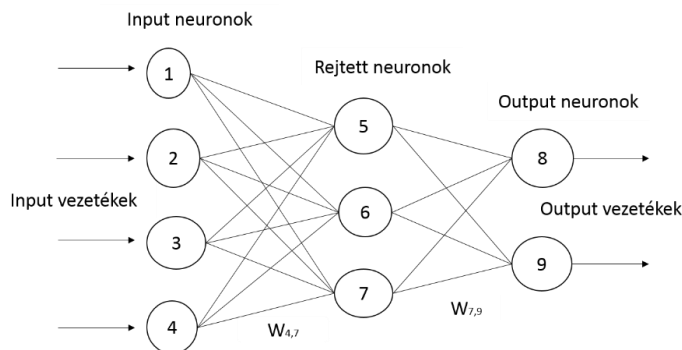
Ha nem kell ismernünk az optimumhoz vezető utat, akkor lokális keresést alkalmazunk, azaz csak az aktuális állapottól függ a továbblépés iránya, ami kisebb tár- és időigényű, illetve nemcsak diszkrét, hanem folytonos környezetben is használható. Ilyen pl. a *hegymászó* algoritmus, ami mindig a ’legjobb’ irányba próbál továbblépni, ezért elakadhat egy lokális maximumban. Ennek javítása a *szimulált lehűtés*, ami véletlenszerűen választ ki egy lépést a lehetőségek közül. Kezdetben nagyobb valószínűséggel fog ’rossz’ (kevésbé optimális) lépéseket elvégezni, de később ennek a valószínűsége exponenciálisan csökkenni fog.

A hagyományos MI-t a logikai következtetés (eszközei a LISP és a Prolog programozási nyelvek) és a statisztikai analízis (adatok közötti valószínűségi összefüggések keresése) használata jellemzi. Típusai:

- *szakértői rendszer*: (humán) szakértői tudásbázis és (logikai) következtetési szabályok alapján elemzi a felhasználó adatait, és jut el konklúziókhöz (pl. orvosi diagnózis),
- *eset alapú érvelés*: új problémák megoldásához korábban már feldolgozott hasonló eseteket/megoldásokat alapul véve jut el (lépései interpretáció, transzformáció, deriváció),
- *Bayes-statisztikán alapuló hálózat*: ha figyelembe vesszük azt, hogy egy esemény bekövetkezése milyen mértékben befolyásolja egy másik esemény bekövetkezését, akkor feltételes valószínűség-eloszlás táblázat és a teljes valószínűség tétele alapján következtünk arra, mely esemény bekövetkezése a legvalószínűbb,
- *fuzzy szakértői rendszerek* (Balázs et al 2011): egy objektum valamely numerikusan leírt jellemzője (pl. súlya) alapján a halmazhoz tartozás tulajdonság, azaz egy nyelvi érték, (pl. könnyű, nehéz stb.) fennállása egy *tagsági függvényként* ismert (értékkészlete a [0; 1] intervallum); a *fuzzyfikálás* során meghatározzuk, hogy az egyes fuzzy halmazokhoz az objektum milyen mértékben tartozik. Ezután ’ha...akkor...’ alakú fuzzy logikai következtetési szabályok segítségével meghatározzuk a kimenő értékeket, majd a *defuzzyfikálás* során a következtetés numerikus eredményét visszaalakítjuk nyelvi értéké.

A számítási intelligencia (CI) alapú MI olyan iterációs (lépésenkénti) fejlődést feltételez, ami gyakorlati tapasztalatokon (kísérleteken) alapul (*gépi tanulás*). Fajtái:

- *neurális háló* (Geier, 1997): ha nincsenek szabályok a bemenő paraméterekből a kimenő paraméterek előállítására, de sok megoldott példánk van, akkor gépi tanulással, pl. mesterséges neuronok hálózatával elemezzük az azonosított mintákat (a tanulási folyamat iterációval állítja be a neuron-csatlakozások súlyfüggvényét, 16. ábra), és a háló később új minták felismerésére használható. Napjaink legjobb öntanuló MI-je a DeepMind cég AlphaGo szoftvere, ami két neurális háló segítségével elemzi mások lejátszott meccseit (számítógépes játékokat, sakkot, go-t, és másokat), és utána világrekord teljesítménnyel nyeri a megismert játékokat. A szoftver új, *Zero* verziója a játékszabályok megismerése után pár nap alatt *önmagával játszva* kísérletezte ki a nyerő go stratégiát, amivel elődjét is maga mögé utasította,
- *evolúciós technika* (Bäck 1996, Miettinen et al 1999): a természetes kiválasztódás folyamatát modellezzük egy populációban a legjobb egyedek, utódok, mutánsok meghatározása végett a kereszteződés (géncsere) és mutáció (génváltás) révén előállt utódok fitnessz (túlélő-képesség) szerinti osztályozásával, az alkalmatlanok kizárásával, tehát lényegében egy lokális optimum-kereső eljárás. Előnye, hogy nem akad el egy lokális optimumban, ha a kezdeti populáció egyenletesen tölti ki az állapotteret, ezért az utódok több optimum helyhez is eljuthatnak,



16. ábra. A neurális háló a tanítás során állítja be a neuronok közötti a  $w_{i,j}$  súlyokat

- a *raj-intelligencián* alapuló optimalizáló algoritmusok a hangyák, méhek, hal-és madár-rajok hétköznapi viselkedését utánozzák (Blum és Merkle 2008) keresés, útválasztás, kitérés vagy védekezés közben. Az egyedek egyszerű szabályok szerint viselkednek, és a kolónia viselkedése sok rosszul informált egyed (csak a rajszomszédok viselkedését ismerik) kölcsönhatásából adódik össze, de egy idő után a csoport mégis komplex, intelligens (közel optimális) viselkedést mutat önszervező és decentralizált rendszerként.
  - A *hangyaalgoritmus* szerint a hangyák az állapottér diszkrét pontjaiból indulnak, és a csomópontokból a *feromonok* jelezte gyakrabban használt útvonalon mennek tovább. Maguk is illatjelet hagynak az általuk bejárt úton, és azt is figyelembe kell venni, hogy az illatjel a párologás miatt folyamatosan csökken. Mire az összes hangya célba ér, a 'legszagosabb' út lesz a legrövidebb. Az egyébként NP-teljes (nehezen megoldható) utazó ügynök problémához is konstruáltak már hangyaalgoritmuson alapuló iteratív útkereső algoritmust.

## 5.2 A mesterséges intelligencia alkalmazási területei

- játékok: sakk, go és társai,
- szövegértés, fordítás: ld. fordítóprogramok,
- emberi beszéd megértése, hangfelismerés: akár egy okos-telefon is képes rá,
- gépi látás, mintafelismerés, arcfelismerés: a Facebook és a Google Photo is képes betanítás után barátaink képének felismerésére,

- intelligens robotvezérlés: ld. önvezető járművek, robotporszívó, stb.
- automatikus programkészítés: programterv alapján forrásprogramot állít elő,
- szakértői rendszerek: ld. orvosi diagnosztika,
- virtuális asszisztens (IBM Watson, Apple Siri, MS Cortana, Google Assistent, Amazon Alexa, Typhone Hound): a cél az, hogy a számítógépek természetes emberi beszéddel kommunikáljanak számos alkalmazásban és folyamatban úgy, hogy megértik az emberek kérdéseit, érthetően válaszolnak rá, és a választ az emberek ellenőrizhetik is. Folyamatban van egyes telefonos (pl. repülőgépes helyfoglalás: American Airlines) ügyfélszolgálatok átállítása virtuális asszisztens bázisra, ami jelentős munkaerő-felszabadulással fog jární. További opció természetes nyelvű (automatikus beszédértés) parancsok végrehajtása (netes vásárlás, okos-otthon irányítás, stb.).

### 5.3 Mesterséges intelligencia alapú módszerek alkalmazása az önvezetés során

A szenzorok szolgáltatta információk feldolgozandók, és az aktuális teendők meghatározandók:

- A GNSS jel alapján történik a helymeghatározás, a pozíció illesztése a digitális térképre – a választott útvonal ismeretében kell arról dönteni, melyik irányban kell a csomópontokat elhagyni ('ha itt vagyok, akkor erre tovább' szabály alkalmazása – szakértői rendszer);
- A kamerák képei alapján kell felismerni a közlekedési táblákat, útjelzéseket – korábban már betanított neurális hálókkal megoldható;
- A távtartás radarjelekből levezetett távolság és sebesség-adatok alapján 'ha ... akkor ...' típusú szabályokkal (szakértői rendszer) kivitelezhető;
- A parkolás esetalapú érvelésre vezethető vissza: ismert feladatot ismert módon kell megoldani úgy, hogy figyelembe vesszük az ultrahangos szenzorok és kamerák szolgáltatata aktuális feltételeket;
- A LIDAR vagy a radar és a kamerák nyújtotta 3D környezetmodell teszi lehetővé akadályok felismerését, a szabály (szakértői rendszer) alapú kitérést, sávváltást, vészfékezést;
- A motor (gyorsítás/fékezés) optimális (fogyasztás, környezetvédelem) vezérlését már a sorozatgyártású autókban is fuzzy szakértői rendszerek irányítják;

### 5.4 Mesterséges intelligencia alapú módszerek alkalmazása a geodéziában és a geofizikában

Adatelemzés mozgó statisztikákkal (Kalmár 2015): célunk geofizikai idősorok *eseményeinek*, nevezetesen a geomágneses Q-kitörések (tranziensek, 17. ábra) helyének automatikus meghatározása volt. Ezek szemrevételezéssel is megtalálhatók a geomágneses erőtér  $H_x$ ,  $H_y$ , és elektromos erőtér  $E_z$  komponenseinek mérési diagramja (17. ábra) alapján, de az adatsorok (több száz ezres) hossza miatt automatizált keresésre volt szükség, mely az általunk fejlesztett, speciálisan paraméterezett mozgó statisztikákkal (normált konvolúció, szórás, ferdeség és laposság) lett megvalósítva.

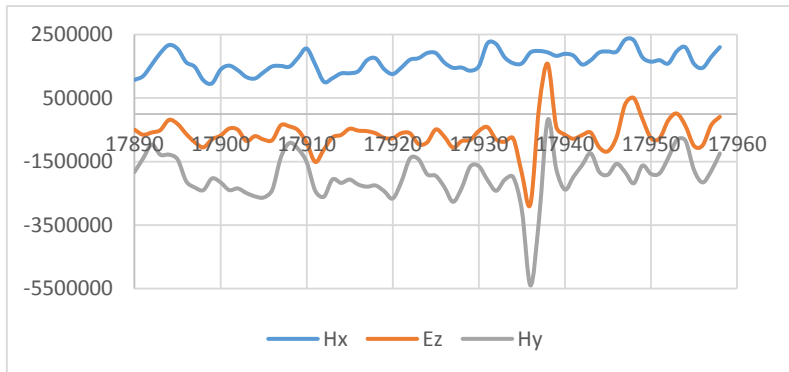
Ionogramok automatikus értelmezése (Kalmár 2016): Az ionoszondák (speciális, függőleges irányítású radarok) előállította ionogramok adnak tájékoztatást az ionoszféra aktuális állapotáról és szerkezetéről, melyből a rádióhullámok terjedési sajátosságaira és az úridőjárásra (pl. napkitörések detektálása) következtethetünk. A kifejlesztett program az ionogramot digitális képnek tekinti (18. ábra), és heurisztikus alakfelismerés (foltkeresés és foltszerkezet azonosítás) révén határozza meg és paraméterezi a releváns reflexiókat: pl. az ionoszféra Es rétegéről először az foE frekvencián észlelhető visszaverődés (az Es alatti réteg az E), utoljára az foEs frekvencián, és a visszaverődés legkisebb magassága  $h'Es$ .

A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízválasztó vonalak meghatározása (Kalmár és Benedek 2017): Rácsbázisú végeselem esőzési/szétfolyási/beszívárgási modellt használtunk alpesi jellegű domborzaton (a 19. ábra szintvonalrajza mutatja) a talaj vízterhelésének és a vízgyűjtő-vízválasztó vonalak meghatározására. A geodinamikai mérések szerint esőzés alatt és után a dőlésmérők jelentős anomáliákat regisztráltak. Az esőzés modellezése a hegymászó- és a hangyaalgoritmus kombinációján alapul,

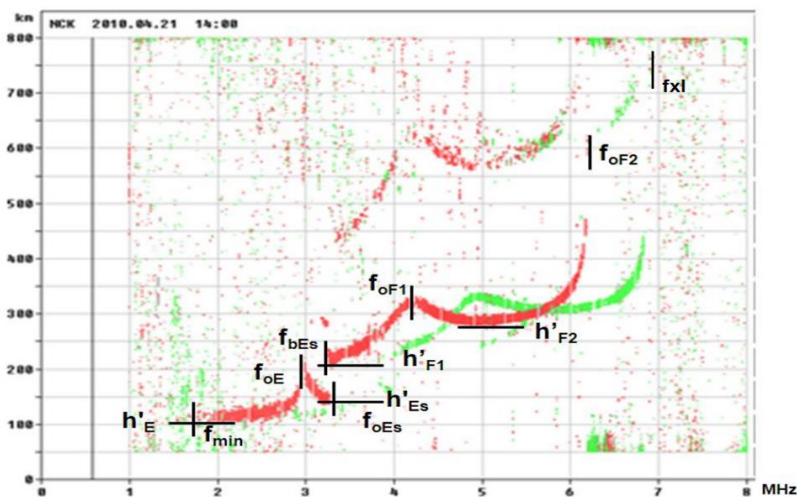


ugyanis a meredekségi viszonyokat a víz felgyülemzése folyamatosan módosítja. Hangyák helyett most vízcseppek indulnak a rács minden pontjából, alapvetően a legnagyobb meredekség irányában lefelé. A modellezés kimutatta, hogy a számított vízterhelés (a domborzat okozta szétfolyás után a csapadék egyenlőtlenül oszlik el a felszínen illetve szivárog be a talajba) gravitációs hatása a dőlésmérő által mutatott eső utáni anomália töredékét képes csak megmagyarázni. A modell továbbfejlesztésével képesek voltunk meghatározni a terep vízgyűjtő és vízválasztó vonalait is (19. ábra).

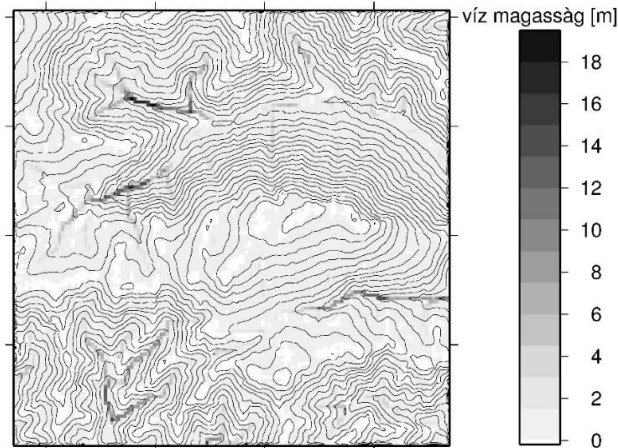
A földfelszínen mért mágneses tér földalatti forrásainak meghatározása és paraméterezése: geofizikai probléma a Föld mágneses tere alapján következtetni az öt létrehozó/módosító földalatti forrásokra és hatókra. Egyetlen, ismert paraméterű (hely, irány, nagyság) forrás mágneses tere elméletileg leírható, és a forrás jellemzői a földfelszíni mérések alapján inverzióval általában meghatározhatók, de több (általában ismeretlen számú) forrás keltette integrált mágneses tér alapján (20. ábra) az egyes források paraméterei pl. a végeelem módszerrel nehezen meghatározhatók, mert nincsenek jó kezdőértékeink az iterációhoz (még a források száma is kérdéses!). A feladat egyik ígéretes megoldásának látszik a neurális hálókon alapuló gépi tanulás, illetve a paraméterek javítására a genetikus algoritmus alkalmazása, mellyel intézetünkben (Kuslits et al. 2018) foglalkoznak. A gépi tanulás során a neurális háló inputjaként különböző forráskombinációk mellett generálják az elméleti földfelszíni mágneses teret, és outputként hozzá kapcsolják a források paramétereit. A rendszer a remények szerint betanítás után alkalmas lesz a mért földfelszíni mágneses tér alapján az öt létrehozó források paramétereinek közelítő leírására, melyek pontosítása ezután genetikus algoritmussal történik.



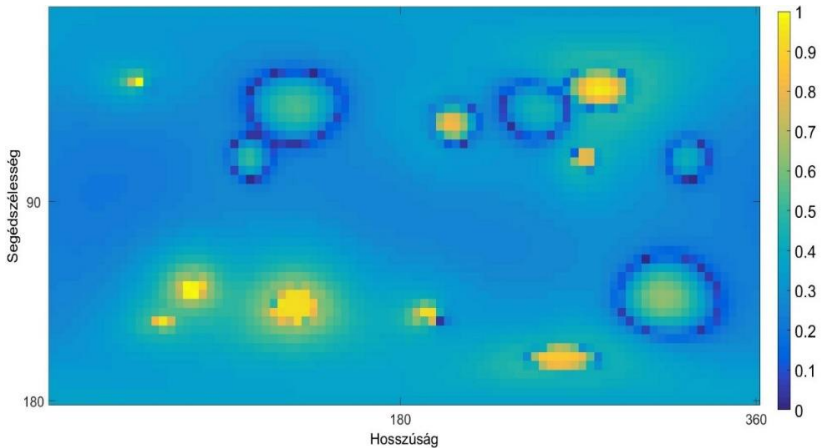
17. ábra. Geomágneses Q-kitörés (tranzien esemény) a 17936. mérési pontban. A skálázás a mérőműszer digitális egységében történt



18. ábra. Ionogram a meghatározandó  $f$  (MHz) frekvenciákkal és  $h'$  (km) magasságokkal



19. ábra. A teszterület vízgyűjtő és vízválasztó vonalai. A területet km-enként skáláztuk. A domborzat-ábrázolás szintvonalközé 25 m. A színezés az átfolyt és összegyűlt víz magasságát jelöli



20. ábra. A köpenymag határ mélységére számított szintetikus radiális mágnes-tér abszolút értékének logaritmusa a neurális háló inputja. A lefedő rácselemek kiterjedése  $4^\circ$

## 6 Összefoglalás

A navigáció három alapeladatának ellátásában ma központi szerepe van a műholdaknak (helymeghatározás), a gráfoknak (útvonaltervezés) és a mesterséges intelligenciának (a jármű vezetése, irányítása). A tanulmány bemutatja a navigáció történelmi előzményeit, a ma alkalmazott megoldások műszaki és algoritmikus alapjait.

A cikk ismerteti, hogyan adaptáltuk a mesterséges intelligencia módszereket geodéziai és geofizikai adatsorok automatikus kiértékelésére, események és minták felismerésére.

## Hivatkozások

- Ádám J, Bányai L, Borza T, Busics Gy, Kenyeres A, Krauter A, Takács B (2004): Műholdas helymeghatározás. Műegyetemi Kiadó, Budapest. 458.
- Andrásfai B (1973): Ismerkedés a gráfelmélettel. Tankönyvkiadó, Budapest.
- Bäck T (1996): Evolutionary algorithms in theory and practice. Oxford University Press, New York. 328.
- Balázs K, Kóczy TL (2011): Fuzzy szabályalapú modellek és rendszerek felépítése evolúciós technikák segítségével. Számítástechnika LXVI, 44-50.
- Blum C, Merkle D (2008): Swarm Intelligence - Introduction and Applications. Springer, ISBN 978-3-540-74089-6. 191.

- Ciolkovszkij K** (1903): A világűr felfedezése reaktív eszközökkel. Naucsnoje Obozrenyje. A szerző kiadványa Kaluga (Oroszország), 5.
- Ciolkovszkij K** (1929): A kozmikus vonat. Naucsnoje Obozrenyje. Kalugai tudományos dolgozók kollektívája, Kaluga (SzU), 9-34.
- Fleiner T** (2014): A számítástudomány alapjai. BME online jegyzet. 217.
- Gantt HL** (1910). Work, Wages and Profit. Engineering Magazine, New York. 300.
- Geier J** (1997): Neuronhálózatok tanítása a hátrafelé terjedés módszerével. In: Pléh Csaba (szerk.) A megismeréstudomány új útja: A párhuzamos feldolgozás. Budapest. Typotex kiadó.
- Kalmár J** (2015): Adatelemzés mozgó statisztikákkal. Dimenziók Matematikai Közlemények, 3, 5-13.
- Kalmár J** (2016): Automatikus kiértékelő program ionogramok értelmezéséhez. Dimenziók Matematikai Közlemények, 4, 23-28.
- Kalmár J, Benedek J** (2017): A vízterhelés, a vízgyűjtő és vízválasztó vonalak meghatározása az eső beszívargásának és szétfolyásának modellezésével. Dimenziók Matematikai Közlemények, 5, 25-29.
- Kelley J, Walker M** (1959): Critical-Path Planning and Scheduling. Proceeding IRE-AIEE-ACM '59 (Eastern) Papers presented at the December 1-3, 1959, Boston, USA, eastern joint IRE-AIEE-ACM computer conference. 160-173.
- Kuslits L, Lemperger I, Prácer E, Wesztergom V** (2018): Understanding non-dipole part of the geomagnetic field by inversion. IAGA Workshop on Geomagnetic Observatory Instruments, Data Acquisition and Processing, 24-29.06.2018.
- Lovász L, Pelikán J, Vesztergombi K** (2004): Kombinatorika. Typotex Kiadó, Budapest.
- Miettinen K, Makela M, Neittaanmaki P, Periaux J** (1999): Evolutionary Algorithms in Engineering and Computer Science: Recent Advances in Genetic Algorithms, Evolution Strategies, Evolutionary Programming, Genetic Programming and Industrial Applications. John Wiley & Sons, 500.
- Szalay T** (2006): A mesterséges intelligencia alapjai. INOK KFT, ISBN: 963-9625-35-3. 224.
- Turing AM** (1950): Computing Machinery and Intelligence. Mind, 49, 433-460.
- Verne J** (1865): De la Terre à la Lune. Bibliothèque d'Éducation et de Récréation, J. Hetzel et Cie, 186.

# A KÖZÉPKORI MAGYAR HOSSZMÉRTÉKEGYSÉG REKONSTRUKCIÓJA

Busics György\*, Tóth Sándor\*\*



**The reconstruction of the medieval Hungarian length unit** – *The etalon of the Hungarian royal fathom does not exist, only a cord was found, the length of which is about 3.126 metres. The 1/10 part of the fathom is the royal foot and the 1/16 part of the fathom is the royal span. In our paper we want to demonstrate that the contemporary length unit was used for building churches at that time because the dimensions of the buildings are integer multiples of the ancient unit. From this point of view especially the round churches (rotundas) are interesting. The main question is how to choose the right building and the right measuring technology. The measures of buildings, for example the radius of the regression circle can be obtained by precise surveying methods. Three Hungarian medieval rotundas were precisely measured to recalculate their size in royal feet or span to show the effectiveness of this reverse engineering method.*

**Keywords:** etalon, length unit, round church, regression circle, reverse engineering

*A magyar királyi öl etalonja nem maradt fenn, csak egy másolati zsinórt találtak, ennek leméréséből tudjuk, hogy az 3.126 méter hosszúságú lehetett. Az öl tizedrészét lábnek, tizenhatod részét arasznek nevezzük. Cikkünkben azt szeretnénk bemutatni, hogy a régi hossz mértékegységet valóban használták a korabeli épületek felépítésekor, mert azok méretei kifejezhetők az egykori hosszegység egész számában is. Különösen a körtemplomok alkalmasak ilyen vizsgálatokhoz. Fontos, hogy megfelelő épületet és megfelelő mérési, feldolgozási technológiát válasszunk ilyen célra. Az épületek méreteit szabatos eljárással kell meghatározni, a körsugarat például kiegyenlítő kör számításával. Három körtemplom felmérését mutatjuk be, amelyek méreteit királyi láb vagy arasz mértékegységben is meghatároztuk. Ez valóban egy mérnöki rekonstrukciós feladat az egykori királyi öl visszaállítására.*

**Kulcsszavak:** etalon, hossz mértékegység, körtemplom, kiegyenlítő kör, mérnöki rekonstrukció

## 1 Bevezetés és motiváció

1988-ban volt Szent István király halálának 950. évfordulója és ebből az alkalomból felújították a székesfehérvári romkertet, az egykori királyi bazilikát, amelyet első királyunk nyughelyül építtetett, és amely a középkori Magyarország kiemelkedő szakrális és állami helyszíne volt. A romkert rendezéséhez régészeti ásatásokat is végeztek, és a munkálatok irányítója, Kralovánszky Alán régész a fehérvári főiskolát kérte meg az ásatások geodéziai felmérésére.

Kralovánszky Alán (aki Székesfehérvár Árpád-kori történelmének, régészeti feltárásának kiváló kutatója volt az 1960-as évektől) vetette fel először, hogy érdemes a középkori építmények méreteit az egykori mértékrendszerben is vizsgálni. Ő állapította meg a Fehérvár belvárosának legmagasabb pontján állt egykori négykaréjos templom feltárásáról írt cikkében, hogy a négy karéj külső falsugarára éppen egy királyi öl nagyságú (Kralovánszky 1983). A romkert felmérése során és vizsgálni kezdtük a méreteket és bár az egykori bazilika északi részének még az alapfalai is hiányoznak, megállapíthatók voltak a főbb méretek. Az apszis ívének 5 körét azonosítottuk és az egyik sugarat 2 öl nagyságúra becsültük. 1989-ben TDK dolgozat is készült a romkerti felmérésről, amit később további szak- és TDK dolgozatok követtek.

2015-ben összefoglaló tanulmány jelent meg a téma addigi történetéről. Megvizsgáltuk számos körtemplom műemléki felmérésének 1:50 méretarányú alaprajzát és megpróbáltuk azokat megfeleltetni a korabeli mértékegységnek. Az alap gondolat az volt, hogy a tervek készítésekor is, és a kivitelezéskor is az akkori hivatalos hossz mértékegységet használták, feltehetően a mértékegység egész

számú többszörösében adták meg a méreteket. Az épületek fő méretei valóban kifejezhetők voltak kerekszámú korabeli mértékegységben is.

Ugyanebben az évben elhatároztuk, hogy szabatos geodéziai eljárással is meghatározzuk egy körtemplom méreteit és megfeleltetésüket a korabeli egységnek. Ebből TDK dolgozat született majd további körtemplomok felméréséből OTDK dolgozat, valamint cikk a szakmai lapban, hivatkozással a korábbi tanulmányra (Busics 2016, Busics et al. 2016). A korábbi kutatásokhoz képest az volt az új momentum, hogy nem fogadtuk el a királyi öl korábban meghatározott ún. hivatalos hosszát, hanem azt az épületek méreteiből újra meghatároztuk – ilyen értelemben beszélhetünk a korabeli mértékegység rekonstrukciójáról.

Jelen írásunk célja, hogy a közösen végzett kutatásaink tapasztalatait és újraértelmezett eredményét közreadjuk, mert a metrológia, a földmérés és az építészet hazai története szempontjából fontosnak, megőrzendőnek tartjuk azokat.

## 2 Ismereteink a középkori magyar hossz mértékekről

1978-ban egy nagy gondossággal és alaposan megírt könyv jelent meg Bogdán István levéltáros, technikatörténész tollából, aki a középkori hossz- és földmértékekre hivatkozó levéltári forrásokat gyűjtötte össze (Bogdán 1978). Innen ismerjük az egykori hossz mértékek egymásra épülését és metrikus hosszát is, amelyet az 1. táblázatban foglaltunk össze. Az alpmértékegység a királyi öl volt, aminek tizedrésze a királyi láb, tizenhatod része a királyi arasz. A királyi lábban 4 tenyér, vagy 12 hüvelyk vagy 16 ujj fér el. A királyi öl jelenleg elfogadott, ún. hivatalos hossza 3.126 méter, ebből következően a láb 31.26 centiméternek, az arasz pedig 19.54 centiméternek felel meg. A királyi láb ezen hossza hasonló más nemzetek azonos nemű mértékéhez, ami 28 cm és 33 cm közötti érték.

Fontos itt megemlíteni, hogy ezen ún. „hivatalos” váltószámot egyetlen zsinór megméréseéből ismerjük. Ez a zsinór 1962-ben a Magyar Országos Levéltárban került elő egy jelentés mellékleteként, amelyet még 1702-ben írtak (Bogdán 1978). A jelentést az Újszerzeményi Bizottság kiküldöttje készítette, amikor egy Pomáz és Budakalász közötti területet mértek fel mérőkötéllal. Bizonyoságul csatolták azt a zsinórt, amelynek két végére kötött csomó közötti távolság jelentette az etalonul használt hosszát, azaz a királyi öl mértékét. A zsinór hosszát az Országos Mérésügyi Hivatalban határozták meg 3.126 méternek. Ezzel jó összhangban van a jelentés margóján lerajzolt arasz hossza, ami 19.5 cm; ennek 16-szorosa 3.12 méternek felel meg.

Lenne egy további lehetőség is a metrikus váltószám meghatározására, mégpedig a királyi arasz lemérése Werbőczy István ún. Hármaskönyvében, a Tripartitum-ban, amelyből 50 kiadás is készült. Többben, több példányban is lemérték ezt, de az érték szórása olyan nagy (18.1 cm és 19.2 cm között változik), hogy ez a megoldás nagy bizonytalanságot jelent, nem beszélve arról, hogy a hibát 16-szorosára nagyítanánk, ha az öl hosszát ebből vezetnénk le.

A Hármaskönyv elődje (amiben az arasz a maga valójában először szerepelt) Mátyás király törvénykönyve volt, amelyet Lipcsében adtak ki 1488-ban (Fleck 1988). Ebből csak egy példány található Magyarországon, de éppen a kérdéses lap sérült, mert egyik végét egér rágta meg, másik végét pedig a gondos könyvkötő vágta le.

1. táblázat. A középkori magyar hossz mértékrendszer tagjai

	öl	lépés	rőf	arasz	láb	tenyér	hüvelyk	ujj
1 öl	1		5	16	10	40	120	160
1 lépés		1	1.5		3	12	36	48
1 rőf			1		2	8	24	32
1 arasz				1			7.5	10
1 láb					1	4	12	16
1 tenyér						1	3	4
1 hüvelyk							1	
1 ujj								1

### 3 A hossz mértékegység rekonstrukciójára kidolgozott technológia leírása

Ezt a technológiai ajánlást több épület felmérése alapján szerzett pozitív tapasztalataink alapján fogalmaztuk meg. Maga a technológia szabatos poláris felmérést jelent mérőállomással, irány- és távmérés alapján. Lehetne más, korszerű felmérési módszert is alkalmazni (például lézerszkenneres felmérést, fotogrammetriai felmérést, UAV felmérést), de ezek mindegyike olyan geodéziai illesztőpontokat igényel, amelyeket végül is az ajánlott irány- és távmérési hálózattal tudnánk csak biztosítani.

Az alap gondolat az, hogy a középkorban is tervek alapján építkeztek, a terveket az akkori hossz mértékegységben (annak arányos kicsinyítésével) készítették és a méreteket a mértékegység egész számú (vagy feles, negyedes) többszörösében vették fel. Amennyiben a kivitelezést, kitzűzést is a tervnek megfelelően, kellő gondossággal végezték, akkor most, több száz év elteltével lemérve a megfelelő távolságokat és ismerve a váltószámokat, újra elkészíthetjük az épületek tervét az eredeti mértékegység szerint is. Sőt, magát a mértékegységet is rekonstruálni tudjuk. A gondos munkával kivitelezett építmények mintegy megőrizték számunkra az egykori etalon-hosszat is.

Különösen a körtemplomok alkalmasak ilyen vizsgálatok végzésére. A kör ugyanis nemcsak tervrajzon jelölhető ki pontosan, hanem a valóságban is, egy fixen rögzített középpont (karó) és egy vékony zsineg segítségével. A körtemplomok esetében több kör is vizsgálható, ugyanis a szentély is és a hajó is kör alaprajzú általában és mindkettőnek külső és belső fala is van, vagyis kívülről és belülről is mérhető egy-egy kör, megállapítható annak középpontja és sugara. Körtemplom formájúak voltak a legelső középkori szakrális építmények az egész Kárpát-medencében, számos fennmaradt közülük (Szilágyi 2008).

Az ajánlott technológiát 11 lépésben foglaltuk össze.

- 1) Vizsgálatra alkalmas épület kiválasztása. Ez azt jelenti, hogy olyan korabeli épületet célszerű választani, ami eredeti formájában megmaradt, alapfalai jól azonosíthatók és maga az épület geometriai szabályossággal megépített, szimmetrikus. Nem könnyű eredeti formában megmaradt épületet találni, mert az évszázadok során valószínűleg szükség volt valamilyen átépítésre. Ilyen esetben el kell különíteni az egyes építési korszakok épület-részeit, amennyire ez lehetséges. A jó azonosíthatóság akkor teljesül, ha például téglából vagy faragott kváderkőből épült a lábazat vagy a falazat. A terméskőből épült falak (felületek, sarkok) azonosítása nem egyértelmű, ezért az ilyen épület kevésbé felel meg céljainknak. Ugyancsak alkalmatlan a vizsgálat céljára az olyan épület, amelynél kiderül, hogy nem szimmetrikus, nem szabályos. Például a körök ellipszisek, az oszlopok nem egyformák, az oszlopok között különbözőek vagy nem található más szabályosság.
- 2) Az épület mérendő fő vonalainak, pontjainak azonosítása. Minden felmérés kritikus kérdése, hogy mit mérünk. Esetünkben elegendő az épület alap-geometriáját felépítő elemek felmérése. Ehhez viszont szükséges megismerni, tanulmányozni az építéstörténetet és az épület szerkezetét, felépítését, mert csak ezt követően tudjuk nagy biztonsággal kiválasztani a mérendő pontokat. Felméréseink során elsősorban vízszintes értelmű azonosításra, az alaprajz rekonstrukciójára törekedtünk, de ha van rá lehetőség, a magassági értelmű méretek is fontosak lehetnek.
- 3) Alkalmas mérési technológia választása. Mi a felméréshez a mérőállomásos technológiát választottuk, a továbbiakban ennek használatát feltételezzük. Előny ilyenkor, hogy irány- és távméréssel az épületen belül és kívül szabatos geodéziai alapponthálózat hozható létre, amelynek méretarányát (méter-rendszerét) a kalibrált távmérőműszer frekvenciája biztosítja. Előny az is, hogy magunk választjuk ki a mérendő pontokat, és csak azokat mérjük be, amiket szükségesnek ítélünk a vizsgálathoz.
- 4) Alaphálózat szabatos mérése. Az épületen belül és kívül (ha szükséges, több szinten is) egy összefüggő, irány- és távmérési geodéziai hálózatra van szükség. Ennek célja az egységes, homogén és pontos koordináta-rendszer biztosítása. A szabatos mérés azt jelenti, hogy kényszerközpontosan mérünk, előre kihelyezzük az összes műszerállványt műszertalppal, majd a műszert és a prizmákat a műszertalpon cseréljük, így nincsen pontraállási hiba, ami a rövid irányok miatt veszélyes hibaforrás. Ilyen felállással biztosítható, hogy nemcsak víz-

- szintes értelemben, de magassági értelemben is néhány mm-es középhibájú hálózatunk lesz. Törekedni kell a megfelelő számú fölös mérésre is.
- 5) A részletpontok szabatos mérése poláris pontként. A részletpontokat (vizsgálati pontokat) az alappontokkal egy időben, ugyanazon műszerállásban ajánlott mérni. Mivel többnyire épület-sarokpontokról, oszlop sarokpontokról, körívek pontjairól van szó, ahova prizma elhelyezése nem lehetséges központosan, ajánlott az összes pontot prizma nélküli módban mérni. A mérendő pontra egy kártyát célszerű illeszteni úgy, hogy az irányvonalra merőleges legyen, a műszerrel pedig a kártya és az épület érintési pontját (vonalát) irányozzuk. Amennyiben takarás miatt nem irányozható egy épület-pont, akkor a külpontos bemérés valamelyik módszere alkalmazható. Az irányvonalra merőleges falfelületi pontok természetesen kártya nélkül is mérhetők. Az egyértelműen azonosítható pontokat két vagy több műszerállásból ajánlott bemérni ellenőrzés céljából.
  - 6) Az alaphálózati pontok és a vizsgálati pontok koordinátáinak számítása. Az alappontok koordinátáinak és magasságának számítását kiegyenlítéssel kell végezni, mert így tudunk minden mérést egyidejűleg figyelembe venni és így kapunk egyértelmű eredményt valamint pontosságai mérőszámokat. A koordináta középhibák nem haladhatják meg a 3-5 millimétert. Nemcsak az alappontok, de a vizsgálati pontok koordinátáit is mm élességgel kell képezni. A számítást önálló rendszerben, szabad hálózatként kell végezni, mert így az adott pontok kerethibái nem terhelik az eredményt. Ha az épületnek van jellemző tengelye, akkor síkbeli egybevágósági transzformációval érdemes a felvett helyi rendszert úgy elforgatni és eltolni, hogy egyik koordináta-tengelye párhuzamos legyen az épület fő tengelyével. Körtemplomok esetében feltétlenül így kell eljárni, azaz úgy kell transzformálni az eredeti koordináta-rendszerünket, hogy az egyik új koordináta-tengely iránya a szentély és a hajó középpontjait összekötő egyenessel egybeessen, vagy azzal párhuzamos legyen (mert ezzel a tervezéskori állapotot állítjuk elő és nagyobb valószínűséggel találunk további szimmetriát, szabályosságot vagy szerkesztési elvet). Ugyancsak sík-transzformációt alkalmazunk akkor, ha másik (például országos) rendszerbe kívánjuk pontjainkat átvinni (például annak kimutatására, hogy egy templom tengelye mennyire egyezik valamelyik égtájjal). Ilyen célból az épület körüli alappontokat GNSS technológiával is ajánlott bemérni.
  - 7) Az épület jellemző alaprajzi méreteinek számítása. Ezt a számítást a bemért vizsgálati pontok koordinátáiból, koordináta-geometriai módszerekkel végezzük, mm élességgel. Ilyenek a hosszúsági és szélességi méretek, falvastagságok, oszlopméretek, oszlop-köz távolságok, magasságok. Külön feladatot jelent körtemplomok esetében a körök jellemző adatainak megadása. A körívek mért pontjaira kiegyenlítő kört kell illeszteni a legkisebb négyzetek módszere szerint, ami ma már lineáris közvetítő egyenletekkel is megoldható (Csepregi et al. 1987). Így nemcsak a kör középpontjának koordinátáit és sugarát kapjuk meg, hanem ezek középhibáit is. A középhibák minősítik az egykori kitzúzési és kivitelezési munkát, de a középhibák alapján tudunk dönteni az épület céljainkra való alkalmasságáról is. A későbbiekben ugyancsak ezeket a középhibákat tudjuk felhasználni a méret-adatok súlyának megadásához.
  - 8) Alaprajz szerkesztése. Az épület alaprajza a bemért pontok és a számított méretadatok alapján most már megszerkeszthető, természetesen méter-rendszerben. Ha szükséges, az egy egyenesre (azonos függőleges síkra eső) pontok kiegyenlítő egyenesként ábrázolhatók. A jellemző méreteket mm élességgel adjuk meg.
  - 9) A jellemző épületméretek megfeleltetése az egykori hosszegységnek. Először arra a kérdésre keresünk választ, királyi láb vagy királyi arasz volt-e az építéskori hosszegység? A méter-rendszerű jellemző épület-méreteket elosztva a láb méterbeli „hivatalos” hosszával (0.3126 m) illetve az arasz hosszával (0.1954 m) válaszolhatunk erre a kérdésre. Nagy valószínűséggel valamelyik hossz-egységnél kerek számú (esetleg feles) darabszámokat kapunk, ezeket egyelőre előzetes értéknek tekintjük.
  - 10) Alaprajz szerkesztése az egykori hossz-egységben. Most olyan alaprajzot próbálunk összeállítani, amilyen az eredeti lehetett, amikor (feltételezhetően) a láb vagy az arasz egész

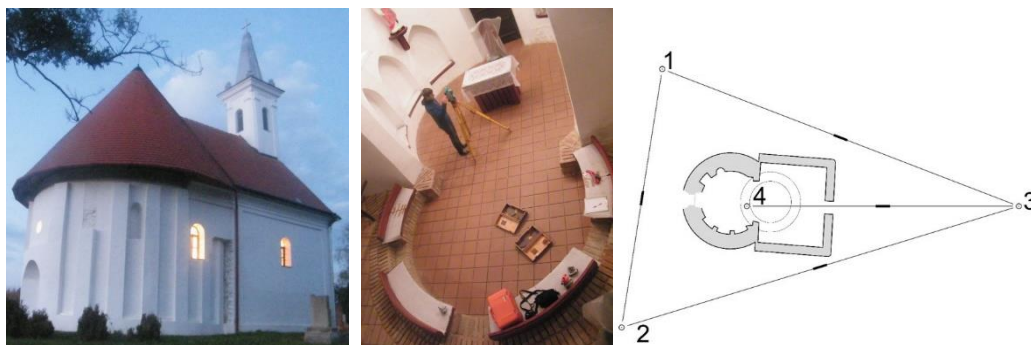
számú (vagy feles számú) többszörösében adták meg a jellemző méreteket. Ez időigényes próbálkozás, nem biztos, hogy elsősre sikerül.

- 11) Az egykori hossz-egység rekonstrukciója. Ezt egy olyan táblázat összeállításával érjük el, amelyben az épület méterben megadott jellemző távolságadata mellett az egykori hosszegység darabszáma szerepel. Ennek a két adatnak a hányadosaként kapjuk méretről méretra az egykori hosszegység metrikus (célszerűen cm-ben kifejezett) értékét. A hosszegység metrikus értékei természetesen nem lesznek azonosak. Végeredménynek egy olyan súlyozott átlagot javasolunk, ahol a súlynál figyelembe vesszük, hogy a vizsgált méret két végpontja mennyire jól volt azonosítható, illetve mérhető. A körsugarak középpontjait például ehhez is felhasználhatjuk.

A fenti technológiát több épület felmérése és méreteinek feldolgozása után alakítottuk ki és tudjuk javasolni más hasonló alkalmazásokhoz. Úgy gondoljuk, csak szabatos geodéziai módszerekkel érhető el megfelelő eredmény. Ez a geodézia hozzájárulása a hossz-etalon rekonstrukciójához.

#### 4 A hosszegység rekonstrukciója a bagodi körtemplom méreteiből

A jelenlegi Bagod település (Zala megyében) három falu egyesüléséből jött létre: Alsóbagod, Felsőbagod és Vitenyédsszentpál. Vitenyédsszentpál zsákfalú volt, itt épült a szentpáli körtemplom a XIII. században, későromán stílusban. 1755-ben úgy bővítették, hogy szentélyét elbontották és helyére barokk stílusú hajót és tornyot emeltek (1. ábra). Így az egykori hajó ma a szentély szerepét tölti be; belsejében a déli oldalon három csúcsíves ülőfülke található. 1860-tól már nem használták a templomot, amely erős romlásnak indult. Az 1990-es évek elejére a tetőszerkezet elpusztult, a kápolna belsejében fák és cserjék nőttek. 1999 és 2002 között teljes műemléki helyreállításra került sor (Káldi 2002), ekkor az eredeti hajót az építészeti padlószintig süllyesztették, az eredeti szentélyt pedig a barokk szintig emelték, körvonalait téglafallal jelezték. Ma a templom temetőkápolnaként szolgál.



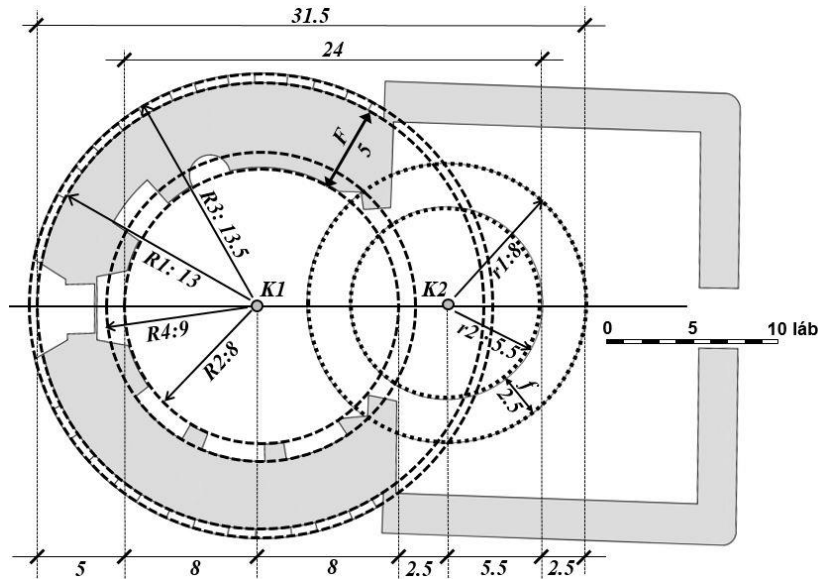
1. ábra. A bagodi körtemplom kívülről, belülről és mikrohalózatának meghatározási vázlata

A templomhajón négy kör különböztethető meg: legkülső a díszítő féloszlopok (ún. lizénák) köre, a külső és a belső fal köre, valamint az ülőfülkék köre (2. ábra). Ez utóbbi csak néhány ponttal mérhető, ezért sugarának középpontja ( $m_r$ ) is lényegesen nagyobb, mint a többi köré, amelyek néhány milliméteresek (2. táblázat). Mértük az eredeti szentély köreit is, bár nem tudható biztosan, hogy a műemléki helyreállítás során a most téglafallal jelzett íveket mennyire sikerült az eredeti helyükre építeni.



2. táblázat. A bagodi körtemplom kiegyenlítő köreinek adatai méterben

kör leírása	jele	y	x	r	$m_y$	$m_x$	$m_r$
Szentély külső fal	$r1$	502.043	200.368	2.590	0.001	0.001	0.001
Szentély belső fal	$r2$	501.996	200.361	1.784	0.006	0.003	0.002
Hajó külső fal	$R1$	498.600	200.466	4.137	0.009	0.005	0.001
Hajó lizéna	$R3$	498.592	200.463	4.312	0.007	0.003	0.002
Hajó belső fal	$R2$	498.587	200.445	2.566	0.009	0.007	0.001
Hajó ülőfülke	$R4$	498.553	200.477	2.880	0.018	0.053	0.061



2. ábra. A bagodi körtemplom méretei királyi lábban és jelölésük

Az alaprajz megszerkesztése után a méreteket sikerült megfeleltetni királyi láb egységben is. Ha ezeket „visszaszámítjuk”, akkor kapjuk a 3. táblázatot. Ebben nemcsak a körök mérete, hanem a falazatok szélessége is szerepel (sugarak különbségeként), továbbá a lizénák szélessége és az oszlopok mélysége is (koordinátákból számítva), valamint a teljes külső és belső hossz is (szerkesztésből). Mindegyik méretből a királyi láb centiméterben kifejezett hosszára kapunk egy-egy értéket, amelyekből súlyozott átlagot számítunk. A súly felvételéhez az egyes értékek középhibáját használtuk. A középhiba háromféle módon vehető fel. A sugarak középhibája a kiegyenlítésből adódik; a falvastagságok és ülőfülkék középhibája a hibaterjedés törvényének felhasználásával vezethető le, a lizénák szélességének középhiba pedig a többszöri mérésből (számítási átlag középhibájaként) számítható. Legkisebb (0.5 értékű) súlyt a szentély köreinek adtunk, azok bizonytalan eredetisége miatt. A királyi láb hossza súlyozott átlagként 31.96 centiméternek adódott, aminek középhibája 0.3 cm.

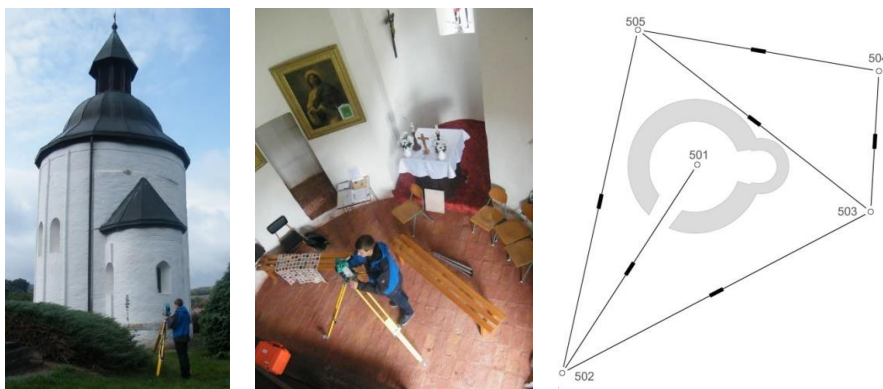
Készítettünk olyan változatot is, amelyben kizárólag a legjobban azonosítható három ( $R1$ ,  $R2$ ,  $R3$  sugarú) kört vettük figyelembe; ekkor az eredmény 31.93 cm. Felvethető, hogy vegyük figyelembe a vakolat vastagságát is, feltételezve azt, hogy a téglafalazatot tűzték ki pontosan, így a külső vakolt fal sugara nagyobb, a belső vakolaté pedig kisebb, mint a téglafalazaté. Ha 0,5 cm-nek becsüljük a vakolat vastagságát és csak a három kört ( $R1$ ,  $R2$ ,  $R3$ ) javított sugarából számítunk a lábra váltószámot számítási átlagként, akkor 31.95 cm-t kapunk eredményül, ami nem tér el lényegesen az előzőektől.

3. táblázat. A királyi láb metrikus hossza a bagodi körtemplom méreteiből

Méret leírása	jele	hossz [m]	közép- hiba [m]	egység [db]	láb [cm]	súly
Szentély külső sugara (5 pontból)	$r1$	2.590	0.001	8	32.4	0.5
Szentély belső sugara (8 pontból)	$r2$	1.784	0.002	5.5	32.4	0.5
Hajó külső sugara (16 pontból)	$R1$	4.137	0.001	13	31.8	2
Hajó lábazat sugara (24 pontból)	$R3$	4.312	0.002	13.5	31.9	2
Hajó belső sugara (13 pontból)	$R2$	2.566	0.001	8	32.1	2
Ülőfülke sugara (6 pontból)	$R4$	2.880	0.061	9	32.0	0.5
Hajó falvastagság	$F$	1.571	0.001	5	31.4	1
Szentély falvastagság	$f$	0.806	0.002	2.5	32.2	1
Külső hossz	$K$	10.171		32	31.8	0.5
Belső hossz	$B$	7.790		24.5	31.8	0.5
Lizéna szélesség (12 db)		0.485	0.004	1.5	32.3	1
Lizéna köz (12 db)		0.643	0.004	2	32.2	1
Ülőfülkék mélysége ( $R4-R2$ )		0.314	0.061	1	31.4	0.5

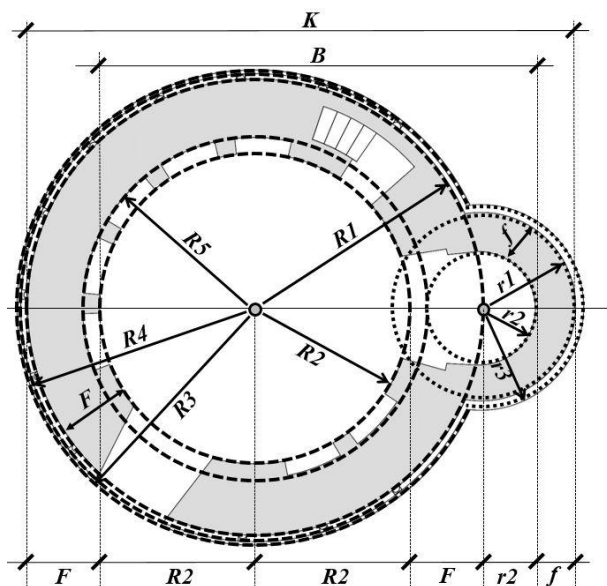
### 5 A hosszegység rekonstrukciója a kallódsi körtemplom méreteiből

Kallósd kis zsákfalú Zala megyében. 1263-ban már említik plébániatemplomát, amely keletelt (keleti tájolású), téglafalazatú körtemplom, patkóíves szentéllyel (3. ábra). A templomot kívülről félkörös oszlopok (lizénák) tagolják. Belül az északi oldalon öt ülőfülke található, míg a déli oldalon kettő. A török időkben pusztulásnak indult templomot 1740-ben renoválták, majd az 1880-as években előcsarnokot építettek hozzá. Ezen előcsarnokot később elbontották; a legutóbbi műemléki felújítás 1993-ban volt (Káldi 1995).



3. ábra. A kallódsi körtemplom kívülről, belülről és mikrohálózatának meghatározási vázlata

A részletes felmérés alapjául szolgáló irány- és távméréses, kényszerközpontosan mért hálózat öt pontból áll. A hálózat relatív hibája 1/110000, a távolságjavítások 2 mm alattiak, az irányjavítások nem haladják meg a 7 másodpercet. A szabadhálózati kiegyenlítés után olyan egybevágósági transzformációt végeztünk, hogy a hajó és a szentély középpontjai jelöljék ki az  $y$  tengelyt; ezzel kívántuk elérni a feltételezett tervezéskori rajzi állapotot.



4. ábra. A kallódsi körtemplom kiegyenlítő köreinek jelölése

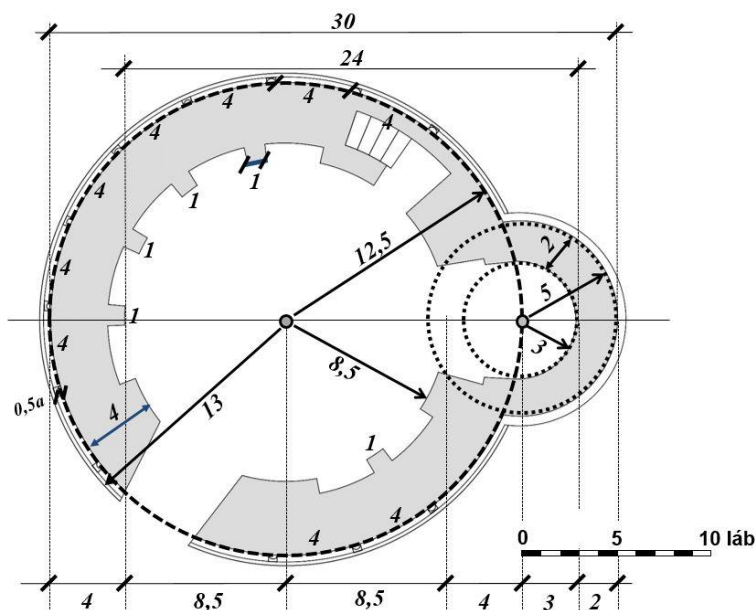
4. táblázat. A kallódsi körtemplom kiegyenlítő köreinek adatai méterben

kör leírása	jele	y	x	r	$m_y$	$m_x$	$m_r$
Hajó külső fal	R1	249.949	149.751	3.937	0.004	0.005	0.003
Hajó belső fal fent	R2	249.917	149.733	2.671	0.004	0.005	0.003
Hajó belső fal lent	R2	249.922	149.726	2.681	0.003	0.003	0.002
Hajó lábázat	R3	249.928	149.743	4.100	0.004	0.004	0.003
Lizéna	R4	249.930	149.742	4.038	0.003	0.003	0.002
Ülőke	R5	249.906	149.733	2.946	0.002	0.002	0.001
Szentély külső fal	r1	253.820	149.758	1.627	0.003	0.008	0.006
Szentély belső fal	r2	253.773	149.729	0.980	0.008	0.017	0.012
Szentély lábázat	r3	253.812	149.745	1.775	0.008	0.016	0.010

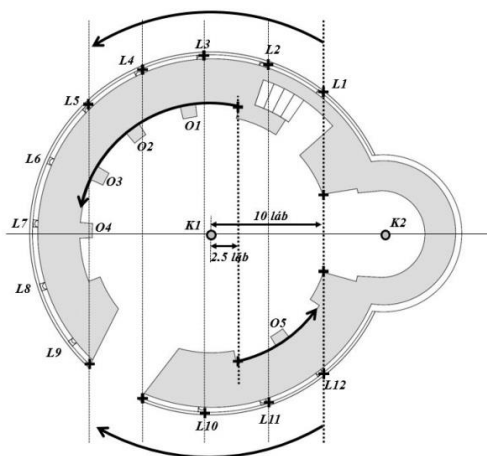
A részletmérés során a templomhajón 5 kört azonosítottunk (4. ábra), illetve mértünk (a már ismertetett kártyás módszerrel): a hajó falazat külső és belső körét (R1 és R2 sugárral), a lábázat körét (R3), a lizénák sarkaira illeszkedő kört (R4) valamint az ülőfülkék belső falfelületének körét (R5). A szentély esetében három kör különíthető el: a külső és belső falazaté (r1, r2) valamint a lábázaté (r3). A hajó belső falát két magasságban is mértük. A hajó-körök sugarainak középpontjai nem haladják meg a 3 mm-t, ami az egykori kitérés és kivitelezés nagy pontosságát jelzi (4. táblázat). A kör-középpontok koordinátái 4 cm-en belül egyeznek egymással, ami szintén a kivitelezés egységére, a középpontok egykori fix kijelölésére utal. Az alaprajz szerkesztése után a következő szabályosságok figyelhetők meg:

- A szentély középpontja a hajó külső falazatának körívére illeszkedik.
- Az ülőfülkék köre és a szentély belső köre érintő helyzetű.
- A szentély falvastagsága feleakkora, mint a hajóé ( $f=F/2$ ).
- A lizénák oszlopköze egyenlő és megegyezik a hajó falvastagságával.

Ezután a főbb méreteket a királyi láb vagy arasz egész számú többszörösével próbáltuk megfeleltetni. A körök sugarai a királyi láb többszöröse a következők szerint: a szentély falának két sugara 3 illetve 5 láb; a hajó falának két sugara 8.5 illetve 12.5 láb, míg a lábázaté kerekén 13 láb. A templom teljes belső hossza 24 láb, míg a teljes külső hossz 30 láb, ami 3 királyi ölnek felel meg (5. ábra).



5. ábra. A kallósi körtemplom méretei királyi lábban

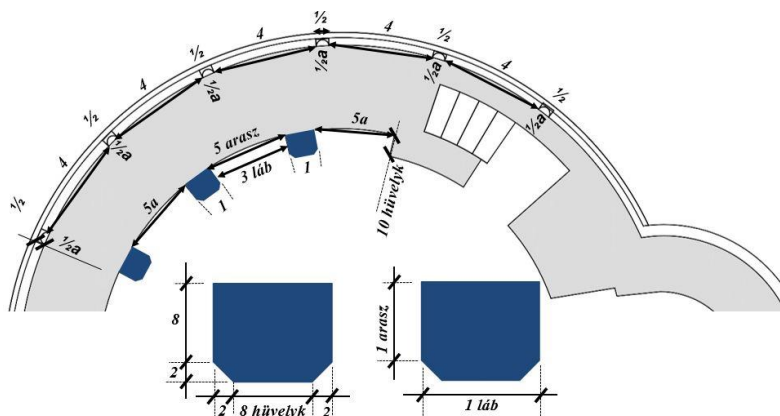


6. ábra. A kallósi körtemplom lizénáinak és ülőfülkéinek kijelölése

Érdekes eredményre vezetett a lizéna méretének és elhelyezésének vizsgálata. Összesen 12 lizéna található a külső falon, 9 a bejáratától balra, 3 a bejáratától jobbra helyezkedik el (6. ábra). A szentélyhez legközelebb eső lizéna a templom keleti tengelyére merőleges egyenesen vannak, és ahol ez az egyenes metszi a hajó belső falának körét, onnan indul a szentély falazata is. Ez az egyenes éppen 10 lábba helyezkedik el a hajó középpontjától. Ebből arra következtethetünk, hogy a lizéna kijelölése (tervezése és kitűzése) pontosan így indult az északi részen és a déli részen. A lizéna közel egyforma távolságra, 1.267 méterre vannak egymástól (10 lizéna köz. átlagából), ez éppen 4 lábba felel meg; kijelölésük valószínűleg húrhosszak lemérésével történt.

Külön vizsgáltuk a lizéna méretét, azaz vastagságát és szélességét. A lizéna vastagsága egyedileg, mérőszalaggal is jól mérhető, de pontosabb eredményt kapunk, ha ezt két kör sugarának különbségeként számítjuk. Mértük ugyanis a lizéna sarkaira illeszkedő kört (a 12 lizéna összesen 24 pontját, a körsugár  $R4$ ) és a külső falzat körét ( $R1$ ). A sugarak különbsége 0.101 méter, ami azonban nem feleltethető meg a láb-egységnek, viszont kifejezhető araszban: fél araszba felel meg. A 12 lizéna átlagos szélessége 15.5 cm, ami pedig fél lábba felel meg (7. ábra).

Összesen hét ülőfülke található a templomban (öt az északi oldalon, kettő a délin), ezeket öt oszlop választja el egymástól. Az öt oszlop szélességi méretének átlaga (mérőszalaggal mérve, az oszlopok oldalfalához kemény lapot illesztve, mert sarkaik vágottak) 31.4 cm, ami éppen 1 lábnak feleltethető meg, vagy 12 hüvelyknek. Az oszlopok sugárirányú hossza két kör sugarának különbségéből számítható ( $R5-R2$ ), ami 0.265 méter, ez 10 hüvelyknek felel meg. Az oszlopok sarka 2-2 hüvelyk nagyságban metszett. Ha az oszlopok mélységét mérjük (a metszett saroktól a falig), akkor azt 1 arasznyinak találjuk.



7. ábra. A lizénák és ülőfülkék feltételezett méretei, az oszlopok két változatban

5. táblázat. A királyi láb metrikus hossza a kallósi körtemplom méreteiből

Méret leírása	jele	hossz [m]	középhiba [m]	egység [db]	láb [cm]	súly
Hajó belső sugara (20 pontból)	$R2$	2.671	0.003	8.5	31.4	3
Hajó külső sugara (25 pontból)	$R1$	3.937	0.003	12.5	31.5	3
Szentély belső sugara (6 pontból)	$r2$	0.980	0.012	3	32.7	1
Szentély külső sugara (8 pontból)	$r1$	1.627	0.006	5	32.5	2
Külső hossz ( $2R1+r1$ )	$K$	9.501	0.008	30	31.7	2
Belső hossz ( $2R2+F+r2$ )	$B$	7.588	0.019	24	31.6	2
Hajó falvastagsága ( $R1-R2$ )	$F$	1.266	0.005	4	31.6	2
Szentély falvastagsága ( $r1-r2$ )	$f$	0.647	0.014	2	32.4	1
Lizénák szélessége (12 db)		0.155	0.002	0.5	31.0	1
Lizénák távolsága (10)		1.267	0.003	4	31.7	1
Lizénák vastagsága ( $2 \times 12$ )		0.101	0.004	0.3125	32.3	1
Oszlopok szélessége (5 db)		0.314	0.002	1	31.4	1

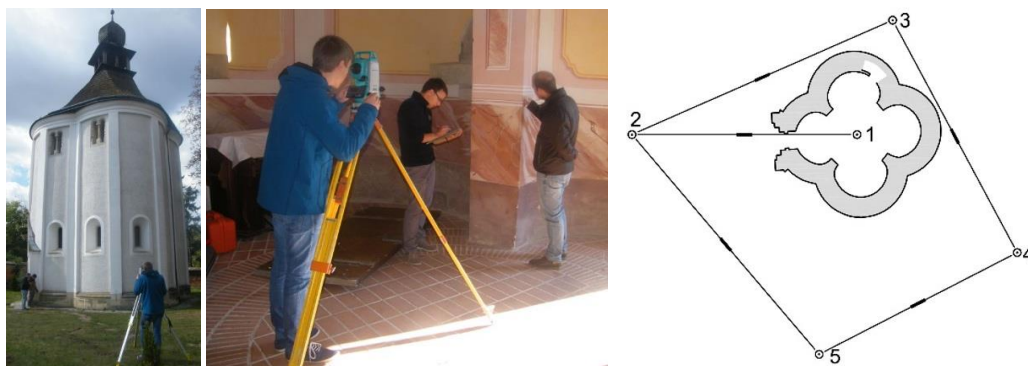
Az oszlop-közöket húrhosszként értelmeztük, de ezek mérhetők az  $R5$  sugarú ülőfülke-kör mentén is és belső fal ( $R2$ ) kerülete mentén is. Az  $R5$  kör mentén a húrhosszak átlaga 0.990 méter, ami 5 arasz lehetne. Az  $R2$  kör mentén a húrhosszak átlaga 0.901 méter, ez nem feleltethető meg kerek egységnek, csak akkor, ha az oszlopok középvonalában mérnénk (akkor 3 láb lehetne). A kétségek elosztatásához falkutatásra lenne szükség, például annak megállapításához, hogy az oszlopok falazásához használtak-e speciális méretű téglát. Ez azért merült fel bennünk, mert a félkör alakú lizénák falazásához (kívülről is láthatóan) speciális alakú téglát használtak, akkor ez miért ne történhetett volna az oszlopok esetében is (ami indokolná a sarkok csapott végét is). Mivel ezek a kérdések még tisztázásra várnak és többféle megfeleltetés is lehetséges, az ülőfülkékre vonatkozó méreteket végül nem vontuk be a számításba.

Utolsó lépésként következik a „visszaszámítás”, azaz a méterben adott méret elosztása az alaprajzon szereplő egykori hosszegység darabszámával (5. táblázat). Az araszban adott értékeknél figyelembe kell venni az arasz-láb váltószámot, ami 1.6.

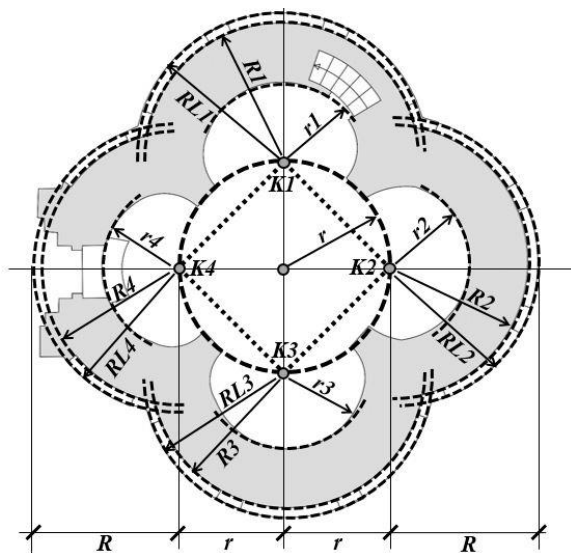
Végeredményként a kallósi körtemplom esetében azt kaptuk, hogy a királyi láb hossza 31.75 cm (súlyozott átlagként), ennek szórása pedig 0.5 cm.

## 6 A hosszegység rekonstrukciója a jáki négykaréjos kápolna méreteiből

Ják méltán híres 1256-ban felszentelt apátsági templomáról. Ezt megelőzően azonban egy körtemploma is volt a településnek, amelyet csak 1991-ben tártak fel (a szerzetesi templom nem működhetett plébániaként, ezért volt külön plébániatemploma a falunak). Ennek a körtemplomnak a helyén épült fel 1250 körül a Szent Jakab tiszteletére szentelt négykaréjos kápolna, ami vizsgálatunk tárgya.



8. ábra. A jáki Szent Jakab kápolna kívülről, belülről és mikrohálózatának meghatározási vázlata



9. ábra. A jáki Szent Jakab kápolna köreinek jelölése

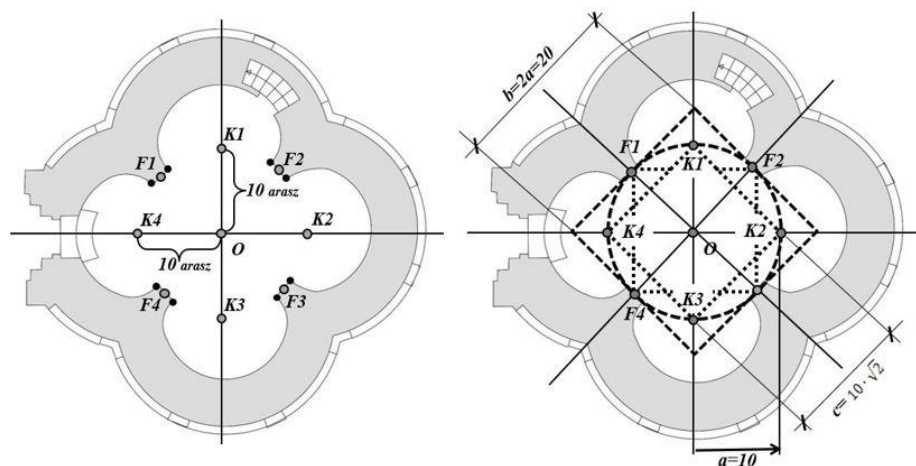
A részletes felméréséhez egy öt álláspontból álló mikrohálózatot hoztunk létre (8. ábra), melyből egy pont a kápolna belsejében, négy pedig az épületen kívül helyezkedett el. Ahogyan a többi felmérés esetében, itt is először a szomszédos álláspontokra mértünk, majd ugyanazon limbuszállásban történt a részletpontok bemérése. Az álláspontok között a prizma és a műszer cseréje ez esetben kényszerközpontosan történt. Az alaprajzi szerkesztéshez először kiegyenlítő köröket számítottunk (9. ábra). Egy-egy karéj esetében három-három körsugár és középpont számítható: a lábazaté ( $RL$ ), a külső falazaté ( $R$ ) és a belső falazaté ( $r$ ). A körök középpontjainak koordinátái 2 centiméteren belül egyeznek, ami a kitzés és kivitelezés precíz megoldására utal.

6. táblázat. A jáki négykaréjos kápolna kiegyenlítő köreinek adatai méterben

kör leírása	jele	y	x	r	$m_y$	$m_x$	$m_r$
1 belső fal	$r1$	499.850	202.025	1.492	0.010	0.019	0.009
1 külső fal	$R1$	499.852	202.009	2.620	0.002	0.007	0.002
1 külső lábazat	$RL1$	499.848	202.014	2.815	0.002	0.005	0.001
2 belső fal	$r2$	502.046	200.183	1.501	0.012	0.002	0.005
2 külső fal	$R2$	502.049	200.210	2.603	0.007	0.002	0.002
2 külső lábazat	$RL2$	502.076	200.217	2.799	0.011	0.004	0.002
3 belső fal	$r3$	500.208	198.014	1.487	0.003	0.007	0.003
3 külső fal	$R3$	500.197	198.015	2.607	0.003	0.009	0.003
3 külső lábazat	$RL3$	500.219	197.988	2.795	0.005	0.011	0.002
4 belső fal	$r4$	498.078	199.844	1.515	0.032	0.008	0.030
4 külső fal	$R4$	498.050	199.843	2.608	0.035	0.006	0.012
4 külső lábazat	$RL4$	498.055	199.861	2.803	0.027	0.007	0.005

Az egyes karéjok megfelelő köreinek sugarai is gyakorlatilag azonosnak tekinthetők, 1-2 cm eltérést tapasztalunk csupán. A körsugarak középhibái is meglepően kicsik, a lábazaté és külső köröké 3 mm alattiak, a belső köröké kicsivel nagyobbak. Kivételt képeznek a 4-es számú karéj-körök, ami érthető, hiszen itt helyezkedik el a bejárat, ami miatt sokkal kevesebb pont volt mérhető (6. táblázat).

Ezután a sugarak méterbeli értékeiből a láb illetve az arasz hivatalos méterbeli hossza alapján egész/feles számú értékeket próbáltunk kinyerni. Kiderült, hogy a jáki kápolna tervezése és építése nem láb, hanem arasz egységben történt. A lábazat sugara mindegyik karéj esetében 14 arasz, a külső falazaté 13 arasz, a belső ívé 7 és fél arasz, a feleltethető meg (12. ábra).

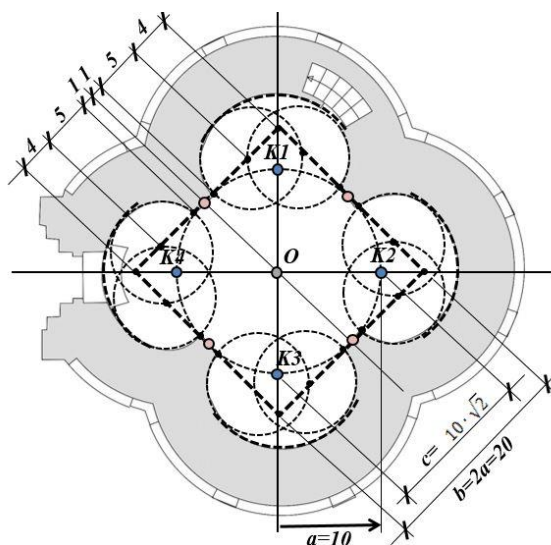


10. ábra. A jáki Szent Jakab kápolna alapköre és szabályossága

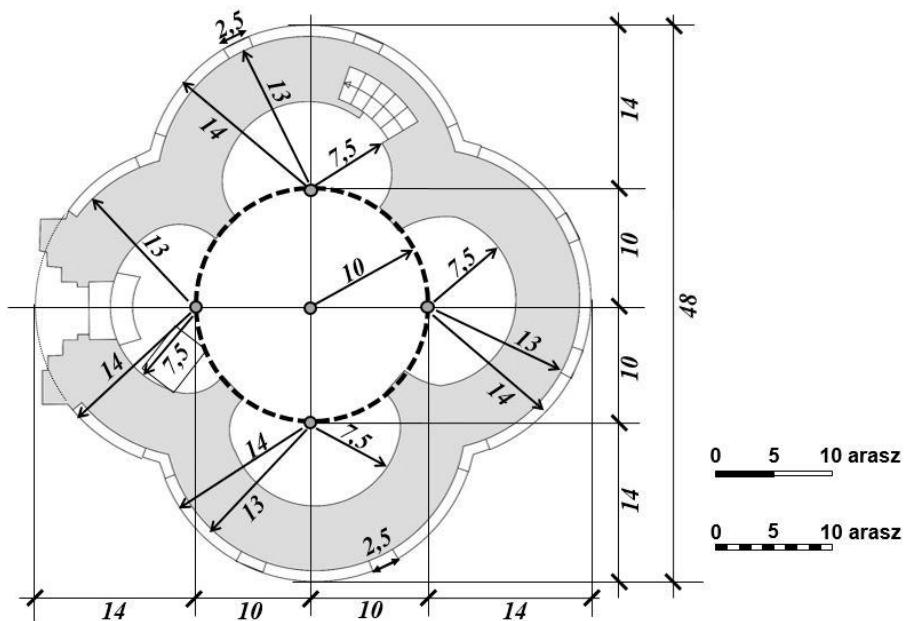
Az alaprajz szerkesztése során további szabályosságok is megfigyelhetők (10. ábra):

- Az egyes karéjok középpontjai ( $K1$ ,  $K2$ ,  $K3$ ,  $K4$ ) is egy körön helyezkednek el (nevezzük ezt alapkörnek); ennek az alapkörnek a sugara kerekén 10 arasz.
- A karéjok falvégződése ( $F1$ ,  $F2$ ,  $F3$ ,  $F4$ ) is az alapkörön helyezkednek el.
- A K és F pontok szimmetrikusan, 45 fokként követik egymást az alapkörön.
- A belső karéjok geometriailag nem szabályos körök, hanem egy-egy félkör végéhez kapcsolódó, kisebb sugarú ívekből tevődnek össze. Ha vizsgáljuk ezeket a kisebb íveket, akkor a 11. ábrán látható szabályosságot figyelhetjük meg.

- A karéjok falvégződése (F pontok) és a belső karéjok kisebb íveinek középpontjai az alapkör köré írható négyzet oldalain helyezkednek el, araszban megadható szabályos kiosztásban (11. ábra).
- A külső falazatot díszítő lizénák egyforma távolságra, szimmetrikusan helyezkednek el, a szélességük két és fél araszra felel meg.
- A kápolna teljes hossza mindkét (É-D és K-Ny) irányban azonosnak vehető; araszban kifejezve ez 48 araszra felel meg, királyi ölben kifejezve pedig kerekén 3 ölnek.



11. ábra. A jáki Szent Jakab kápolna belső körívének szerkesztése (arasz egységben)



12. ábra. A jáki Szent Jakab kápolna méretei királyi araszban



7. táblázat. A királyi arasz metrikus hossza a jáki négykaréjos kápolna méreteiből

Méret leírása	jele	hossz [m]	közép-hiba [m]	egység [db]	arasz [cm]	súly
1 belső fal sugár (8 pontból)	<i>r1</i>	1.492	0.009	7.5	19.9	1
1 külső fal sugár (12 pontból)	<i>R1</i>	2.620	0.002	13	20.2	2
1 lábazat sugár (16 pontból)	<i>RL1</i>	2.815	0.001	14	20.1	2
2 belső fal sugár (6 pontból)	<i>r2</i>	1.501	0.005	7.5	20.0	1
2 külső fal sugár (11 pontból)	<i>R2</i>	2.603	0.002	13	20.0	2
2 lábazat sugár (16 pontból)	<i>RL2</i>	2.799	0.002	14	20.0	2
3 belső fal sugár (6 pontból)	<i>r3</i>	1.487	0.003	7.5	19.8	1
3 külső fal sugár (13 pontból)	<i>R3</i>	2.607	0.003	13	20.1	2
3 lábazat sugár (17 pontból)	<i>RL3</i>	2.795	0.002	14	20.0	2
4 belső fal sugár (6 pontból)	<i>r4</i>	1.515	0.030	7.5	20.2	1
4 külső fal sugár (7 pontból)	<i>R4</i>	2.608	0.012	13	20.1	2
4 lábazat sugár (11 pontból)	<i>RL4</i>	2.803	0.005	14	20.0	2
külső hossz (K-Ny)	<i>K (K)</i>	9.613		48	20.0	2
külső hossz (É-D)	<i>K (É)</i>	9.633		48	20.1	2

A jáki négykaréjos kápolna méreteiből az arasz hossza súlyozott átlagként 20.03 cm-nek adódik, amelynek szórása 0.13 cm (7. táblázat). Mivel a korábbi épületek esetében a láb váltószámát adtuk meg, az előbbi értéket 1.6-del meg kell szorozni, hogy a láb metrikus értékét kapjuk meg. Ez esetünkben 32.05 cm.

## 7 Összefoglalás

Bár a középkori magyar hossz mérték etalonja, a királyi öl nem maradt fenn, de vizsgálataink alapján úgy gondoljuk, annak hossza utólag is meghatározható. Alapos okunk van feltételezni ugyanis, hogy a korabeli épületeket is terv szerint építették meg, az egykori mértékegységek felhasználásával, a méreteket egész számú mértékegységben kifejezve.

8. táblázat. A középkori magyar hossz mértékegységek méter-rendszerbeli pontosított értékei

középkori egység	metrikus egység
1 öl	3.186 méter
1 lépés	0.956 méter
1 rőf	63.7 centiméter
1 arasz	19.9 centiméter
1 láb	31.9 centiméter
1 tenyér	8.0 centiméter
1 hüvelyk	2.66 centiméter
1 ujj	1.99 centiméter

Ha megfelelő épületet és megfelelő felmérési technológiát választunk és az épület egykori kivitelezése is kellő pontossággal történt, akkor az építészeti mértékegység is kideríthető, és hossza a mai méter egységben kifejezhető. Az egész Kárpát-medencében elterjedt középkori körtemplomok különösen alkalmasak ilyen vizsgálat céljára.

Ebben a cikkben három körtemplom alaprajzának szabatos geodéziai felmérése alapján határoztuk meg az építészeti használt királyi láb illetve királyi arasz hosszát. Ezen méretekből a királyi öl hosszára a következő váltószámokat kapjuk: a bagodi körtemplom méreteiből 3.196 méter; a kallósi körtemplom méreteiből 3.175 méter; a jáki kápolna méreteiből 3.205 méter. Két további középkori épület szabatos felmérését is elvégeztük; méreteik elemzése külön tanulmányban szerepel (Busics 2019). A tarnaszentmáriai templom méreteiből a királyi öl hossza 3.170 méter, a fehérvári Szent Anna kápolnáéból pedig 3.184 méter. Az öt középkori épület méreteiből számtani átlagként 3.186 métert kapunk a királyi öl hosszára, ami a korábról ismert váltószám (3.126 méter) pontosí-

tásának tekinthető. Ennek alapján, az 1. táblázat felhasználásával, most már minden középkori hosszegység méterbeli értékét is megadhatjuk (8. táblázat).

Úgy gondoljuk, hogy a királyi öl épüleméretekből történő rekonstrukciója a mi szakmánk, a geodézia hozzájárulása múltunk jobb megismeréséhez. Feltétlenül geodéziai módszerek szükségessége ahhoz, hogy a felmérést és kiértékelést a kellő pontossággal végezzük el.

Az eredményeket az építészettörténet, az építészek is hasznosíthatják, ha a középkori építmények alaprajzát az egykori hossz mértékegységben is megjelenítik, mert így a szerkesztés és építés további szabályossága mutatható ki, valamint maga az építési folyamat is jobban rekonstruálható. A metrológia hazai története szempontjából is fontos, hogy a középkori hosszaton értékét pontosabban ismerjük, mint korábban. Végül Székesfehérvár története szempontjából is van jelentősége a királyi öl pontosításának, hiszen annak etalonját a nemzet történelmi fővárosában, a fehérvári királyi bazilikához tartozó prépostságban őrizték.

### Hivatkozások

- Bogdán I** (1978): Magyarországi hossz- és földmértékek a XVI. század végéig. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1978. (A Magyar Országos Levéltár kiadványai IV. Levéltartan és történelmi forrástudományok 3.) 388.
- Busics Gy** (2016): A középkori magyar templomok méretei és a királyi öl kapcsolata. Geodézia és Kartográfia, 1-2, 7-12.
- Busics Gy** (2019): Az egykor Székesfehérváron őrzött királyi öl rekonstrukciója. Tanulmány a Lánosz-Szekfü Ösztöndíj Alapítvány támogatásával. Székesfehérvár. 146.
- Busics Gy, Páli M, Tóth S** (2016): Az egykori királyi hosszegység meghatározása két megmaradt középkori templom méretei alapján. Geodézia és Kartográfia, 3-4, 7-12.
- Csepregi Sz, Kádár I, Papp E** (1987): A kiegyenlítő kör meghatározása lineáris közvetítő egyenlettel. Geodézia és Kartográfia, 1, 43-48.
- Fleck A** (1988): A királyi mértékről egy könyvészeti jubileum alkalmából. Geodézia és Kartográfia, 1988(2), 53-56.
- Káldi Gy** (1995): A kallósi temetőkapolna helyreállítása, Műemlékvédelem, 1, 3-11.
- Káldi Gy** (2002): A bagodvitenyéd-szentpáli római katolikus temetőkapolna műemléki helyreállítása, illetve néhány adalék annak építéstörténetéhez. Műemlékvédelem, 5, 279-286.
- Kralovánzky A** (1983): The Earliest Church of Alba Civitas. Alba Regia, 20., 75-88.
- Szilágyi A** (2008): A Kárpát-medence Árpád-kori rotundái és centrális templomai. Semmelweis Kiadó, Budapest, 307.